

# Berechnung von Einzugsbereichen mit Hilfe von Einschrittverfahren höherer Ordnung

Diplomarbeit  
von  
Christine Schweinem

eingereicht am  
Fachbereich Mathematik  
der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main

24. Juli 2003



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Vorbereitungen und Voraussetzungen</b>	<b>5</b>
1.1 Die dynamischen Systeme . . . . .	5
<i>Das zeitkontinuierliche System</i> . . . . .	5
<i>Bedingungen an das zeitkontinuierliche System</i> . . . . .	9
<i>Das zeitdiskrete System</i> . . . . .	9
<i>Bedingungen an das zeitdiskrete System</i> . . . . .	11
<i>Weitere Bezeichnungen</i> . . . . .	12
1.2 Normen, Mengen, Abstände und Vergleichsfunktionen . . . . .	12
<b>2 Attrahierende Mengen und Einzugsbereiche</b>	<b>17</b>
2.1 Starke dynamische Konzepte . . . . .	17
<i>Attrahierende Mengen</i> . . . . .	18
<i>Robustheit</i> . . . . .	19
<i>Kontrahierende Familien</i> . . . . .	21
<i>Lyapunov-Funktionen</i> . . . . .	25
<i>Aufgeblasene Systeme</i> . . . . .	27
2.2 Schwache dynamische Konzepte . . . . .	29
<i>Attrahierende Mengen</i> . . . . .	30

	<i>Robustheit</i> . . . . .	32
	<i>Kontrahierbare Familien</i> . . . . .	33
	<i>Lyapunov-Funktionen</i> . . . . .	35
	<i>Aufgeblasene Systeme</i> . . . . .	39
2.3	Einzugsbereiche . . . . .	39
	<i>Robustheit</i> . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Berechnung von Einzugsbereichen</b>	<b>43</b>
3.1	Diskretisierung des Zustandsraums . . . . .	43
	<i>Attrahierende Mengen von Zustandsraumdiskretisierungen</i> . . . . .	47
3.2	Der Unterteilungsalgorithmus . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Einschrittverfahren höherer Ordnung</b>	<b>63</b>
4.1	Kontroll-affine Differentialgleichungen . . . . .	63
4.2	Ein anschauliches Beispiel . . . . .	64
4.3	Notationen mit Multi-Indizes . . . . .	66
4.4	Taylor-Entwicklungen . . . . .	69
4.5	Taylor-Verfahren . . . . .	70
	<i>Vereinfachungen durch additive oder kommutative Kontrolle</i> . . . . .	74
	<i>Ableitungsfreie Schemata</i> . . . . .	75
4.6	Näherung mehrfacher Kontrollintegrale . . . . .	76
	<i>Mehrfache Kontrollintegrale zu einem einzelnen Kontrollvektor</i> . . . . .	76
	<i>Die Menge aller möglichen mehrfachen Kontrollintegrale</i> . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Implementierung und numerische Beispiele</b>	<b>79</b>
5.1	Implementierung . . . . .	79
	<i>Unterteilungsalgorithmus</i> . . . . .	80
	<i>Taylor-Verfahren</i> . . . . .	80
5.2	Numerische Beispiele . . . . .	81
	<i>Einfaches Beispiel</i> . . . . .	82
	<i>Chemische Reaktion</i> . . . . .	96
	<i>Diskussion der Ergebnisse</i> . . . . .	104

<b>A Quellcode der Taylor-Verfahren</b>	<b>105</b>
A.1 Globale Variablen – Modul <code>globvar.c</code> . . . . .	105
A.2 Präprozessor-Anweisungen – Header-Datei <code>defs.h</code> . . . . .	106
A.3 Taylor-Verfahren – Modul <code>taylor.c</code> . . . . .	106
A.4 Hilfsfunktionen – Modul <code>taylor_utils.c</code> . . . . .	111
<b>Notation</b>	<b>115</b>
<b>Literatur</b>	<b>119</b>
<b>Index</b>	<b>120</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	$\delta$ -nichtvorausschauende Abbildung . . . . .	7
1.2	nichtvorausschauende Abbildung . . . . .	7
1.3	Berechnung von Werten von $\varphi(t, x_0, u, 0)$ mit Hilfe von $\varphi_0^h(x, u(ih + \cdot))$ . . . . .	10
1.4	Abstände . . . . .	14
1.5	Abbildungen aus den Klassen $\mathcal{K}$ , $\mathcal{K}_\infty$ und $\mathcal{L}$ . . . . .	15
1.6	Die Abbildung $\mu(r, \cdot)$ , $\mu \in \mathcal{KLD}$ . . . . .	16
3.1	Voraussetzungen und Ergebnismengen des Satzes 3.2.5 . . . . .	53
3.2	Verschiedene Mengen im Beweis von Punkt (i) des Satzes 3.2.5 . . . . .	56
3.3	Verschiedene Mengen im Beweis von Punkt (ii) des Satzes 3.2.5 . . . . .	57
3.4	Verschiedene Mengen im Beweis von Satz 3.2.7 . . . . .	59
5.1	Die verwendeten Polarkoordinaten: $r = \ x\ $ , $x_1/r = \cos \theta$ , $x_2/r = \sin \theta$ . . . . .	82
5.2	Einige Trajektorien von (5.1) für Anfangswertepaare innerhalb des Einheitskreises und $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	83
5.3	Einige Trajektorien von (5.1) für Anfangswertepaare außerhalb des Einheitskreises und $t \in [0, 2]$ . . . . .	84
5.4	Die verwendeten 10 Kontrollwerte $u$ auf dem Einheitskreis . . . . .	86
5.5	Der Rand des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels berechnet mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle nach jeweils 0, 1, 2 und 3 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus . . . . .	88
5.6	Der Rand des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels berechnet mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle nach jeweils 4, 6, 8 und 20 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus . . . . .	89

5.7	Die Zellüberdeckung $\mathcal{Q}^0$ mit der Zielmenge $\mathcal{S}$ (links) und alle Zellen nach 20 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus (rechts) . . . . .	90
5.8	Der Fehler des Unterteilungsalgorithmus bei der Berechnung des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels abhängig von der Schrittweite $h$ der verwendeten Taylor-Verfahren . . . . .	91
5.9	Die Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus abhängig von $h$ . . . . .	92
5.10	Der Fehler des Unterteilungsalgorithmus bei der Verwendung des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle . . . . .	94
5.11	Die Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus bei der Verwendung des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle . . . . .	95
5.12	Ein kleiner Rührkessel . . . . .	96
5.13	Angenäherte Gleichgewichte und das Vektorfeld der chemischen Reaktion für $\alpha = 0.05$ , $B = 10$ , $x_c = 1$ und $u = 0.9$ (links) bzw. $u = 1.0$ (rechts) . . .	97
5.14	Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und $P = 10$ nach jeweils 0, 1, 2 und 4 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus . . . . .	100
5.15	Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und $P = 10$ nach jeweils 6 und 13 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus . . . . .	101
5.16	Die Zellüberdeckung $\mathcal{Q}^0$ mit der Zielmenge $\mathcal{S}$ (links) und alle Zellen nach 13 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus (rechts) . . . . .	101
5.17	Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe verschiedener Taylor-Verfahren . . . . .	102
5.18	Die drei Einzugsbereiche aus der vorhergehenden Abb. 5.17 . . . . .	103



# Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften dynamischer Systeme, die in Form von autonomen Differentialgleichungen vorliegen. Genauer: Das Langzeitverhalten dieser dynamischen Systeme soll untersucht werden. Es läßt sich beschreiben durch für das jeweilige System charakteristische Mengen, die *attrahierenden Mengen* und deren *Einzugsbereiche*. Attrahierende Mengen sind bezüglich eines dynamischen Systems invariante Mengen, die Trajektorien des dynamischen Systems, die in ihrer Umgebung starten, anziehen. Der Einzugsbereich einer attrahierenden Menge ist die Menge aller Punkte, die von der attrahierenden Menge angezogen werden.

Betrachtet werden Systeme, die von einer *Eingangsfunktion* abhängen. Diese Eingangsfunktion kann je nach Zusammenhang eine *Störung* des dynamischen Systems oder eine *Kontrolle* desselben darstellen. Werden Störungen betrachtet, so sind Eigenschaften des dynamischen Systems, die für alle Eingangsfunktionen gelten, zu untersuchen. Diese werden in dieser Arbeit als *starke Eigenschaften* bezeichnet. Werden Kontrollen betrachtet, sind Eigenschaften des dynamischen Systems, die nur für mindestens eine Eingangsfunktion erfüllt sind, zu untersuchen. Sie werden hier als *schwache Eigenschaften* bezeichnet. Man betrachte beispielsweise einen Punkt, der zu einer invarianten Menge gehört. Zu jeder Eingangsfunktion gibt es eine zugehörige Trajektorie, die an diesem Punkt startet. Starke Invarianz bedeutet, daß keine dieser Trajektorien jemals die invariante Menge verläßt, schwache Invarianz, daß mindestens eine dieser Trajektorien niemals die invariante Menge verläßt.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung der schwachen Einzugsbereiche. Sie lassen sich nur in Ausnahmefällen durch theoretische Überlegungen finden. Daher ist es von Nutzen, diese Mengen numerisch zu berechnen. Hier soll deshalb die benötigte Theorie bereitgestellt werden, um schwache Einzugsbereiche mit einem *Unterteilungsalgorithmus* anzunähern. Ein Unterteilungsalgorithmus dient allgemein dazu, innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge eine Menge, die eine bestimmte Eigenschaft hat, zu finden. Die Idee eines solchen Algorithmus ist es einfach, die Grundmenge in „Zellen“ zu unterteilen und für jede dieser Zellen zu prüfen, ob sie ganz, gar nicht oder teilweise zur gesuchten Menge gehört. Gehört eine Zelle nur teilweise zur gesuchten Menge, so wird sie weiter unterteilt und für die „Teilzellen“ erneut entschieden, ob sie zur gesuchten Menge gehören. Für die Berechnung eines schwachen Einzugsbereiches bedeutet dies, daß für jede Zelle überprüft werden muß, ob es eine Kontrollfunktion gibt, mit deren Hilfe Trajektorien der betrachteten Differentialgleichung, die innerhalb der Zelle starten, in eine gegebene schwach attrahierende Menge (bzw. in eine passend gewählte Umgebung dieser Menge) gesteuert werden können.

Die für diese Überprüfung der Zellen benötigten Trajektorien müssen i. a. ebenfalls numerisch berechnet werden. Von besonderem Interesse ist dabei, wie sich Näherungsverfahren unterschiedlicher Güte auf den Unterteilungsalgorithmus auswirken. Daher wird in dieser Arbeit auch auf die Konstruktion von *Einschrittverfahren höherer Ordnung* zur Näherung von Trajektorien kontroll-affiner Differentialgleichungen eingegangen. Durch eine Taylor-Entwicklung der zu einer solchen Differentialgleichung gehörigen Integralgleichung lassen sich Einschrittverfahren beliebiger Ordnung herleiten, die *Taylor-Verfahren*.

Nach der Einführung und der theoretischen Untersuchung des Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung schwacher Einzugsbereiche und der Taylor-Verfahren zur Berechnung von Trajektorien soll hier über deren gemeinsame Erprobung an zwei Beispielen in der Praxis berichtet werden. Der schwache Einzugsbereich des ersten Beispiels ist bekannt und von einfacher Gestalt. Dieses Beispiel dient dazu, den Einfluß der Wahl unterschiedlicher Taylor-Verfahren auf den Unterteilungsalgorithmus zu überprüfen. Das zweite Beispiel kommt aus der Chemie; es beschreibt eine exotherme Reaktion. Für diese lassen sich schwache Einzugsbereiche nicht durch theoretische Überlegungen finden. Die Berechnung eines Einzugsbereiches dieses Beispiels schließt diese Arbeit ab.

Die *Grundlagen* für den *theoretischen Teil* der vorliegenden Arbeit bilden im wesentlichen das Buch *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization* von Lars Grüne [Gr 02] und der Artikel *Higher order numerical schemes for affinely controlled nonlinear systems* von Lars Grüne und Peter E. Kloeden [Gr/Kl 01]. Das Buch [Gr 02] beschäftigt sich mit der Diskretisierung starker und schwacher attrahierender Mengen und deren Einzugsbereiche. Der Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung schwacher Einzugsbereiche, der hier vorgestellt wird, sowie Beweise von dessen Konvergenz unter verschiedenen Bedingungen finden sich dort. Der Artikel [Gr/Kl 01] beschreibt die Konstruktion der Taylor-Verfahren zur Näherung von Trajektorien kontroll-affiner Differentialgleichungen.

Für den *praktischen Teil* wird eine Implementierung des Unterteilungsalgorithmus von Lars Grüne verwendet, mit der attrahierende Mengen und Einzugsbereiche berechnet werden können. Bisher standen in dieser Implementierung zur Näherung von Trajektorien das Euler-Verfahren sowie ein Extrapolations-Verfahren zur Verfügung; beide Verfahren nutzen konstante Eingangsfunktionen. Das Euler-Verfahren ist identisch mit dem Taylor-Verfahren der Ordnung 1. Um nun den Einfluß eines Taylor-Verfahrens höherer Ordnung im Vergleich mit dem des schon vorhandenen Euler-Verfahrens untersuchen zu können, mußte die Implementierung um ein solches Verfahren erweitert werden. Es wurde daher für diese Arbeit zunächst das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit konstanter Eingangsfunktion implementiert. Um weiter untersuchen zu können, ob sich der Einfluß der Taylor-Verfahren der Ordnung 1 und 2 durch mehr Eingangsfunktionen verbessern läßt, wurden für diese Arbeit beide Verfahren erneut mit stückweise konstanter Eingangsfunktion implementiert.

Die Theorie zu attrahierenden Mengen, Einzugsbereichen und dem Unterteilungsalgorithmus wird in dieser Arbeit in den *Kapiteln 1 bis 3* behandelt.

In *Kapitel 1 „Vorbereitungen und Voraussetzungen“* werden zunächst einmal die betrachteten dynamischen Systeme eingeführt und häufig benötigte Bedingungen an diese Systeme angegeben. Eine allgemeine Darstellung der Diskretisierung dieser Systeme in der Zeit

wird vorgestellt, die als Platzhalter für ein später zu wählendes Näherungsverfahren für Trajektorien dient. Die verwendeten Normen werden angegeben und erklärt, wie Abstände zwischen Mengen zu messen sind. Weiter werden die für Abschätzungen nützlichen Vergleichsfunktionen vorgestellt. Kapitel 1 orientiert sich in Aufbau und Inhalt an Chapter 2 ‘Setup and Preliminaries’ des Buches [Gr 02].

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt zwar auf den schwachen Einzugsbereichen, trotzdem werden die stark attrahierenden Mengen und Einzugsbereiche ebenfalls ausführlich dargestellt. Ein Grund hierfür ist, daß sich starke Konzepte einfacher durchschauen lassen als schwache; ein weiterer Grund ist, daß man bei der Darstellung schwacher Konzepte oft auf Ideen und Beweisführungen, die für starke Konzepte verwendet wurden, zurückgreifen kann.

In *Kapitel 2* „Attrahierende Mengen und Einzugsbereiche“ werden daher erst einmal stark attrahierende Mengen definiert und deren Robustheit gegen den Einfluß äußerer Störungen untersucht. Die Kenntnis dieses Einflusses wird benötigt, um später die Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus beweisen zu können, und wird daher sehr ausführlich behandelt. Analog folgt dann die Definition der schwach attrahierenden Mengen und die Untersuchung von deren Robustheit gegen Störungen. Den Abschluß des zweiten Kapitels bildet die Definition der Einzugsbereiche. Auch für diese Mengen wird eine Angabe über deren Robustheit gegen Störungen für Konvergenzbeweise des Unterteilungsalgorithmus benötigt und daher eingeführt. In [Gr 02] findet man die attrahierenden Mengen in den Chapters 3 ‘Strongly Attracting Sets’ und 4 ‘Weakly Attracting Sets’ wieder, die Einzugsbereiche in Chapter 7 ‘Domains of Attraction’.

*Kapitel 3* „Berechnung von Einzugsbereichen“ geht zunächst allgemein auf die Unterteilung des Zustandsraumes in Zellen ein. Es wird definiert, was unter einer Zustandsraumdiskretisierung zu verstehen ist und einige Eigenschaften dieser Diskretisierung angegeben, insbesondere werden die attrahierenden Mengen für Diskretisierungen eingeführt und der Zusammenhang mit den attrahierenden Mengen des betrachteten dynamischen Systems beschrieben. Mit Hilfe der Zustandsraumdiskretisierung wird dann der Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung schwacher Einzugsbereiche angegeben. Es folgt die Untersuchung von dessen Konvergenz unter verschiedenen Bedingungen. Die Zustandsraumdiskretisierung aus Kapitel 3 stammt aus dem Chapter 5 ‘Relation between Discretization and Perturbation’ von [Gr 02], der Unterteilungsalgorithmus wird dort in Chapter 7 behandelt. In dessen Konvergenzbeweis im rigorosen Fall gehen außerdem Resultate aus dem Chapter 6 ‘Discretizations of Attracting Sets’ dieses Buches ein. In Kapitel 3 haben sich einige Änderungen gegenüber [Gr 02] ergeben. Die verschiedenen Beweise, die zum Nachweis der Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus dienen, wurden an einigen Stellen modifiziert. Zur besseren Übersicht wurden zwei Aussagen in Lemmata ausgegliedert und bewiesen. Außerdem wurden die Beweise in Kapitel 3 besonders ausführlich dargestellt. In diesem Zusammenhang sei hier auch auf die Korrekturen [Gr 03] zu dem Buch [Gr 02] hingewiesen.

Anders als bei den Kapiteln 1 bis 3 liegt dem *Kapitel 4* „Verfahren höherer Ordnung“ nicht das Buch [Gr 02] sondern der Artikel [Gr/Kl 01] zugrunde. Es kann deshalb unabhängig von den ersten drei Kapiteln dieser Arbeit gelesen werden. Beschrieben wird in diesem Kapitel die Konstruktion von Taylor-Verfahren zur Näherung der Trajektorien von kontroll-affinen Differentialgleichungen. Es werden zunächst die kontroll-affinen Differentialgleichungen de-

finiert. Dann wird die Herleitung einer Taylor-Entwicklung an einem einfachen Beispiel erläutert, wobei schon zu sehen ist, daß die Darstellung einer solchen Entwicklung sehr umfangreich werden kann. Um dieses Problem zu lösen, werden daher Multi-Indizes, iterierte Integrale, Koeffizienten-Funktionen, hierarchische Mengen und Restmengen definiert. Unter Verwendung dieser Darstellungshilfen wird die Taylor-Entwicklung im allgemeinen Fall eingeführt und aus dieser die Taylor-Verfahren durch Abschneiden passend gewählter Restterme konstruiert, wobei eine Angabe über die Konvergenzordnung solcher Verfahren nicht vergessen wird. Schließlich wird noch auf die Näherung mehrfacher Kontrollintegrale eingegangen, ohne die man in der Praxis bei Taylor-Verfahren der Ordnung  $\geq 2$  nicht auskommt und die dementsprechend auch im praktischen Teil dieser Arbeit eine große Rolle spielt.

Dieser praktische Teil findet sich in *Kapitel 5 „Implementierung und numerische Beispiele“*. Hier wird zunächst die Implementierung des Unterteilungsalgorithmus von Lars Grüne beschrieben, gefolgt von einigen Erläuterungen zu den implementierten Taylor-Verfahren. Anhand des einfachen Beispiels wird dann der durch die verschiedenen Taylor-Verfahren entstehende Fehler des Unterteilungsalgorithmus ausgewertet. Angaben zur jeweils mit diesen Verfahren entstehenden Rechenzeit werden ebenfalls gemacht. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Eingangsfunktion gerichtet, da hier die mehrfachen Kontrollintegrale angenähert werden müssen, was bei zunehmender Anzahl von Konstanzintervallen zu einem sehr hohen Aufwand führt. Schließlich folgen einige mit verschiedenen Taylor-Verfahren gerechnete Darstellungen eines Einzugsbereiches des Beispiels aus der Chemie.

Der *Anhang A „Quellcode der Taylor-Verfahren“* enthält der Vollständigkeit halber den Quellcode der implementierten Taylor-Verfahren. Auf diesen Anhang folgt noch eine Übersicht über die in den verschiedenen Kapiteln eingeführte *Notation* in der Reihenfolge von deren Definition im Text.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Peter E. Kloeden bedanken, der es versteht, nicht nur die Mathematik sondern auch die Freude daran zu vermitteln. Herrn Prof. Dr. Lars Grüne danke ich ganz besonders für die geduldige Betreuung dieser Diplomarbeit. Meinen Kommilitoninnen Polina Zeydis und Stefanie Schulte danke ich herzlich dafür, daß sie lange Jahre wesentlich mehr als nur Kommilitoninnen waren. Außerdem möchte ich mich hiermit bei Polina, Gerhard Leuck und Marcel Branc für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanken, das sicher viel Zeit in Anspruch genommen hat. Weiter gilt mein Dank meiner Familie, die mein Studium immer unterstützt hat.

# Kapitel 1

## Vorbereitungen und Voraussetzungen

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit benötigten Grundlagen geschaffen. In dessen ersten Abschnitt wird zunächst einmal der Gegenstand dieser Arbeit definiert: die dynamischen Systeme. Im zweiten Abschnitt sind einige weitere Begriffe zusammengestellt, die in den folgenden Kapiteln häufig verwendet werden.

### 1.1 Die dynamischen Systeme

Dieser Abschnitt dient der Einführung der betrachteten dynamischen Systeme, deren schwache Einzugsbereiche mit dem in Kapitel 3 beschriebenen Unterteilungsalgorithmus berechnet werden sollen. Es handelt sich bei diesen Systemen um autonome Differentialgleichungen, die von einer Eingangsfunktion abhängen. Diese Eingangsfunktion kann je nach Zusammenhang als Störung oder Kontrolle interpretiert werden. Im Zusammenhang mit der Berechnung schwacher Einzugsbereiche ist sie als Kontrolle zu verstehen.

Die dynamischen Systeme werden hier meist als zeitkontinuierliche Systeme bezeichnet, denn in diesem Abschnitt werden weiter die zeitdiskreten Systeme eingeführt, die eine allgemeine Diskretisierung in der Zeit der dynamischen Systeme beschreiben.

Sowohl für die zeitkontinuierlichen als auch für die zeitdiskreten Systeme werden einige wichtige Voraussetzungen angegeben, die im weiteren benötigt werden.

#### Das zeitkontinuierliche System

Dieser Arbeit liegt ein *zeitkontinuierliches dynamisches System* in Form der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung mit Eingangsfunktion  $u$

$$\dot{x}(t) = f^0(x(t), u(t)) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

zugrunde. Hierbei ist  $t \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  kompakt und  $f^0: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine stetige Funktion; die Menge der Eingangsfunktionen ist  $\mathcal{U} := \{u: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow U \mid u \text{ meßbar}\}$ . Für zwei Eingangsfunktionen  $u_1$  und  $u_2$  aus  $\mathcal{U}$  wird die *Verkettung am Zeitpunkt*  $s \geq 0$  benötigt, sie ist definiert durch

$$(u_1 \&_s u_2)(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \leq s, \\ u_2(t-s), & t > s. \end{cases}$$

Eine Eingangsfunktion  $u \in \mathcal{U}$  kann auf zwei Arten interpretiert werden:

- Wird  $u$  als *innere Störung* der Differentialgleichung (1.1) betrachtet, ist das Verhalten der Differentialgleichung für alle  $u \in \mathcal{U}$  von Interesse. Hierzu gehören die *starken Konzepte*; sie beschreiben Eigenschaften, die „für alle  $u$ “ gelten sollen (vgl. Abschnitt 2.1).
- Wird  $u$  als *Kontrollfunktion* bzw. *Steuerung* betrachtet, so soll eine spezielle Wahl von  $u \in \mathcal{U}$  ein bestimmtes Verhalten der Differentialgleichung (1.1) bewirken. Hierzu gehören die *schwachen Konzepte*; sie beschreiben Eigenschaften, die nur „für mindestens ein  $u$ “ gelten sollen (vgl. Abschnitt 2.2).

Inbesondere kann man, wenn man  $u$  als Kontrollfunktion interpretiert, zu jedem Anfangswert  $x_0$  eine passende Eingangsfunktion wählen, um das gewünschte Verhalten der Differentialgleichung (1.1) herbeizuführen; daher hier die Definition der Menge der von Anfangswerten aus einer Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  abhängigen Eingangsfunktionen:

$$\mathcal{U}(B) := \{ \bar{u}: B \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow U \mid \bar{u}(x_0, \cdot) \in \mathcal{U} \quad \forall x_0 \in B \}.$$

Im folgenden wird (1.1) immer als *ungestörtes System* bezeichnet, auch wenn  $u$  als innere Störung zu verstehen ist, denn um die Konvergenzeigenschaften des Unterteilungsalgorithmus aus Kapitel 3 zu untersuchen, muß zusätzlich der Einfluß von äußeren Störungen auf die Differentialgleichung (1.1) berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wird für eine Menge von Störwerten  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^d \times U \times W \rightarrow \mathbb{R}^d$  betrachtet, die mit der rechten Seite  $f^0$  von (1.1) in folgendem Zusammenhang steht:

$$f(x, u, 0) = f^0(x, u) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, u \in U.$$

Die nun zum System (1.1) zugehörige gestörte Gleichung hängt von der Interpretation der Eingangsfunktion  $u$  ab.

Stellt  $u$  eine *innere Störung* der Differentialgleichung dar, so wird die *gestörte Gleichung*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)) \tag{1.2}$$

betrachtet, wobei  $w \in \mathcal{W} := \{w: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow W \mid w \text{ meßbar und lokal wesentlich beschränkt}\}^1$ . Die lokal wesentliche Beschränktheit wird hier benötigt, um die Anwendbarkeit eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes zu gewährleisten, da die Menge der Störwerte  $W$  (im

<sup>1</sup> $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal wesentlich beschränkt (d. h. lokal beschränkt außerhalb einer Nullmenge)  $\Leftrightarrow \forall [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \exists C > 0: \|w(t)\| \leq C \quad \forall t \in [a, b] \setminus J, \quad J \text{ Nullmenge. (Zu } \|\cdot\| \text{ s. Bezeichnung 1.2.1.)}$

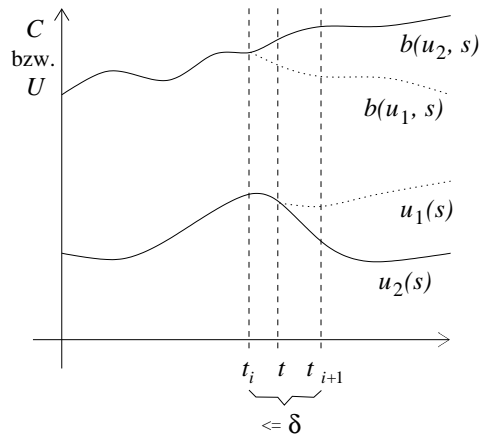


Abbildung 1.1:  $\delta$ -nichtvorausschauende Abbildung

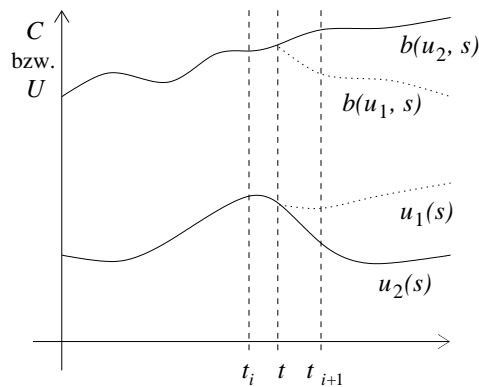


Abbildung 1.2: nichtvorausschauende Abbildung

Gegensatz zur Menge der Kontrollwerte  $U \subset \mathbb{R}^m$ ) eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist. Die Einschränkung auf lokal wesentlich beschränkte Störfunktionen  $w$  ist nicht problematisch, denn diese Funktionen sollen numerische Störungen modellieren, die in der Praxis nicht beliebig wachsen.

Stellt  $u$  eine *Kontrollfunktion* dar, so muß der Zusammenhang zwischen Kontrolle und Störung näher beschrieben werden. Eine numerische Störung darf nicht beliebig entgegen der Kontrolle wirken, ansonsten wäre der Nutzen von numerischen Berechnungen zu bezweifeln. Zu diesem Zweck also die Definition einer bezüglich der Kontrolle nichtvorausschauenden (Stör-)Funktion:

**Definition 1.1.1 Nichtvorausschauende Funktionen und Strategien**

- (i) Definiere zu jedem  $\delta > 0$  die Menge von Folgen

$$\mathcal{T}^\delta := \left\{ \tau = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mid t_0 = 0, t_i \in \mathbb{R}, t_{i+1} - t_i \in (0, \delta], t_i \rightarrow \infty \text{ für } i \rightarrow \infty \right\}.$$

- (ii) Sei  $C$  eine Menge und  $\delta > 0$ . Eine Abbildung  $b: \mathcal{U} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow C$  heißt  $\delta$ -*nichtvorausschauend*, wenn es eine Folge  $\tau = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T}^\delta$  gibt, so daß die Bedingung

$$u_1(s) = u_2(s) \text{ für alle } s \leq t_i \quad \Rightarrow \quad b(u_1, s) = b(u_2, s) \text{ für alle } s \leq t_i$$

gilt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  (vgl. Abb. 1.1).

Die Abbildung  $b$  heißt *0-nichtvorausschauend* oder einfach *nichtvorausschauend*, wenn die Bedingung

$$u_1(s) = u_2(s) \text{ für alle } s \leq t \quad \Rightarrow \quad b(u_1, s) = b(u_2, s) \text{ für alle } s \leq t$$

gilt für alle  $t > 0$  (vgl. Abb. 1.2).

- (iii) Für jedes  $\delta > 0$  ist die Menge der  $\delta$ -*nichtvorausschauenden Strategien*  $\mathcal{P}^\delta$  definiert durch

$$\mathcal{P}^\delta := \{ p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W} \mid b(u, t) := p[u](t) \text{ ist } \delta\text{-nichtvorausschauend für alle } u \in \mathcal{U} \}. \quad \square$$

Die zum System (1.1) zugehörige *gestörte Gleichung* lautet nun

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p[u](t)), \quad (1.3)$$

wobei  $p \in \mathcal{P}$ ;  $\mathcal{P}$  ist hier eine Teilmenge von  $\mathcal{P}^\delta$ , die *abgeschlossen bezüglich Verschiebungen* ist, d. h. für jedes  $p \in \mathcal{P}$ , jedes  $u^* \in \mathcal{U}$  und jedes  $s > 0$  existiert ein  $\tilde{p} \in \mathcal{P}$ , für das gilt

$$\tilde{p}[u](t - s) = p[u^* \&_s u](t)$$

für alle  $u \in \mathcal{U}$  und fast alle  $t \geq s$ .

Tatsächlich in dieser Arbeit benötigt werden jedoch meist nicht die beiden allgemeinen gestörten Gleichungen (1.2) oder (1.3) sondern nur für ein  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  das  $\alpha_0$ -*aufgeblasene System* mit der rechten Seite  $f(x, u, w) = f^0(x, u) + w$ , das also

$$\dot{x}(t) = f^0(x(t), u(t)) + w(t) \quad (1.4)$$

lautet, wobei

$$w \in \mathcal{W} \quad \text{mit} \quad \mathcal{W} = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \alpha_0 \}. \quad (1.5)$$

Weiter wird noch ein *zustandsabhängiges  $\alpha_0$ -aufgeblasenes System* mit rechter Seite  $f(x, u, w) = f^0(x, u) + b(x)w$  für eine beschränkte global Lipschitz-stetige Funktion  $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  benötigt, das also

$$\dot{x}(t) = f^0(x(t), u(t)) + b(x(t))w(t) \quad (1.6)$$

lautet, hierbei ist  $w$  ebenfalls aus (1.5) gewählt.



## Bedingungen an das zeitkontinuierliche System

Um die Existenz einer eindeutigen Lösung der beiden gestörten Differentialgleichungen (1.2) bzw. (1.3) mit Hilfe des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes voraussetzen zu können, muß  $f$  eine globale Lipschitz-Bedingung in  $x$  gleichmäßig für jedes  $u \in U$  und  $w \in W$  erfüllen, d. h. für alle Eingangswerte  $u \in U$  und alle Störwerte  $w \in W$  muß

$$\|f(x, u, w) - f(y, u, w)\| \leq L\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^d \quad (1.7)$$

gelten. Die Lösungstrajektorie von (1.2) zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$  und zu den beiden Störungen  $u \in \mathcal{U}$  und  $w \in \mathcal{W}$  wird in dieser Arbeit als  $\varphi(t, x_0, u, w)$  bezeichnet, die Lösung von (1.3) zum Anfangswert  $x_0$ , zur Kontrollfunktion  $u \in \mathcal{U}$  und zur Störung  $p[u] \in \mathcal{P}$  als  $\varphi(t, x_0, u, p[u])$ . Die Lösung des ungestörten Systems (1.1) wird mit  $\varphi(t, x_0, u, 0)$  bezeichnet. Um weiter voraussetzen zu können, daß die jeweiligen Lösungstrajektorien für alle Zeiten existieren, darf die Steigung  $f$  der Differentialgleichungen (1.2) bzw. (1.3) nicht beliebig wachsen, daher die Bedingung

$$\|f(x, u, w)\| \leq M + \varrho(\|w\|) \quad (1.8)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $u \in U$ ,  $w \in W$  und eine Vergleichsfunktion  $\varrho \in \mathcal{K}_\infty$  (zur Klasse von Vergleichsfunktion  $\mathcal{K}_\infty$  vgl. Definition 1.2.8).

Statt der globalen Bedingungen (1.7) und (1.8) würden eigentlich auch lokale Bedingungen der Form

$$\begin{aligned} \forall R > 0 \quad \exists M_R, L_R > 0 : \\ \|f(x, u, w) - f(y, u, w)\| &\leq L_R\|x - y\| \quad \text{und} \quad \|f(x, u, w)\| \leq M_R \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, w \in W \text{ mit } \|x\| \leq R, \|y\| \leq R, \|w\| \leq R \quad \forall u \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (1.9)$$

genügen, da in dieser Arbeit immer kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  betrachtet werden. Aus lokalen Bedingungen der Form (1.9) lassen sich im Fall kompakter Teilmengen die hier angenommenen globalen Bedingungen herleiten, wenn man die betrachteten Funktionen geeignet außerhalb der betrachteten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  fortsetzt. Globale Bedingungen vorauszusetzen, stellt also keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.

Weiter wird gelegentlich eine Annahme darüber benötigt, wie stark eine Störung das ursprüngliche System beeinflusst. Diese Annahme lautet hier wie folgt:

$$\|f^0(x, u) - f(x, u, w)\| \leq \varrho(\|w\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathcal{U} \text{ und } w \in \mathcal{W} \quad (1.10)$$

für ein  $\varrho$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  (vgl. Definition 1.2.8). Beachte, daß das aufgeblasene System (1.4) diese Bedingung erfüllt.

## Das zeitdiskrete System

Das zeitdiskrete System soll eine allgemeine Diskretisierung in der Zeit der Differentialgleichung (1.1) beschreiben. Im konkreten Fall kann diese Diskretisierung z. B. eines der Taylor-Verfahren aus Kapitel 4 sein.

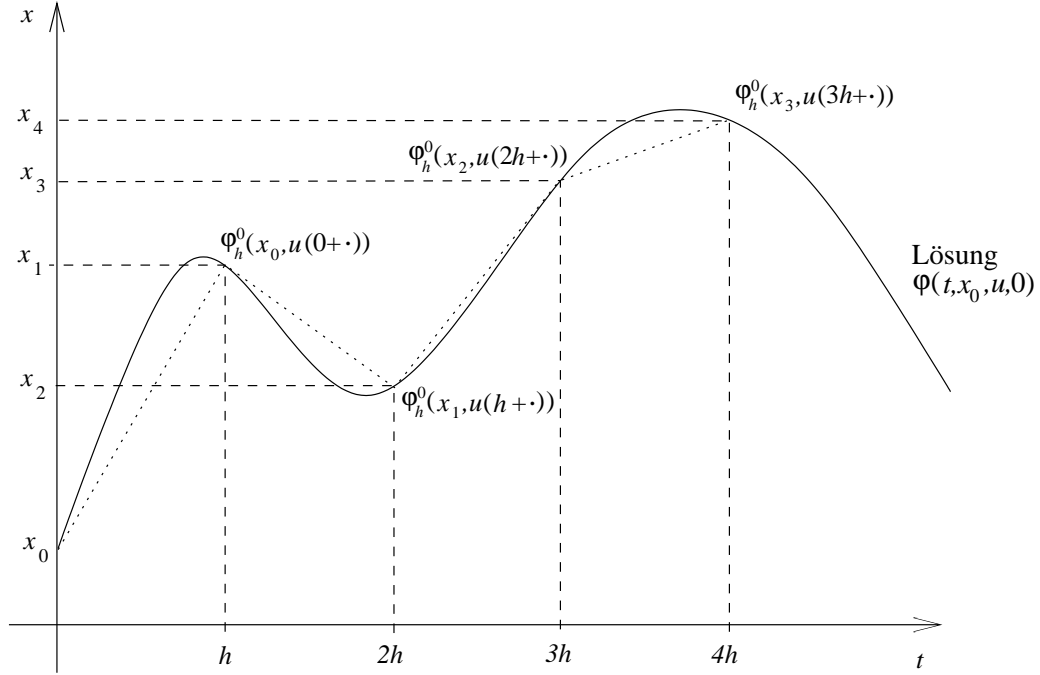


Abbildung 1.3: Berechnung von Werten von  $\varphi(t, x_0, u, 0)$  mit Hilfe von  $\varphi_h^0(x, u(ih + \cdot))$

Üblicherweise wird ein zeitdiskretes System  $F$  zu einem Zeitschritt  $h > 0$  und einem Anfangswert  $x_0$  mit Hilfe von Eingangsfolgen  $u_i \in U$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , beschrieben:

$$x_{i+1} = F_h(x_i, u_i).$$

Diese Notation mit Hilfe von Eingangsfolgen würde auch ausreichen, um die für den praktischen Teil dieser Arbeit tatsächlich implementierten stückweise konstanten Eingangsfunktionen  $u(t) \equiv u_i$ ,  $t \in [ih, (i+1)h)$ , zu beschreiben. Hier soll jedoch auch die von der Eingangsfunktion  $u \in \mathcal{U}$  abhängige *Zeit- $h$ -Abbildung* der Differentialgleichung (1.1)

$$\varphi_h^0: \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \varphi_h^0(x, u) := \varphi(h, x, u, 0)$$

Teil der Klasse der zeitdiskreten Systeme sein. Mit ihrer Hilfe kann man Werte der Lösung  $\varphi(t, x_0, u, 0)$  der Differentialgleichung (1.1) berechnen, wenn man die Argumentfunktion  $u$  an die jeweils benötigte Zeit  $t = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , verschiebt (vgl. Abb. 1.3). Dementsprechend lautet in dieser Arbeit die Notation des zur Differentialgleichung (1.1) und einem Zeitschritt  $h > 0$  zugehörigen zeitdiskreten Systems

$$x(t+h) = \phi_h^0(x(t), u(t+\cdot)) \text{ wieder mit der Anfangsbedingung } x(0) = x_0. \quad (1.11)$$

Hierbei ist wieder  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , die Funktion  $\phi_h^0: \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist stetig im ersten Argument, die Menge der Eingangsfunktionen  $\mathcal{U}$  ist genauso wie im zeitkontinuierlichen Fall.

Auch zu den zeitdiskreten Systemen sollen numerische Störungen betrachtet werden. Die rechte Seite des gestörten zeitdiskreten Systems ist eine im ersten Argument stetige Funktion  $\phi_h: \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die – analog zum gestörten zeitkontinuierlichen System – die

Bedingung

$$\phi_h(x, u, 0) = \phi_h^0(x, u) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathcal{U}$$

erfüllt. Auch im diskreten Fall hängt die Darstellung des zum zeitdiskreten System (1.11) gehörigen gestörten Systems von der Interpretation der Eingangsfunktion  $u$  ab.

Stellt  $u$  eine *innere Störung* des zeitdiskreten Systems dar, so lautet das gestörte System

$$x(t+h) = \phi_h(x(t), u(t+\cdot), w(t+\cdot)) \quad (1.12)$$

mit  $w \in \mathcal{W}$ , wobei  $\mathcal{W}$  den gleichen Funktionenraum darstellt wie für das gestörte zeitkontinuierliche System (1.2).

Stellt  $u$  eine *Kontrollfunktion* dar, so lautet das gestörte System

$$x(t+h) = \phi_h(x(t), u(t+\cdot), p[u](t+\cdot)) \quad (1.13)$$

mit  $p \in \mathcal{P}$ , wobei  $\mathcal{P}$  wieder die Menge der  $\delta$ -nichtvorausschauenden Strategien von  $\mathcal{U}$  nach  $\mathcal{W}$  ist wie bei dem gestörten zeitkontinuierlichen System (1.3).

Wie schon im Abschnitt über das zeitkontinuierliche System gesagt, werden in dieser Arbeit meist nicht die allgemeinen gestörten Systeme benötigt, im zeitdiskreten Fall also (1.12) und (1.13), sondern für ein  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  das  $\alpha_0$ -*aufgeblasene System*, dessen rechte Seite für ein zeitdiskretes gestörtes System durch  $\phi_h(x, u, w) = \phi_h^0(x, u) + \int_0^h w(s) ds$  beschrieben wird, also

$$x(t+h) = \phi_h^0(x(t), u(t+\cdot)) + \int_0^h w(t+s) ds \quad (1.14)$$

lautet, wobei  $w$  genauso wie im zeitkontinuierlichen Fall nach (1.5) gewählt ist.

Das zugehörige *zustandsabhängige  $\alpha_0$ -aufgeblasene System* hat im zeitdiskreten Fall die rechte Seite  $\phi_h(x, u, w) = \phi_h^0(x, u) + b(x) \int_0^h w(s) ds$  für eine beschränkte Funktion  $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , lautet also

$$x(t+h) = \phi_h^0(x(t), u(t+\cdot)) + b(x(t)) \int_0^h w(t+s) ds, \quad (1.15)$$

wobei  $w$  wieder wie in (1.5). Beachte, daß  $b$  hier nicht als stetig vorausgesetzt wird, d. h. es ist möglich, daß (1.15) nicht zu den Systemen der Form (1.13) gehört. Diese kleine Schwierigkeit läßt sich aber leicht umgehen, da eine Trajektorie von (1.15) für ein bestimmtes  $w$  oder  $p$  immer als Trajektorie von (1.14) für ein passendes  $\tilde{w}$  bzw.  $\tilde{p}$  dargestellt werden kann.

## Bedingungen an das zeitdiskrete System

Bei der Berechnung von Werten der Lösung  $\varphi(t, x_0, u, 0)$  mit Hilfe der Zeit- $h$ -Abbildung  $\varphi_h^0(x, u(ih+\cdot))$  gehen jeweils nur die Werte einer Eingangsfunktion  $u(t+\cdot)$  im Intervall  $[0, h]$  ein. Die Abhängigkeit des allgemeinen zeitdiskreten Systems von der Eingangsfunktion  $u$

soll ebenfalls auf das Intervall  $[0, h]$  beschränkt sein, daher wird hier für die rechte Seite  $\phi_h^0$  des ungestörten Systems (1.11)

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ für fast alle } t \in [0, h] \Rightarrow \phi_h^0(x, u_1(\cdot)) = \phi_h^0(x, u_2(\cdot)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d \quad (1.16)$$

verlangt. Auch für die rechte Seite  $\phi_h$  des jeweiligen gestörten Systems (1.12) bzw. (1.13) soll die Bedingung (1.16) in den beiden Argumenten  $u$  und  $w$  gelten.

Wie die zeitkontinuierlichen Systeme sollen die zeitdiskreten Systeme eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, d. h. für alle  $u \in U$ ,  $w \in W$  soll

$$\|(\phi_h(x, u, w) - x) - (\phi_h(y, u, w) - y)\| \leq hL\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^d$$

gelten. Die für die zeitkontinuierlichen Systeme angegebene Bedingung zur Beschränkung des Wachstums wird wie folgt auf zeitdiskrete Systeme übertragen:

$$\|\phi_h^0(x, u, w) - x\| \leq h(M + \varrho(\|w\|))$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $u \in U$ ,  $w \in W$  und  $\varrho \in \mathcal{K}_\infty$ .

Die zu (1.10) analoge Bedingung über den Einfluß der Störung auf das ursprüngliche System lautet

$$\|\phi_h^0(x, u) - \phi_h(x, u, w)\| \leq h\varrho(\|w\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathcal{U} \text{ und } w \in \mathcal{W} \quad (1.17)$$

für ein  $\varrho$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ .

## Weitere Bezeichnungen

Die Trajektorien der zeitdiskreten gestörten Systeme (1.12) und (1.13) haben noch keine Bezeichnung. Sie sollen durch  $\Phi_h(t, x_0, u, w)$  bzw.  $\Phi_h(t, x_0, u, p[u])$  dargestellt werden und sind induktiv definiert durch

$$\Phi_h(0, x_0, u, w) := x_0 \quad \text{und} \quad \Phi_h(t + h, x_0, u, w) := \phi_h(\Phi_h(t, x_0, u, w), u(t + \cdot), w(t + \cdot))$$

(analog für  $\Phi_h(t, x_0, u, p[u])$ ).

Mit dem Buchstaben  $\Psi$  wird im folgenden sowohl die Lösung  $\varphi$  der zeitkontinuierlichen Systeme (1.2) und (1.3) bezeichnet als auch eine Trajektorie  $\Phi_h$  der zeitdiskreten Systeme (1.12) und (1.13). Jeweils passend stellt das Zeichen  $\mathbb{T}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $h\mathbb{Z}$  dar; dementsprechend bedeutet  $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} \mid t > 0\}$  und  $\mathbb{T}_0^+ = \mathbb{T}^+ \cup \{0\}$ .

## 1.2 Normen, Mengen, Abstände und Vergleichsfunktionen

Da das Ziel dieser Arbeit die Näherung von Mengen ist, wird eine Notation zur Messung von Abständen zwischen Mengen benötigt, die in diesem Abschnitt eingeführt wird. Es werden noch einige weitere Bezeichnungen und Definitionen zusammengestellt, z. B. die

verwendeten Normen. Schließlich werden in diesem Abschnitt noch die Vergleichsfunktionen vorgestellt, die anstatt einer  $\varepsilon$ - $\delta$ -Notation für Abschätzungen verwendet werden können.

Zunächst einmal wird die verwendete Norm auf  $\mathbb{R}^d$  festgelegt, die im vorhergehenden Abschnitt schon gelegentlich benutzt wurde.

**Bezeichnung 1.2.1 (Euklidische Norm)** Die *Euklidische Norm* eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^d$  sei bezeichnet mit  $\|x\|$ . □

Hiermit kann nun noch die auf den Funktionenräumen der Eingangsfunktionen  $\mathcal{U}$  und der Störfunktionen  $\mathcal{W}$  verwendete Norm angegeben werden.

**Definition 1.2.2 ( $L_\infty$ -Norm)** Sei  $u$  aus  $\mathcal{U}$  oder  $\mathcal{W}$ . Für  $u$  sei die  $L_\infty$ -Norm  $\|u\|_\infty$  definiert als

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|.$$

Ihre Einschränkung auf Intervalle ist gegeben durch

$$\|u\|_{[a,b]} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|. \quad \square$$

Einige Mengenbezeichnungen, die in dieser Arbeit vorkommen:

**Bezeichnungen 1.2.3 (Mengen)** Sei  $A$  eine Menge.

- (i) Das Komplement von  $A$  wird hier bezeichnet als  $A^C$ ,
- (ii) der Abschluß von  $A$  als  $cl A$ ,
- (iii) das Innere von  $A$  als  $int A$ ,
- (iv) der Rand von  $A$  als  $\partial A = cl A \setminus int A$  und
- (v) die Potenzmenge von  $A$  (Menge aller Teilmengen von  $A$ ) als  $Pot(A)$ .
- (vi) Sei  $B$  eine weitere Menge, dann heißt  $A \subseteq B$  „ $A$  ist eine beliebige Teilmenge von  $B$ “ und  $A \subset B$  „ $A$  ist eine echte Teilmenge von  $B$ “ ( $A \subsetneq B$ ). □

Und nun die benötigte Notation, um Abstände zwischen Mengen zu messen. Später wird diese z. B. verwendet, um den Fehler, der bei Diskretisierung des Einzugsbereich eines dynamischen Systems entsteht, anzugeben.

**Definition 1.2.4 (Abstände)** Seien  $C, D \subset \mathbb{R}^d$  und sei  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann heißt

$$d(x, D) := \inf_{y \in D} \|x - y\|$$

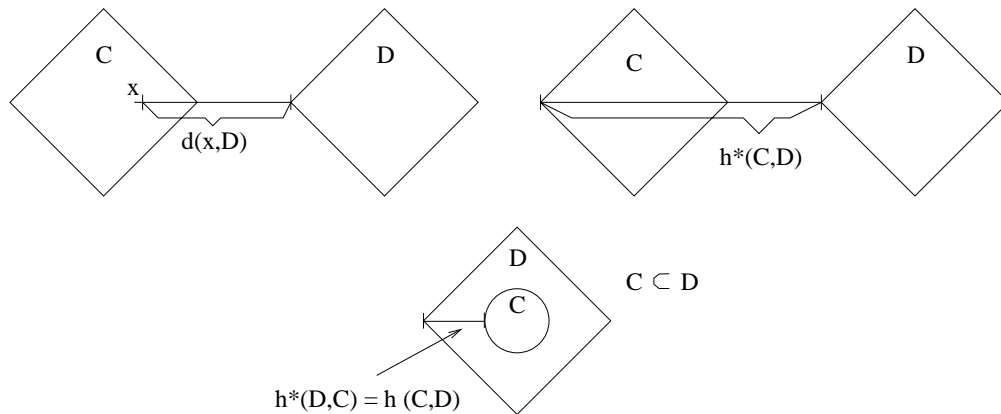


Abbildung 1.4: Abstände

der (Euklidische) Punkt-Mengen-Abstand von  $x$  und  $D$ .

$$h^*(C, D) := \sup_{x \in C} d(x, D)$$

heißt Hausdorffscher Semiabstand von  $C$  und  $D$  und

$$h(C, D) := \max \{ h^*(C, D), h^*(D, C) \}$$

Hausdorffabstand von  $C$  und  $D$ . □

Beachte, daß der hier definierte Hausdorffabstand keine Metrik ist; dies wäre gegeben, wenn man zur Definition von  $d(x, D)$  und  $h^*(C, D)$  statt dem Infimum bzw. dem Supremum das Minimum bzw. Maximum verwendet hätte. Dafür müßten allerdings  $C$  und  $D$  kompakt gewählt werden.

**Lemma 1.2.5 (Eigenschaften der Abstände)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt:

- (i)  $d(x, D) = 0 \Leftrightarrow x \in cl D$
- (ii)  $h^*(C, D) = 0 \Leftrightarrow cl C \subseteq cl D$
- (iii)  $h(C, D) = 0 \Leftrightarrow cl C = cl D$

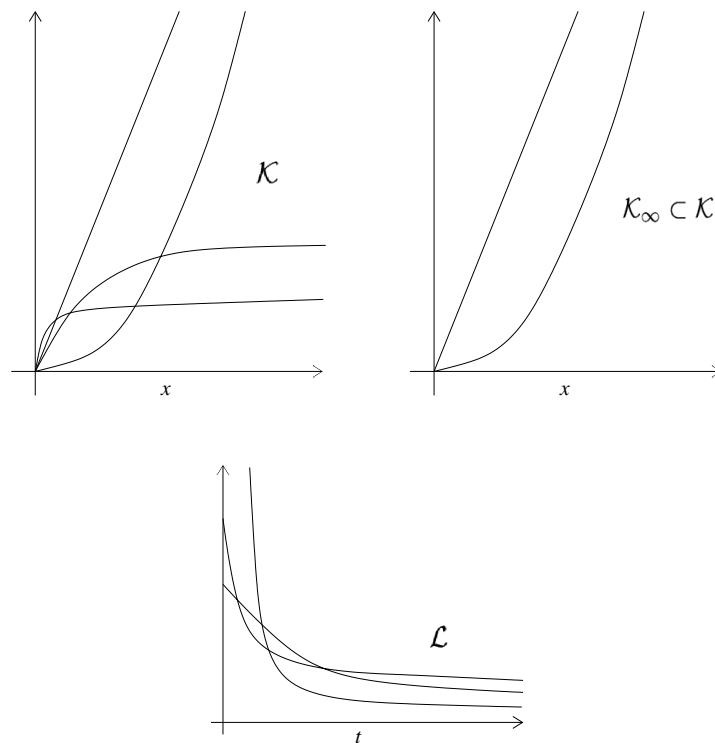
**Beweis:** Eigenschaft (i) folgt direkt aus der Definition von  $d(x, D)$ :

$$d(x, D) = 0 \Leftrightarrow \inf_{y \in D} \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow \text{es gibt eine Folge } (y_n) \text{ in } D \text{ mit } y_n \rightarrow x \Leftrightarrow x \in cl D.$$

(ii) und (iii) folgen sofort aus (i). □

Beachte: Im allgemeinen gibt es keine einfache Beziehung zwischen  $h^*(C, D)$  und  $h^*(C^C, D^C)$ , vgl. [Gr 02, Remark 2.3.3].

Mit Hilfe des Punkt-Mengen-Abstandes kann man eine Kugel um eine Menge definieren:

Abbildung 1.5: Abbildungen aus den Klassen  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  und  $\mathcal{L}$ 

**Definition 1.2.6 (Kugel)** Die *abgeschlossene Kugel* um eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^d$  für ein  $r > 0$  ist die Menge

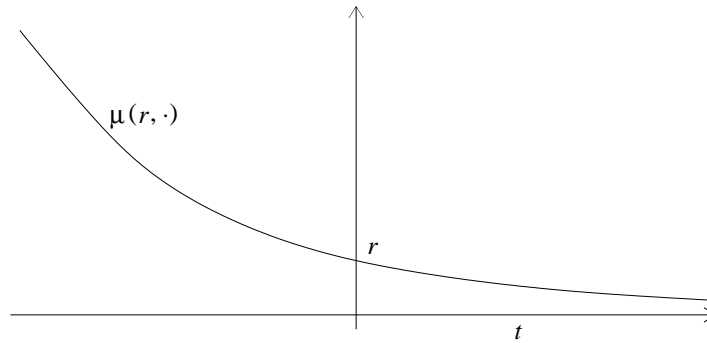
$$\mathcal{B}(r, D) := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, D) \leq r \}. \quad \square$$

Statt wie meist üblich für attrahierende oder asymptotisch stabile Mengen die Eigenschaft „beschränkt“ zu verlangen, wird im Kapitel 2 nur die schwächere Eigenschaft „komplementär beschränkt“ verwendet. Hier die Definition dieses Begriffes:

**Definition 1.2.7 (komplementär beschränkt)** Eine abgeschlossene Menge  $A$  heißt *komplementär beschränkt*, wenn  $A$  oder das Komplement  $A^C$  von  $A$  beschränkt ist.  $\square$

Für Abschätzungen werden in dieser Arbeit statt einer  $\varepsilon$ - $\delta$ -Notation oft Vergleichsfunktionen verwendet. Diese Funktionen ermöglichen zum einen eine übersichtlichere Schreibweise als die Darstellung mit  $\varepsilon$  und  $\delta$ . Zum anderen kann man mit ihrer Hilfe einen Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$  und  $\delta$  verdeutlichen, z. B. in Form einer Attraktionsrate wie in Definition 2.1.6.

**Definition 1.2.8 (Vergleichsfunktionen)** Eine stetige Funktion  $\sigma: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gehört zur *Klasse  $\mathcal{K}$* , wenn sie streng monoton steigend ist und  $\sigma(0) = 0$  gilt. Sie gehört zur Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn sie außerdem unbeschränkt ist.

Abbildung 1.6: Die Abbildung  $\mu(r, \cdot)$ ,  $\mu \in \mathcal{KLD}$ 

Eine stetige Funktion  $\varrho: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gehört zur *Klasse*  $\mathcal{L}$ , wenn sie streng monoton fallend ist und wenn gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) = 0$ .

Eine stetige Funktion  $\beta: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gehört zur *Klasse*  $\mathcal{KL}$ , wenn sie zur Klasse  $\mathcal{K}$  im ersten Argument gehört und zur Klasse  $\mathcal{L}$  im zweiten Argument.

Eine stetige Funktion  $\mu: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gehört zur *Klasse*  $\mathcal{KLD}$ , wenn ihre Einschränkung auf  $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$  zur Klasse  $\mathcal{KL}$  gehört und wenn sie

$$\mu(r, 0) = r \text{ und } \mu(\mu(r, t), s) = \mu(r, t + s) \text{ für alle } r \geq 0, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

erfüllt. □

### Bemerkungen 1.2.9

- Die beiden Eigenschaften (1.18) machen  $\mu \in \mathcal{KLD}$  zu einem dynamischen System. Aus (1.18) folgt, daß  $\mu(r, \cdot)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  streng monoton fallend ist (vgl. Abb. 1.6).
- Die Formulierung von Definitionen – wie z. B. die Definition 2.1.3 der asymptotischen Stabilität – mit Hilfe von Vergleichsfunktionen ist der mit Hilfe der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Notation äquivalent, vgl. [Gr 02, Remark B.1.5]. □



## Kapitel 2

# Attrahierende Mengen und Einzugsbereiche

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Berechnung von schwachen Einzugsbereichen schwach attrahierender Mengen. Trotzdem werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels starke dynamische Konzepte beschrieben und einige ihrer Eigenschaften bewiesen, da sich diese Konzepte einfacher einführen und durchschauen lassen als ihre schwachen Entsprechungen und oft im folgenden zweiten Abschnitt über schwache dynamische Konzepte auf diesen ersten Abschnitt Bezug genommen wird.

Beide Abschnitte sind analog aufgebaut: Zuerst einmal werden vorwärtsinvariante, attrahierende und asymptotisch stabile Mengen für die dynamischen Systeme aus Kapitel 1 definiert. Für diese Mengen werden dann Robustheits-Eigenschaften eingeführt, also Eigenschaften, die den Einfluß äußerer Störungen  $w \in \mathcal{W}$  bzw.  $p[u] \in \mathcal{P}$ , die auf die dynamischen System wirken, auf diese Mengen beschreiben. Zuletzt werden verschiedene Charakterisierungen der Robustheit angegeben, einmal mit Hilfe von kontrahierenden bzw. kontrahierbaren Familien von Umgebungen und einmal mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen.

Nachdem die attrahierenden Mengen behandelt sind, werden schließlich im dritten Abschnitt dieses Kapitels ihre Einzugsbereiche eingeführt, die mit dem Unterteilungsalgorithmus aus dem folgenden Kapitel berechnet werden sollen.

### 2.1 Starke dynamische Konzepte

Zur Erinnerung: *Starke Konzepte* sind Eigenschaften, die für alle Eingangsfunktionen  $u \in \mathcal{U}$  gelten, d. h.  $u$  wird als Störung betrachtet.

In diesem Abschnitt muß daher nur auf die Menge von Störfunktionen  $\mathcal{W}$  eingegangen werden, nicht auf die Störstrategien  $\mathcal{P}$ . Das Symbol  $\Psi$  stellt also in diesem Abschnitt die Lösung  $\varphi$  des zeitkontinuierlichen gestörten Systems (1.2) oder die Trajektorie  $\Phi_h$  des zeitdiskreten gestörten Systems (1.12) dar.

Die Störungen  $w \in \mathcal{W}$  sollen in diesem Abschnitt durch ein  $\alpha \geq 0$  begrenzt werden. Dafür wird die Menge

$$\mathcal{W}_\alpha := \{ w \in \mathcal{W} \mid \|w\|_\infty \leq \alpha \}$$

benötigt.

Um die Notation für starke Eigenschaften zu vereinfachen, werden die folgenden beiden mengenwertigen Abbildungen für die Lösung  $\Psi(t, x_0, u, w)$  eingeführt:

$$\Psi_\alpha(t, x_0) := \bigcup_{u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}_\alpha} \Psi(t, x_0, u, w)$$

und

$$\Psi_\alpha(t, B) := \bigcup_{x_0 \in B} \Psi_\alpha(t, x_0) \text{ für eine Menge } B \subset \mathbb{R}^d.$$

Für  $\alpha = 0$  wird statt dem Symbol  $\Psi_\alpha$  das Symbol  $\Psi_{\mathcal{U}}$  verwendet, d. h. also

$$\Psi_{\mathcal{U}}(t, x_0) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \Psi(t, x_0, u, 0).$$

Beachte die sich ergebende Schreibweise für zeitdiskrete Systeme:  $\Psi_\alpha = \Phi_{h,\alpha}$  und  $\Psi_{\mathcal{U}} = \Phi_{h,\mathcal{U}}$ .

Mit

$$\mathcal{R}(B) := \bigcup_{\alpha > 0, t \geq 0} \Psi_\alpha(t, B)$$

wird die *Erreichbarkeitsmenge* der Menge  $B$  für alle Störungen bezeichnet.

Auch für eine die Störungen begrenzende Funktion  $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  werden gelegentlich mengenwertige Abbildungen benötigt, sie lauten analog den vorhergehenden Definitionen

$$\Psi_{\alpha(t)}(t, x_0) := \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W} \\ \|w(t)\| \leq \alpha(t) \text{ für fast alle } t > 0}} \Psi(t, x_0, u, w)$$

und für die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\Psi_{\alpha(t)}(t, B) := \bigcup_{x_0 \in B} \Psi_{\alpha(t)}(t, x_0).$$

## Attrahierende Mengen

Einzugsbereiche sind in Bezug auf attrahierende Mengen definiert, daher bilden attrahierende Mengen und insbesondere ihre Robustheits-Eigenschaften eine wichtige Grundlage für die Konvergenzbeweise des Unterteilungsalgorithmus aus Kapitel 3 und werden hier ausführlich untersucht.

Eine attrahierende Menge ist zunächst einmal vorwärtsinvariant, d. h. Trajektorien, die in dieser Menge starten, bleiben für alle Zeiten in dieser Menge.

**Definition 2.1.1 (starke Vorwärtsinvarianz)**

- (i) Eine Menge  $A$  heißt *stark vorwärtsinvariant*, wenn  $\Psi_{\mathcal{U}}(t, A) \subseteq A$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt.
- (ii) Sei  $\alpha > 0$ . Eine Menge  $A$  heißt *stark  $\alpha$ -vorwärtsinvariant*, wenn  $\Psi_{\alpha}(t, A) \subseteq A$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt.  $\square$

Die Vorwärtsinvarianz bezieht sich auf die ungestörte Lösung  $\Psi(t, x_0, u, 0)$ , die  $\alpha$ -Vorwärtsinvarianz hingegen auf die gestörte Lösung  $\Psi(t, x_0, u, w)$ . Diese „ $\alpha$ -Eigenschaft“ ist nützlich, um die Robustheit einer vorwärtsinvarianten Menge gegen den Einfluß von Störungen – in diesem Abschnitt  $w \in \mathcal{W}$  – zu beschreiben. Sie wird zu diesem Zweck in der Definition 2.1.5 der  $\gamma$ -robusten starken Vorwärtsinvarianz verwendet.

Was nun die attrahierende Menge tatsächlich ausmacht, ist, daß Trajektorien, die in einer bestimmten Umgebung dieser Menge starten, von ihr angezogen werden.

**Definition 2.1.2 (stark attrahierende Menge)** Eine komplementär beschränkte Menge  $A$  heißt *stark attrahierend* mit attrahierter offener Umgebung  $B$ , wenn sie stark vorwärtsinvariant ist und für alle Teilmengen  $\tilde{B} \subset cl B$  mit  $h(\tilde{B}, A) < \infty$  gilt

$$h^*(\Psi_{\mathcal{U}}(t, \tilde{B}), A) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \quad \square$$

Ein ähnliches Konzept ist die asymptotisch stabile Menge:

**Definition 2.1.3 (stark asymptotisch stabil)** Eine abgeschlossene komplementär beschränkte Menge  $A$  heißt *stark asymptotisch stabil*, wenn es eine Funktion  $\beta$  aus der Klasse  $\mathcal{KL}$  und eine offene Umgebung  $B$  von  $A$  gibt, so daß

$$h^*(\Psi_{\mathcal{U}}(t, x), A) \leq \beta(d(x, A), t) \text{ für alle } x \in B. \quad \square$$

**Bemerkung 2.1.4** Jede stark attrahierende Menge ist stark asymptotisch stabil, vgl. [Gr 02, Lemma 3.1.4]. Daher reicht es aus, im starken Fall nur attrahierende Mengen zu betrachten.  $\square$

**Robustheit**

Robustheits-Konzepte sollen den Einfluß äußerer Störungen  $w \in \mathcal{W}$  auf die dynamischen Systeme bzw. die sie charakterisierenden Mengen angeben. Für die vorwärtsinvarianten und die attrahierenden Mengen wird dieser Einfluß durch die beiden folgenden Definitionen beschrieben. Die Kenntnis des Einflusses der Störungen ermöglicht in Kapitel 3 eine Aussage über die Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus. (Beachte: Das Kapitel 3 behandelt den schwachen Fall!)

**Definition 2.1.5 ( $\gamma$ -robuste starke Vorwärtsinvarianz)**

- (i) Eine bezüglich des gestörten zeitkontinuierlichen Systems (1.2) bzw. des gestörten zeitdiskreten Systems (1.12) stark vorwärtsinvariante Menge  $C$  heißt *direkt  $\gamma$ -robust* für ein  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn es für jedes  $\alpha > 0$  eine für das jeweilige dynamische System stark  $\alpha$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_\alpha$  gibt mit  $h(C_\alpha, C) \leq \gamma(\alpha)$ .
- (ii) Die Menge  $C$  heißt *invers  $\gamma$ -robust* für ein  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn es für jedes  $\alpha > 0$  eine stark  $\alpha$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_\alpha$  gibt mit  $h(C_\alpha^C, C^C) \leq \gamma(\alpha)$ .

Die Menge  $C$  heißt *schrumpfend direkt bzw. invers  $\gamma$ -robust*, wenn zusätzlich gilt  $C_\alpha \subseteq C$  für alle  $\alpha > 0$ . □

Diese Eigenschaft bedeutet, daß sich in geringem Abstand zu einer vorwärtsinvarianten Menge für ein ungestörtes System eine  $\alpha$ -vorwärtsinvariante Menge für ein gestörtes System finden läßt.

Für die attrahierenden Mengen ließe sich nun natürlich entsprechend „ $\alpha$ -attrahierend“ einführen und eine dazu passende Definition für die  $\gamma$ -Robustheit. Damit wäre aber nur eine attrahierende Menge für das gestörte System (mit durch ein  $\alpha$  beschränkten Störungen) in der Nähe der attrahierenden Menge für das ungestörte System gefunden. Der Einfluß der Störungen auf attrahierende Mengen wäre so nicht ausreichend genau beschrieben, um im folgenden Kapitel Aussagen über Zustandsraumdiskretisierungen zu machen. Daher sollen hier die Störungen mit Hilfe der in Abschnitt 1.2 eingeführten Vergleichsfunktionen aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  beschrieben werden (zu dieser Problematik vgl. [Gr 02, Section 3.2]).

Zur Erinnerung: Funktionen aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  sind dynamische Systeme.

**Definition 2.1.6 (starke input-to-state dynamische Stabilität)** Eine stark attrahierende Menge  $A$  mit attrahierter Umgebung  $B$  heißt *stark input-to-state dynamisch stabil (sISDS)*, wenn es eine Funktion  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  und Funktionen  $\sigma$  und  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  gibt so, daß die Ungleichung

$$d(\Psi(t, x_0, u, w), A) \leq \max \{ \mu(\sigma(d(x_0, A)), t), \nu(w, t) \}$$

erfüllt ist für alle  $t \in \mathbb{T}^+$ ,  $x_0 \in B$ ,  $u \in \mathcal{U}$  und  $w \in \mathcal{W}$ , wobei  $\nu = \nu_0$  für zeitkontinuierliche Systeme und  $\nu = \nu_h$  für zeitdiskrete Systeme;  $\nu_0$  und  $\nu_h$  sind definiert durch

$$\nu_0(w, t) := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, t]} \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), t - \tau) \quad (2.1)$$

und

$$\nu_h(w, t) := \max_{\tau \in [h, t] \cap h\mathbb{N}} \mu(\gamma(\|w\|_{[\tau-h, \tau]}), t - \tau). \quad (2.2)$$

Die Funktion  $\mu$  heißt hierbei *Attraktionsrate*,  $\sigma$  heißt *overshoot gain* oder *Überschwingungsverstärkung* und  $\gamma$  *Robustheitsverstärkung*. □

Einige Eigenschaften der Abbildung  $\nu$  aus der voranstehenden Definition, die im folgenden benötigt werden:

**Lemma 2.1.7 (Eigenschaften der Abbildung  $\nu$ )** Sei  $\nu = \nu_0$  oder  $\nu = \nu_h$ .

- (i) Ist  $\nu(w, t) \leq \mu(r, t)$  für ein  $r > 0$  und ein  $t \in \mathbb{T}^+$ , dann gilt  $\nu(w, \tau) \leq \mu(r, \tau)$  für alle  $\tau \in (0, t] \cap \mathbb{T}$ .
- (ii) Es gilt  $\nu(w, t_1 + t_2) = \max \{ \mu(\nu(w, t_1), t_2), \nu(w(t_1 + \cdot), t_2) \}$ .

**Beweis:** Beide Eigenschaften ergeben sich leicht aus der Definition der Funktion  $\nu$  und den Eigenschaften der Funktion  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ .  $\square$

### Kontrahierende Familien

Nun sollen verschiedene Charakterisierungen für die wichtige Robustheits-Eigenschaft ISDS hergeleitet werden. Zunächst mit Hilfe von kontrahierenden Familien von Umgebungen der attrahierenden Menge  $A$ , d. h. verschachtelten Mengen, die zu  $A$  zusammenschrumpfen.

**Definition 2.1.8 (Kontrahierende Familie von Umgebungen)** Betrachte eine stark attrahierende Menge  $A$  mit (offener) attrahierter Umgebung  $B$ . Eine Familie  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_0^+}$  von kompakten Mengen  $B_\alpha \subset \mathbb{R}^d$  zusammen mit einer Funktion  $\vartheta$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  heißt *kontrahierende Familie von Umgebungen* für  $A$  bezüglich  $B$ , wenn

- (i)  $B_{\alpha'} \subseteq B_\alpha$ ,  $\alpha' < \alpha$ ,
- (ii)  $B_0 = A$ ,
- (iii) es für alle Teilmengen  $\tilde{B} \subseteq cl B$  mit  $h(\tilde{B}, A) < \infty$  ein  $\alpha^* \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $\tilde{B} \subseteq B_{\alpha^*}$  gibt und
- (iv)  $\Psi_{\mathcal{U}}(t, B_\alpha) \subseteq B_{\vartheta(\alpha, t)}$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt.

Die Familie  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_0^+}$  heißt  *$\alpha$ -kontrahierend*, wenn nicht nur (iv) sondern die schärfere Bedingung

- (iv')  $\Psi_{\alpha(t)}(t, B_\alpha) \subseteq B_{\vartheta(\alpha, t)}$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$ , wobei  $\alpha(t) = \vartheta(\alpha, t)$  für zeitkontinuierliche Systeme und  $\alpha(t) = \vartheta(\alpha, (i+1)h)$  für  $t \in (ih, (i+1)h]$  für zeitdiskrete Systeme,

gilt. Weiter heißt diese Familie *streng kontrahierend* bzw. *streng  $\alpha$ -kontrahierend* bezüglich einer offenen Menge  $O$ , wenn zusätzlich gilt:

- (v)  $B_{\alpha'} \cap O \subset int B_\alpha$ ,  $\alpha' < \alpha$ .  $\square$

Beachte, daß Eigenschaft (iv') nur für diejenigen  $w$  mit  $\|w(t)\| \leq \alpha(t)$  für fast alle  $t > 0$  gilt (vgl. die Definition von  $\Psi_{\alpha(t)}$ ). Für beliebige  $w \in \mathcal{W}$  ergibt sich aus (iv') das folgende Lemma:

**Lemma 2.1.9** Betrachte eine  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$ . Dann gilt für alle  $x \in B_\alpha$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$

$$\Psi(t, x, u, w) \in B_{\alpha'}$$

für  $\alpha' = \max\{\vartheta(\alpha, t), \bar{\nu}(w, t)\}$  mit  $\bar{\nu} = \nu$  aus der Definition 2.1.6 mit  $\mu = \vartheta$  und  $\gamma = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**Beweis:** Sei  $x \in B_\alpha$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  und  $t \in \mathbb{T}^+$ . Sei  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  die kleinste Zahl mit  $\vartheta(\tilde{\alpha}, t) \geq \bar{\nu}(w, t)$ . Mit  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  gilt wegen Eigenschaft (i) aus der Definition der kontrahierenden Familie von Umgebungen  $x \in B_{\tilde{\alpha}}$ . Wendet man Lemma 2.1.7 (i) an, so erhält man  $\bar{\nu}(w, \tau) \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für alle  $\tau \in (0, t] \cap \mathbb{T}^+$  und hieraus wiederum die Ungleichung  $\|w(\tau)\| \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für zeitkontinuierliche Systeme bzw.  $\|w\|_{[\tau-h, \tau]} \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für zeitdiskrete Systeme,  $\tau \in (0, t] \cap \mathbb{T}^+$ . Für die Funktion  $\tilde{\alpha}(\tau) = \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für zeitdiskrete Systeme bzw. für die Funktion  $\tilde{\alpha}(\tau) = \vartheta(\tilde{\alpha}, (i+1)h)$  für  $\tau \in (ih, (i+1)h]$  für zeitdiskrete Systeme ist also  $\Psi(t, x, u, w) \in \Psi_{\tilde{\alpha}(t)}(t, B_{\tilde{\alpha}(t)})$  erfüllt.

Die Eigenschaft (iv') der kontrahierenden Familie von Umgebungen für  $\tilde{\alpha}$  lautet  $\Psi_{\tilde{\alpha}(t)}(t, B_{\tilde{\alpha}}) \subseteq B_{\vartheta(\tilde{\alpha}, t)}$ . Wegen der Wahl von  $\tilde{\alpha}$  gilt  $\alpha' = \vartheta(\tilde{\alpha}, t)$ , damit ist die Behauptung  $\Psi(t, x, u, w) \in B_{\alpha'}$  bewiesen.  $\square$

Die Charakterisierung der ISDS-Eigenschaft durch die  $\alpha$ -kontrahierenden Familien lautet nun wie folgt:

**Hilfssatz 2.1.10** Betrachte eine stark attrahierende Menge  $A$ . Dann gilt:

$A$  ist sISDS mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$ , genau dann wenn es eine  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  gibt mit

$$\begin{aligned} h(B_\alpha, A) &\leq \gamma(\alpha), \\ \mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B &\subseteq B_\alpha \end{aligned}$$

und

$$\vartheta(\alpha, t) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), t)).$$

**Beweis:** Sei die Menge  $A$  sISDS. Die Mengen  $B_\alpha$  seien gegeben durch

$$B_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} d(\Psi(t, x, u, w), A) \leq \max\{\mu(\gamma(\alpha), t), \nu(w, t)\} \\ \text{für alle } u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}, t \in \mathbb{T}_0^+ \end{array} \right\}.$$

Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten liefert, daß diese Mengen abgeschlossen sind. Offensichtlich gilt  $B_{\alpha'} \subseteq B_\alpha$  für  $\alpha' < \alpha$  sowie  $h(B_\alpha, A) \leq \gamma(\alpha)$  (beachte hierbei, daß  $\nu(w, 0) = 0$ ), woraus sich insbesondere  $B_0 = A$  ergibt. Die Inklusion  $\mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B \subseteq B_\alpha$  ergibt sich ebenfalls leicht aus dieser Wahl der  $B_\alpha$ ; mit Hilfe dieser Inklusion folgt, daß Eigenschaft (iii) aus der Definition der  $\alpha$ -kontrahierenden Familie erfüllt ist. Es

muß nun nur gezeigt werden, daß  $\Psi_{\alpha(t)}(t, B_\alpha) \subseteq B_{\vartheta(\alpha, t)}$  mit  $\vartheta(\alpha, t) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), t))$ . Sei  $y = \Psi(t, x, u, w) \in \Psi_{\alpha(t)}(t, B_\alpha)$ ; dann gilt wegen  $x \in B_\alpha$  und der Eigenschaft (ii) aus dem Lemma 2.1.7 der Funktion  $\nu$

$$\begin{aligned} d(\Psi(t + \tau, x, u, w), A) &\leq \max \{ \mu(\gamma(\alpha), t + \tau), \nu(w, t + \tau) \} \\ &= \max \{ \mu(\gamma(\alpha), t + \tau), \mu(\nu(w, t), \tau), \nu(w(t + \cdot), \tau) \}. \end{aligned}$$

Wegen  $\|w(t)\| \leq \alpha(t)$  gilt  $\mu(\nu(w, t), \tau) \leq \mu(\gamma(\alpha), t + \tau)$ , weiter gilt  $\mu(\gamma(\alpha), t + \tau) = \mu(\gamma(\vartheta(\alpha, t)), \tau)$ ; insgesamt folgt also

$$d(\Psi(t + \tau, x, u, w), A) \leq \max \{ \mu(\gamma(\vartheta(\alpha, t)), \tau), \nu(w(t + \cdot), \tau) \}.$$

Damit ist  $y = \Psi(t, x, u, w) \in B_{\vartheta(\alpha, t)}$  gezeigt.

Sei nun die  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  gegeben. Seien  $t \in \mathbb{T}^+$ ,  $x \in B$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$ . Wähle  $\alpha$  so, daß  $d(x, A) = \sigma^{-1}(\gamma(\alpha))$ . Damit gilt  $x \in B_\alpha$ .

Lemma 2.1.9 liefert  $\Psi(t, x, u, w) \in B_{\alpha'}$  mit  $\alpha' = \max\{\vartheta(\alpha, t), \bar{\nu}(w, t)\}$ , wobei für die Funktion  $\nu$  aus der Definition 2.1.6 gilt  $\nu = \gamma(\bar{\nu})$ . Nun folgt mit  $\alpha = \gamma^{-1}(\sigma(d(x, A)))$

$$d(\Psi(t, x, u, w), A) \leq h(B_{\alpha'}, A) \leq \gamma(\alpha') = \max \{ \mu(\sigma(d(x, A)), t), \nu(w, t) \},$$

d. h. die Menge  $A$  ist sISDS. □

Auch für streng  $\alpha$ -kontrahierende Mengen läßt sich eine entsprechende Aussage herleiten:

**Hilfssatz 2.1.11** Betrachte eine stark attrahierende Menge  $A$ . Dann gilt:

$A$  ist sISDS mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$ , genau dann wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine streng  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  bezüglich der offenen Menge  $O = \mathcal{R}(B)$  gibt mit

$$\begin{aligned} h(B_\alpha, A) &\leq (1 + \varepsilon)\gamma(\alpha), \\ \mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B &\subset B_\alpha \end{aligned}$$

und

$$\vartheta(\alpha, t) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t)).$$

**Beweis:** Sei die Menge  $A$  sISDS. Zu  $\varepsilon > 0$  sei die Funktion  $\varrho_\varepsilon(r) := \varepsilon(1 - e^{-r}) + 1$  definiert. Diese Funktion ist streng monoton steigend für  $r > 0$ , es gilt  $\varrho_\varepsilon(0) = 1$  und  $\varrho_\varepsilon(r) \nearrow 1 + \varepsilon$  für  $r \rightarrow \infty$ . Die Mengen  $B_\alpha$  seien nun durch

$$B_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} d(\Psi(t, x, u, w), A) \leq \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha), t)) \max\{\mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t), \nu(w, t)\} \\ \text{für alle } u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}, t \in \mathbb{T}_0^+ \end{array} \right\}$$

gegeben. Um nun die Eigenschaften (i)-(iii), (iv') und (v) aus der Definition 2.1.8 zu zeigen, werden die folgenden drei Aussagen benötigt:

(a) Für die Mengen  $B_\alpha$  gilt  $B_{\alpha'} \cap \mathcal{R}(B) \subset \text{int } B_\alpha$  für alle  $\alpha' < \alpha$ .

(b)  $\Psi(t, x, u, w) \in B_{\vartheta(\alpha, t)}$  für alle  $x \in B_\alpha$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$  und alle  $w \in \mathcal{W}$  mit  $\|w(\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, \tau)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$ .

(c)  $h(B_\alpha, A) \leq \varrho_\varepsilon(\gamma(\alpha))\gamma(\alpha) < (1 + \varepsilon)\gamma(\alpha)$  und  $\mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B \subset B_\alpha$ .

(a) Offensichtlich gilt  $B_{\alpha'} \subseteq B_\alpha$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $B_{\alpha'} \cap \mathcal{R}(B) \cap \partial B_\alpha = \emptyset$ . Zu diesem Zweck, beachte, daß es für alle  $x \in \mathcal{R}(B)$  ein  $t^* \in \mathbb{T}_0^+$  und eine offene Umgebung  $N(x)$  so gibt, daß  $N(x) = \Psi(t^*, N^*, u^*, w^*)$  gilt für eine offene, beschränkte Menge  $N^* \subset B$ , ein  $u^* \in \mathcal{U}$  und ein  $w^* \in \mathcal{W}$ . Hieraus ergibt sich für alle  $\tilde{x} \in N(x)$  mit Hilfe der sISDS-Abschätzung

$$d(\Psi(t, \tilde{x}, u, w), A) \leq \max \{ \mu(R, t), \nu(w, t) \}, \quad (2.3)$$

wobei  $R = \max \{ \sup_{y \in N^*} \mu(\sigma(d(y, A)), t^*), \nu(w^*, t^*) \}$ .

Sei nun  $x \in \mathcal{R}(B) \cap \partial B_\alpha$ . Dann gibt es Folgen  $x_n \rightarrow x$ ,  $u_n \in \mathcal{U}$ ,  $w_n \in \mathcal{W}$ ,  $t_n \in \mathbb{T}_0^+$  so, daß

$$d(\Psi(t_n, x_n, u_n, w_n), A) > \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha), t_n)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t_n), \nu(w_n, t_n) \} \quad (2.4)$$

gilt, wobei die  $x_n$  o. B. d. A. aus  $N(x)$  gewählt werden. Aus den Eigenschaften der Funktion  $\mu$  ergibt sich, daß es für alle  $R > 0$  ein  $T > 0$  so gibt, daß  $\mu(R, t) < \mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t)$  für alle  $t > T$ . Hieraus folgt, daß die  $t_n$  durch  $T = T(x) > 0$  beschränkt sein müssen, andernfalls ergäbe sich ein Widerspruch aus den Gleichungen (2.3) und (2.4). Aus ebendiesem Grund muß auch  $\nu(w_n, t_n) \leq \mu(R, t_n)$  gelten. Diese Abschätzung liefert wegen  $\mu(R, t_n) \leq \mu(R, 0) = R$  eine von  $n$  unabhängige Schranke für  $\nu(w_n, t_n)$ , daher müssen auch die  $w_n$  fast überall auf  $[0, t_n]$  beschränkt sein. Wegen der Beschränktheit der  $t_n$  und  $w_n$  und der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten gibt es eine Folge  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  mit

$$d(\Psi(t_n, x, u_n, w_n), A) > \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha), t_n)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t_n), \nu(w_n, t_n) \} - \varepsilon_n.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung streng monoton wachsend bezüglich  $\alpha$  ist, gibt es für jedes  $\alpha' < \alpha$  ein  $n' \in \mathbb{N}$  mit

$$d(\Psi(t_{n'}, x, u_{n'}, w_{n'}), A) > \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha'), t_{n'})) \max \{ \mu(\gamma(\alpha'), (1 - \varepsilon)t_{n'}), \nu(w_{n'}, t_{n'}) \},$$

d. h.  $x \notin B_{\alpha'}$ .

(b) Sei  $\alpha > 0$ ,  $x \in B_\alpha$ ,  $t, s \in \mathbb{T}^+$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha' = \vartheta(\alpha, t) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)t))$  und  $w \in \mathcal{W}$  mit  $\|w(\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, \tau)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$ . Wie im vorhergehenden Hilfssatz 2.1.10 soll gezeigt werden, daß  $y = \Psi(t, x, u, w) \in B_{\vartheta(\alpha, t)}$ . Wegen der Definition der  $B_\alpha$  und der Eigenschaft (ii) aus dem Lemma 2.1.7 gilt

$$\begin{aligned} d(\Psi(t + s, x, u, w), A) &\leq \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha), t + s)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)(t + s)), \nu(w, t + s) \} \\ &= \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha), t + s)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha), (1 - \varepsilon)(t + s)), \mu(\nu(w, t), s), \nu(w(t + \cdot), s) \}. \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Funktion  $\mu$  ergibt sich weiter

$$d(\Psi(t + s, x, u, w), A) < \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha'), s)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha'), (1 - \varepsilon)s), \mu(\nu(w, t), s), \nu(w(t + \cdot), s) \};$$

aus der Wahl von  $w$  folgt  $\mu(\nu(w, t), s) \leq \mu(\gamma(\alpha'), s)$  und damit

$$d(\Psi(t + s, x, u, w), A) < \varrho_\varepsilon(\mu(\gamma(\alpha'), s)) \max \{ \mu(\gamma(\alpha'), (1 - \varepsilon)s), \nu(w(t + \cdot), s) \}.$$



$y \in B_{\vartheta(\alpha,t)}$  ist also erfüllt.

(c) Die Ungleichung folgt aus der Definition der  $B_\alpha$  für  $t = 0$ . Die Inklusion folgt für  $x \in \mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B$  aus der sISDS-Abschätzung durch Einsetzen von  $\sigma(d(x, A)) \leq \gamma(\alpha)$ .

Mit den drei Eigenschaften (a), (b) und (c) sind nur noch ein paar formale Schritte nötig, um zu zeigen, daß die  $(B_\alpha)$  eine streng  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen sind, vgl. Hilfssatz 2.1.10.

Sei nun die streng  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  gegeben. Sei  $\gamma_\varepsilon(r) := (1 + \varepsilon)\gamma(r)$ ,  $\sigma_\varepsilon(r) := (1 + \varepsilon)\sigma(r)$  und  $\mu_\varepsilon(r, t) := (1 + \varepsilon)\mu\left(\frac{r}{1+\varepsilon}, (1 - \varepsilon)t\right)$ . Mit diesen drei Funktionen gilt offenbar

$$h(B_\alpha, A) \leq \gamma_\varepsilon(\alpha), \quad \mathcal{B}(\sigma_\varepsilon^{-1}(\gamma_\varepsilon(\alpha)), A) \cap B \subset B_\alpha \quad \text{und} \quad \vartheta(\alpha, t) = \gamma_\varepsilon^{-1}(\mu_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(\alpha), t)).$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in B$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  erhält man nun mit Hilfssatz 2.1.10

$$d(\Psi(t, x_0, u, w), A) \leq \max \{ \mu_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(d(x_0, A)), t), \nu_\varepsilon(w, t) \}$$

mit  $\nu_\varepsilon = \nu$  aus der Definition 2.1.6, wobei  $\mu = \mu_\varepsilon$  und  $\gamma = \gamma_\varepsilon$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich nun, daß die Menge  $A$  sISDS ist mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$ .  $\square$

## Lyapunov-Funktionen

Für qualitative Aussagen über ein dynamisches System, sind Lyapunov-Funktionen i. a. sehr nützlich. Daher soll nun die Robustheits-Eigenschaft ISDS noch einmal mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen charakterisiert werden. Hierbei werden die gerade eingeführten kontrahierenden Mengen verwendet.

Die Lyapunov-Funktion auf einer Umgebung einer Menge  $A$  sollte so konstruiert sein, daß aus ihrer Existenz gerade ISDS folgt. Der folgende Hilfssatz liefert eine Funktion, die diese Voraussetzung erfüllt.

**Hilfssatz 2.1.12 (sISDS Lyapunov-Funktion)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  eine abgeschlossene komplementär beschränkte stark vorwärtsinvariante Menge. Angenommen es gibt Funktionen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\tilde{\gamma}$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\tilde{\mu}$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ , eine stark vorwärtsinvariante Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine offene Menge  $B \subseteq C$  mit  $A \subset B$  und eine Funktion  $V: C \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\begin{aligned} \sigma_1(d(x, A)) &\leq V(x) \quad \text{für alle } x \in C, \\ V(x) &\leq \sigma_2(d(x, A)) \quad \text{für alle } x \in B \end{aligned}$$

und

$$V(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t) \} \quad (2.5)$$

für alle  $x \in C$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$ , wobei  $\tilde{\nu}$  mit Hilfe von  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\gamma}$  wie in der Definition 2.1.6 definiert ist.

Dann ist die Menge  $A$  sISDS mit attrahierter Umgebung  $B$ , Attraktionsrate  $\mu(r, t) = \sigma_1^{-1}(\tilde{\mu}(\sigma_1(r), t))$ , overshoot gain  $\sigma(r) = \sigma_1^{-1}(\sigma_2(r))$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma(r) = \sigma_1^{-1}(\tilde{\gamma}(r))$ .

**Beweis:** Definiere die Funktion  $\tilde{V}(x) := \sigma_1^{-1}(V(x))$ . Durch einfaches Ausrechnen ergibt sich aus (2.5)

$$\tilde{V}(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max \{ \mu(\tilde{V}(x), t), \nu(w, t) \}$$

für alle  $x \in C$ , woraus  $d(x, A) \leq \tilde{V}(x) \leq \sigma(d(x, A))$  auf  $B$  folgt. Die Behauptung folgt nun unmittelbar.  $\square$

**Definition 2.1.13 (sISDS Lyapunov-Funktion)** Die Funktion  $V$  aus Hilfssatz 2.1.12 heißt *sISDS Lyapunov-Funktion*.  $\square$

Um die Charakterisierung der ISDS-Eigenschaft zu vervollständigen, fehlt nun noch der Nachweis dafür, daß aus der ISDS-Eigenschaft die Existenz einer Lyapunov-Funktion folgt. Dies leistet der folgende Satz:

**Satz 2.1.14** Betrachte das zeitkontinuierliche gestörte System (1.2) oder das zeitdiskrete gestörte System (1.12) mit Lösung  $\Psi$ . Sei  $A$  eine abgeschlossene komplementär beschränkte stark vorwärtsinvariante Menge für das jeweils zugehörige ungestörte System (1.1) bzw. (1.11). Betrachte eine Funktion  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  und Funktionen  $\gamma$  und  $\sigma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ . Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Die Menge  $A$  ist sISDS mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$ .
- (ii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine stetige Funktion  $V_\varepsilon: \mathcal{R}(B) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)V_\varepsilon(x) &\geq d(x, A) \text{ für alle } x \in \mathcal{R}(B), \\ V_\varepsilon(x) &\leq \sigma(d(x, A)) \text{ für alle } x \in B \end{aligned}$$

und

$$V_\varepsilon(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - \varepsilon)t), \nu(w, t) \}$$

für alle  $x \in \mathcal{R}(B)$ , alle  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$  mit  $\nu$  aus der Definition 2.1.6 erfüllt.

- (iii) Es existiert eine Funktion  $V: \mathcal{R}(B) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die

$$\begin{aligned} V(x) &\geq d(x, A) \text{ für alle } x \in \mathcal{R}(B), \\ V(x) &\leq \sigma(d(x, A)) \text{ für alle } x \in B \end{aligned}$$

und

$$V(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max \{ \mu(V(x), t), \nu(w, t) \}$$

für alle  $x \in \mathcal{R}(B)$ , alle  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$  mit  $\nu$  aus der Definition 2.1.6 erfüllt.

**Beweis:** (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $A$  sISDS. Betrachte zu einem  $\varepsilon > 0$  die streng  $\alpha$ -kontrahierende Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  aus Hilfssatz 2.1.11. Die  $B_\alpha$  sind laut ihrer Definition 2.1.8 abgeschlossene Mengen; die Eigenschaft (v) (strenge Kontraktion) aus dieser Definition liefert daher, daß es für alle  $x \in \mathcal{R}(B) \setminus A$  ein eindeutiges  $\alpha(x) > 0$  so gibt, daß  $x \in B_{\alpha'}$  für alle  $\alpha' > \alpha(x)$  und  $x \notin B_{\alpha''}$  für alle  $\alpha'' < \alpha(x)$ . Die Funktion  $\alpha(x)$  ist stetig, was wie folgt begründet wird:

Sei  $x_n \rightarrow x$ . Wähle ein  $\alpha'$  mit  $|\alpha' - \alpha(x)| < \varepsilon'$ . Wegen  $x \in B_{\alpha'}$  für alle  $\alpha' > \alpha(x)$  gilt auch  $x \in \text{int } B_{\alpha'}$  und damit  $x_n \in \text{int } B_{\alpha'}$  für  $n$  genügend groß. Daraus folgt  $\alpha(x_n) < \alpha' < \alpha(x) + \varepsilon$  für unendlich viele  $n$  und daher nach [He 91, Satz 28.3]  $\alpha(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n)$ .

Wähle nun ein  $\alpha''$  mit  $|\alpha'' - \alpha(x)| < \varepsilon''$ . Für alle  $\alpha'' < \alpha(x)$  ist  $x$  enthalten in der offenen Menge  $B_{\alpha''}^C$ , damit gilt auch  $x_n \in B_{\alpha''}^C$  für  $n$  genügend groß, also  $\alpha(x_n) > \alpha'' > \alpha(x) - \varepsilon''$  für unendlich viele  $n$ . Wiederum nach [He 91, Satz 28.3] gilt also  $\alpha(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n)$ . Für die Folge  $x_n \rightarrow x$  gilt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \alpha(x)$ , d. h.  $\alpha(x)$  ist stetig.

Weiter gilt  $\alpha(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow A$ .

$$V_\varepsilon(x) := \begin{cases} \gamma(\alpha(x)), & x \in \mathcal{R}(B) \setminus A, \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

liefert also eine stetige Funktion. Die beiden Schranken für  $V_\varepsilon$  ergeben sich aus Hilfssatz 2.1.11, als Beispiel hier die obere Schranke, also  $V_\varepsilon(x) \leq \sigma(d(x, A))$ :

Für ein  $\varepsilon^* > 0$  und  $\alpha^* := \alpha(x) - \varepsilon^*$  gilt  $x \notin B_{\alpha^*}$  und  $\mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha^*)), A) \cap B \subset B_{\alpha^*}$ . Daraus ergibt sich sofort, daß  $\sigma(d(x, A)) \geq \gamma(\alpha^*) = \gamma(\alpha(x) - \varepsilon^*)$ ; die gesuchte Ungleichung erhält man für  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ .

Analog erhält man für  $\alpha^* := \alpha(x) + \varepsilon^*$  die Ungleichung  $(1 + \varepsilon)V_\varepsilon(x) \geq d(x, A)$ .

Auch  $V_\varepsilon(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max\{\mu(V_\varepsilon(x), (1 - \varepsilon)t), \nu(w, t)\}$  zeigt man auf diese Weise mit Hilfe von Lemma 2.1.9.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):  $V$  sei punktweise definiert als  $V(x) := \limsup_{\varepsilon \searrow 0} V_\varepsilon(x)$ . Aus dieser Definition ergeben sich sofort die gewünschte untere und obere Schranke für  $V(x)$ . Zum Beweis der Ungleichung  $V(\Psi(t, x, u, w)) \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(w, t)\}$  wähle  $x \in \mathcal{R}(B)$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $w \in \mathcal{W}$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$  und betrachte  $y = \Psi(t, x, u, w)$ . Dann gibt es für jedes  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon \in (0, \delta)$  so, daß  $V(y) \leq V_\varepsilon(y) + \delta$  und  $V_\varepsilon(x) \leq V(x) + \delta$  (vgl. wieder die Eigenschaften des Limes superior z. B. in [He 91, Abschnitt 28]). Diese beiden Ungleichungen liefern

$$V(y) \leq \max\{\mu(V_\varepsilon(x), (1 - \varepsilon)t), \nu(w, t)\} + \delta \leq \max\{\mu(V(x) + \delta, (1 - \delta)t), \nu(w, t)\} + \delta,$$

für  $\delta \rightarrow 0$  ergibt sich die gesuchte Ungleichung.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Folgt sofort aus Hilfssatz 2.1.12 für  $\sigma(r) = r$ . □

## Aufgeblasene Systeme

In Kapitel 3 wird die Diskretisierung des Zustandsraumes eingeführt und deren Eigenschaften untersucht. Hierfür werden nicht die allgemeinen (zeitdiskreten) gestörten Systeme (1.12) bzw. (1.13) benötigt sondern nur die aufgeblasenen Systeme (1.14) oder die zustandsabhängigen aufgeblasenen Systeme (1.15).

Die beiden folgenden Aussagen dienen in Kapitel 3 dazu, nachzuweisen, daß es zu einer stark attrahierenden Menge  $A$  für ein zeitdiskretes System eine entsprechende stark attrahierende Menge  $\widehat{A}$  der zugehörigen Zustandsraumdiskretisierung in der Nähe von  $A$  gibt, vgl. Lemma 3.1.3 (i) und Satz 3.1.6.

**Lemma 2.1.15** Betrachte ein zeitdiskretes  $\alpha_0$ -aufgeblasenes System vom Typ (1.14). Seien  $\varepsilon > 0$  und  $\alpha \geq 0$  so, daß  $\alpha + \varepsilon \leq \alpha_0$ . Dann gilt für einen Zeitschritt  $h > 0$ :

Zu jedem  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , jedem  $u \in \mathcal{U}$ , jedem  $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\alpha$  und jedem  $x_h \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x_h - \phi_h(x_0, u, \tilde{w})\| \leq h\varepsilon$  gibt es ein  $w \in \mathcal{W}_{\alpha+\varepsilon}$  so, daß

$$\phi_h(x_0, u, w) = x_h.$$

**Beweis:** Mit  $w(t) := \tilde{w}(t) + \frac{x_h - \phi_h(x_0, u, \tilde{w})}{h}$  ist die Behauptung dieses Lemmas erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \bullet \quad \phi_h(x_0, u, w) &= \phi_h^0(x_0, u) + \int_0^h w(s) \, ds = \phi_h^0(x_0, u) + \int_0^h \tilde{w}(s) + \frac{x_h - \phi_h(x_0, u, \tilde{w})}{h} \, ds \\ &= \phi_h^0(x_0, u) + \int_0^h \tilde{w}(s) \, ds + x_h - \phi_h(x_0, u, \tilde{w}) \\ &= x_h \text{ und} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \|w(t)\| \leq \|\tilde{w}(t)\| + \left\| \frac{x_h - \phi_h(x_0, u, \tilde{w})}{h} \right\| \leq \alpha + \varepsilon, \text{ d. h. es gilt } w \in \mathcal{W}_{\alpha+\varepsilon}. \quad \square$$

**Satz 2.1.16** Betrachte ein zeitdiskretes  $\alpha_0$ -aufgeblasenes System vom Typ (1.14);  $A$  sei eine sISDS Menge bezüglich dieses Systems mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$ , Robustheitsverstärkung  $\gamma$  und attrahierter Umgebung  $B$ . Betrachte weiter das entsprechende zustandsabhängige  $\alpha_0$ -aufgeblasene System vom Typ (1.15); dessen Trajektorie sei hier mit  $\Phi$  bezeichnet,  $b$  sei beschränkt durch  $b(x) \leq \alpha_0$  und für ein  $\varrho > 0$  durch  $b(x) \leq \max\{\gamma^{-1}(\mu(d(x, A), h)), \varrho\}$  für alle  $x \in B$ . Dann erfüllt für jedes  $x \in B$ ,  $u \in \mathcal{U}$  und jedes  $w \in \mathcal{W}_1$  die Trajektorie des zustandsabhängigen Systems die Ungleichung

$$d(\Phi(t, x, u, w), A) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A)), t), \gamma(\varrho)\}$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}$ .

**Beweis:** Seien  $x \in B$ ,  $u \in \mathcal{U}$  und  $w \in \mathcal{W}_1$ ; sei  $V$  die sISDS Lyapunov-Funktion aus Satz 2.1.14 (iii) für das nicht zustandsabhängige System. Für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$  sei hier als abkürzende Schreibweise  $x_i := \Phi(hi, x, u, w)$  verwendet. Weiter sei  $\tilde{w}(t) := b(x_i)w(t)$  für alle  $t \in [hi, h(i+1))$  und  $i \in \mathbb{N}_0$ .

Aus der Definition von  $\nu_h$  erhält man

$$\nu_h(\tilde{w}(hi + \cdot), h) = \gamma(\|\tilde{w}(hi + \cdot)\|_{[0, h]}).$$

Es gilt

$$\|\tilde{w}(hi + \cdot)\|_{[0, h]} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, h]} \|\tilde{w}(hi + t)\| = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [hi, h(i+1)]} \|b(x_i)w(t)\| \leq b(x_i),$$

da  $b(x_i) \geq 0$  und  $\|w(t)\| \leq 1$ . Dies liefert nach Voraussetzung dieses Satzes über  $b$

$$\|\tilde{w}(hi + \cdot)\|_{[0,h]} \leq \max \{ \gamma^{-1}(\mu(d(x_i, A), h)), \varrho \},$$

also

$$\nu_h(\tilde{w}(hi + \cdot), h) \leq \max \{ \mu(d(x_i, A), h), \gamma(\varrho) \} \leq \max \{ \mu(V(x_i), h), \gamma(\varrho) \}.$$

Aus den Eigenschaften der sISDS Lyapunov-Funktion  $V$  ergibt sich

$$\begin{aligned} V(x_{i+1}) &= V(\Phi(h(i+1), x, u, w)) = V(\Phi_h(h(i+1), x, u, \tilde{w})) \\ &\leq \max \{ \mu(V(x_i), h), \nu_h(\tilde{w}(hi + \cdot), h) \}, \end{aligned}$$

insgesamt gilt also

$$V(x_{i+1}) \leq \max \{ \mu(V(x_i), h), \gamma(\varrho) \} \quad (2.6)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ . Aus dieser Abschätzung läßt sich nun

$$V(x_i) \leq \max \{ \mu(V(x), hi), \gamma(\varrho) \} \quad (2.7)$$

für  $i \in \mathbb{N}$  mit Hilfe von Induktion herleiten; woraus sich die Behauptung dieses Satzes mit Hilfe der Eigenschaften der sISDS Lyapunov-Funktion  $V$  sofort ergibt. Für  $i = 1$  gilt (2.7) offensichtlich; aus der Induktionsannahme für  $i$  und den Eigenschaften der Funktion  $\mu$  folgt

$$\mu(V(x_i), h) \leq \max \{ \mu(V(x), h(i+1)), \gamma(\varrho) \}$$

und hieraus mit (2.6)

$$V(x_{i+1}) \leq \max \{ \mu(V(x), h(i+1)), \gamma(\varrho) \}. \quad \square$$

**Bemerkung 2.1.17** Satz 2.1.16 gilt auch für zeitkontinuierliche  $\alpha_0$ -aufgeblasene Systeme (1.4). Die Funktion  $b$  muß dann durch  $b(x) \leq \alpha_0$  und  $b(x) \leq \max\{\gamma^{-1}(d(x, A)), \varrho\}$  beschränkt werden, vgl. [Gr 02, Theorem 3.7.4].  $\square$

## 2.2 Schwache dynamische Konzepte

Zur Erinnerung: *Schwache Konzepte* sind Eigenschaften, die nur für ein  $u \in \mathcal{U}$  gelten, d. h.  $u$  wird als Kontrollfunktion betrachtet.

In diesem Abschnitt wird daher auf die Menge der Störstrategien  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^\delta$  eingegangen, das Symbol  $\Psi$  stellt in diesem Abschnitt die Lösung  $\varphi$  des zeitkontinuierlichen gestörten Systems (1.3) oder die Trajektorie  $\Phi_h$  des zeitdiskreten gestörten Systems (1.13) dar.

Analog zum vorhergehenden Abschnitt 2.1 über starke Konzepte werden die Störstrategien  $\mathcal{P}$  durch ein  $\alpha \geq 0$  begrenzt. Dafür wird die Menge

$$\mathcal{P}_\alpha := \{ p \in \mathcal{P} \mid \|p[u]\|_\infty \leq \alpha \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \}$$

verwendet.

Erst einmal muß festgelegt werden, was unter einer schwachen Eigenschaft wie „ $\leq$  schwach“ oder „ $\in$  schwach“ verstanden werden soll:

**Definition 2.2.1 (schwacher Vergleich von Funktionen)** Sei  $\mathcal{T}$  die Menge aller streng aufsteigenden Zahlenfolgen aus  $\mathbb{R}_0^+$ , d. h.

$$\mathcal{T} := \left\{ \tau = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mid t_i \in \mathbb{T} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots \right\}.$$

Dann sagt man für Funktionen  $N: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varrho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $p \in \mathcal{P}$  und  $T > 0$  das zeitkontinuierliche System (1.3) bzw. das zeitdiskrete System (1.13) erfüllt

$$N(\Psi(t, x_0, u, p[u])) \leq \varrho(t) \text{ schwach für alle } t \geq T,$$

wenn es für jede Folge  $\tau = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T}$  eine Kontrollfunktion  $u_\tau \in \mathcal{U}$  gibt, so daß

$$N(\Psi(t, x_0, u_\tau, p[u_\tau])) \leq \varrho(t_i) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } t_i \geq T,$$

wobei  $u_\tau$  von  $\tau$  abhängt wie folgt:

$$\begin{aligned} &\text{Für alle Folgen } \tau^1 = (t_i^1)_{i \in \mathbb{N}_0}, \tau^2 = (t_i^2)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T} \text{ mit} \\ &t_i^1 = t_i^2 \text{ für alle } i = 0, \dots, n \\ &\text{erfüllen die Kontrollfunktionen } u_{\tau^1} \text{ und } u_{\tau^2} \text{ die Bedingung} \\ &u_{\tau^1}(t) = u_{\tau^2}(t) \text{ für fast alle } t \in [0, t_n^1 = t_n^2]. \end{aligned} \tag{2.8} \quad \square$$

**Definition 2.2.2 (schwache Mengenzugehörigkeit)** Sei  $B_t \subset \mathbb{R}^d$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$ , eine Familie von Mengen. Dann sagt man – analog zur vorhergehenden Definition – für ein  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $p \in \mathcal{P}$  und  $T > 0$  erfüllt das zeitkontinuierliche System (1.3) bzw. das zeitdiskrete System (1.13)

$$\Psi(t, x_0, u, p[u]) \in B_t \text{ schwach für alle } t \geq T,$$

wenn es für jede Folge  $\tau = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T}$  eine Kontrollfunktion  $u_\tau \in \mathcal{U}$  gibt, so daß

$$\Psi(t_i, x_0, u_\tau, p[u_\tau]) \in B_{t_i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } t_i \geq T,$$

wobei  $u_\tau$  wieder von  $\tau$  abhängt wie in (2.8) beschrieben. □

## Attrahierende Mengen

Attrahierende Mengen und ihre Robustheits-Eigenschaften sind – wie schon schon im Abschnitt über starke Konzepte bemerkt – eine wichtige Grundlage für die Konvergenzbeweise des Unterteilungsalgorithmus aus Kapitel 3 und müssen natürlich auch im schwachen Fall ausführlich untersucht werden.

Bevor die attrahierenden Mengen eingeführt werden können, wird zunächst wieder die Definition der Vorwärtsinvarianz benötigt, die im schwachen Fall lautet:

### Definition 2.2.3 (schwache Vorwärtsinvarianz)

- (i) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt *schwach vorwärtsinvariant*, wenn für alle  $x_0 \in A$  gilt

$$\Psi(t, x_0, u, 0) \in A \text{ schwach für alle } t \geq 0.$$

- (ii) Sei  $\alpha > 0$ . Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt *schwach  $\alpha$ -vorwärtsinvariant*, wenn für alle  $x_0 \in A$  und alle  $p \in \mathcal{P}_\alpha$  gilt

$$\Psi(t, x_0, u, p[u]) \in A \text{ schwach für alle } t \geq 0. \quad \square$$

Im Gegensatz zur starken Vorwärtsinvarianz ist hier sofort zu sehen, daß sich die schwache Vorwärtsinvarianz auf die ungestörte Lösung  $\Psi(t, x_0, u, 0)$  bezieht und die schwache  $\alpha$ -Vorwärtsinvarianz auf die gestörte Lösung  $\Psi(t, x_0, u, p[u])$ . Die „ $\alpha$ -Eigenschaft“ wird auch in diesem Abschnitt dafür genutzt, die Robustheit einer vorwärtsinvarianten Menge gegen den Einfluß von Störungen – in diesem Abschnitt  $p[u] \in \mathcal{P}$  – zu beschreiben, vgl. die Definition 2.2.7 der  $\gamma$ -robusten schwachen Vorwärtsinvarianz.

Für die schwache Vorwärtsinvarianz finden sich in der Literatur auch die Begriffe *kontrollierte Vorwärtsinvarianz* oder *Viabilität*.

Mit Hilfe der schwachen Vorwärtsinvarianz können nun die schwach attrahierenden Mengen definiert werden:

**Definition 2.2.4 (schwach attrahierende Menge)** Eine komplementär beschränkte Menge  $A \in \mathbb{R}^d$  heißt *schwach attrahierend* mit attrahierter offener Umgebung  $B$ , wenn sie schwach vorwärtsinvariant ist und es eine Funktion  $\beta$  aus der Klasse  $\mathcal{KL}$  und eine Konstante  $C \geq 0$  gibt, so daß für jedes  $x_0 \in B$  gilt

$$d(\Psi(t, x_0, u, 0), A) \leq \beta(d(x_0, A) + C, t) \text{ schwach für alle } t \geq 0. \quad \square$$

Das ähnliche Konzept der asymptotischen Stabilität wird auf den schwachen Fall wie folgt übertragen:

**Definition 2.2.5 (schwach asymptotisch stabil)** Eine abgeschlossene komplementär beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt *schwach asymptotisch stabil* mit offener attrahierter Umgebung  $B$ , wenn sie schwach vorwärtsinvariant ist und es eine Funktion  $\beta$  aus der Klasse  $\mathcal{KL}$  gibt, so daß für jedes  $x_0 \in B$

$$d(\Psi(t, x_0, u, 0), A) \leq \beta(d(x_0, A), t) \text{ schwach für alle } t \geq 0$$

gilt. □

Die schwache asymptotische Stabilität wird in der Literatur üblicherweise als *lokal asymptotische Kontrollierbarkeit* bezeichnet, vgl. [Gr 01].

**Bemerkung 2.2.6** Im Gegensatz zu stark attrahierenden Mengen, die stark asymptotisch stabil sind, ist eine schwach attrahierende Menge nicht notwendig schwach asymptotisch stabil, vgl. [Gr 02, Example 4.1.5]. Gelegentlich wird es daher im folgenden Kapitel notwendig sein, schwache asymptotische Stabilität zu fordern. Nur die attrahierenden Mengen zu betrachten, reicht nicht aus. □

## Robustheit

Die folgenden beiden Robustheits-Konzepte werden – wie schon im Abschnitt über starke Konzepte erläutert – in Kapitel 3 benötigt, um eine Aussage über die Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus herzuleiten.

### Definition 2.2.7 ( $\gamma$ -robuste schwache Vorwärtsinvarianz)

- (i) Eine bezüglich des gestörten zeitkontinuierlichen Systems (1.3) bzw. des gestörten zeitdiskreten Systems (1.13) schwach vorwärtsinvariante Menge  $C$  heißt *direkt  $\gamma$ -robust* für ein  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn es für jedes  $\alpha > 0$  eine für das jeweilige dynamische System schwach  $\alpha$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_\alpha$  gibt mit  $h(C_\alpha, C) \leq \gamma(\alpha)$ .
- (ii) Die Menge  $C$  heißt *invers  $\gamma$ -robust* für ein  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn es für jedes  $\alpha > 0$  eine schwach  $\alpha$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_\alpha$  gibt mit  $h(C_\alpha^C, C^C) \leq \gamma(\alpha)$ .

Die Menge  $C$  heißt *schrumpfend direkt bzw. invers  $\gamma$ -robust*, wenn zusätzlich gilt  $C_\alpha \subseteq C$  für alle  $\alpha > 0$ . □

Auch im schwachen Fall soll nun nicht einfach für die attrahierenden Mengen eine zur  $\alpha$ -Vorwärtsinvarianz analoge „ $\alpha$ -Eigenschaft“ eingeführt werden, um die Robustheit dieser Mengen gegen Störungen zu beschreiben. Stattdessen sollen auch hier die dynamischen Systeme aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  zur Definition der Robustheit gegenüber Störungen der attrahierenden Mengen verwendet werden.

**Definition 2.2.8 (schwache input-to-state dynamische Stabilität)** Eine schwach attrahierende Menge  $A$  mit attrahierter Umgebung  $B$  heißt *schwach input-to-state dynamisch stabil (wISDS)*, wenn es eine Funktion  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  und Funktionen  $\sigma$  und  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  gibt so, daß die Ungleichung

$$d(\Psi(t, x_0, u, p[u]), A) \leq \max \{ \mu(\sigma(d(x_0, A)), t), \tilde{\nu}(p, t) \} \text{ schwach für alle } t \geq 0$$

für alle  $x_0 \in B$  und  $p \in \mathcal{P}$  erfüllt ist, wobei  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0$  für zeitkontinuierliche Systeme und  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_h$  für zeitdiskrete Systeme;  $\nu_0$  und  $\nu_h$  sind definiert durch

$$\tilde{\nu}_0(p, t) := \sup_{u \in \mathcal{U}} \nu_0(p[u], t)$$

und

$$\tilde{\nu}_h(p, t) := \sup_{u \in \mathcal{U}} \nu_h(p[u], t)$$

mit  $\nu_0$  und  $\nu_h$  aus der Definition 2.1.6 von sISDS. Die Funktion  $\mu$  heißt hierbei *Attraktionsrate*,  $\sigma$  heißt *overshoot gain* oder *Überschwingungsverstärkung* und  $\gamma$  *Robustheitsverstärkung*. □



Das „w“ in wISDS steht für das englische *weak*, das „s“ in sISDS für *strong*.

Analog zu den Eigenschaften der Abbildung  $\nu$  nun einige Eigenschaften der Abbildung  $\tilde{\nu}$ :

**Lemma 2.2.9 (Eigenschaften der Abbildung  $\tilde{\nu}$ )** Sei  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0$  oder  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_h$ .

- (i) Ist  $\tilde{\nu}(p, t) \leq \mu(r, t)$  für ein  $r > 0$  und ein  $t \in \mathbb{T}^+$ , dann gilt  $\tilde{\nu}(p, \tau) \leq \mu(r, \tau)$  für alle  $\tau \in (0, t] \cap \mathbb{T}$ .
- (ii) Es gilt  $\tilde{\nu}(p, t_1 + t_2) = \max \{ \mu(\tilde{\nu}(p, t_1), t_2), \tilde{\nu}(p[\cdot](t_1 + \cdot), t_2) \}$ .

**Beweis:** Diese Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition der Funktion  $\tilde{\nu}$ .  $\square$

Beachte: Ist eine Menge wISDS, so ist sie auch schwach asymptotisch stabil.

Der folgende Satz zeigt, daß umgekehrt aus der schwachen asymptotischen Stabilität wISDS folgt. Dies ist der Grund, warum in Kapitel 3 asymptotisch stabile Mengen benötigt werden, vgl. Bemerkung 2.2.6.

**Satz 2.2.10** Betrachte ein gestörtes System  $\Psi$  vom Typ (1.3) bzw. (1.13), das jeweils (1.10) bzw. (1.17) für ein  $\varrho$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  erfüllt. Sei  $A$  eine schwach asymptotisch stabile Menge für das zugehörige ungestörte System (1.1) bzw. (1.11) mit offener attrahierter Umgebung  $B$ , für die  $h^*(B, A) < \infty$  gilt, und zugehöriger Vergleichsfunktion  $\beta$  aus der Klasse  $\mathcal{KL}$ . Dann ist  $A$  wISDS für eine geeignete Attraktionsrate  $\mu$ , einen geeigneten overshoot gain  $\sigma$  und geeignete Robustheitsverstärkung  $\gamma$  für eine nichtleere Menge von Störwerten  $W$ .  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  und  $W$  hängen hierbei nur von  $h^*(B, A)$ ,  $\beta$ ,  $\varrho$  und der zum ungestörten System zugehörigen Lipschitz-Konstanten  $L$  ab.

Den Beweis dieses Satzes kann man in [Gr 02] nachlesen (Theorem 4.4.5). Dort findet sich auch ein ähnlicher Satz für den starken Fall (Theorem 3.4.6).

## Kontrahierbare Familien

Für die Robustheits-Eigenschaft wISDS werden ähnliche Charakterisierungen wie für die Eigenschaft sISDS benötigt. Zunächst werden zu diesem Zweck wieder verschachtelte Mengen verwendet, die zu einer attrahierenden Menge  $A$  zusammenschrumpfen. Da hier schwache Konzepte beschrieben werden, also Konzepte, die nur für ein  $u \in \mathcal{U}$  gelten, heißen diese Mengen „kontrahierbar“.

**Definition 2.2.11 (Kontrahierbare Familie von Umgebungen)** Betrachte eine schwach attrahierende Menge  $A$  mit (offener) attrahierter Umgebung  $B$ . Eine Familie  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_0^+}$  von Mengen  $B_\alpha \subset \mathbb{R}^d$  zusammen mit einer Funktion  $\vartheta$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  heißt *kontrahierbare Familie von Umgebungen* für  $A$  bezüglich  $B$ , wenn

- (i)  $B_{\alpha'} \subseteq B_\alpha$ ,  $\alpha' < \alpha$ ,
- (ii)  $B_0 = A$ ,
- (iii) es für alle Teilmengen  $\tilde{B} \subseteq B$  mit  $h(\tilde{B}, A) < \infty$  ein  $\alpha^* \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $\tilde{B} \subseteq B_{\alpha^*}$  gibt und
- (iv) es für jedes  $x \in B_\alpha$  und jedes  $t \in \mathbb{T}^+$  ein  $u^* \in \mathcal{U}$  so gibt, daß  $\Psi(t, x, u^*, 0) \in B_{\vartheta(\alpha, t)}$ .

Die Familie  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_0^+}$  heißt  $\alpha$ -kontrahierbar, wenn nicht nur (iv) sondern die folgende schärfere Bedingung (iv') gilt:

- (iv') Für jedes  $x \in B_\alpha$ , jedes  $t \in \mathbb{T}^+$  und diejenigen  $p \in \mathcal{P}$ , die für alle  $u \in \mathcal{U}$  die Bedingung  $\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, \tau)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$  für zeitkontinuierliche Systeme bzw. die Bedingung  $\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, (i+1)h)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$  mit  $\tau \in (ih, (i+1)h]$  für zeitdiskrete Systeme erfüllen, gibt es ein  $u^* \in \mathcal{U}$  so, daß  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\vartheta(\alpha, t)}$ .  $\square$

Eigenschaft (iv') gilt nur für die durch  $\alpha > 0$  beschränkten Störstrategien  $p \in \mathcal{P}_\alpha$ . Wie bei den kontrahierenden Mengen soll auch für die kontrahierbaren Mengen aus (iv') eine Verallgemeinerung für beliebige  $p \in \mathcal{P}$  gezeigt werden:

**Lemma 2.2.12** Betrachte eine  $\alpha$ -kontrahierbare Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$ . Dann gibt es für alle  $x \in B_\alpha$ ,  $p \in \mathcal{P}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$  ein  $u^* \in \mathcal{U}$  mit

$$\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\alpha'}$$

für  $\alpha' = \max\{\vartheta(\alpha, t), \bar{\nu}(w, t)\}$  mit  $\bar{\nu} = \tilde{\nu}$  aus der Definition 2.2.8 mit  $\mu = \vartheta$  und  $\gamma = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**Beweis:** Sei  $x \in B_\alpha$ ,  $p \in \mathcal{P}$  und  $t \in \mathbb{T}^+$ . Sei  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  die kleinste Zahl mit  $\vartheta(\tilde{\alpha}, t) \geq \bar{\nu}(w, t)$ . Mit  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  gilt wegen Eigenschaft (i) aus der Definition der kontrahierbaren Familie von Umgebungen  $x \in B_{\tilde{\alpha}}$ . Wendet man Lemma 2.2.9 (i) an, so erhält man  $\bar{\nu}(p, \tau) \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für alle  $\tau \in (0, t] \cap \mathbb{T}^+$ ; hieraus ergibt sich für alle  $u \in \mathcal{U}$  die Ungleichung  $\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, \tau)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$  für zeitkontinuierliche Systeme bzw. die Ungleichung  $\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\tilde{\alpha}, (i+1)h)$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$  mit  $\tau \in (ih, (i+1)h]$  für zeitdiskrete Systeme. Eigenschaft (iv') der kontrahierbaren Familie liefert nun ein  $u^* \in \mathcal{U}$  für das  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\vartheta(\tilde{\alpha}, t)}$  gilt. Wegen der Wahl von  $\tilde{\alpha}$  gilt  $\alpha' = \vartheta(\tilde{\alpha}, t)$ , also gilt für  $u^*$  die zu beweisende Behauptung  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\alpha'}$ .  $\square$

Anders als bei den kontrahierenden Mengen gilt das obige Lemma nur für ein festes  $t \in \mathbb{T}^+$ , da die Wahl von  $u^*$  von  $t$  abhängt. Mit Hilfe einer einfachen Induktion läßt sich das Lemma aber auf beliebige Folgen  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T}$  verallgemeinern:

**Folgerung 2.2.13** Betrachte eine  $\alpha$ -kontrahierbare Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$ . Für alle  $\alpha > 0$ ,  $x \in B_\alpha$  und  $p \in \mathcal{P}$  gilt

$$\Psi(t, x, u, p[u]) \in B_{\alpha'(t)} \text{ schwach für alle } t \geq 0,$$

wobei  $\alpha': \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert ist durch  $\alpha'(\tau) := \max\{\vartheta(\alpha, \tau), \bar{\nu}(w, \tau)\}$  mit  $\bar{\nu}$  aus Lemma 2.2.12.

**Beweis:** Betrachte  $p \in \mathcal{P}$  und eine Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{T}$ . Sei  $x_0 := x$ ,  $x_{i+1} := \Psi(t_{i+1} - t_i, x_i, u_i, p_i[u_i])$ , wobei  $u_i = u^*$  aus Lemma 2.2.12 zu  $x = x_i$  und  $p_i = p[u_0 \&_{t_1} u_1 \&_{t_2} \dots \&_{t_i} \cdot]$ . Durch Induktion zeigt man nun, daß  $x_i \in B_{\alpha'_i}$  mit

$$\alpha'_i \leq \max \{ \vartheta(\alpha'_{i-1}, t_i - t_{i-1}), \bar{\nu}(p_{i-1}, t_i - t_{i-1}) \}.$$

Hieraus ergibt sich wiederum durch Induktion mit Hilfe von  $\bar{\nu}(p_i, t) = \bar{\nu}(p(t_i + \cdot), t)$  und Eigenschaft (ii) aus dem Lemma 2.2.9

$$\alpha'_i \leq \max \{ \vartheta(\alpha, t_i), \bar{\nu}(p, t) \}. \quad \square$$

Analog zum Hilfssatz 2.1.10 kann nun eine Aussage über den Zusammenhang von  $\alpha$ -kontrahierbaren Mengen und der ISDS-Eigenschaft hergeleitet werden.

**Hilfssatz 2.2.14** Betrachte eine schwach vorwärtsinvariante Menge  $A$ . Dann gilt:

$A$  ist wISDS mit Attraktionsrate  $\mu$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$ , genau dann wenn es eine  $\alpha$ -kontrahierbare Familie von Umgebungen  $(B_\alpha)$  gibt mit

$$\begin{aligned} h(B_\alpha, A) &\leq \gamma(\alpha), \\ \mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B &\subset B_\alpha \end{aligned}$$

und

$$\vartheta(\alpha, t) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), t)).$$

**Beweis:** Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft analog zu dem des Hilfssatzes 2.1.10. Die Richtung „wISDS  $\Rightarrow (B_\alpha)$ “ ergibt sich mit

$$B_\alpha := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathcal{P} : d(\Psi(t, x, u, p[u]), A) \leq \max\{\mu(\alpha, t), \bar{\nu}(p, t)\} \text{ schwach } \forall t \geq 0 \},$$

für die Richtung „ $(B_\alpha) \Rightarrow$  wISDS“ wird Folgerung 2.2.13 benötigt. □

## Lyapunov-Funktionen

Wie im Abschnitt über starke dynamische Konzepte wird nun auch in diesem Abschnitt die Robustheits-Eigenschaft ISDS noch einmal mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen charakterisiert. Hierbei finden die gerade eingeführten kontrahierbaren Mengen Verwendung.

Der folgende Hilfssatz liefert eine Lyapunov-Funktion auf einer Umgebung einer Menge  $A$ , die so konstruiert ist, daß aus ihrer Existenz wISDS folgt.

**Hilfssatz 2.2.15 (wISDS Lyapunov-Funktion)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  eine abgeschlossene kompakt beschränkte schwach vorwärtsinvariante Menge. Angenommen es gibt Funktionen

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\tilde{\gamma}$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\tilde{\mu}$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ , eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine offene Menge  $B \subseteq C$  mit  $A \subset B$  und eine Funktion  $V: C \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\begin{aligned}\sigma_1(d(x, A)) &\leq V(x) \text{ f\u00fcr alle } x \in C, \\ V(x) &\leq \sigma_2(d(x, A)) \text{ f\u00fcr alle } x \in B,\end{aligned}$$

so, da\u00df es f\u00fcr jedes  $p \in \mathcal{P}$ , jedes  $x \in C$  und jedes  $t \in \mathbb{T}^+$  ein  $u^* \in \mathcal{U}$  gibt mit  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in C$  und

$$V(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t) \}, \quad (2.9)$$

wobei  $\tilde{\nu}$  mit Hilfe von  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\gamma}$  wie in der Definition 2.2.8 definiert ist.

Dann ist die Menge  $A$  wISDS mit attrahierter Umgebung  $B$ , Attraktionsrate  $\mu(r, t) = \sigma_1^{-1}(\tilde{\mu}(\sigma_1(r), t))$ , overshoot gain  $\sigma(r) = \sigma_1^{-1}(\sigma_2(r))$  und Robustheitsverst\u00e4rkung  $\gamma(r) = \sigma_1^{-1}(\tilde{\gamma}(r))$ .

**Beweis:** Betrachte die Mengen

$$B_\alpha := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) \leq \tilde{\gamma}(\alpha) \}.$$

Es soll gezeigt werden, da\u00df die Familie  $(B_\alpha)$  die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2.14 erf\u00fcllt. F\u00fcr die  $B_\alpha$  gilt

$$h(B_\alpha, A) = \sup \{ d(x, A) \mid V(x) \leq \tilde{\gamma}(\alpha) \} \leq \sigma_1^{-1}(\tilde{\gamma}(\alpha)) = \gamma(\alpha)$$

und

$$\mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma(\alpha)), A) \cap B = \mathcal{B}(\sigma_2^{-1}(\tilde{\gamma}(\alpha)), A) \cap B \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) \leq \tilde{\gamma}(\alpha) \} = B_\alpha.$$

Sei nun  $x \in B_\alpha$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$  und  $p \in \mathcal{P}$ . Nach Voraussetzung gibt es dann ein  $u^* \in \mathcal{U}$  so, da\u00df

$$V(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) \leq \max \{ \tilde{\mu}(\tilde{\gamma}(\alpha), t), \tilde{\nu}(w, t) \}$$

gilt, woraus folgt, da\u00df  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\alpha'}$  mit

$$\alpha' = \max \{ \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\mu}(\tilde{\gamma}(\alpha), t)), \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\nu}(w, t)) \}.$$

Sei  $\vartheta(\alpha, t) := \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\mu}(\tilde{\gamma}(\alpha), t)) = \gamma^{-1}(\mu(\gamma(\alpha), t))$ . Gilt f\u00fcr alle  $u \in \mathcal{U}$ , da\u00df die St\u00f6rstrategie  $p$

$$\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, \tau) \text{ f\u00fcr fast alle } \tau \in [0, t]$$

f\u00fcr zeitkontinuierliche Systeme bzw.

$$\|p[u](\tau)\| \leq \vartheta(\alpha, (i+1)h) \text{ f\u00fcr fast alle } \tau \in [0, t] \text{ mit } \tau \in (ih, (i+1)h]$$

f\u00fcr zeitdiskrete Systeme erf\u00fcllt, so folgt

$$\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\nu}(w, t)) \leq \vartheta(\alpha, t)$$

und damit  $\alpha' = \vartheta(\alpha, t)$ . Die  $B_\alpha$  erf\u00fcllen die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2.14, d. h.  $A$  ist wISDS.  $\square$

Anders als im vorherigen Abschnitt über starke dynamische Konzepte soll hier nun eine weitere Lyapunov-Funktion angegeben werden, aus deren Existenz gerade wISDS folgt. Der Unterschied zur im vorangehenden Hilfssatz eingeführten Lyapunov-Funktion liegt in der Abschwächung der Bedingung (2.9) zu (2.10).

**Hilfssatz 2.2.16 (wISDS Lyapunov-Funktion)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  eine abgeschlossene kompakt beschränkte schwach vorwärtsinvariante Menge. Angenommen es gibt Funktionen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\tilde{\gamma}$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\tilde{\mu}$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ , eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine offene Menge  $B \subseteq C$  mit  $A \subset B$  und eine Funktion  $V: C \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\begin{aligned}\sigma_1(d(x, A)) &\leq V(x) \text{ für alle } x \in C, \\ V(x) &\leq \sigma_2(d(x, A)) \text{ für alle } x \in B,\end{aligned}$$

so, daß für jedes  $p \in \mathcal{P}$ , jedes  $x \in C$  und jedes  $t \in \mathbb{T}^+$  die Ungleichung

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{p,x,t}} V(\Psi(t, x, u, p[u])) \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t) \}, \quad (2.10)$$

gilt, wobei  $\tilde{\nu}$  mit Hilfe von  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\gamma}$  wie in der Definition 2.2.8 definiert ist und  $\mathcal{U}_{p,x,t} := \{u \in \mathcal{U} \mid \Psi(t, x, u, p[u]) \in C\}$ .

Dann ist die Menge  $A$  für jedes  $\varepsilon > 0$  wISDS mit attrahierter Umgebung  $B$ , Attraktionsrate  $\mu_\varepsilon(r, t) = \sigma_1^{-1}(\tilde{\mu}(\sigma_1(r), (1 - \varepsilon)t))$ , overshoot gain  $\sigma(r) = \sigma_1^{-1}(\sigma_2(r))$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma_\varepsilon(r) = \sigma_1^{-1}((1 + \varepsilon)\tilde{\gamma}(r))$ .

**Beweis:** Es soll gezeigt werden, daß es für jedes  $x \in C$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$  und  $p \in \mathcal{P}$  ein  $u^* \in \mathcal{U}$  so gibt, daß  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in C$  gilt und die Ungleichung

$$V(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), (1 - \varepsilon)t), \tilde{\nu}_\varepsilon(w, t) \} \quad (2.11)$$

erfüllt ist, wobei  $\tilde{\nu}_\varepsilon$  mit Hilfe von  $\tilde{\mu}(\cdot, (1 - \varepsilon)\cdot)$  und  $(1 + \varepsilon)\tilde{\gamma}$  wie in der Definition 2.2.8 definiert ist. Hieraus ergibt sich dann die Behauptung aus Hilfssatz 2.2.15.

Sei nun  $x \in C$ ,  $t \in \mathbb{T}^+$  und  $p \in \mathcal{P}$  und  $\delta > 0$ . Aus (2.10) ergibt sich die Existenz eines  $u^* \in \mathcal{U}$  so, daß  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in C$  und

$$V(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t) \} + \delta.$$

Ist  $\max\{\tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t)\} = 0$ , so folgt  $x \in A$  und  $\sup_{u \in \mathcal{U}} \|p[u]\|_{[0,t]} = 0$ . Da die Menge  $A$  schwach vorwärtsinvariant ist, gibt es in diesem Fall also ein  $u' \in \mathcal{U}$  so, daß  $\Psi(t, x, u', p[u']) \in A$  und damit auch  $V(\Psi(t, x, u', p[u'])) = 0$ . Gleichung (2.11) ist für  $\max\{\tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t)\} = 0$  also mit  $u'$  erfüllt. Gilt  $\max\{\tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t)\} > 0$ , so kann  $\delta > 0$  so klein gewählt werden, daß

$$\max \{ \tilde{\mu}(V(x), t), \tilde{\nu}(w, t) \} + \delta \leq \max \{ \tilde{\mu}(V(x), (1 - \varepsilon)t), \tilde{\nu}_\varepsilon(w, t) \}$$

gilt, (2.11) ist in diesem Fall also für  $u^*$  erfüllt.  $\square$

**Definition 2.2.17 (wISDS Lyapunov-Funktion)** Die Funktion  $V$  aus dem Hilfssatz 2.2.15 bzw. dem Hilfssatz 2.2.16 heißt *wISDS Lyapunov-Funktion*.  $\square$

Wieder fehlt noch der Nachweis, daß aus der wISDS-Eigenschaft die Existenz einer Lyapunov-Funktion folgt.

**Satz 2.2.18** Betrachte das zeitkontinuierliche gestörte System (1.3) oder das zeitdiskrete gestörte System (1.13) mit Lösung  $\Psi$ . Sei  $A$  eine abgeschlossene komplementär beschränkte schwach vorwärtsinvariante Menge für das jeweils zugehörige ungestörte System (1.1) bzw. (1.11);  $B$  sei eine offene Umgebung von  $A$ . Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Die Menge  $A$  ist wISDS mit attrahierter Umgebung  $B$ , Attraktionsrate  $\mu(\cdot, (1 - \varepsilon)\cdot)$ , overshoot gain  $\sigma$  und Robustheitsverstärkung  $(1 + \varepsilon)\gamma$ .
- (ii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Menge  $C \subset \mathbb{R}^d$  mit  $B \subseteq C$  und eine Funktion  $V_\varepsilon: C \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x) &\geq d(x, A) \text{ für alle } x \in C, \\ V_\varepsilon(x) &\leq \sigma(d(x, A)) \text{ für alle } x \in B \end{aligned}$$

und für jedes  $x \in B$  und jedes  $p \in \mathcal{P}$

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{p,x,t}} V_\varepsilon(\Psi(t, x, u, p[u])) \leq \max \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - \varepsilon)t), \tilde{v}_\varepsilon(p, t) \} \quad (2.12)$$

für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  erfüllt, wobei  $\tilde{v}_\varepsilon$  mit Hilfe von  $(1 + \varepsilon)\gamma$  und  $\mu(\cdot, (1 - \varepsilon)\cdot)$  wie in der Definition 2.2.8 definiert ist und  $\mathcal{U}_{p,x,t} := \{u \in \mathcal{U} \mid \Psi(t, x, u, p[u]) \in C\}$ .

**Beweis:** (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\gamma_\varepsilon := (1 + \varepsilon)\gamma$ . Hilfssatz 2.2.14 liefert eine kontrahierbare Menge von Umgebungen  $(B_\alpha)$  mit  $\vartheta(\alpha, t) = \gamma_\varepsilon^{-1}(\mu(\gamma_\varepsilon(\alpha), (1 - \varepsilon)t))$ . Setze nun  $C := \text{int} \bigcup_{\alpha > 0} B_\alpha$  und

$$V_\varepsilon(x) := \gamma_\varepsilon(\inf\{\alpha > 0 \mid x \in B_\alpha\}).$$

Die beiden Eigenschaften  $h(B_\alpha, A) \leq \gamma_\varepsilon(\alpha)$  und  $\mathcal{B}(\sigma^{-1}(\gamma_\varepsilon(\alpha)), A) \cap B \subset B_\alpha$  der Funktion  $\gamma_\varepsilon$  aus Hilfssatz 2.2.14 liefern nun die beiden für  $V_\varepsilon$  geforderten Grenzen  $V_\varepsilon(x) \leq \sigma(d(x, A))$  für  $x \in B$  und  $V_\varepsilon(x) \geq d(x, A)$  für  $x \in C$ . Nun zum Beweis von (2.12):

Sei  $x \in C$ , und sei  $\alpha$  so gewählt, daß  $\gamma_\varepsilon(\alpha) = V_\varepsilon(x)$  gilt. Wegen der Definition der Funktion  $V_\varepsilon$  gilt  $x \in B_{\alpha+\delta}$  für alle  $\delta > 0$ . Lemma 2.2.12 liefert nun für jedes  $p \in \mathcal{P}$  und jedes  $t \in \mathbb{T}^+$  ein  $u^* \in \mathcal{U}_{p,x,t}$  mit  $\Psi(t, x, u^*, p[u^*]) \in B_{\alpha'}$  mit

$$\alpha' = \max \{ \vartheta(\alpha + \delta, t), \gamma_\varepsilon^{-1}(\tilde{v}_\varepsilon(p, t)) \},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) &\leq \gamma_\varepsilon(\alpha') \\ &= \max \{ \gamma_\varepsilon(\vartheta(\alpha + \delta, t)), \tilde{v}_\varepsilon(p, t) \} \\ &= \max \{ \mu(\gamma_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{-1}(V_\varepsilon(x)) + \delta), (1 - \varepsilon)t), \tilde{v}_\varepsilon(p, t) \}. \end{aligned}$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  ergibt sich, daß  $V_\varepsilon(\Psi(t, x, u^*, p[u^*])) \leq \max\{\mu(V_\varepsilon(x), (1 - \varepsilon)t), \tilde{v}_\varepsilon(p, t)\}$  für  $u^*$  gilt, daher gilt auch (2.12).

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\varepsilon_1 > 0$  so gewählt, daß  $(1 + \varepsilon_1)^2 \leq 1 + \varepsilon$  und damit auch  $(1 - \varepsilon_1)^2 \geq 1 - \varepsilon$  gilt. Wendet man auf (ii) mit  $\varepsilon_1$  Hilfssatz 2.2.14 (ebenfalls mit  $\varepsilon_1$ ) an, so erhält man (i).  $\square$

## Aufgeblasene Systeme

Wie schon im vorherigen Abschnitt über starke dynamische Konzepte erläutert, werden die aufgeblasenen Systeme benötigt, um im folgenden Kapitel 3 die Diskretisierung des Zustandsraumes zu untersuchen.

Die folgende Aussage dient dazu, nachzuweisen, daß es zu einer schwach attrahierenden Menge  $A$  für ein zeitdiskretes System eine entsprechende schwach attrahierende Menge  $\widehat{A}$  der zugehörigen Zustandsraumdiskretisierung in der Nähe von  $A$  gibt, vgl. Lemma 3.1.3 (ii) und Satz 3.1.7.

**Lemma 2.2.19** Sei  $h > 0$ . Betrachte ein zeitdiskretes  $\alpha_0$ -aufgeblasenes System vom Typ (1.14) mit einer Menge von Störstrategien  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^h$ . Seien  $\varepsilon > 0$  und  $\alpha \geq 0$  so, daß  $\alpha + \varepsilon \leq \alpha_0$ . Dann gilt:

Zu jedem  $\tilde{p} \in \mathcal{P}_\alpha$  und jeder Familie von Punkten  $x_h(u) \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x_h(u) - \phi_h(x_0, u, \tilde{p}[u])\| \leq h\varepsilon$  für alle  $u \in \mathcal{U}$  gibt es ein  $p \in \mathcal{P}_{\alpha+\varepsilon}$  so, daß

$$\phi_h(x_0, u, p[u]) = x_h(u)$$

für alle  $u \in \mathcal{U}$  gilt.

**Beweis:** Mit  $p[u](t) := \tilde{p}[u](t) + \frac{x_h(u) - \phi_h(x_0, u, \tilde{p}[u](t))}{h}$  ist die Behauptung dieses Lemmas erfüllt, denn es gilt

- $p \in \mathcal{P}^h$ , da  $\tilde{p} \in \mathcal{P}^h$
- und analog zum Beweis von Lemma 2.1.15  $\phi_h(x_0, u, p[u]) = x_h(u)$  und  $p \in \mathcal{P}_{\alpha+\varepsilon}$ .  $\square$

## 2.3 Einzugsbereiche

(Schwache) Einzugsbereiche sind diejenigen Mengen, um deren Berechnung es im folgenden Kapitel 3 geht. Sie stellen die Menge aller Punkte dar, die von einer attrahierenden Menge angezogen werden.

### Definition 2.3.1 (Einzugsbereich)

(i) Sei  $A$  eine stark attrahierende Menge. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} \exists \text{ eine Funktion } \beta(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty : \\ d(\Psi(t, x_0, u, 0), A) \leq \beta(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^+, u \in \mathcal{U} \end{array} \right\}$$

der (gleichmäßige) starke Einzugsbereich von  $A$ .

(ii) Sei  $A$  eine schwach attrahierende Menge. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in \mathcal{U} : d(\Psi(t, x_0, u, 0), A) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \right\}$$

der *schwache Einzugsbereich* von  $A$ . □

Für schwache Einzugsbereiche findet man in der Literatur auch die Bezeichnung *Kontrollierbarkeitsmenge*, vgl. [Gr 01].

### Bemerkungen 2.3.2

- Für die attrahierte Umgebung  $B$  einer attrahierten Menge  $A$  gilt  $B \subset \mathcal{D}(A)$ . Der Einzugsbereich ist jedoch keine attrahierte Umgebung (außer im Fall  $B = \mathcal{D}(A) = \mathbb{R}^d$ ), da für die Punkte aus  $\mathcal{D}(A)$  keine gleichmäßige Konvergenz – ausgedrückt durch eine Vergleichsfunktion aus der Klasse  $\mathcal{KL}$  – gefordert wird<sup>1</sup>, für die Punkte aus der attrahierten Umgebung  $B$  hingegen schon, vgl. [Gr 02, Lemma 7.1.2].
- Der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  einer stark oder schwach attrahierenden Menge  $A$  ist offen, vgl. [Gr 02, Proposition 7.1.4].
- Betrachte eine schwach attrahierende Menge  $A$ . Dann ist  $\mathcal{D}(A)$  schwach vorwärtsinvariant,  $\mathcal{D}(A)^C$  ist jedoch stark vorwärtsinvariant. Dies ermöglicht es, starke Eigenschaften für  $\mathcal{D}(A)^C$  zu fordern, vgl. die Sätze 3.2.5 und 3.2.7. □

## Robustheit

Um den Konvergenzbeweis des Unterteilungsalgorithmus aus Kapitel 3 zu führen, werden nicht nur Robustheits-Eigenschaften der attrahierenden Mengen benötigt sondern natürlich auch die der Einzugsbereiche. Diese Eigenschaften sind eng verwandt: Für eine stark/schwach attrahierende Menge  $A$  für das zeitkontinuierliche ungestörte System (1.1) mit beschränktem Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  gilt nämlich, daß  $\mathcal{D}(A)^C$  eine stark/schwach asymptotisch stabile Menge für das zeitumgekehrte System ist. Insbesondere ist  $\mathcal{D}(A)^C$  sISDS/wISDS für das aufgeblasene zeitumgekehrte System, vgl. [Gr 02, Proposition 7.3.1].

Hier sollen wieder Lyapunov-Funktionen zur qualitativen Beschreibung der Robustheit verwendet werden. Entsprechend dem oben gesagten, wird hierzu für eine attrahierende Menge  $A$  auf eine Umgebung  $B$  von  $\mathcal{D}(A)^C$  Bezug genommen. Das zeitumgekehrte System wird nicht verwendet sondern direkt Bedingungen wie (2.13) bzw. (2.14) für das zugrundeliegende System angeben.

**Definition 2.3.3 (dynamische Robustheit von Einzugsbereichen)** Bezeichne  $\Psi$  hier die Lösungstrajektorie des aufgeblasenen zeitkontinuierlichen Systems (1.4) und des aufgeblasenen zeitdiskreten Systems (1.14); bezeichne  $\Psi^0$  die Lösungstrajektorie der jeweils zugehörigen ungestörten Systeme (1.1) und (1.11).

---

<sup>1</sup>Für den starken Fall sei daran erinnert, daß stark attrahierende Mengen stark asymptotisch stabil sind, vgl. Bemerkung 2.1.4.



- (i) Betrachte eine stark attrahierende Menge  $A$  bezüglich  $\Psi^0$  mit Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$ . Der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  heißt *dynamisch robust* mit Rate  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  und Maßen  $\sigma$  und  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  auf einer offenen *Robustheits-Umgebung*  $B$  von  $\mathcal{D}(A)^C$ , wenn es eine beschränkte Funktion  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gibt, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} V(x) &\geq d(x, \mathcal{D}(A)^C) \text{ für alle } x \in B, \\ V(x) &\leq \sigma(d(x, \mathcal{D}(A)^C)) \text{ für alle } x \in B, \\ V(x) &\equiv a \text{ für alle } x \notin B \quad \text{und} \quad V(x) < a \text{ für alle } x \in B \end{aligned}$$

erfüllt für eine Konstante  $a > 0$  und

$$V(\Psi(t, x, u, w)) \geq \min \{ \mu(V(x), -t), a \} \quad (2.13)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , alle  $u \in \mathcal{U}$  und alle  $w \in \mathcal{W}$  mit der Eigenschaft  $\gamma(\|w(\tau)\|) \leq \min\{\mu(V(x), -\tau), a\}$  für fast alle  $\tau \in [0, t]$  für die zeitkontinuierlichen Systeme bzw.  $\gamma(\|w(t)\|_{[hi, h(i+1)]}) \leq \min\{\mu(V(x), -hi), a\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $h(i+1) \leq t$  für die zeitdiskreten Systeme.

- (ii) Betrachte eine schwach attrahierende Menge  $A$  bezüglich  $\Psi^0$  mit Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$ . Der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  heißt *dynamisch robust* (bezüglich einer Menge von Störstrategien  $\mathcal{P}$ ) mit Rate  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$  und Maßen  $\sigma$  und  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  auf einer offenen *Robustheits-Umgebung*  $B$  von  $\mathcal{D}(A)^C$ , wenn es eine beschränkte Funktion  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gibt, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} V(x) &\geq d(x, \mathcal{D}(A)^C) \text{ für alle } x \in B, \\ V(x) &\leq \sigma(d(x, \mathcal{D}(A)^C)) \text{ für alle } x \in B, \\ V(x) &\equiv a \text{ für alle } x \notin B \quad \text{und} \quad V(x) < a \text{ für alle } x \in B \end{aligned}$$

erfüllt für eine Konstante  $a > 0$  und

$$V(\Psi(t, x, u, p[u])) \geq \min \{ \mu(V(x), -t), a \} \text{ schwach für alle } t \in \mathbb{T}^+ \quad (2.14)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $p \in \mathcal{P}$  mit  $\gamma(\|p[u](\tau)\|) \leq \min\{\mu(V(x), -\tau), a\}$  für alle  $u \in \mathcal{U}$  und fast alle  $\tau \in [0, t]$  für die zeitkontinuierlichen Systeme bzw.  $\gamma(\|p[u]\|_{[hi, h(i+1)]}) \leq \min\{\mu(V(x), -hi), a\}$  für alle  $u \in \mathcal{U}$  und für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $h(i+1) \leq t$  für die zeitdiskreten Systeme.  $\square$

#### Bemerkungen 2.3.4

- Ist  $A$  asymptotisch stabil und  $\mathcal{D}(A)$  beschränkt, so findet sich für jedes  $\delta > 0$  eine Robustheitsumgebung  $B$  für  $\mathcal{D}(A)^C$  mit  $cl B \cap A = \emptyset$ , auf der der Einzugsbereich dynamisch robust ist für Strategien aus der Menge  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^\delta$ , vgl. [Gr 02, Proposition 7.3.3]. Es kann also im folgenden Kapitel von der Existenz einer passenden Robustheits-Umgebung ausgegangen werden.
- Betrachte das zeitkontinuierliche ungestörte System  $\varphi$  vom Typ (1.1) und eine zugehörige stark/schwach asymptotisch stabile Menge  $A$ . Dann stimmt für jedes  $h > 0$

der Einzugsbereich von  $A$  für  $\varphi$  mit dem Einzugsbereich für die Zeit- $h$ -Abbildung  $\varphi_h^0$  überein, vgl. [Gr 02, Proposition 7.3.4]. Es ist also ausreichend den Einzugsbereich der Zeit- $h$ -Abbildung zu finden, wobei  $h$  beliebig groß sein darf! Dies läßt vermuten, daß die numerische Berechnung des Einzugsbereiches auch sinnvoll ist, wenn nur Näherungen für  $\varphi$  zur Verfügung stehen. Tatsächlich hängt der bei der Verwendung von Näherungen für  $\varphi$  entstehende Fehler ab vom Robustheits-Maß  $\gamma$ , der Lipschitz-Konstanten  $L$  aus (1.7) und der Ordnung des verwendeten Näherungsverfahrens. Für die genauere Abschätzung des entstehenden Fehlers vgl. [Gr 02, Section 7.4].  $\square$

## Kapitel 3

# Berechnung von Einzugsbereichen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln die nötige Vorarbeit geleistet wurde, kann nun in diesem Kapitel der Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung von Einzugsbereichen schwach attrahierender Mengen behandelt werden.

Die Grundidee eines Unterteilungsalgorithmus ist folgende: Es soll innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge eine bestimmte Menge gefunden werden. Die Grundmenge wird zu diesem Zweck in „Zellen“ aufgeteilt. Dann wird für diese Zellen jeweils entschieden, ob sie ganz, gar nicht oder nur teilweise zur gesuchten Menge gehören. Zellen, die nur teilweise zur gesuchten Menge gehören, werden wiederum in kleinere Zellen unterteilt (Verfeinerung), und dann muß erneut entschieden werden, ob diese „Teilzellen“ zur gesuchten Menge gehören.

Hier ist die Grundmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ; die gesuchte Menge ist der Einzugsbereich. Mit der allgemeinen Idee der Unterteilung lassen sich aber auch andere Mengen berechnen, z. B. Attraktoren wie in [De/Ho 97] oder in [Gr 02, Chapter 6] oder Viabilitätskerne wie in [Sz 97].

Im ersten Abschnitt des vorliegenden Kapitels geht es zunächst um die Diskretisierung des Zustandsraumes oder – einfacher ausgedrückt – um die Aufteilung in Zellen. Insbesondere werden mengenwertige Abbildungen eingeführt, mit deren Hilfe wie oben beschrieben festgestellt werden soll, ob Zellen ganz, gar nicht oder nur teilweise zum gesuchten Einzugsbereich gehören: die Zustandsraumdiskretisierungen.

Im zweiten Abschnitt wird dann der Unterteilungsalgorithmus formuliert und seine Konvergenz unter verschiedenen Bedingungen (rigorose Zustandsraumdiskretisierungen und Zustandsraumdiskretisierungen mit innerem Fehler  $h\varepsilon$ ) untersucht.

### 3.1 Diskretisierung des Zustandsraums

Dieser Abschnitt beschreibt die Diskretisierung des Zustandsraumes, d. h. die Aufteilung einer Teilmenge  $\Omega$  des Zustandsraumes  $\mathbb{R}^d$  in Zellen, und die Eigenschaften einer mengen-

wertigen Abbildung auf diesen Zellen: der Zustandsraumdiskretisierung. Solche Abbildungen werden für den Unterteilungsalgorithmus benötigt, um festzustellen, ob Zellen in eine vorgegebene Menge abgebildet werden.

Bevor die Definition der Zustandsraumdiskretisierung angegeben werden kann, muß zunächst die Aufteilung von  $\Omega$  in Zellen formalisiert werden:

**Definition 3.1.1 (Zellen und Zellüberdeckungen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Eine *Zellüberdeckung*  $\mathcal{Q} = (Q_i)_{i=1,\dots,P}$  von  $\Omega$  ist eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ ,  $P \in \mathbb{N}$ , mit nichtleerem Inneren, so daß  $\text{int } Q_i \cup \text{int } Q_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i=1,\dots,P} Q_i = \Omega$ . Die  $Q_i$  heißen die *Zellen* der Diskretisierung.  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  sei die Familie aller möglichen Vereinigungen der Zellen aus  $\mathcal{Q}$ , d. h.

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} := \left\{ C \subset \Omega \mid C = \bigcup_{i \in I} Q_i \text{ für eine Indexmenge } I \subset \{1, \dots, P\}, I \neq \emptyset \right\}.$$

Für ein  $Q$  aus  $\mathcal{Q}$  heißt  $\text{diam}(Q) := \max_{x,y \in Q} \|x - y\|$  der *Durchmesser* von  $Q$ ,  $\text{diam}(\mathcal{Q}) := \max_{i=1,\dots,P} \text{diam}(Q_i)$  heißt der *maximale Durchmesser* von  $\mathcal{Q}$ .  $\square$

Mit Hilfe der formal definierten Zellen kann nun die Zustandsraumdiskretisierung eingeführt werden. Sie ist bezüglich des zeitdiskreten Systems (1.11) definiert: Für die Berechnung des Einzugsbereiches der attrahierenden Menge eines zeitkontinuierlichen Systems (1.1), dessen Lösung (und damit die zugehörige Zeit- $h$ -Abbildung) nicht bekannt ist, ist also eine zusätzliche Diskretisierung in der Zeit notwendig, z. B. mit einem der Taylor-Verfahren aus Kapitel 4.

**Definition 3.1.2 (Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung)** Betrachte eine Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$  einer kompakten Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und ein zeitdiskretes ungestörtes System  $\phi_h^0$  vom Typ (1.11). Betrachte weiter reelle Zahlen  $\Delta_i \in \mathbb{R}^+$  für  $i = 1, \dots, P$ . Eine mengenwertige Abbildung  $\hat{\phi}_h: \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \times \mathcal{U}(\Omega) \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{R}^d)$  heißt *Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung* von  $\phi_h^0$  mit Genauigkeit  $\Delta_i$ , falls  $\text{diam}(Q_i) \leq \Delta_i$  gilt und  $\hat{\phi}_h$  für alle  $i = 1, \dots, P$  und alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  folgende Bedingungen erfüllt:

$$\hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u}) \cap \Omega \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \cup \emptyset.$$

Weiter sollen für  $\hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u})$  die folgenden Ungleichungen für  $i = 1, \dots, P$  gelten:

(i) Für jedes  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$

$$h^*(\hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u}), \phi_h^0(Q_i, \bar{u})) \leq \Delta_i,$$

wobei  $\phi_h^0(Q, \bar{u}) := \bigcup_{x_0 \in Q} \phi_h^0(x_0, \bar{u}(x_0, \cdot))$  für ein  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  und ein  $Q$  aus  $\mathcal{Q}$ .

(ii a) Für jedes  $u \in \mathcal{U}$  und jedes  $x_0 \in Q_i$  existiert ein  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  so, daß

$$h^*(\phi_h^0(x_0, u), \hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u})) \leq \Delta_i \tag{3.1}$$

erfüllt ist, und umgekehrt

(ii b) für jedes  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  und jedes  $x_0 \in Q_i$  existiert ein  $u \in \mathcal{U}$  so, daß

$$h^* (\phi_h^0(x_0, u), \widehat{\phi}_h(Q_i, \bar{u})) \leq \Delta_i \quad (3.1)$$

erfüllt ist.

Die Diskretisierung heißt *rigoros*, wenn (ii a) und (ii b) gelten mit 0 anstelle von  $\Delta_i$ .

Man sagt, die Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  hat den *inneren Fehler*  $\varepsilon$ , wenn (ii a) und (ii b) für ein  $\varepsilon > 0$  gelten mit  $\min\{\varepsilon, \Delta_i\}$  anstelle von  $\Delta_i$ .

Für eine Menge  $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  und eine Folge von Eingangsfunktionen  $\bar{u} = (\bar{u}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\bar{u}_j \in \mathcal{U}(\Omega)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , wird die *Iterierte*  $\widehat{\Phi}_h(kh, C, \bar{u})$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , von  $\widehat{\phi}_h$  bezüglich  $\Omega$  induktiv definiert durch

$$\widehat{\Phi}_h(0, C, \bar{u}) := C$$

und

$$\widehat{\Phi}_h((k+1)h, C, \bar{u}) := \widehat{\phi}_h(\widehat{\Phi}_h(kh, C, \bar{u}) \cap \Omega, \bar{u}_k).$$

$\mathcal{U}$  bezeichne die Menge aller Eingangsfolgen  $\bar{u} = (\bar{u}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\bar{u}_j \in \mathcal{U}(\Omega)$ .  $\square$

Beachte:

- $\widehat{\Phi}_h(kh, C, \bar{u}) = \emptyset$  ist möglich.
- Ein innerer Fehler von  $\varepsilon = 0$  entspräche einer rigorosen Zustandsraumdiskretisierung.

Nun einige einfache Eigenschaften der Zustandsraumdiskretisierung in Form zweier Lemmata.

Das folgende Lemma wird für den Nachweis benötigt, daß es zu einer attrahierenden Menge  $A$  für ein zeitdiskretes System eine entsprechende attrahierende Menge  $\widehat{A}$  der zugehörigen Zustandsraumdiskretisierung in der Nähe von  $A$  gibt (Sätze 3.1.6 und 3.1.7). Auch in den Konvergenzbeweis des Unterteilungsalgorithmus im rigorosen Fall geht es ein.

**Lemma 3.1.3** Sei  $\phi_h$  die rechte Seite des zum ungestörten zeitdiskreten System  $\phi_h^0$  gehörenden  $\alpha_0$ -aufgeblasenen Systems (1.14). Dann gilt offensichtlich nach Lemma 2.1.15 bzw. Lemma 2.2.19 für alle  $Q_i \in \mathcal{Q}$  und alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$

$$(i) \quad \widehat{\phi}_h(Q_i, \bar{u}) \subseteq \bigcup_{w \in \mathcal{W}_{\Delta_i/h}} \bigcup_{x \in Q_i} \phi_h(x, \bar{u}(x, \cdot), w)$$

für  $\frac{\Delta_i}{h} \leq \alpha_0$ , falls  $\bar{u}$  als Störung betrachtet wird, und

$$(ii) \quad \widehat{\phi}_h(Q_i, \bar{u}) \subseteq \bigcup_{p \in \mathcal{P}_{\Delta_i/h}} \bigcup_{x \in Q_i} \phi_h(x, \bar{u}(x, \cdot), p[\bar{u}(x, \cdot)])$$

für  $\frac{\Delta_i}{h} \leq \alpha_0$  und  $\mathcal{P}_{\Delta_i/h} \subset \mathcal{P}^h$ , falls  $\bar{u}$  als Kontrollfunktion betrachtet wird.  $\square$

Und dieses Lemma wird ebenfalls für den Konvergenzbeweis des Unterteilungsalgorithmus im rigorosen Fall benötigt:

**Lemma 3.1.4** Sei  $C$  eine Zelle der Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$  aus der Definition 3.1.2. Die Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  von  $\phi_h^0$  sei rigoros. Dann gilt

$$\forall x_0 \in C \forall \bar{u} \in \mathfrak{U} \exists u \in \mathcal{U} : \quad \Phi_h(t, x_0, u, 0) \in \widehat{\Phi}_h(t, C, \bar{u}) \quad (3.2)$$

sowie

$$\forall x_0 \in C \forall u \in \mathcal{U} \exists \bar{u} \in \mathfrak{U} : \quad \Phi_h(t, x_0, u, 0) \in \widehat{\Phi}_h(t, C, \bar{u}), \quad (3.3)$$

wobei  $t = kh \in \mathbb{T}_0^+ = h\mathbb{N}_0$ .

Beachte:  $\Phi_h(t, x_0, u, 0)$ ,  $t \in \mathbb{T}_0^+$ , ist die Trajektorie des zeitdiskreten ungestörten Systems (1.11) mit der rechten Seite  $\phi_h^0$ .

**Beweis:** Diese beiden Eigenschaften der rigorosen Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  werden mit Hilfe eines Induktionsbeweises über die Anzahl  $k$  der mit der Iterierten  $\widehat{\Phi}_h$  gemachten Schritte gezeigt.

- Für  $k = 0$  gelten (3.2) und (3.3), da

$$\Phi_h(0, x_0, u, 0) = x_0 \in C = \widehat{\Phi}_h(0, C, \bar{u}).$$

- Zuerst die Induktion, die die Eigenschaft (3.2) liefert:

- Sei  $C_k := \widehat{\Phi}_h(kh, C, \bar{u})$ , nach Induktionsannahme (3.2) für  $k$  gibt es dann für die Folge  $\bar{u} \in \mathfrak{U}$  ein  $u_k \in \mathcal{U}$  mit  $x_k := \Phi_h(kh, x_0, u_k, 0) \in C_k$ .
- Nun zum Schritt von  $k$  auf  $k + 1$ : Da die Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  rigoros ist, existiert für das  $k$ -te Glied  $\bar{u}_k \in \mathcal{U}(\Omega)$  der Folge  $\bar{u}$  ein  $u_{k+1}^* \in \mathcal{U}$  mit

$$h^*(\phi_h^0(x_k, u_{k+1}^*), \widehat{\phi}_h(C_k, \bar{u}_k)) = 0.$$

Da  $\widehat{\phi}_h(C_k, \bar{u}_k) = \widehat{\Phi}_h((k+1)h, C, \bar{u})$  abgeschlossen ist, folgt daraus

$$\phi_h^0(x_k, u_{k+1}^*) \in \widehat{\Phi}_h((k+1)h, C, \bar{u}).$$

Mit  $u = u_{k+1} := u_k \&_{kh} u_{k+1}^*$  ist (3.2) auch für  $k + 1$  Schritte erfüllt.

- Es fehlt noch der Beweis von (3.3), der analog zum Beweis von (3.2) geführt wird.
  - Sei  $x_k := \Phi_h(kh, x_0, u, 0)$ , nach Induktionsannahme (3.3) für  $k$  gibt es dann für  $u \in \mathcal{U}$  eine Folge  $\bar{u}_k = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots) \in \mathfrak{U}$  mit  $x_k \in \widehat{\Phi}_h(kh, C, \bar{u}_k) =: C_k$ .
  - Nun zum Schritt von  $k$  auf  $k + 1$ : Da die Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  rigoros ist, existiert für  $u \in \mathcal{U}$  ein  $\bar{u}_k^* \in \mathcal{U}(\Omega)$  mit

$$h^*(\phi_h^0(x_k, u), \widehat{\phi}_h(C_k, \bar{u}_k^*)) = 0.$$

Mit  $\bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k^*, \bar{u}_{k+1}, \dots)$  ist (3.3) für  $k + 1$  Schritte erfüllt.  $\square$

### Attrahierende Mengen von Zustandsraumdiskretisierungen

Die attrahierenden Mengen einer Zustandsraumdiskretisierung und ihre Beziehung zu denen des zugrundeliegenden zeitdiskreten Systems sollten näher betrachtet werden. Es ist nur dann sinnvoll, Einzugsbereiche mit Hilfe von Zustandsraumdiskretisierungen anzunähern, wenn attrahierende Mengen einer solchen Diskretisierung nahe an denen der zeitdiskreten Systeme liegen.

Zunächst einmal eine Definition für attrahierende Mengen von Zustandsraumdiskretisierungen:

**Definition 3.1.5 (Attrahierende Mengen von Zustandsraumdiskretisierungen)**

Betrachte eine Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$  einer kompakten Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und eine Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\hat{\phi}_h: \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \times \mathcal{U}(\Omega) \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{R}^d)$ .

Eine Menge  $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  wird *stark attrahierend* genannt, wenn  $\hat{\phi}_h(A, \bar{u}) \subseteq A$  gilt für alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  und es eine Menge  $B \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , die eine Umgebung von  $A$  enthält, gibt, so daß

$$\hat{\Phi}_h(t, B, \bar{u}) \subseteq \Omega \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+ \text{ und alle Folgen } \bar{u} \in \mathcal{U}$$

gilt und es ein  $T \in \mathbb{T}^+$  gibt mit

$$\hat{\Phi}_h(t, B, \bar{u}) \subseteq A \quad \text{für alle } t \geq T \text{ und alle Folgen } \bar{u} \in \mathcal{U}.$$

Eine Menge  $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  wird *schwach attrahierend* genannt, wenn es ein  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  gibt mit  $\hat{\phi}_h(A, \bar{u}) \subseteq A$  und es weiter eine Menge  $B \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , die eine Umgebung von  $A$  enthält, und eine Folge  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  gibt, so daß

$$\hat{\Phi}_h(t, B, \bar{u}) \subseteq \Omega \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt und es ein  $T \in \mathbb{T}^+$  gibt mit

$$\hat{\Phi}_h(t, B, \bar{u}) \subseteq A \quad \text{für alle } t \geq T. \quad \square$$

Die beiden folgenden Sätze untersuchen nun den Zusammenhang zwischen attrahierenden Mengen für ein gegebenes zeitdiskretes System (1.11) und attrahierenden Mengen der zugehörigen Zustandsraumdiskretisierung. Der folgende Satz 3.1.6 behandelt stark attrahierende Mengen, Satz 3.1.7 schwach attrahierende Mengen. In beiden Fällen ergibt sich für  $\max_i \Delta_i/h$  klein genug, daß zu einer attrahierenden Menge  $A$  für das zeitdiskrete System eine attrahierende Menge  $\hat{A}$  für die Zustandsraumdiskretisierung existiert, die nahe bei  $A$  liegt. Zustandsraumdiskretisierungen können also verwendet werden, um Einzugsbereiche für das gegebene zeitdiskrete System anzunähern. Wegen der Bedingung  $\max_i \Delta_i/h$  kann hierbei der Zeitschritt  $h$  nicht unabhängig vom maximalen Durchmesser der Zellen  $\text{diam}(\mathcal{Q})$  gewählt werden!

Beachte, daß sich bei den beiden folgenden Sätzen einige Änderungen gegenüber ihren Vorbildern Theorem 6.1.6 und 6.4.7 aus [Gr 02] ergeben haben. Insbesondere wird hier der Beweis im schwachen Fall, also für Satz Satz 3.1.7, nicht analog zu dem des starken Falles, also Satz 3.1.6, geführt. Vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Korrekturen [Gr 03] zu dem Buch [Gr 02].

**Satz 3.1.6** Betrachte ein ungestörtes zeitdiskretes System  $\phi_h^0$  vom Typ (1.11), eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , eine Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega$  und eine Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\widehat{\phi}_h$  auf  $\mathcal{Q}$ .

Es sei vorausgesetzt, daß  $A \subseteq \text{int } \Omega$  eine stark attrahierende Menge für  $\phi_h^0$  ist, die sISDS bezüglich des  $\alpha_0$ -aufgeblasenen Systems (1.14) mit  $\alpha_0 > 0$  ist mit Attraktionsrate  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ , overshoot gain  $\sigma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$  aus  $\mathcal{K}_\infty$ .

Weiter sei vorausgesetzt, daß  $\widehat{\phi}_h$  die Genauigkeit  $\Delta_i$  hat, wobei die Bedingung  $\frac{\Delta_i}{h} \leq \max\{\Delta, \min_{x \in Q_i} \gamma^{-1}(\mu(d(x, A), h))\}$  erfüllt ist für ein  $\Delta > 0$ .

Dann gibt es für  $\Delta$  und  $\text{diam}(\mathcal{Q})$  genügend klein eine stark attrahierende Menge  $\widehat{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , die

$$h^*(\widehat{A}, A) \leq \gamma(\Delta)$$

erfüllt.

**Beweis:** Sei  $\Phi$  die Trajektorie des zustandsabhängigen  $\alpha_0$ -aufgeblasenen Systems (1.15) mit  $b(x) = \frac{\Delta_i}{h}$  für alle  $x \in Q_i$ . Dann gilt nach Lemma 3.1.3 (i) für  $\frac{\Delta_i}{h} \leq \alpha_0$

$$\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)} \widehat{\phi}_h(Q_i, \bar{u}) \subseteq \Phi_1(h, Q_i).$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \widehat{\Phi}_h(t, Q_i, \bar{u}) \subseteq \Phi_1(t, Q_i)$$

für alle  $t = kh \geq 0$ . Der Satz 2.1.16 liefert für  $\Delta \leq \alpha_0$  die Ungleichung

$$h^*(\Phi_1(t, \widetilde{B}), A) \leq \max\{\mu(\sigma(h^*(\widetilde{B}, A)), t), \gamma(\Delta)\}$$

für alle  $\widetilde{B} \subseteq B$ , wobei  $B$  die attrahierte Umgebung von  $A$  ist. Wähle nun ein  $r > 0$  so, daß  $\mathcal{B}(\sigma(r), A) \subseteq \Omega$  erfüllt ist, und wähle  $\widehat{B}$  als die größte Menge in  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  mit  $\widehat{B} \subset B$  und  $\widehat{B} \subseteq \mathcal{B}(r, A)$ . Für  $\Delta$  klein genug gilt  $\gamma(\Delta) \leq \sigma(h^*(\widehat{B}, A))$ , da  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ ; weiter gilt  $\mu(\sigma(h^*(\widehat{B}, A)), t) \leq \sigma(h^*(\widehat{B}, A))$ , da  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ . Für  $\widehat{B}$  ergibt sich daher die Abschätzung

$$h^*\left(\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \widehat{\Phi}_h(t, \widehat{B}, \bar{u}), A\right) \leq \sigma(h^*(\widehat{B}, A)) \leq \sigma(r)$$

für alle  $t \geq 0$ , woraus

$$\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \widehat{\Phi}_h(t, \widehat{B}, \bar{u}) \subseteq \mathcal{B}(\sigma(r), A) \subseteq \Omega$$

folgt. Betrachte nun die Mengen

$$A_j := \bigcup_{k \geq j} \bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \widehat{\Phi}_h(kh, \widehat{B}, \bar{u}).$$

Die Mengen  $A_j \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  sind nichtleer, sie erfüllen  $A_{j+1} \subseteq A_j$  und weiter

$$\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \widehat{\Phi}_h(h, A_j, \bar{u}) \subseteq A_{j+1}.$$



Da es nur endlich viele Mengen in  $\mathcal{C}_Q$  gibt, existiert ein  $j_0 > 0$  so, daß  $A_{j+1} = A_j$  für  $j \geq j_0$ . Sei  $\hat{A} = A_{j_0}$ . Nun ist nachzuweisen, daß  $\hat{A}$  die gesuchte stark attrahierende Menge für die Zustandsraumdiskretisierung  $\hat{\phi}_h$  ist. Aus der Konstruktion von  $\hat{A}$  ergibt sich

$$\bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \hat{\Phi}_h(h, \hat{A}, \bar{u}) \subseteq \hat{A} \quad \text{sowie} \quad \bigcup_{\bar{u} \in \mathcal{U}} \hat{\Phi}_h(jh, \hat{B}, \bar{u}) \subseteq \hat{A} \quad (j \geq j_0).$$

Ist  $\text{diam}(Q)$  klein genug im Vergleich zu  $r$  gewählt, so enthält  $\hat{B}$  eine Umgebung von  $\hat{A}$ ;  $\hat{A}$  ist also eine stark attrahierende Menge mit attrahierter Umgebung  $\hat{B}$ . Die Ungleichung

$$h^*(\hat{A}, A) \leq \gamma(\Delta)$$

ergibt sich für aus der aus Satz 2.1.16 gewonnenen Ungleichung, da für  $t$  genügend groß  $\mu(\sigma(h^*(\hat{B}, A)), t) \leq \gamma(\Delta)$  gilt.  $\square$

**Satz 3.1.7** Betrachte ein ungestörtes zeitdiskretes System  $\phi_h^0$  vom Typ (1.11), eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , eine Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega$  und eine Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\hat{\phi}_h$  auf  $\mathcal{Q}$ .

Es sei vorausgesetzt, daß  $A \subseteq \text{int } \Omega$  eine schwach attrahierende Menge für  $\phi_h^0$  ist, die wISDS bezüglich des  $\alpha_0$ -aufgeblasenen Systems (1.14) mit  $\alpha_0 > 0$  ist mit Attraktionsrate  $\mu$  aus der Klasse  $\mathcal{KLD}$ , overshoot gain  $\sigma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  und Robustheitsverstärkung  $\gamma$  aus  $\mathcal{K}_\infty$ .

Weiter sei vorausgesetzt, daß  $\hat{\phi}_h$  die Genauigkeit  $\Delta_i$  hat, wobei die Bedingung  $\frac{\Delta_i}{h} \leq \max\{\Delta, (1 - \varepsilon)^{-1} \min_{x \in Q_i} \gamma^{-1}(\mu(d(x, A), h))\}$  erfüllt ist für ein  $\Delta > 0$  und alle  $\varepsilon > 0$ .

Dann gibt es für  $\Delta$  und  $\text{diam}(Q)$  genügend klein eine schwach attrahierende Menge  $\hat{A} \in \mathcal{C}_Q$ , die

$$h^*(\hat{A}, A) \leq \gamma(\Delta)$$

erfüllt.

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ , betrachte die wISDS Lyapunov-Funktion  $V_\varepsilon$  aus Satz 2.2.18. Sei nun  $A_\varepsilon$  die größte Menge in  $\mathcal{C}_Q$ , die in der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid V_\varepsilon(x) \leq (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta)\}$$

enthalten ist. Beachte: Aus der Definition von  $h^*$  und den Eigenschaften von  $V_\varepsilon$  folgt  $h^*(A_\varepsilon, A) \leq (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta)$ . Sei weiter  $\Phi$  die Trajektorie des zustandsabhängigen  $\alpha_0$ -aufgeblasenen Systems (1.15) mit  $b(x) = \frac{\Delta_i}{h}$  für alle  $x \in Q_i$ .

Wähle nun für jedes  $x \in C$  und jedes  $u \in \mathcal{U}$  ein  $w_u^* \in \mathcal{W}_1$  so, daß

$$V_\varepsilon(\Phi(h, x, u, w_u^*))$$

maximal wird. Das Maximum wird hier angenommen, da (1.15) stetig in  $w$  ist. Betrachte nun ein  $p^* \in \mathcal{P}_1^h$  mit  $p^*[u]|_{[0, h]} = w_u^*|_{[0, h]}$  für alle  $u$ . Für  $\nu_\varepsilon$  aus Satz 2.2.18 gilt

$$\nu_\varepsilon(p^*, h) \leq \max\{(1 + \varepsilon)\gamma(\Delta), \min_{x' \in Q_i} \mu(d(x', A), h)\}.$$

Die Eigenschaft (2.12) von  $V_\varepsilon$  liefert also für  $p^*$  zu jedem  $x \in B$  ein  $u_x^* \in \mathcal{U}$  mit

$$V_\varepsilon(\Phi(h, x, u_x^*, p^*[u_x^*])) \leq \max \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - 2\varepsilon)h), (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta) \},$$

woraus wegen der Konstruktion von  $p^*$

$$V_\varepsilon(\Phi(h, x, u_x^*, p[u_x^*])) \leq \max \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - 2\varepsilon)h), (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta) \}$$

für alle  $p \in \mathcal{P}_1^h$  folgt. Wegen Lemma 3.1.3 (ii) erhält man hieraus

$$\max_{y \in \hat{\Phi}_h(Q_i, \bar{u})} V_\varepsilon(y) \leq \max_{x \in Q_i} \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - 2\varepsilon)h), (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta) \},$$

wobei  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$  mit  $\bar{u}(x, \cdot) = u_x^*$  für  $x \in B$ . Mit  $\bar{u} := (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}, \dots)$ ,  $\bar{u}_k = \bar{u}$ , erhält man nun durch Induktion

$$\max_{y \in \hat{\Phi}_h(jh, Q_i, \bar{u})} V_\varepsilon(y) \leq \max_{x \in Q_i} \{ \mu(V_\varepsilon(x), (1 - 2\varepsilon)jh), (1 + 2\varepsilon)\gamma(\Delta) \}$$

für  $j \in \mathbb{N}$ . Aus dieser Abschätzung ergibt sich nun

$$\hat{\Phi}_h(h, A_\varepsilon, \bar{u}) \subseteq A_\varepsilon.$$

Sei nun  $\hat{B}$  die größte Teilmenge von  $\mathcal{C}_Q$  mit  $\hat{B} \subseteq B$ , damit ergibt sich aus der vorhergehenden Abschätzung für  $j$  genügend groß

$$\hat{\Phi}_h(jh, A_\varepsilon, \bar{u}) \subseteq A_\varepsilon.$$

Sind  $\text{diam}(Q)$  und  $\varepsilon$  klein genug gewählt, so enthält  $\hat{B}$  eine Umgebung von  $A_\varepsilon$ , d. h. die Mengen  $A_\varepsilon$  sind schwach attrahierende Mengen. Für  $\varepsilon_0 > 0$  klein genug unterscheiden sich die Mengen  $A_{\varepsilon_1}, A_{\varepsilon_2} \in \mathcal{C}_Q$  für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$  nicht.  $\hat{A} := A_{\varepsilon_0}$  ist also die gesuchte Menge; für  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$  ergibt sich für  $\hat{A}$  die Abschätzung  $h^*(\hat{A}, A) \leq \gamma(\Delta)$ .  $\square$

### 3.2 Der Unterteilungsalgorithmus

In diesem Abschnitt wird der Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung von schwachen Einzugsbereichen vorgestellt und dessen Konvergenz in zwei verschiedenen Fällen untersucht. Der erste Fall behandelt rigorose Zustandsraumdiskretisierungen. Da diese in der Praxis nicht ganz einfach zu finden sind, wird im zweiten Fall die Konvergenz des Algorithmus unter Zustandsraumdiskretisierungen mit innerem Fehler  $h\varepsilon$  untersucht.

In beiden Fällen spielen die Robustheits-Eigenschaften aus dem Kapitel 2 eine wichtige Rolle.

Nun zur Formulierung des Unterteilungsalgorithmus zur Berechnung von schwachen Einzugsbereichen. Hierfür wird eine Teilmenge  $\Omega$  des Zustandsraumes  $\mathbb{R}^d$  in Zellen unterteilt, diese bekommen einen Status zugewiesen, der beschreibt, ob sie ganz, gar nicht oder nur teilweise zum Einzugsbereich gehören. Zur Feststellung, welcher Status zuzuweisen ist, wird eine Zustandsraumdiskretisierung verwendet (Schritt 1). Zellen, die den Status „teilweise“ erhalten haben, müssen weiter unterteilt werden (Schritt 3). In der folgenden Formulierung des Algorithmus wird der Einfachheit halber nur eine feinere Zellüberdeckung verwendet, es ist jedoch nicht notwendig, Zellen mit dem Status „ganz“ oder „gar nicht“ weiter zu unterteilen!

**Algorithmus 3.2.1 (Berechnung von schwachen Einzugsbereichen)** Sei  $\phi_h^0$  ein diskretes System vom Typ (1.11). Sei  $\Omega$  eine kompakte Menge, sei  $\mathcal{Q}^0$  eine Zellüberdeckung von  $\Omega$  mit  $P^0$  Zellen  $Q_i^0$ ,  $i = 1, \dots, P^0$ , und sei  $\widehat{\phi}_h^0$  eine Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung auf  $\mathcal{Q}^0$  mit Genauigkeit  $\Delta_i^0 \leq h\varepsilon^0$  für alle  $i = 1, \dots, P^0$ , und sei  $j = 0$ . Jeder Zelle  $Q_i^j$  sei ein Status  $s(Q_i^j)$  zugeordnet, der folgende Werte annehmen kann: *in* (enthalten/inside), *pin* (teilweise enthalten/partially inside), *und* (undefiniert/undefined) und *out* (ausssen/outside). Definiere die Mengen

$$\Omega_{in}^j = \bigcup_{i, s(Q_i^j)=in} Q_i^j, \quad \Omega_{pin}^j = \bigcup_{i, s(Q_i^j)=pin} Q_i^j \cup \Omega_{in}^j \quad \text{und} \quad \Omega_{out}^j = \bigcup_{i, s(Q_i^j)=out} Q_i^j \cup \Omega^C.$$

Betrachte eine Zielmenge  $\mathcal{S} \subset \text{int } \Omega$  und setze  $s(Q_i^0) := in$  für alle  $Q_i^0 \subseteq \mathcal{S}$  und  $s(Q_i^0) := und$  sonst. Setze  $D^0 := \Omega_{in}^0$  und  $C^0 := \Omega_{out}^0$ .

### Schritt 1: Auswahl

Für alle  $Q_i^j$ ,  $i = 1, \dots, P^j$ , mit  $s(Q_i^j) = und$  oder  $s(Q_i^j) = pin$  setze

$$\begin{aligned} s(Q_i^j) &:= pin, & \text{wenn es eine Kontrollfunktion } \bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j) \text{ gibt mit } \widehat{\phi}_h^j(Q_i^j, \bar{u}) \cap \Omega_{pin}^j \neq \emptyset, \\ s(Q_i^j) &:= in, & \text{wenn es eine Kontrollfunktion } \bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j) \text{ gibt mit } \widehat{\phi}_h^j(Q_i^j, \bar{u}) \subseteq \Omega_{in}^j, \\ s(Q_i^j) &:= out, & \text{wenn für alle Kontrollfunktionen } \bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j) \text{ gilt } \widehat{\phi}_h^j(Q_i^j, \bar{u}) \subseteq \Omega_{out}^j, \end{aligned}$$

wobei die Mengen  $\Omega_{in}^j$ ,  $\Omega_{pin}^j$  und  $\Omega_{out}^j$  nach jeder neuen Zuweisung aktualisiert werden. Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis kein  $s(Q_i^j)$  mehr seinen Status ändert.

### Schritt 2: Status aktualisieren

Setze  $s(Q_i^j) := out$  für alle  $Q_i^j$  mit  $s(Q_i^j) = und$ .

Setze  $s(Q_i^j) := und$  für alle  $Q_i^j$  mit  $s(Q_i^j) = pin$ .

Aktualisiere die Mengen  $\Omega_{in}^j$ ,  $\Omega_{pin}^j$  (danach leer!) und  $\Omega_{out}^j$ . Setze  $D^{j+1} := \Omega_{in}^j$  und  $C^{j+1} := \Omega_{out}^j$  und  $E^{j+1} := cl(\Omega \setminus (D^{j+1} \cup C^{j+1})) \cup (D^{j+1} \cap C^{j+1})$ ; diese drei Mengen sind das Ergebnis des Algorithmus.

### Schritt 3: Verfeinerung

Betrachte nun eine neue Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^{j+1}$  von  $\Omega$  mit  $P^{j+1}$  Zellen  $Q_{i'}^{j+1}$ , für die gilt  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}^j} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{Q}^{j+1}}$  (d. h.  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}^{j+1}}$  ist feiner als  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}^j}$ ), und eine neue Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\widehat{\phi}_h^{j+1}$  auf  $\mathcal{Q}^{j+1}$  mit Genauigkeit  $\Delta_{i'}^{j+1} \leq h\varepsilon^{j+1}$  für alle  $i' = 1, \dots, P^{j+1}$ . Setze den Status  $s(Q_{i'}^{j+1}) := s(Q_i^j)$  für alle  $Q_{i'}^{j+1} \subset Q_i^j$ ,  $j := j + 1$ , und gehe zu Schritt 1. □

**Bemerkung 3.2.2** Analog lassen sich auch starke Einzugsbereiche berechnen. Hierfür muß im Schritt „Auswahl“ jeweils „wenn es eine Kontrollfunktion  $\bar{u}$  gibt mit“ ersetzt werden durch „wenn für alle Störfunktionen  $\bar{u}$  gilt“; „wenn für alle Kontrollfunktionen  $\bar{u}$  gilt“ muß jeweils ersetzt werden durch „wenn es eine Störfunktion  $\bar{u}$  gibt mit“. □

**Bemerkung 3.2.3** Der Algorithmus 3.2.1 ist so formuliert, daß er sich gut implementieren läßt. Zu theoretischen Zwecken, z. B. für den Beweis der folgenden Sätze 3.2.5 und 3.2.7 über die Konvergenz des Algorithmus, ist eine Formulierung mit Hilfe der Iterierten  $\widehat{\Phi}_h$  nützlich. Schritt 1 und 2 des Algorithmus 3.2.1 werden nun zusammengefaßt zu

**Schritt 1': Auswahl**

Berechne die Mengen

$$D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} := \left\{ Q_i^j \in \mathcal{Q}^j \mid \exists \text{ eine Folge } \bar{u} \in \mathfrak{U} \text{ und ein } t = kh \in \mathbb{T}_0^+ (k \in \mathbb{N}_0) : \right. \\ \left. \widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \subseteq D_{\text{Schritt 1}'}^j \right\}, \quad (3.4)$$

$$C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} := \left\{ Q_i^j \in \mathcal{Q}^j \mid \forall \text{ Folgen } \bar{u} \in \mathfrak{U} \text{ und } t = kh \in \mathbb{T}_0^+ (k \in \mathbb{N}_0) : \right. \\ \left. \widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \cap D_{\text{Schritt 1}'}^j = \emptyset \right\} \cup \Omega^C, \quad (3.5)$$

und setze  $E_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} := \text{cl}(\Omega \setminus (D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} \cup C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1})) \cup (D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} \cap C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1})$ .  $\square$

**Lemma 3.2.4** Schritt 1' berechnet die gleichen Mengen wie die Schritte 1 und 2 aus Algorithmus 3.2.1, d. h. es gilt

$$D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} = D^{j+1}, \quad C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} = C^{j+1} \quad \text{und} \quad E_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} = E^{j+1}.$$

**Beweis:** Zuerst zum Beweis der Gleichung  $D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} = D^{j+1}$ . Diesen Beweis führt man durch Induktion über die Anzahl der Iterationen  $j$  des Algorithmus 3.2.1 und mit Hilfe der Definition der Iterierten  $\widehat{\Phi}_h$ .

- Für  $j = 0$  gilt  $D_{\text{Schritt 1}'}^0 = D^0$  nach Definition des Algorithmus.
- Der Induktionsschritt von  $j$  auf  $j + 1$  verläuft wie folgt:

Sei  $Q \in D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1}$ . Nach Definition der Menge  $D_{\text{Schritt 1}'}^{j+1}$  hat  $Q$  also die Eigenschaft

$$\exists \bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}, \dots) \in \mathfrak{U} \text{ und } t = kh (k \in \mathbb{N}) : \widehat{\Phi}_h(t, Q, \bar{u}) \subseteq D_{\text{Schritt 1}'}^j.$$

Setzt man nun die Definition der Iterierten  $\widehat{\Phi}_h$  sowie die Induktionsannahme  $D_{\text{Schritt 1}'}^j = D^j$  ein, so sieht man, daß dies äquivalent ist zu

$$\exists \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1} \in \mathcal{U}(\Omega) (k \in \mathbb{N}) : \underbrace{\widehat{\phi}_h^j(\dots(\widehat{\phi}_h^j(\widehat{\phi}_h^j(Q, \bar{u}_0) \cap \Omega, \bar{u}_1) \cap \Omega) \dots, \bar{u}_{k-1})}_{k\text{-mal}} \subseteq D^j.$$

$D^j$  ist gerade die Menge  $\Omega_{in}^j$  vor der Ausführung von Schritt 1. Also bedeutet die obige Eigenschaft, daß  $Q$  nach der  $k$ -ten Ausführung von Schritt 1 den Status  $s(Q) = in$  hat und ihn bei eventuellen weiteren Ausführungen von Schritt 1 behält. Da in Schritt 2 nun  $D^{j+1} = \Omega_{in}^j = \bigcup_{i, s(Q_i^j)=in} Q_i^j$  gesetzt wird, ist dies wiederum äquivalent zu  $Q \in D^{j+1}$ .

Für den Beweis der Gleichung  $C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} = C^{j+1}$  benötigt man ebenfalls die Definition der Iterierten  $\widehat{\Phi}_h$  und die gerade bewiesene Tatsache, daß  $D_{\text{Schritt 1}'}^j = D^j$ .

Es muß nur gezeigt werden, daß  $C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} \setminus \Omega^C = C^{j+1} \setminus \Omega^C$ ; sei also  $Q \in C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1} \setminus \Omega^C$ . Da  $D_{\text{Schritt 1}'}^j = D^j$  gilt, ist dies nach der Definition von  $C_{\text{Schritt 1}'}^{j+1}$  gleichbedeutend mit

$$\forall \bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, \dots) \in \mathfrak{U} \text{ und } t = kh (k \in \mathbb{N}) : \widehat{\Phi}_h(t, Q, \bar{u}) \cap D^j = \emptyset.$$

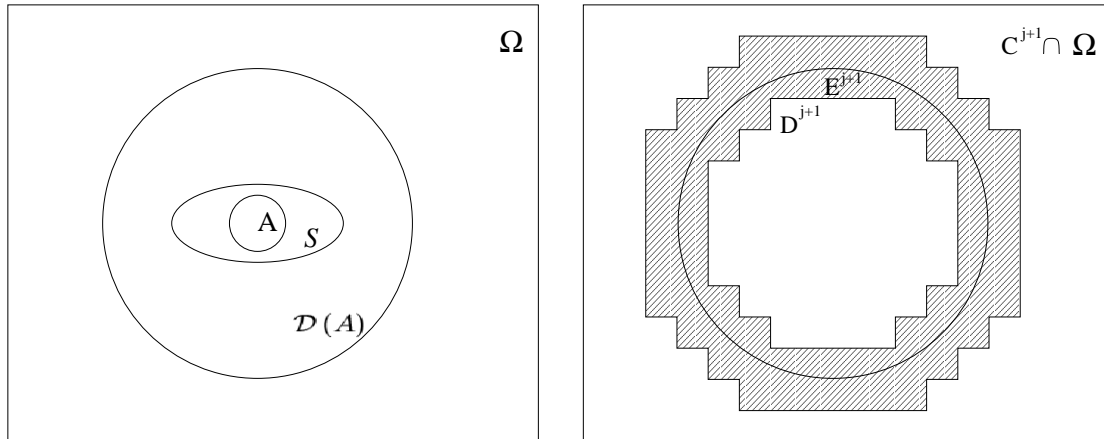


Abbildung 3.1: Voraussetzungen und Ergebnismengen des Satzes 3.2.5

Die Definition der Iterierten liefert hier für  $Q$

$$\forall \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1} \in \mathcal{U}(\Omega) \ (k \in \mathbb{N}) : \underbrace{\widehat{\phi}_h^j(\dots(\widehat{\phi}_h^j(\widehat{\phi}_h^j(Q, \bar{u}_0) \cap \Omega, \bar{u}_1) \cap \Omega) \dots, \bar{u}_{k-1}) \cap D^j}_{k\text{-mal}} = \emptyset.$$

Vor der Ausführung von Schritt 1 gilt  $D^j = \Omega_{in}^j = \Omega_{pin}^j$ . Daher bedeutet die obige Eigenschaft, daß  $Q$  nach beliebig vielen Ausführungen von Schritt 1 den Status  $s(Q) = out$  oder  $s(Q) = und$  hat. Da in Schritt 2  $s(Q_i^j) = out$  für alle  $Q_i^j$  mit  $s(Q) = und$  gesetzt wird und danach  $C^{j+1} = \Omega_{out}^j = \bigcup_{i, s(Q_i^j)=out} Q_i^j \cup \Omega^C$ , ist diese Eigenschaft also äquivalent zu  $Q \in C^{j+1} \setminus \Omega^C$ .  $\square$

Im folgenden werden die Mengen  $D^{j+1}$  und  $D_{Schritt\ 1}^{j+1}$ ,  $C^{j+1}$  und  $C_{Schritt\ 1}^{j+1}$ , bzw.  $E^{j+1}$  und  $E_{Schritt\ 1}^{j+1}$ , nicht mehr unterschieden.

Nun ist noch zu zeigen, daß der Unterteilungsalgorithmus 3.2.1 konvergiert und eine Aussage über den entstehenden Diskretisierungsfehler zu machen. Der folgende Satz behandelt die Konvergenz des Algorithmus im Falle von rigorosen Zustandsraumdiskretisierungen.

**Satz 3.2.5 (Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus unter rigorosen Zustandsraumdiskretisierungen)** Betrachte ein ungestörtes zeitdiskretes System  $\phi_h^0$  vom Typ (1.11). Sei  $A$  eine schwach attrahierende Menge für  $\phi_h^0$  mit Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$ , sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A)$  eine Umgebung von  $A$ , für die  $\partial\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}(A) = \emptyset$  gilt, und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine kompakte Menge, die  $\mathcal{D}(A)$  enthält. Betrachte den Algorithmus 3.2.1 mit rigorosen Zustandsraumdiskretisierungen  $\widehat{\phi}_h^j$ . Dann gelten die Inklusionen

$$\begin{aligned} D^{j+1} &\subseteq \mathcal{D}(A) \subset D^{j+1} \cup E^{j+1}, \\ C^{j+1} &\subseteq \mathcal{D}(A)^C \subset C^{j+1} \cup E^{j+1}, \\ \partial\mathcal{D}(A) &\subseteq E^{j+1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Weiter gelten für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  mit  $\varepsilon^j$  genügend klein die folgenden Abschätzungen:

- (i) Ist  $A$  zusätzlich schwach asymptotisch stabil und  $\mathcal{D}(A)$  dynamisch robust für ein Maß  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , dann gilt

$$h(C^{j+1} \cup E^{j+1}, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j.$$

- (ii) Ist  $\mathcal{D}(A)^C$  schrumpfend invers robust stark vorwärtsinvariant für  $\tilde{\gamma}$ , dann gilt

$$h(D^{j+1} \cup E^{j+1}, \mathcal{D}(A)) \leq \tilde{\gamma}(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j.$$

- (iii) Ist  $A$  schwach asymptotisch stabil,  $\mathcal{D}(A)$  dynamisch robust mit dem Maß  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  und  $\mathcal{D}(A)^C$  schrumpfend invers  $\gamma$ -robust vorwärtsinvariant für das gleiche Maß  $\gamma$ , dann gilt

$$h(E^{j+1}, \partial\mathcal{D}(A)) \leq \gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j.$$

**Beweis:** Zunächst sollen die in (3.6) angegebenen Beziehungen zwischen dem Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  und den mit Hilfe des Algorithmus 3.2.1 berechneten Mengen  $D^{j+1}$ ,  $C^{j+1}$  und  $E^{j+1}$  bewiesen werden. Zuerst werden  $D^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A)$  und  $C^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A)^C$  gezeigt, die übrigen Inklusionen ergeben sich aus diesen beiden.

$D^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A)$  folgt aus der Tatsache, daß die Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h^j$  rigoros ist mit Hilfe der Darstellung (3.4) von  $D^{j+1}$ . Wie der Beweis von  $D_{\text{Schritt 1}}^{j+1} = D^{j+1}$  wird dieser Beweis durch Induktion über die Anzahl der Iterationen  $j$  des Algorithmus 3.2.1 geführt.

- Für  $j = 0$  gilt  $D^0 = \Omega_{in}^0 = \bigcup_{i, s(Q_i^0)=in} Q_i^0$ . Alle  $Q_i^0$  mit  $s(Q_i^0) = in$  liegen in der Zielmenge  $\mathcal{S}$ , die nach Voraussetzung im Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  enthalten ist. Also gilt  $D^0 \subseteq \mathcal{D}(A)$ .
- Nun zum Schluß von  $j$  auf  $j + 1$ . Sei  $Q \in D^{j+1}$ , laut der Definition des schwachen Einzugsbereiches  $\mathcal{D}(A)$  von  $A$  ist folgendes zu zeigen:

$$\forall x_0 \in Q \exists u \in \mathcal{U} : d(\Phi_h(t, x_0, u, 0), A) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Sei  $x_0 \in Q$ . Aus der Darstellung (3.4) von  $D^{j+1}$  ergibt sich unter der Annahme, daß  $D^j \subseteq \mathcal{D}(A)$  erfüllt ist, für  $Q$

$$\exists \bar{u} \in \mathcal{U} \text{ und } t = kh \ (k \in \mathbb{N}_0) : \widehat{\Phi}_h(t, Q, \bar{u}) \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Da die Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h^j$  rigoros ist, kann Lemma 3.1.4 angewandt werden; es ergibt sich für  $x_0$

$$\exists u^* \in \mathcal{U} : x := \Phi_h(kh, x_0, u^*, 0) \in \widehat{\Phi}_h(kh, Q, \bar{u}) \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Da also  $x \in \mathcal{D}(A)$  gilt, gibt es für  $x$  ein  $u^+$  mit  $d(\Phi_h(t, x, u^+, 0), A) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Für  $x_0$  existiert daher ein  $u := u^* \&_{kh} u^+$  mit  $d(\Phi_h(t, x_0, u, 0), A) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , d. h. (3.7) ist für alle  $Q \in D^{j+1}$  erfüllt.

Die Inklusion  $C^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A)^C$  wird mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises gezeigt. Der Beweis ist nur für die Menge  $C^{j+1} \setminus \Omega^C$  zu führen, da  $\Omega^C$  nach Voraussetzung in  $\mathcal{D}(A)^C$  enthalten ist. Sei also  $Q \in C^{j+1} \setminus \Omega^C$ ; angenommen  $Q \cap \mathcal{D}(A) \neq \emptyset$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in Q$  mit  $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ , d. h. für  $x_0$  gibt es ein  $u \in U$  mit

$$d(\Phi_h(t, x_0, u, 0), A) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Für alle  $\Phi_h(t, x_0, u, 0)$  gilt dann ebenfalls  $\Phi_h(t, x_0, u, 0) \in \mathcal{D}(A)$ . Zu  $x_0$  und  $u$  gibt es aber nach Lemma 3.1.4 eine Folge  $\bar{u} \in \mathfrak{U}$  mit

$$\Phi_h(t, x_0, u, 0) \in \widehat{\Phi}_h(t, Q, \bar{u}).$$

Dies ist ein Widerspruch zu  $\Phi_h(t, x_0, u, 0) \in \mathcal{D}(A)$ , da mit  $D^j \subseteq \mathcal{D}(A)$  aus der Darstellung (3.5) von  $C^{j+1}$

$$\widehat{\Phi}_h(t, Q, \bar{u}) \cap \mathcal{D}(A) = \emptyset$$

für alle  $\bar{u} \in \mathfrak{U}$  folgt. Also gilt  $(C^{j+1} \setminus \Omega^C) \subseteq \mathcal{D}(A)^C$ .

Die Gleichung  $\mathcal{D}(A) \subset D^{j+1} \cup E^{j+1}$  gilt, da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \Omega \setminus \mathcal{D}(A)^C \\ &\subseteq \Omega \setminus C^{j+1}, && \text{da } C^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A)^C \\ &\subset cl(\Omega \setminus C^{j+1}), && \text{da } C^{j+1} \text{ abgeschlossen} \\ &= D^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus C^{j+1}), && \text{da } D^{j+1} \subseteq cl(\Omega \setminus C^{j+1}) \\ &= \Omega \cap (D^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus C^{j+1})) \\ &= (D^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus D^{j+1})) \cap (D^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus C^{j+1})) \\ &= D^{j+1} \cup cl((\Omega \setminus D^{j+1}) \cap (\Omega \setminus C^{j+1})) \\ &= D^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus (D^{j+1} \cup C^{j+1})) \\ &\subseteq D^{j+1} \cup E^{j+1}. \end{aligned}$$

Die Gleichung  $\mathcal{D}(A)^C \subset C^{j+1} \cup E^{j+1}$  gilt, da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A)^C &= (\Omega \setminus \mathcal{D}(A)) \cup \Omega^C, && \text{da } \mathcal{D}(A) \subseteq \Omega \\ &\subseteq (\Omega \setminus D^{j+1}) \cup \Omega^C, && \text{da } D^{j+1} \subseteq \mathcal{D}(A) \\ &\subset cl(\Omega \setminus D^{j+1}) \cup \Omega^C \\ &= C^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus D^{j+1}), && \text{da } \Omega^C \subseteq C^{j+1} \subseteq cl(\Omega \setminus D^{j+1}) \cup \Omega^C \\ &= (C^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus D^{j+1})) \cap \mathbb{R}^d \\ &= (C^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus D^{j+1})) \cap (C^{j+1} \cup cl(\Omega \setminus C^{j+1})) \\ &= C^{j+1} \cup cl((\Omega \setminus D^{j+1}) \cap (\Omega \setminus C^{j+1})) \\ &= C^{j+1} \cup cl((\Omega \setminus (D^{j+1} \cup C^{j+1}))) \\ &\subseteq C^{j+1} \cup E^{j+1}. \end{aligned}$$

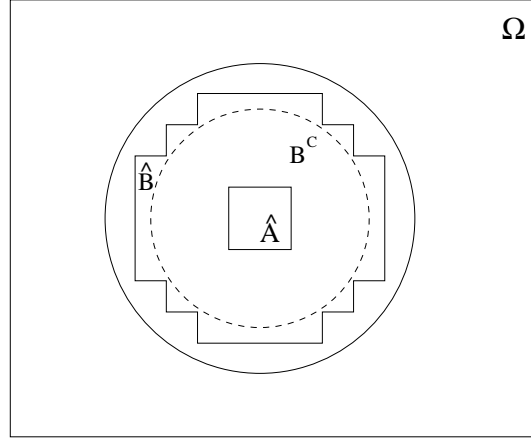


Abbildung 3.2: Verschiedene Mengen im Beweis von Punkt (i) des Satzes 3.2.5

Die Gleichung  $\partial\mathcal{D}(A) \subseteq E^{j+1}$  gilt, da

$$\begin{aligned}
 \partial\mathcal{D}(A) &= cl\mathcal{D}(A) \cap cl\mathcal{D}(A)^C \\
 &\subseteq (D^{j+1} \cup E^{j+1}) \cap (C^{j+1} \cup E^{j+1}), \\
 &\quad \text{da } D^{j+1} \cup E^{j+1} \text{ und } C^{j+1} \cup E^{j+1} \text{ abgeschlossen} \\
 &= (D^{j+1} \cap C^{j+1}) \cup (E^{j+1} \cap C^{j+1}) \cup (D^{j+1} \cap E^{j+1}) \cup (E^{j+1} \cap E^{j+1}) \\
 &= E^{j+1}.
 \end{aligned}$$

Nun zum Beweis der Abschätzung (i). Betrachte hierfür die Lyapunov-Funktion  $V$ , die nach Definition 2.3.3 die dynamische Robustheit für eine Robustheitsumgebung  $B$  von  $\mathcal{D}(A)^C$  beschreibt. Da  $A$  als schwach asymptotisch stabil vorausgesetzt wurde, kann Satz 2.2.10 angewendet werden, d. h.  $A$  ist wISDS und erfüllt daher für  $\varepsilon_j > 0$  klein genug die Voraussetzungen von Satz 3.1.7. Es gibt also eine in  $\mathcal{S}$  enthaltene attrahierende Menge  $\hat{A}$  für  $\hat{\Phi}_h^j$  mit attrahierter Umgebung  $\hat{B}$ ; hierbei kann  $\hat{B}$  so groß gewählt werden, daß  $B^C \subseteq \hat{B}$  gilt. Wegen (3.4) ergibt sich  $\hat{A} \subseteq D^{j'}$  für  $j'$  groß genug und daraus wiederum  $\hat{B} \subseteq D^j$  für ein  $j > j'$ .

Für eine abgeschlossene Menge  $C \subset \mathbb{R}^d$  sei  $V^{\min}(C) := \min\{V(x) \mid x \in C\}$ . Betrachte nun alle Zellen  $Q_i^j \subset \mathcal{D}(A)$  für die  $Q_i^j \not\subseteq \hat{B}$  und weiter  $V^{\min}(Q_i^j) \geq \gamma(\varepsilon^j)$  gilt. Es soll nun gezeigt werden, daß diese Zellen in  $D^{j+1}$  liegen.

Induktion über die mit der Iterierten  $\hat{\Phi}_h^j$  gemachten Schritte  $k$  liefert mit Hilfe der Gleichung (2.14) aus der Definition 2.3.3 der dynamischen Robustheit unter Verwendung von Lemma 3.1.3 (ii) (wobei die Eigenschaft  $r < \mu(r, -h)$  des dynamischen Systems  $\mu$  benötigt wird) die Existenz einer Folge  $\bar{u}$  mit

$$V^{\min}(\hat{\Phi}_h^j(kh, Q_i^j, \bar{u})) \geq \min\{\mu(V^{\min}(Q_i^j), -kh), a\}.$$

Hierbei setzt Lemma 3.1.3 (ii) voraus, daß  $\|p[u]\|_\infty \leq \frac{\Delta_i^j}{h}$  für alle  $u \in \mathcal{U}$  gilt; für  $\frac{\Delta_i^j}{h}$  klein genug ergibt sich hieraus mit  $\gamma(\varepsilon^j) \leq V^{\min}(Q_i^j)$  die für die Verwendung von (2.14) benötigte Bedingung  $\gamma(\|p[u]\|_{[hi, h(i+1)]}) \leq \min\{\mu(V(x), -hi), a\}$  für  $x \in Q_i^j$  und alle  $u \in \mathcal{U}$ .



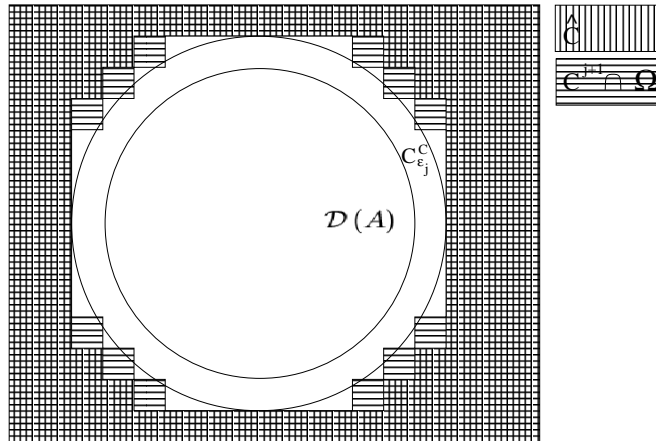


Abbildung 3.3: Verschiedene Mengen im Beweis von Punkt (ii) des Satzes 3.2.5

Für  $t = kh$  groß genug gilt  $\mu(V^{\min}(Q_i^j), -kh) \geq a$ , für  $\bar{u}$  ergibt sich also aus der obigen Abschätzung  $\widehat{\Phi}_h^j(kh, Q_i^j, \bar{u}) \subseteq B^C \subseteq \widehat{B} \subseteq D^j$ .

Für die betrachteten Zellen  $Q_i^j \not\subseteq \widehat{B}$  aus  $\mathcal{D}(A)$  mit  $V^{\min}(Q_i^j) \geq \gamma(\varepsilon^j)$  gilt also wegen (3.4) wie oben verlangt die Inklusion  $Q_i^j \subset D^{j+1}$ .

Wegen  $V(x) \geq d(x, \mathcal{D}(A)^C)$  folgt hieraus, daß alle Zellen  $Q_i^j$  mit der Eigenschaft  $d(x, \mathcal{D}(A)^C) \geq \gamma(\varepsilon^j)$  für alle  $x \in Q_i^j$  ebenfalls in  $D^{j+1}$  enthalten sind. Weiter gilt, da  $\text{diam}(Q^j) \leq h\varepsilon^j$  vorausgesetzt wurde, daß alle Zellen mit  $h^*(Q_i^j, \mathcal{D}(A)^C) \geq \gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j$  in  $D^{j+1}$  liegen, woraus sofort die Abschätzung (i) folgt.

Der Beweis der Abschätzung **(ii)**:

Laut Definition 2.2.7 gibt es zu  $\varepsilon^j > 0$  eine schwach  $\varepsilon^j$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_{\varepsilon^j}$  mit den Eigenschaften  $h(C_{\varepsilon^j}^C, \mathcal{D}(A)) \leq \tilde{\gamma}(\varepsilon^j)$  und  $C_{\varepsilon^j} \subseteq \mathcal{D}(A)^C$ . Da  $D^j \subseteq \mathcal{D}(A)$  folgt  $C_{\varepsilon^j} \cap D^j = \emptyset$ .

Betrachte nun alle Zellen  $Q_i^j \subset \mathcal{D}(A)^C$  mit  $d(x, \mathcal{D}(A)) > \tilde{\gamma}(\varepsilon^j)$  für alle  $x \in Q_i^j$ . Analog zur vorhergehenden Abschätzung (i) ist hier nun zu zeigen, daß diese Zellen in  $C^{j+1}$  liegen.

Zunächst einmal sind diese Zellen in der Menge  $C_{\varepsilon^j}$  enthalten. Sei nun  $\widehat{C}$  die größte Menge in  $\mathcal{C}_{Q^j}$  mit  $\widehat{C} \subseteq C_{\varepsilon^j}$ . Da  $C_{\varepsilon^j}$  als stark  $\varepsilon^j$ -vorwärtsinvariant vorausgesetzt wurde, ergibt sich mit Lemma 3.1.3 (ii) die Inklusion  $\widehat{\phi}_h^j(\widehat{C}, \bar{u}) \subseteq C_{\varepsilon^j}$  für alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega)$ . Da nach Definition der Diskretisierung  $\widehat{\phi}_h^j(\widehat{C}, \bar{u}) \cap \Omega \in \mathcal{C}_{Q^j}$  gilt, folgt aus der Wahl von  $\widehat{C}$

$$\widehat{\phi}_h^j(\widehat{C}, \bar{u}) \subseteq \widehat{C} \cup \Omega^C \text{ für alle } \bar{u} \in \mathcal{U}(\Omega).$$

Aus  $C_{\varepsilon^j} \cap D^j = \emptyset$  erhält man nach (3.5) nun  $\widehat{C} \subseteq C^{j+1}$ , d. h. die für die betrachteten Zellen  $Q_i^j \subset \mathcal{D}(A)^C$  mit  $d(x, \mathcal{D}(A)) > \tilde{\gamma}(\varepsilon^j)$  für alle  $x \in Q_i^j$  zu zeigende Eigenschaft  $Q_i^j \subset C^{j+1}$  ist nachgewiesen.

Wie bei Abschätzung (i) sieht man nun, daß alle Zellen mit  $h^*(x, \mathcal{D}(A)) > \tilde{\gamma}(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j$  in  $C^{j+1}$  liegen und kann hieraus direkt auf Abschätzung (ii) schliessen.

Nun fehlt nur noch der Beweis der Abschätzung **(iii)**. Dieser ergibt sich sofort aus den

Punkten (i) und (ii), denn aus den dort angegebenen Abschätzungen folgt:

$$E^{j+1} \subseteq \mathcal{B}(\gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j, \mathcal{D}(A)^C) \cap \mathcal{B}(\gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j, \mathcal{D}(A)) = \mathcal{B}(\gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j, \partial\mathcal{D}(A)),$$

was gleichbedeutend mit (iii) ist.  $\square$

**Bemerkung 3.2.6** Analog zu Punkt (ii) des vorhergehenden Satzes 3.2.5 gilt auch:

Ist  $\mathcal{D}(A)^C$  schrumpfend direkt robust vorwärtsinvariant für ein Maß  $\tilde{\gamma}$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , dann gilt

$$h(C^{j+1}, \mathcal{D}(A)^C) \leq \tilde{\gamma}(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j, \quad (3.8)$$

vgl. [Gr 02, Theorem 7.5.5].  $\square$

Eine rigorose Zustandsraumdiskretisierung ist nicht ganz einfach herzuleiten und außerdem aufwendig in der Auswertung, vgl. [Gr 02, Section 5.3]. Daher wird nun noch der Diskretisierungsfehler des Algorithmus 3.2.1 im Falle von nicht-rigorosen Zustandsraumdiskretisierungen untersucht.

Man erinnere sich, daß für eine rigorose Zustandsraumdiskretisierung die Bedingung (3.1) aus (ii a) und (ii b) der Definition 3.1.2 lautet wie folgt:

$$h^*(\phi_h^0(x_0, u), \hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u})) = 0.$$

Bei einer Zustandsraumdiskretisierung mit innerem Fehler  $\varepsilon$  wird diese Bedingung abgeschwächt zu

$$h^*(\phi_h^0(x_0, u), \hat{\phi}_h(Q_i, \bar{u})) \leq \min\{\varepsilon, \Delta_i\}.$$

Die Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus soll nun noch einmal für solche Zustandsraumdiskretisierungen mit innerem Fehler  $h\varepsilon$  untersucht werden. Leider ist es für diese Zustandsraumdiskretisierungen nicht möglich ähnliche Inklusionen wie (3.6) herzuleiten.

**Satz 3.2.7 (Konvergenz des Algorithmus unter Zustandsraumdiskretisierungen mit innerem Fehler  $h\varepsilon$ )** Betrachte ein ungestörtes zeitdiskretes System  $\phi_h^0$  vom Typ (1.11). Sei  $A$  eine schwach attrahierende Menge für  $\phi_h^0$  mit Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$ , sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A)$  eine Umgebung von  $A$ , für die  $\partial\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}(A) = \emptyset$  gilt, und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine kompakte Menge, die  $\mathcal{D}(A)$  enthält. Betrachte den Algorithmus 3.2.1 mit Zustandsraumdiskretisierungen  $\hat{\phi}_h^j$  mit innerem Fehler  $h\varepsilon$  für alle  $j = 0, 1, \dots$

Ist  $A$  schwach asymptotisch stabil,  $\mathcal{D}(A)$  dynamisch robust mit dem Maß  $\gamma$  aus der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$  und  $\mathcal{D}(A)^C$  schrumpfend invers  $\gamma$ -robust stark vorwärtsinvariant jeweils für das gleiche Maß  $\gamma$ , dann gelten für  $\varepsilon > 0$  genügend klein und alle  $j \in \mathbb{N}_0$  mit  $\varepsilon^j$  genügend klein die folgenden Abschätzungen:

$$h^*(C^{j+1} \cup E^{j+1}, \mathcal{D}(A)^C) \leq r^j, \quad (3.9)$$

$$h^*(D^{j+1} \cup E^{j+1}, \mathcal{D}(A)) \leq r^j \quad (3.10)$$

und

$$h^*(E^{j+1}, \partial\mathcal{D}(A)) \leq r^j \quad (3.11)$$

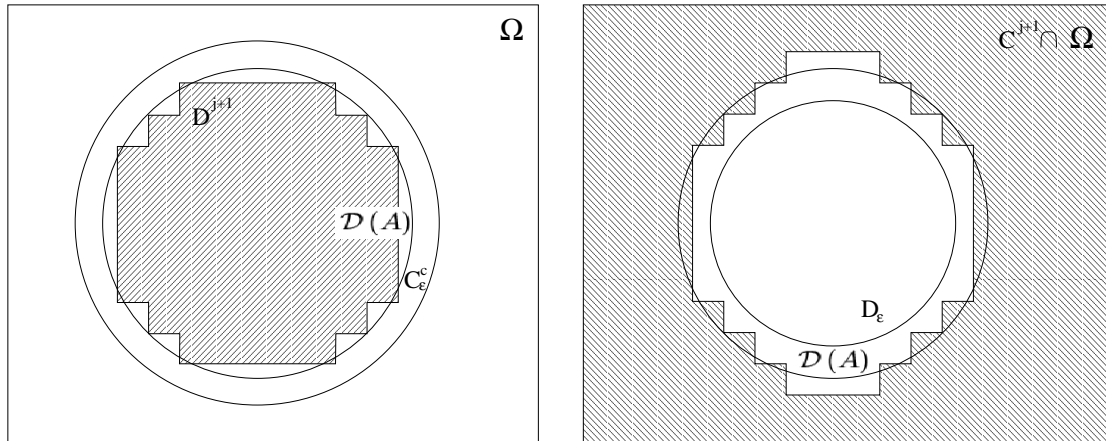


Abbildung 3.4: Verschiedene Mengen im Beweis von Satz 3.2.7

für  $r^j := \max\{\gamma(\varepsilon), \gamma(\varepsilon^j)\} + h\varepsilon^j$ .

**Beweis:** Es soll zunächst die Existenz von Mengen  $C_\varepsilon \subseteq \mathcal{D}(A)^C$  und  $D_\varepsilon \subseteq \mathcal{D}(A)$  mit  $C^j \subseteq D_\varepsilon^C$  für alle  $j \geq 0$  bzw.  $D^j \subseteq C_\varepsilon^C$  für  $j$  groß genug gezeigt werden, die die Abschätzungen

$$h(C_\varepsilon^C, \mathcal{D}(A)) \leq \gamma(\varepsilon) \quad \text{und} \quad h(D_\varepsilon^C, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon)$$

erfüllen. Aus der Definition von  $h$  bzw.  $h^*$  ergibt sich dann direkt

$$h^*(D^j, \mathcal{D}(A)) \leq \gamma(\varepsilon) \quad \text{und} \quad h^*(C^j, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon). \quad (3.12)$$

Zunächst zur Existenz von  $C_\varepsilon$ :

Da  $\mathcal{D}(A)^C$  schrumpfend invers  $\gamma$ -robust vorwärtsinvariant gewählt wurde, gibt es eine stark  $\varepsilon$ -vorwärtsinvariante Menge  $C_\varepsilon$ , die die beiden gesuchten Eigenschaften

$$h(C_\varepsilon^C, \mathcal{D}(A)) \leq \gamma(\varepsilon) \quad \text{und} \quad C_\varepsilon \subseteq \mathcal{D}(A)^C$$

hat. Es bleibt für  $C_\varepsilon$  also nur zu zeigen, daß auch  $D^j \subseteq C_\varepsilon^C$  erfüllt ist.

Für  $x \in C_\varepsilon$  gilt

$$\Phi_h(t, x, u, p[u]) \in C_\varepsilon$$

für alle  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathcal{U}$  und  $p \in \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{P}^h$ .

Aus dem vorausgesetzten inneren Fehler  $h\varepsilon$  folgt, daß es für jedes  $x \in Q_i^j$  und jedes  $\bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j)$  ein  $u \in \mathcal{U}$  und  $p \in \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{P}^h$  mit

$$\phi_h(x, u, p[u]) \in \hat{\phi}_h(Q_i^j, \bar{u})$$

gibt.

Betrachte nun jene Zellen  $Q_i^j$ , die  $C_\varepsilon$  schneiden. Für diese Zellen folgt

$$\hat{\phi}_h(Q_i^j, \bar{u}) \cap C_\varepsilon \neq \emptyset \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \cap C_\varepsilon \neq \emptyset$$

für alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j)$  bzw. für alle  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  und alle  $t \in \mathbb{T}^+$ . Nun kann die gesuchte Aussage  $D^j \subseteq C_\varepsilon^C$  durch Induktion über  $j$  gezeigt werden. Für  $j = 0$  wird hierbei ausgenutzt, daß  $D^0 \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq C_\varepsilon^C$  gilt. Für den Schritt von  $j$  auf  $j + 1$  sei  $Q_i^j \cap C_\varepsilon \neq \emptyset$ . Wegen des nichtleeren Schnittes von  $\widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u})$  mit  $C_\varepsilon$  und der Induktionsannahme  $D^j \subseteq C_\varepsilon^C$  folgt dann aus (3.4), daß  $Q_i^j \not\subseteq D^{j+1}$ . Für ein  $Q_i^j \subseteq D^{j+1}$  gilt also  $Q_i^j \cap C_\varepsilon = \emptyset$ .

Die Existenz von  $D_\varepsilon$  zeigt man wie folgt:

Sei  $D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) \geq \gamma(\varepsilon)\}$  mit  $V$  aus der Definition 2.3.3 der dynamischen Robustheit.

$D_\varepsilon \subseteq \mathcal{D}(A)$  zeigt man mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises: Betrachte  $x \in D_\varepsilon$ , d. h. es gilt  $V(x) \geq \gamma(\varepsilon)$ . Angenommen es gilt  $x \in \mathcal{D}(A)^C$ , d. h.  $d(x, \mathcal{D}(A)^C) = \sigma(d(x, \mathcal{D}(A)^C)) = 0$ . Wegen  $V(x) \leq \sigma(d(x, \mathcal{D}(A)^C))$  ergibt sich nun der Widerspruch zu  $V(x) \geq \gamma(\varepsilon)$ .

$h(D_\varepsilon^C, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon)$  folgt sofort aus der Eigenschaft  $V(x) \geq d(x, \mathcal{D}(A)^C)$  der dynamischen Robustheit, wenn  $\varepsilon$  so klein gewählt wird, daß  $D_\varepsilon^C \subseteq B$  gilt.

Es ist also nur noch  $C^j \subseteq D_\varepsilon^C$  zu zeigen.

Betrachte eine Zelle  $Q_i^j$  mit  $Q_i^j \cap D_\varepsilon \neq \emptyset$ , d. h. es gibt ein  $x \in Q_i^j$  mit  $V(x) \geq \gamma(\varepsilon)$ .

Der innere Fehler  $h\varepsilon$  liefert wie bei  $C_\varepsilon$  daß es zu  $x$  und jedem  $u \in \mathcal{U}$  ein  $\bar{u} \in \mathcal{U}(Q_i^j)$  und  $p \in \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{P}^h$  gibt mit

$$\phi_h(x, u, p[u]) \in \widehat{\phi}_h(Q_i^j, \bar{u}).$$

Gleichung (2.14) liefert ein  $u \in \mathcal{U}$  mit

$$\Phi_h(t, x, u, p[u]) \in B^C \text{ für } t \text{ groß genug}$$

mit der Umgebung  $B$  von  $\mathcal{D}(A)$  aus der Definition der dynamischen Robustheit. Hierbei muß die Bedingung  $\gamma(\|p[u]\|_{[hi, h(i+1)]}) \leq \mu(V(x), -hi)$  für alle  $u \in \mathcal{U}$  und für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $h(i+1) \leq t$  erfüllt sein; diese Bedingung folgt direkt aus  $V(x) \geq \gamma(\varepsilon)$  und  $p \in \mathcal{P}_\varepsilon$ . Insgesamt ergibt sich also die Existenz einer Folge  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  mit  $\widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \cap B^C \neq \emptyset$ . Wie beim Beweis von Satz 3.2.5 (i) gilt aber  $B^C \subseteq \widehat{B} \subseteq D^j$  für  $j$  groß genug, also  $\widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \cap D^j \neq \emptyset$ . Für ein  $Q_i^j \subseteq C^{j+1}$  gilt aber  $\widehat{\Phi}_h(t, Q_i^j, \bar{u}) \cap D^j \neq \emptyset$  nach (3.5). Es muß für ein solches  $Q_i^j$  also  $Q_i^j \subseteq D_\varepsilon^C$  gelten.

Nun können die drei Abschätzung, die in diesem Satz angegeben wurden leicht gezeigt werden.

Zum Beweis von (3.9) betrachte eine Zelle  $Q_i^j \subseteq C^{j+1} \cup E^{j+1}$ . Im Fall  $Q_i^j \subseteq C^{j+1}$  gilt  $h^*(Q_i^j, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon)$  nach der soeben gezeigten Abschätzung (3.12). Im Fall  $Q_i^j \subseteq E^{j+1}$  zeigt man analog zur Abschätzung (i) des Satzes 3.2.5, daß  $h^*(Q_i^j, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j$  gilt, denn in den Beweis der Abschätzung (i) geht die Voraussetzung „rigoros“ des Satzes 3.2.5 nicht ein. Insgesamt gilt also (3.9).

Betrachte nun eine Zelle  $Q_i^j \subseteq D^{j+1} \cup E^{j+1}$ , um (3.10) zu zeigen. Im Falle  $Q_i^j \subseteq D^{j+1}$  gilt  $h^*(Q_i^j, \mathcal{D}(A)) \leq \gamma(\varepsilon)$  nach (3.12). Im Falle  $Q_i^j \subseteq E^{j+1}$  zeigt man  $h^*(Q_i^j, \mathcal{D}(A)^C) \leq \gamma(\varepsilon^j) + h\varepsilon^j$  analog zu Abschätzung (ii) des Satzes 3.2.5. In den Beweis dieser Abschätzung (ii) geht jedoch die Rigorosität der Zustandsraumdiskretisierung ein, denn es wird dort  $D^j \subseteq \mathcal{D}(A)$  verwendet, um  $D^j \cap C_{\varepsilon^j} = \emptyset$  zu erhalten. Für den inneren Fehler  $h\varepsilon$  kann aber  $D^j \cap C_{\varepsilon^j} = \emptyset$  ebenfalls leicht gezeigt werden, denn es kann o. B. d. A.  $C_{\varepsilon^j} \subseteq C_\varepsilon$  gewählt werden, und für  $C_\varepsilon$  gilt  $D^j \cap C_\varepsilon = \emptyset$ . Die Abschätzung (3.10) ist also erfüllt.

Abschätzung (3.11) ergibt sich sofort aus (3.9) und (3.10).  $\square$

**Bemerkung 3.2.8** Ist die dynamische Robustheit im vorhergehenden Satz direkt, so gilt (3.9) und

$$h(C^{j+1}, \mathcal{D}(A)^C) \leq r^j,$$

vgl. [Gr 02, Theorem 7.5.9]. In diesem Fall ist keine Aussage über  $h^*(E^{j+1}, \partial\mathcal{D}(A))$  möglich.  $\square$



## Kapitel 4

# Einschrittverfahren höherer Ordnung

Mit dem Unterteilungsalgorithmus 3.2.1 aus dem letzten Kapitel, kann der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  einer attrahierenden Menge  $A$  für das zeitdiskrete System (1.11) berechnet werden. Ursprünglich gesucht war jedoch der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(A)$  einer attrahierenden Menge  $A$  für die Differentialgleichung (1.1). Ist die Lösung der Differentialgleichung (1.1) bekannt, so kann ihre Zeit- $h$ -Abbildung  $\varphi_h^0$  als zeitdiskretes System im Algorithmus 3.2.1 verwendet werden. Ist die Lösung von (1.1) jedoch unbekannt oder ihre Berechnung zu aufwendig, werden Verfahren zur Diskretisierung von kontrollierten Differentialgleichungen benötigt.

In diesem Kapitel werden nun die Taylor-Verfahren aus [Gr/Kl 01] zur Diskretisierung von kontroll-affinen Differentialgleichungen mit beliebiger Ordnung vorgestellt.

Es wird wie in [Gr/Kl 01] hier immer von „kontroll-affin“, „Kontrollfunktion“, „Kontrollintegral“ usw. die Rede sein. Natürlich kann eine Eingangsfunktion  $u$  – wie in Kapitel 1 erläutert – je nach Kontext als Störung oder Kontrolle interpretiert werden.

### 4.1 Kontroll-affine Differentialgleichungen

Zur Erinnerung: Die Differentialgleichung (1.1) aus Kapitel 1 lautet

$$\dot{x}(t) = f^0(x(t), u(t)) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad x(0) = x_0,$$

wobei  $t \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  kompakt,  $f^0: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine stetige Funktion und  $u \in \mathcal{U} := \{u: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow U \mid u \text{ meßbar}\}$ .

Die Taylor-Verfahren, die in diesem Kapitel entwickelt werden, sind nur auf die Klasse der kontroll-affinen Differentialgleichungen anwendbar. *Affin* sind die Abbildungen eines Vektorraumes in sich, die aus linearen Abbildungen und Translationen zusammengesetzt werden können [Jä 84, § 8 Affine Geometrie].

Eine *kontroll-affine Differentialgleichung* hat die Form

$$\dot{x}(t) = g^0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m g^j(t, x(t)) u^j(t), \quad (4.1)$$

wobei  $t \in [t_0, T]$ ,  $x(t) = (x^1(t), \dots, x^d(t)) \in \mathbb{R}^d$  und  $g^j = (g^{j,1}, \dots, g^{j,d})^T: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Der Kontrollvektor  $u_m(t) := (u^1(t), \dots, u^m(t))$  besteht aus meßbaren Funktionen und nimmt Werte in einer kompakten und konvexen Teilmenge  $U_m$  des  $\mathbb{R}^m$  an.

Betrachtet man die rechte Seite von (4.1) für festes  $t^*$ , so sieht man, daß ein Vektor  $u^j(t^*) \in \mathbb{R}^m$  durch die Summe zunächst linear nach  $\mathbb{R}^d$  abgebildet und dann von der Translation  $g^0(t^*, x(t^*))$  verschoben wird. Die kontroll-affinen Abbildungen haben ihren Namen also daher, daß ihre rechte Seite für festes  $t^*$  den Kontrollvektor  $u^j(t^*)$  affin von  $\mathbb{R}^m$  nach  $\mathbb{R}^d$  abbildet. Hierbei muß man sich den oben angeführten Begriff der affinen Abbildung auf Abbildungen unterschiedlicher Vektorräume verallgemeinert vorstellen.

Beachte:

- $U$  ist kompakt,  $U_m$  kompakt und konvex.
- Mit  $U := U_m$  gilt  $u_m = (u^1, \dots, u^m) \in \mathcal{U}$ .
- Die Differentialgleichung (1.1) ist autonom, für die kontroll-affine Differentialgleichung wird dies nicht vorausgesetzt.

Um die Darstellung von (4.1) zu vereinfachen, sei  $u^0(t) \equiv 1$ . Die kontroll-affine Differentialgleichung lautet nun

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m g^j(t, x(t)) u^j(t)$$

bzw. in Integralform

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{j=0}^m \int_{t_0}^t g^j(s, x(s)) u^j(s) ds.$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  und einem Kontrollvektor  $u$  der kontroll-affinen Differentialgleichung (4.1) wird in diesem Kapitel stets kurz als  $x(t)$  bezeichnet. Ist (4.1) autonom und  $t_0 = 0$ , gilt also  $x(t) = \varphi(t, x_0, u, 0)$  mit  $\varphi$  aus Abschnitt 1.1.

## 4.2 Ein anschauliches Beispiel

Die Herleitung einer Taylor-Entwicklung soll hier einmal demonstriert werden am Beispiel einer autonomen kontroll-affinen Differentialgleichung mit  $d = k = m = 1$ :

$$\dot{x}(t) = g^0(x(t)) + g^1(x(t))u(t). \quad (4.2)$$



Hierbei gilt entsprechend der Voraussetzungen aus dem vorhergehenden Abschnitt 4.1,  $t \in [t_0, T]$  und daß  $u(t)$  meßbar ist und Werte in einem kompakten Intervall  $U_1$  annimmt. Weiter gelte für  $g^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g^1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , daß die in diesem Abschnitt verwendeten Ableitungen existieren. Die Integralform der betrachteten Differentialgleichung (4.2) lautet

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t g^0(x(s)) ds + \int_{t_0}^t g^1(x(s)) u(s) ds. \quad (4.3)$$

Sei nun  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Die Kettenregel aus [Go 94] liefert die Integralgleichung

$$G(x(t)) = G(x(t_0)) + \int_{t_0}^t g^0(x(s)) \frac{\partial}{\partial x} G(x(s)) ds + \int_{t_0}^t g^1(x(s)) \frac{\partial}{\partial x} G(x(s)) u(s) ds. \quad (4.4)$$

Die Darstellung der Taylor-Entwicklung wird im allgemeinen Fall sehr lang und unübersichtlich, daher werden im folgenden Abschnitt 4.3 verschiedene Notationen eingeführt, die eine kompakte Darstellung ermöglichen. Auch schon für das einfache Beispiel dieses Abschnitts lohnt sich die Einführung von Differentialoperatoren

$$L^0 := g^0 \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad L^1 := g^1 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Unter Verwendung dieser Operatoren lautet die Integralgleichung (4.4) nun kürzer

$$G(x(t)) = G(x(t_0)) + \int_{t_0}^t L^0 G(x(s)) ds + \int_{t_0}^t L^1 G(x(s)) u(s) ds. \quad (4.5)$$

Für  $G(x) \equiv x$  gilt  $L^0 G = g^0$  und  $L^1 G = g^1$ , d. h. aus (4.5) ergibt sich gerade wieder die Integralform (4.3) der betrachteten Differentialgleichung.

Wendet man nun die Formel (4.5) auf  $g^0(x(s))$  und  $g^1(x(s))$  in der Integralgleichung (4.3) an, so erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ g^0(x(t_0)) + \int_{t_0}^s L^0 g^0(x(z)) dz + \int_{t_0}^s L^1 g^0(x(z)) u(z) dz \right\} ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left\{ g^1(x(t_0)) + \int_{t_0}^s L^0 g^1(x(z)) dz + \int_{t_0}^s L^1 g^1(x(z)) u(z) dz \right\} u(s) ds \\ &= x(t_0) + g^0(x(t_0)) \int_{t_0}^t ds + g^1(x(t_0)) \int_{t_0}^t u(s) ds + R \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit dem Restterm

$$\begin{aligned} R &:= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g^0(x(z)) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g^0(x(z)) u(z) dz ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g^1(x(z)) u(s) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g^1(x(z)) u(z) u(s) dz ds. \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (4.6) ist die einfachste nichttriviale Taylor-Entwicklung für die Integralgleichung (4.3) gefunden.

Die Taylor-Entwicklung läßt sich nun beliebig oft fortsetzen, z. B. kann hier die Formel (4.5) auf  $L^1 g^1(x(z))$  im Restterm  $R$  angewendet werden, woraus sich

$$\begin{aligned} x(t) = & x(t_0) + g^0(x(t_0)) \int_{t_0}^t ds + g^1(x(t_0)) \int_{t_0}^t u(s) ds \\ & + L^1 g^1(x(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s u(z)u(s) dz ds + \tilde{R} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ergibt mit dem Restterm

$$\begin{aligned} \tilde{R} := & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g^0(x(z)) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g^0(x(z)) u(z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g^1(x(z)) u(s) dz ds \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0 L^1 g^1(x(r)) u(z)u(s) dr dz ds \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1 L^1 g^1(x(r)) u(r)u(z)u(s) dr dz ds. \end{aligned}$$

An diesem Beispiel lassen sich schon die wichtigsten Eigenschaften der allgemeinen Taylor-Entwicklung für kontroll-affine Differentialgleichungen erkennen. Die Taylor-Entwicklung (4.7) enthält die mehrfachen Kontrollintegrale

$$\int_{t_0}^t ds, \quad \int_{t_0}^t u(s) ds \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s u(z)u(s) dz ds,$$

der Restterm  $\tilde{R}$  enthält die „nächsten“ Kontrollintegrale mit nichtkonstanten Integranden.

Diese Beobachtung soll nun verallgemeinert werden. Oben wurde schon erwähnt, daß für eine kompakte Darstellung der Taylor-Entwicklung eine verkürzte Notation für Differentialoperatoren nützlich ist. Das Beispiel hat gezeigt, daß um die allgemeine Taylor-Entwicklung übersichtlich darzustellen, ebenfalls eine verkürzte Notation für die mehrfachen Kontrollintegrale benötigt wird. Im folgenden Abschnitt werden entsprechende Notationen eingeführt.

### 4.3 Notationen mit Multi-Indizes

Multi-Indizes dienen dazu, benötigte Kontrollfunktionen  $u^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , bzw. die zu den jeweiligen Kontrollfunktionen zugehörigen Funktionen  $g^j$  zu identifizieren.

**Definition 4.3.1 (Multi-Indizes)** Sei  $m \geq 0$ . Ein Zeilenvektor

$$\mathbf{a} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$$

mit  $j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$  für  $i = 1, \dots, l$  heißt *Multi-Index* der Länge  $l(\mathbf{a}) := l \geq 1$ .

Der Multi-Index der Länge Null sei  $\odot$ , d. h.  $l(\odot) = 0$ .

Die Menge aller Multi-Indizes sei mit  $\mathfrak{M}_m$  bezeichnet, also

$$\mathfrak{M}_m := \{ (j_1, j_2, \dots, j_l) \mid j_i \in \{0, 1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, l\} \text{ für } l \in \{1, 2, \dots\} \} \cup \{ \odot \}.$$

Für ein  $\mathbf{a} = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathfrak{M}_m$  mit  $l(\mathbf{a}) \geq 1$  werden mit  $-\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}-$  diejenigen Multi-Indizes bezeichnet, die durch Abschneiden der ersten bzw. letzten Komponente von  $\mathbf{a}$  entstehen, d. h.

$$-\mathbf{a} = (j_2, \dots, j_l) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}- = (j_1, \dots, j_{l-1}).$$

Die *Verkettung*  $*$  zweier Multi-Indizes  $\mathbf{a} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$  und  $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_\lambda)$  aus  $\mathfrak{M}_m$  sei definiert durch

$$\mathbf{a} * \bar{\mathbf{a}} = (j_1, j_2, \dots, j_l, \bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_\lambda),$$

$\mathbf{a} * \bar{\mathbf{a}}$  wird also durch das Zusammenfügen der beiden Multi-Indizes  $\mathbf{a}$  und  $\bar{\mathbf{a}}$  gebildet.  $\square$

Beachte:  $m$  ist die Anzahl der in (4.1) eingehenden Kontrollfunktionen!

**Definition 4.3.2 (Iterierte Kontrollintegrale)** Für einen Multi-Index  $\mathbf{a} = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathfrak{M}_m$ , eine integrierbare Funktion  $g : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Kontrollfunktion  $u \in \mathcal{U}$  mit  $U := U_m$  sei das *iterierte Kontrollintegral*  $I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t}$  rekursiv definiert durch

$$I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t} := \begin{cases} g(t), & l(\mathbf{a}) = 0 \\ \int_{t_0}^t I_{\mathbf{a}-}[g(\cdot)]_{t_0, s} u^{j_l}(s) ds, & l(\mathbf{a}) \geq 1. \end{cases}$$

Soll explizit auf den Kontrollvektor  $u$  hingewiesen werden, so wird die Notation  $I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t, u}$  verwendet. Gilt  $g(t) \equiv 1$  so wird  $I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t, (u)}$  abgekürzt zu  $I_{\mathbf{a}, t_0, t, (u)}$ .  $\square$

Beachte, daß ein iteriertes Integral  $I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, \cdot} : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  für eine integrierbare Funktion  $g$  stetig und damit auch integrierbar ist, d. h. iterierte Integrale existieren und sind wohldefiniert.

### Beispiele 4.3.3

$$\begin{aligned} I_{\odot}[g(\cdot)]_{t_0, t} &= g(t), \\ I_{(0)}[g(\cdot)]_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t g(s) u^0(s) ds = \int_{t_0}^t g(s) ds, \\ I_{(j)}[g(\cdot)]_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t g(s) u^1(s) ds, \quad j = 1, \dots, m \\ I_{(0,1)}[g(\cdot)]_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} g(s_2) u^1(s_1) ds_2 ds_1, \\ I_{(0,2,1)}[g(\cdot)]_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \int_{t_0}^{s_2} g(s_3) u^2(s_2) u^1(s_1) ds_3 ds_2 ds_1. \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 4.3.4 (Koeffizienten-Funktion)** Für einen Multi-Index  $\mathbf{a} = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathfrak{M}_m$  und eine mindestens  $l$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sei die *Koeffizienten-Funktion*  $G_{\mathbf{a}}$  rekursiv definiert durch

$$G_{\mathbf{a}} := \begin{cases} G, & l(\mathbf{a}) = 0 \\ L^{j_l} G_{-\mathbf{a}}, & l(\mathbf{a}) \geq 1 \end{cases}$$

unter Verwendung der Differentialoperatoren

$$L^0 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d g^{0,k} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad L^j := \sum_{k=1}^d g^{j,k} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Hierfür müssen die Funktionen  $g^0, g^1, \dots, g^m$  ausreichend glatt sein.  $\square$

**Beispiel 4.3.5** Sei  $d = 1$ , die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) sei autonom, d. h. es gilt  $g^{j,k}(t, x) = g^j(x)$ .  $g^{j'}$  bezeichne die Ableitung von  $g^j$  nach  $x$ . Sei  $G(t, x) \equiv x$ . Dann gilt:

$$G_{(j)} = g^j, \quad j = 0, \dots, m, \quad G_{(j_1, j_2)} = g^{j_1} g^{j_2'}, \quad j_1, j_2 \in \{0, \dots, m\} \quad \square$$

Die Notationen für die iterierten Kontrollintegrale und die Koeffizientenfunktionen reichen noch nicht ganz für eine kompakte Darstellung einer Taylor-Entwicklung aus. Was jetzt noch fehlt, ist eine Möglichkeit, die Multi-Indizes, die den Kontrollintegralen der Taylor-Entwicklung entsprechen, und die Multi-Indizes, die die Kontrollintegrale mit nichtkonstanten Integranden des Restterms beschreiben, zu trennen, ohne dabei alle Multi-Indizes explizit angeben zu müssen.

**Definition 4.3.6 (Hierarchische Menge und Restmenge)** Eine Menge  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_m$  heißt *hierarchische Menge*, wenn gilt

- (i)  $\mathcal{A}$  ist nichtleer,
- (ii) die Länge der enthaltenen Multi-Indizes ist gleichmäßig beschränkt, d. h. es gilt  $\sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} l(\mathbf{a}) < \infty$ , und
- (iii)  $-\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \setminus \{\odot\}$ .

Die zur hierarchischen Menge  $\mathcal{A}$  zugehörige *Restmenge*  $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$  ist gegeben durch

$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) := \{ \mathbf{a} \in \mathfrak{M}_m \setminus \mathcal{A} \mid -\mathbf{a} \in \mathcal{A} \}. \quad \square$$

Gehört ein Multi-Index zu einer hierarchischen Menge  $\mathcal{A}$ , so enthält diese Menge auch alle Multi-Indizes die durch das (mehrfache) Entfernen der ersten Komponente dieses Multi-Index entstehen. Diejenigen Multi-Indizes in  $\mathcal{A}$ , die nicht durch das Entfernen einer oder mehrerer erster Komponenten eines anderen Multi-Index aus dieser Menge gebildet werden können, kann man sich als „maximal“ vorstellen. Die Restmenge  $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$  bildet man also durch das Hinzufügen einer neuen ersten Komponente zu den „maximalen“ Multi-Indizes in  $\mathcal{A}$ , die man alle Werte von 0 bis  $m$  durchlaufen läßt.

**Beispiel 4.3.7** Sei  $\mathcal{A} = \{\odot, (0), (1), \dots, (m)\}$ . Dann gilt

$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{cccc} (0, 0), & (1, 0), & \dots, & (m, 0), \\ (0, 1), & (1, 1), & \dots, & (m, 1), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0, m), & (1, m), & \dots, & (m, m) \end{array} \right\}. \quad \square$$

Mit Hilfe der hierarchischen und der Restmenge können nun Taylor-Entwicklungen für kontroll-affine Differentialgleichungen angegeben werden. Die Multi-Indizes einer hierarchischen Menge beschreiben hierbei die Kontrollintegrale einer Taylor-Entwicklung, die Multi-Indizes aus der Restmenge die Kontrollintegrale des zugehörigen Restterms.

## 4.4 Taylor-Entwicklungen

Die Taylor-Entwicklung von (4.1) dargestellt mit den im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Notationen:

**Satz 4.4.1 (Taylor-Entwicklungen für kontroll-affine Differentialgleichungen)**  
Sei  $G: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_m$  eine hierarchische Menge mit Restmenge  $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ . Dann gilt für  $t \geq t_0 \geq 0$  die folgende Taylor-Entwicklung

$$G(t, x(t)) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(t_0, x(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

um  $(t_0, x(t_0))$ , vorausgesetzt, alle vorkommenden Ableitungen und Integrale existieren.

**Beweis:** Die Kettenregel aus [Go 94] liefert für  $G(t, x(t))$  die Integralgleichung

$$G(t, x(t)) = G(t_0, x(t_0)) + \sum_{j=0}^m I_{(j)}[L^{(j)}G(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t} \quad (4.8)$$

Wendet man dies nun auf eine der Funktionen  $G_{\mathbf{a}}$  für einen Multi-Index  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  an, so ergibt sich

$$G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot)) = G_{\mathbf{a}}(t_0, x(t_0)) + \sum_{j=0}^m G_{\mathbf{a}^{*(j)}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

und weiter durch iterierte Integration beider Seiten mit dem Kontrollintegral  $I_{\mathbf{a}}$

$$I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t} = G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))I_{\mathbf{a}, t_0, t} + \sum_{j=0}^m I_{\mathbf{a}^{*(j)}}[G_{\mathbf{a}^{*(j)}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t} \quad (4.9)$$

Mit Hilfe von (4.9) kann nun die Aussage dieses Satzes durch Induktion über  $k := \max\{l(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$  gezeigt werden.

Für  $k = 0$  gilt  $\mathcal{A} = \{\odot\}$ , d. h. die gesuchte Aussage ist gerade (4.8).

Für  $k > 0$  betrachte die hierarchische Menge  $\mathcal{E} := \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} \mid l(\mathbf{a}) \leq k - 1\}$ . Damit lautet die Induktionsannahme

$$G(t, x(t)) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{E}} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(t_0, x(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

Da  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{E})$  gilt, kann man hieraus

$$G(t, x(t)) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{E}} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(t_0, x(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

schließen. Entwickelt man nun den zweiten Summanden mit Hilfe von (4.9) um  $x_0$ , so erhält man

$$G(t, x(t)) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} I_{\mathfrak{a}}[G_{\mathfrak{a}}(t_0, x(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}} I_{\mathfrak{a}}[G_{\mathfrak{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

mit  $\mathfrak{R} = (\mathfrak{B}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})) \cup \{(j) * \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}, j = 0, \dots, m\}$ . Wegen der Definition der Restmenge gilt aber gerade  $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ , d. h. die Aussage dieses Satzes ist gezeigt.  $\square$

Beachte: Die Summe über  $\mathcal{A}$  enthält Integrale über Konstanten, die Summe über  $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$  enthält Integrale über Funktionen.

**Beispiel 4.4.2** Betrachte die hierarchische Menge  $\mathcal{A} = \{\odot\}$  mit der zugehörigen Restmenge  $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \{(0), \dots, (m)\}$ . Dann lautet die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} G(t, x(t)) &= I_{\odot}[G_{\odot}(t_0, x(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}(\{\odot\})} I_{\mathfrak{a}}[G_{\mathfrak{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t} \\ &= G(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^t L^0 G(s, x(s)) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t L^j G(s, x(s)) u^j(s) ds. \end{aligned} \quad \square$$

## 4.5 Taylor-Verfahren

Mit Hilfe des Satzes 4.4.1 können nun Näherungsverfahren für die Lösung der kontrollaffinen Differentialgleichung (4.1) hergeleitet werden.

Zuerst hier die allgemeine Formulierung einer Taylor-Approximation für eine Funktion  $G$ :

**Definition 4.5.1 (Taylor-Approximation)** Sei  $N = 1, 2, 3, \dots$  und

$$\mathcal{A}_N := \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}_m \mid l(\mathfrak{a}) \leq N\}.$$

Sei  $G: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$   $(N+1)$ -mal stetig differenzierbar und seien die  $g^j: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $j = 0, \dots, m$ , jeweils  $N$ -mal stetig differenzierbar. Dann ist die *Taylor-Approximation* für  $G(t_0 + h, x(t_0 + h))$  gegeben durch

$$\begin{aligned} G_N(t_0, x(t_0), h) &:= \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_N} G_{\mathfrak{a}}(t_0, x(t_0)) I_{\mathfrak{a}, t_0, t_0+h} \\ &= G(t_0, x(t_0)) + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_N \setminus \{\odot\}} G_{\mathfrak{a}}(t_0, x(t_0)) I_{\mathfrak{a}, t_0, t_0+h} \end{aligned} \quad \square$$

Die Fehlerordnung dieser Taylor-Approximation soll nun abgeschätzt werden, hierfür müssen die Integrale des Restterms

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_N)} I_{\mathfrak{a}}[G_{\mathfrak{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t}$$

der Taylor-Entwicklung mit hierarchischer Menge  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_N$  abgeschätzt werden. Dies leistet der folgende Hilfssatz:

**Hilfssatz 4.5.2** Betrachte einen Multi-Index  $\mathbf{a}$  der Länge  $l = l(\mathbf{a})$ . Sei  $|g|$  global beschränkt durch eine Konstante  $M > 0$ . Sei für einen Vektor  $u = (u^1, \dots, u^m) \in U_m$  die *Maximum-Norm* definiert durch  $|u|_\infty := \max\{|u_j| \mid j = 1, \dots, m\}$  und damit weiter

$$\bar{u} := \max \left\{ \max_{u \in U_m} |u|_\infty, 1 \right\}.$$

Dann gilt

$$|I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t}| \leq \bar{u}^l (t - t_0)^l M \quad (4.10)$$

für alle  $u \in \mathcal{U}$  mit  $U = U_m$  und alle  $t \geq t_0$ .

**Beweis:** Die Abschätzung (4.10) zeigt man mit Hilfe von Induktion über  $l$ . Für den Multi-Index  $\odot$  der Länge  $l = 0$  ist die Behauptung dieses Hilfssatzes offensichtlich erfüllt. Betrachte nun einen Multi-Index  $\mathbf{a}$  der Länge  $l + 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |I_{\mathbf{a}}[g(\cdot)]_{t_0, t}| &= \left| \int_{t_0}^t I_{\mathbf{a}-}[g(\cdot)]_{t_0, s} u^{j_{l+1}}(s) ds \right| \leq \left| \bar{u}^l (t - t_0)^l M \int_{t_0}^t u^{j_{l+1}}(s) ds \right| \\ &\leq \bar{u}^l (t - t_0)^l M (t - t_0) \bar{u} = \bar{u}^{l+1} (t - t_0)^{l+1} M, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsvoraussetzung (4.10) verwendet wurde.  $\square$

**Satz 4.5.3** Betrachte die Taylor-Approximation aus Definition 4.5.1, die Ableitungen der  $g^j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , seien global beschränkt. Dann hat der *lokale Diskretisierungsfehler* der Taylor-Approximation die Ordnung  $N + 1$ , d. h. es gilt

$$|G_N(t_0, x(t_0), h) - G(t_0 + h, x(t_0 + h))| \leq Kh^{N+1} \quad (4.11)$$

mit einer Konstanten  $K > 0$ .

**Beweis:** Die Taylor-Entwicklung von  $G$  um  $(t_0, x(t_0))$  ausgewertet an der Stelle  $t_0 + h$  liefert

$$\left| G_N(t_0, x(t_0), h) - G(t_0 + h, x(t_0 + h)) \right| = \left| \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_N)} I_{\mathbf{a}}[G_{\mathbf{a}}(\cdot, x(\cdot))]_{t_0, t_0+h} \right|.$$

Es gilt  $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_N) = \{\mathbf{a} \in \mathfrak{M}_m \mid l(\mathbf{a}) = N + 1\}$ , d. h. für die Integrale in der Summe über  $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_N)$  ergibt sich jeweils mit dem Hilfssatz 4.5.2 die Ordnung  $N + 1$  und damit auch für deren Summe.  $\square$

**Bemerkung 4.5.4** Betrachtet man nur eine kompakte Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^d$ , wie sie für den Unterteilungsalgorithmus 3.2.1 benötigt wird, so ergibt sich die für die Fehlerabschätzung geforderte globale Beschränktheit der Ableitungen der  $g^j$  schon aus der in der Definition 4.5.1 der Taylor-Approximation geforderten stetigen Differenzierbarkeit der  $g^j$  indem man diese bzw. deren Ableitungen außerhalb von  $\Omega$  passend fortsetzt.  $\square$

Mit Hilfe der Taylor-Approximation, deren Fehlerordnung nun bekannt ist, werden nun die Taylor-Verfahren definiert. Hierbei wird zunächst vorausgesetzt, daß die benötigten Kontrollintegrale bekannt sind. In Abschnitt 4.6 wird dann angegeben, wie diese Integrale näherungsweise berechnet werden können.

**Definition 4.5.5 (Taylor-Verfahren)** Sei  $h > 0$  und  $x = (x^1, \dots, x^d)^T \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $t_0, t_1, \dots, t_s$  ( $t_s = T$ ) eine Unterteilung des Intervalls  $[t_0, T]$  mit Schrittweiten  $h_n := t_{n+1} - t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, s-1$ , und maximaler Schrittweite  $h := \max_n h_n$ . Das *Taylor-Verfahren der Ordnung*  $N = 1, 2, 3, \dots$  für die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) lautet komponentenweise

$$x_{n+1}^k := x_n^k + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_N \setminus \{\emptyset\}} G_\alpha^k(t_n, x_n) I_{\alpha, t_n, t_{n+1}}$$

mit  $k = 1, \dots, d$ , wobei die Koeffizientenfunktionen  $G_\alpha = (G_\alpha^1, \dots, G_\alpha^d)^T$  jeweils zu bilden sind für  $G(t, x) = x$ .  $\square$

### Bemerkungen 4.5.6

- Die Kontrollintegrale dieses Taylor-Verfahrens lauten für einen Multi-Index  $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \mathcal{A}_N \setminus \{\emptyset\}$

$$I_{\alpha, t_n, t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_1} \dots \int_{t_n}^{s_l} u^{j_1}(s_1) u^{j_2}(s_2) \dots u^{j_l}(s_l) ds_1 ds_2 \dots ds_l.$$

- Erfüllt die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) eine Lipschitz-Bedingung wie (1.7), so folgt aus der Abschätzung des lokalen Diskretisierungsfehlers (4.11), daß der *globale Diskretisierungsfehler* des Taylor-Verfahrens der Ordnung  $N$  von der Ordnung  $N$  ist, d. h. es gibt eine Konstante  $C$  mit

$$|x_n - x(t_n)| \leq Ch^N.$$

- Ist die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) autonom, so kann das Taylor-Verfahren als zeitdiskretes System vom Typ (1.11) mit rechter Seite  $\phi_h^0(x, u) = (\phi_h^{0,1}(x, u), \dots, \phi_h^{0,k}(x, u))$  mit den Komponenten

$$\phi_h^{0,k}(x, u) = x^k + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_N \setminus \{\emptyset\}} G_\alpha^k(0, x) I_{\alpha, 0, h}$$

für  $k = 1, \dots, d$  dargestellt werden.

- Es ist sinnvoll, die Kontrollintegrale zu den Multi-Indizes  $(0), (0, 0), (0, 0, 0), \dots$  jeweils von den übrigen Multi-Indizes zu trennen. Sie sind eigentlich Integrale ohne Kontrolle, da ja  $u^0(t) \equiv 1$  festgelegt wurde, und lassen sich daher im Gegensatz zu den übrigen Integralen ohne besonderen Aufwand berechnen.  $\square$



**Beispiele 4.5.7**

- (i)  $N = 1$ : Das Taylor-Verfahren der Ordnung 1 heißt *Euler-Verfahren*, es lautet komponentenweise

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^k &= x_n^k + \sum_{\alpha \in \{(0), (1), \dots, (m)\}} G_\alpha^k(t_n, x_n) I_{\alpha, t_n, t_{n+1}} \\
&= x_n^k + \sum_{j=0, \dots, m} G_{(j)}^k(t_n, x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} \\
&= x_n^k + \sum_{j=0, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^j(s) ds \\
&= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^j(s) ds
\end{aligned}$$

mit  $k = 1, \dots, d$ . Für  $m = 0$ , d. h. ohne Kontrolle, ist dies gerade das schon bekannte Euler-Verfahren für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g^0(t, x(t)).$$

- (ii)  $N = 2$ : Es gilt

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} \odot, & (0), & (1), & \dots, & (m), \\ (0, 0), & (1, 0), & \dots, & & (m, 0), \\ (0, 1), & (1, 1), & \dots, & & (m, 1), \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ (0, m), & (1, m), & \dots, & & (m, m) \end{array} \right\}.$$

Die zu den Multi-Indizes  $(0), (1), \dots, (m)$  gehörigen Summanden des Taylor-Verfahrens sind schon vom Euler-Verfahren her bekannt. Das Integral zum Multi-Index  $(0, 0)$  berechnet sich zu

$$I_{(0,0), t_n, t_{n+1}} = \frac{1}{2} h_n^2.$$

Insgesamt ergibt sich, daß das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 komponentenweise

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^k &= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} \\
&\quad + \frac{1}{2} L^0 g^{0,k}(t_n, x_n) h_n^2 + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m L^{j_1} g^{j_2, k}(t_n, x_n) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} \\
&= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^j(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} L^0 g^{0,k}(t_n, x_n) h_n^2 + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m L^{j_1} g^{j_2, k}(t_n, x_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s^2} u^{j_1}(s_1) u^{j_2}(s_2) ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

lautet mit  $k = 1, \dots, d$ . □

### Vereinfachungen durch additive oder kommutative Kontrolle

Die hergeleiteten Taylor-Verfahren lassen sich wesentlich vereinfachen, wenn die  $g^j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , bestimmte Bedingungen erfüllen.

Gilt

$$g^j(t, x) = g^j(t) \text{ für alle } j = 1, \dots, m \quad \text{oder} \quad g^j(t, x) = b^j \in \mathbb{R}^d \text{ für alle } j = 1, \dots, m,$$

hängen also die  $g^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , nicht von  $x$  ab, so sagt man, die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) hat *additive Kontrolle*. In ersten Fall  $g^j(t, x) = g^j(t)$  verschwinden die partiellen Ableitungen nach den  $x^k$ ,  $k = 1, \dots, d$ . Das Taylor-Verfahren der Ordnung  $N = 2$  vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} x_{n+1}^k &= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} + \frac{1}{2} L^0 g^{0,k}(t_n, x_n) h_n^2 \\ &+ \sum_{j=1}^m L^0 g^{j,k}(t_n) I_{(0,j), t_n, t_{n+1}} + \sum_{j=1}^m L^j g^{0,k}(t_n, x_n) I_{(j,0), t_n, t_{n+1}} \end{aligned}$$

Im zweiten Fall  $g^j(t, x) = b^j$  verschwinden alle partiellen Ableitungen und das Taylor-Verfahren der Ordnung  $N = 2$  vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} x_{n+1}^k &= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} b^{j,k} I_{(j), t_n, t_{n+1}} + \frac{1}{2} L^0 g^{0,k}(t_n, x_n) h_n^2 \\ &+ \sum_{j=1}^m L^j g^{0,k}(t_n, x_n) I_{(j,0), t_n, t_{n+1}} \end{aligned}$$

Gilt

$$L^{j_1} g^{j_2, k}(t, x) \equiv L^{j_2} g^{j_1, k}(t, x) \text{ für alle } j_1, j_2 = 0, \dots, m,$$

so sagt man die kontroll-affine Differentialgleichung (4.1) hat *kommutative Kontrolle*. Die *partielle Integration*  $\int_a^b f(s) g'(s) ds = f(s) g(s) \Big|_a^b - \int_a^b g(s) f'(s) ds$  für  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  aus der Analysis liefert zusätzlich

$$I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} + I_{(j_2, j_1), t_n, t_{n+1}} = I_{(j_1), t_n, t_{n+1}} I_{(j_2), t_n, t_{n+1}} \text{ für alle } j_1, j_2 = 0, \dots, m,$$

so daß sich jeweils die Summen

$$L^{j_1} g^{j_2, k}(t_n, x_n) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} + L^{j_2} g^{j_1, k}(t_n, x_n) I_{(j_2, j_1), t_n, t_{n+1}}$$

vereinfachen lassen zu

$$L^{j_1} g^{j_2, k}(t_n, x_n) I_{(j_1), t_n, t_{n+1}} I_{(j_2), t_n, t_{n+1}}$$

Das Taylor-Verfahren der Ordnung  $N = 2$  lautet im Falle kommutativer Kontrolle also

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^k &= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^m L^j g^{j,k}(t_n, x_n) I_{(j,j), t_n, t_{n+1}} \\
&\quad + \sum_{j_1=0}^{m-1} \sum_{j_2=j_1+1}^m L^{j_1} g^{j_2,k}(t_n, x_n) I_{(j_1), t_n, t_{n+1}} I_{(j_2), t_n, t_{n+1}} \\
&= x_n^k + g^{0,k}(t_n, x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(t_n, x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m L^j g^{j,k}(t_n, x_n) (I_{(j), t_n, t_{n+1}})^2 \\
&\quad + \sum_{j_1=0}^{m-1} \sum_{j_2=j_1+1}^m L^{j_1} g^{j_2,k}(t_n, x_n) I_{(j_1), t_n, t_{n+1}} I_{(j_2), t_n, t_{n+1}}
\end{aligned}$$

### Ableitungsfreie Schemata

Die hergeleiteten Taylor-Verfahren für  $N \geq 2$  haben den Nachteil, daß die Ableitungen der  $g^j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , bekannt sein und in jedem Schritt ausgewertet werden müssen. Hierzu kann man sich zwar ein Computeralgebrasystem wie z. B. MAPLE zu Nutze machen, trotzdem ist es nützlich ableitungsfreie Schemata zur Verfügung zu haben, z. B. wenn man die Verfahren in einer prozeduralen Programmiersprache wie C implementieren möchte.

Die Herleitung ableitungsfreier Schemata erfolgt mit Hilfe der (gewöhnlichen) Taylor-Entwicklung.

Die Differentialgleichung (4.1) sei autonom, d. h. es gelte  $g^{j,k}(t, x) = g^{j,k}(x)$ . Betrachte das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 aus dem Beispiel 4.5.7 (ii):

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^k &= x_n^k + g^{0,k}(x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j,k}(x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} \\
&\quad + \frac{1}{2} L^0 g^{0,k}(x_n) h_n^2 + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m L^{j_1} g^{j_2,k}(x_n) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}}
\end{aligned}$$

Es gilt mit der aus der Analysis bekannten *Jakobi-Matrix*  $D$

$$L^{j_1} g^{j_2,k} = D g^{j_2,k} g^{j_1}, \quad j_1, j_2 = 0, \dots, m.$$

Die (gewöhnliche) Taylor-Entwicklung der  $g^{j_2,k}$  jeweils um  $x_n$  liefert

$$g^{j_2,k}(x_n + g^{j_1}(x_n) h_n) = g^{j_2,k}(x_n) + D g^{j_2,k}(x_n) g^{j_1}(x_n) h_n + O(h_n^2)$$

mit dem *Landau-Symbol*  $O$ , woraus sich

$$L^{j_1} g^{j_2, k}(x_n) = Dg^{j_2, k}(x_n) g^{j_1}(x_n) = \frac{1}{h_n} (g^{j_2, k}(x_n + g^{j_1}(x_n) h_n) - g^{j_2, k}(x_n)) + O(h_n)$$

ergibt. Mit der Abschätzung  $I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} = O(h_n^2)$  aus dem Hilfssatz 4.5.2 folgt nun

$$\begin{aligned} L^{j_1} g^{j_2, k}(x_n) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} &= \left\{ \frac{1}{h_n} (g^{j_2, k}(x_n + g^{j_1}(x_n) h_n) - g^{j_2, k}(x_n)) + O(h_n) \right\} I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} \\ &= \frac{1}{h_n} (g^{j_2, k}(x_n + g^{j_1}(x_n) h_n) - g^{j_2, k}(x_n)) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} + O(h_n^3). \end{aligned}$$

Der Fehler der hier verwendeten (gewöhnlichen) Taylor-Entwicklung ist also von der gleichen Ordnung wie der lokale Diskretisierungsfehler des Taylor-Verfahrens, d. h. das hergeleitete ableitungsfreie Schema

$$\begin{aligned} x_{n+1}^k &= x_n^k + \frac{1}{2} g^{0, k}(x_n) h_n + \sum_{j=1, \dots, m} g^{j, k}(x_n) I_{(j), t_n, t_{n+1}} + \frac{1}{2} g^{0, k}(x_n + g^0(x_n) h_n) h_n \\ &\quad + \frac{1}{h_n} \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1 + j_2 \neq 0}}^m (g^{j_2, k}(x_n + g^{j_1}(x_n) h_n) - g^{j_2, k}(x_n)) I_{(j_1, j_2), t_n, t_{n+1}} \end{aligned}$$

behält die Ordnung  $N = 2$ . Für  $m = 0$  ist dies gerade das schon bekannte Heun-Verfahren für die autonome gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g^0(x(t)).$$

## 4.6 Näherung mehrfacher Kontrollintegrale

Wie für die Ableitungen der  $g^j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , im Abschnitt über ableitungsfreie Taylor-Schemata erläutert, gilt auch für die Kontrollintegrale, daß diese zwar mit einem Computeralgebrasystem wie MAPLE symbolisch gelöst und auch ausgewertet werden können, für die Implementierung der Verfahren in einer prozeduralen Programmiersprache wie C stehen aber symbolische Lösungen nicht zur Verfügung. Weiter kann die symbolische Auswertung eines komplizierten Integrals unangemessen viel Zeit in Anspruch nehmen.

Soll mit dem Unterteilungsalgorithmus 3.2.1 ein schwacher Einzugsbereich berechnet werden, so werden jeweils Kontrollintegrale zu einem einzelnen Kontrollvektor  $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$  benötigt. Soll hingegen ein starker Einzugsbereich nach Bemerkung 3.2.2 berechnet werden, so ist die Menge aller möglichen mehrfachen Kontrollintegrale zu berechnen.

### Mehrfache Kontrollintegrale zu einem einzelnen Kontrollvektor

**Satz 4.6.1** Betrachte einen meßbaren Kontrollvektor  $u: [0, h] \rightarrow U_m$ , ein  $P \in \mathbb{N}$  und  $\beta = h/P > 0$ , und definiere

$$\hat{u}_k^j := \int_{(k-1)\beta}^{k\beta} u^j(s) ds$$

für  $j = 0, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, P$ . Dann gilt

$$I_{\mathbf{a},0,h,u} = \sum_{k_l=1}^P \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} + O(\beta h^{l-1}) \quad (4.12)$$

für alle  $l \geq 1$  und alle  $\mathbf{a} = (j_1, \dots, j_l)$ .

**Beweis:** Es soll zunächst für ein beliebiges  $\varepsilon \in (0, h]$

$$I_{(j_1, \dots, j_l),0,\varepsilon,u} = \sum_{k_l=1}^{[P\varepsilon/h]} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} + O(\beta h^{l-1}) \quad (4.13)$$

durch Induktion über  $l$  gezeigt werden, hierbei steht  $[r]$  für die kleinste ganze Zahl  $\geq r$ . Hieraus folgt dann (4.12) mit  $\varepsilon = h$ .

Für  $l = 1$  lautet (4.13)  $I_{(j_1),0,\varepsilon,u} = \sum_{k_1=1}^{[P\varepsilon/h]} \hat{u}_{k_1}^{j_1} + O(\beta)$ , diese Aussage folgt sofort aus der Definition der  $u_{k_1}^{j_1}$ , der Meßbarkeit der  $u^{j_i}$  und der Kompaktheit von  $U_m$ , vgl. Hilfssatz 4.5.2. Betrachte nun einen Multi-Index  $\mathbf{a} = (j_1, \dots, j_l, j_{l+1})$  der Länge  $l + 1$ . Dann gilt

$$I_{(j_1, \dots, j_l, j_{l+1}),0,\varepsilon,u} = \int_0^\varepsilon I_{(j_1, \dots, j_l),0,s,u} u^{j_{l+1}}(s) ds,$$

Die Induktionsannahme liefert nun

$$I_{(j_1, \dots, j_l, j_{l+1}),0,\varepsilon,u} = \int_0^\varepsilon \left( \sum_{k_l=1}^{[Ps/h]} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} + O(\beta h^{l-1}) \right) u^{j_{l+1}}(s) ds$$

und mit  $\int_0^\varepsilon u^{j_{l+1}}(s) ds = O(\varepsilon) = O(h)$  folgt hieraus

$$I_{(j_1, \dots, j_l, j_{l+1}),0,\varepsilon,u} = \int_0^\varepsilon \left( \sum_{k_l=1}^{[Ps/h]} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} \right) u^{j_{l+1}}(s) ds + O(\beta h^l).$$

Da die Mehrfachsumme jeweils auf dem Intervall  $[(k_{l+1}-1)\beta, k_{l+1}\beta]$ ,  $k_{l+1} = 1, \dots$ , konstant ist, ergibt sich

$$I_{(j_1, \dots, j_l, j_{l+1}),0,\varepsilon,u} = \sum_{k_{l+1}=1}^{[P\varepsilon/h]} \sum_{k_l=1}^{k_{l+1}} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} \int_{(k_{l+1}-1)\beta}^{k_{l+1}\beta} u^{j_{l+1}}(s) ds + O(\beta h^l) + O(\beta h^l),$$

wobei der zusätzliche Landau-Summand  $O(\beta h^l)$  durch die Abschätzung der Mehrfachsumme

$$\sum_{k_l=1}^{[P\varepsilon/h]} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} = O(h^l)$$

und des Integrals

$$\int_\varepsilon^{[P\varepsilon/h]\beta} u^{j_{l+1}}(s) ds = O(\beta)$$

entsteht. Insgesamt ergibt sich

$$I_{(j_1, \dots, j_l, j_{l+1}), 0, \varepsilon, u} = \sum_{k_{l+1}=1}^{[P\varepsilon/h]} \sum_{k_l=1}^{k_{l+1}} \sum_{k_{l-1}=1}^{k_l} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} \hat{u}_{k_1}^{j_1} \dots \hat{u}_{k_l}^{j_l} \hat{u}_{k_{l+1}}^{j_{l+1}} ds + O(\beta h^l),$$

also die Gleichung (4.13) für  $l + 1$ . □

Sind die  $\hat{u}_k^j$  bekannt, wie z. B. für die im Kapitel 5 verwendeten stückweise konstanten Kontrollfunktionen, so kann nun folgende Strategie angewendet werden, um die Kontrollintegrale  $I_{\mathbf{a}, t, t+h, u}$  anzunähern:

Zu einer Schrittweite  $h > 0$ , einem Taylor-Verfahren der Ordnung  $N$  und einem Multi-Index  $\mathbf{a}$  mit  $l(\mathbf{a}) \geq 2$ , wähle  $\beta > 0$  so, daß

$$\beta \leq h^{N+2-l(\mathbf{a})} \tag{4.14}$$

und berechne die benötigten Kontrollintegrale mit Hilfe von (4.12). Dann gilt mit Satz 4.6.1, daß die  $I_{\mathbf{a}, t, t+h, u}$  mit einem Fehler der Ordnung

$$h^{N+2-l} h^{l-1} = h^{N+1}$$

angenähert werden, was der Ordnung des lokalen Diskretisierungsfehlers des Taylor-Verfahrens der Ordnung  $N$  entspricht, die Ordnung des Verfahrens also nicht vermindert.

Für  $l(\mathbf{a}) = 1$  liefert (4.12) den exakten Wert der Kontrollintegrale.

## Die Menge aller möglichen mehrfachen Kontrollintegrale

Die Menge aller möglichen mehrfachen Kontrollintegrale

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}, U_m, t, t+h} := \{ (I_{\mathbf{a}_1, t, t+h, u}, \dots, I_{\mathbf{a}_p, t, t+h, u}) \mid \text{meßbare Kontrollvektoren } u: [t, t+h] \rightarrow U_m \}$$

zu einer hierarchischen Menge  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathfrak{M}_m$  ist im allgemeinen aufwendig zu berechnen. Im Kapitel 5 wird nur auf die Berechnung schwacher Einzugsbereiche eingegangen, d. h.  $\mathcal{I}_{\mathcal{A}, U_m, t, t+h}$  wird nicht benötigt. Hier sei nur auf [Gr/Kl 01, 9.2] verwiesen, wo sich zu einem Taylor-Verfahren der Ordnung  $N$  ein Algorithmus zur Berechnung einer Menge  $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{A}, U_m, t, t+h}$  mit

$$\inf_{I \in \tilde{\mathcal{I}}} \sup_{I' \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}, U_m, t, t+h}} \|I - I'\| \leq Kh^{N+1}$$

findet.

## Kapitel 5

# Implementierung und numerische Beispiele

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels soll zunächst kurz auf die Implementierung des Unterteilungsalgorithmus 3.2.1 zur Berechnung schwacher Einzugsbereiche eingegangen werden, auch die implementierten Taylor-Verfahren werden in diesem Abschnitt kurz erläutert. Der zweite Abschnitt beschreibt die Erprobung des Unterteilungsalgorithmus an zwei Beispielen.

Da dieses Kapitel von der Berechnung schwacher Einzugsbereiche handelt, wird im folgenden nicht mehr von Eingangswerten und -funktionen die Rede sein sondern nur noch von Kontrollwerten und -funktionen.

### 5.1 Implementierung

Die Implementierung des Unterteilungsalgorithmus, die für diese Arbeit verwendet wurde, stammt von Lars Grüne. Sie wurde in der prozeduralen Programmiersprache C geschrieben und läßt sich sowohl unter HP-UX als auch unter Linux übersetzen, sofern einige benötigte Graphik-Bibliotheken vorhanden sind.

Mit Hilfe dieser Implementierung kann man Systeme beliebiger Ordnung analysieren. Es können wahlweise starke und schwache attrahierende Mengen sowie starke und schwache Einzugsbereiche berechnet werden. Weiter ist eine Visualisierung in der Ebene möglich. Für eine räumliche Visualisierung können die Rechenergebnisse abgespeichert und in externe Programme importiert werden.

Zur Näherung von Differentialgleichungen standen bisher das Euler-Verfahren sowie ein Extrapolationsverfahren mit jeweils konstanter Kontrollfunktion zur Verfügung. Einige mit diesen beiden Verfahren gerechnete Beispiele kann man sich in [Gr 02, Appendix C] und [Gr 01] anschauen. Im Zuge der Erstellung dieser Arbeit wurden Näherungsverfahren für kontroll-affine Differentialgleichungen hinzugefügt: das Euler-Verfahren und das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 jeweils einmal mit konstanter Kontrollfunktion und einmal mit

stückweise konstanter Kontrollfunktion. Das neue Euler-Verfahren mit konstanter Kontrolle für kontroll-affine Differentialgleichungen unterscheidet sich dabei von dem schon zuvor vorhandenen nur in der Art der Eingabe der Differentialgleichungen. Es müssen bei dem ursprünglich verwendeten Euler-Verfahren die Komponenten von  $f$  angegeben werden, die Verfahren für kontroll-affine Differentialgleichungen benötigen stattdessen die Komponenten der  $g^j$ .

Zunächst soll hier kurz auf die Implementierung des Unterteilungsalgorithmus eingegangen werden, dann folgen einige Bemerkungen zu den implementierten Taylor-Verfahren.

### Unterteilungsalgorithmus

Betrachte den Unterteilungsalgorithmus 3.2.1. Die vorgegebene Grundmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist in der Implementierung nun ein Rechteck im  $\mathbb{R}^d$ , auch die Zellüberdeckungen bestehen aus Rechtecken. Die Rechtecke speichert man zweckmäßigerweise in binären Bäumen, bei denen die Wurzel ein Rechteck aus  $\mathcal{Q}^0$  darstellt und deren Blätter den jeweiligen Status des Rechtecks enthalten. Weitere Daten über die Rechtecke müssen nicht gespeichert werden, wenn man für den Verfeinerungsschritt nach einem festen Schema vorgeht. Für die verwendete Implementierung gilt z. B. für den  $\mathbb{R}^2$ , daß die Rechtecke im ersten Schritt in  $x_1$ -Richtung in zwei Hälften unterteilt werden, im zweiten Schritt dann in  $x_2$ -Richtung, im dritten wieder  $x_1$ -Richtung usw. (dies ist gut zu erkennen in Abb. 5.5). Eine formale Darstellung der Rechtecke im  $\mathbb{R}^d$  und deren Unterteilung findet man in [De/Ho 97, Section 5].

Die Zellen zu Zellen-Zustandsraumdiskretisierung  $\widehat{\phi}_h^j$  läßt sich realisieren, indem man für jede Zelle einige Testpunkte auswählt, z. B. eine feste Anzahl auf jeder Seite des Rechtecks, und auf diese Punkte ein Näherungsverfahren für Differentialgleichungen anwendet. Der Auswahlschritt gestaltet sich dann wie folgt: Erreicht man mit mindestens einem Testpunkt die Menge  $\Omega_{pin}^j$ , so ist der Status des Rechteckes auf  $pin$  zu setzen; erreicht man mit allen Testpunkten  $\Omega_{in}^j$ , so setzt man ihn auf  $in$ ; erreicht man jedoch mit allen Testpunkten  $\Omega_{out}^j$ , erhält das Rechteck den Status  $out$ .

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß im Verfeinerungsschritt nur die Zellen aus  $E^{j+1}$  unterteilt werden müssen. Die Zellen aus  $D^{j+1}$  und  $C^{j+1}$  ändern ihren Status nicht mehr und können gegebenenfalls zusammengefaßt werden, vgl. die Abb. 5.7.

Die Anwendung des Unterteilungsalgorithmus wird in der Implementierung beendet, wenn eine zuvor eingestellte maximale Zahl von Zellen überschritten wird.

### Taylor-Verfahren

Der C-Quellcode aller implementierten Taylor-Verfahren findet sich in Anhang A. Hier nur einige Bemerkungen zu den verschiedenen Verfahren:

Die Implementierung der Taylor-Verfahren selbst ist einfach, insbesondere für konstante Kontrollfunktionen, da die Kontrollintegrale sich dann zu sehr einfachen Ausdrücken zusammenfassen lassen. Die beiden Verfahren aus den Beispielen 4.5.7 lassen sich im Fall von



konstanter Kontrolle in einer prozeduralen Programmiersprache ohne weiteres umsetzen, vgl. die Funktionen `taylor1()` und `taylor2()` aus dem Modul `taylor.c`.

Gleiches gilt im Prinzip auch für die Taylor-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle. Nur die Berechnung der Werte der zugehörigen Kontrollintegrale erfordert etwas zusätzlichen Aufwand:

Vom Benutzer werden vor dem Start der Berechnungen die Kontrollwerte und die Anzahl der Konstanzintervalle festgelegt. Zunächst sind daraus alle möglichen Kontrollfunktionen zu berechnen und zu speichern. Dies leistet die Funktion `kontrollfunktionen()` aus dem Modul `taylor_utils.c`. Hierbei ist zu beachten, daß die Anzahl von Kontrollfunktionen mit der Anzahl der Konstanzintervalle exponentiell wächst, denn: Sei  $s$  die Anzahl der Konstanzintervalle der Kontrollfunktionen und  $a$  die Anzahl der Kontrollwerte. Dann gibt es  $a^s$  mögliche stückweise konstante Kontrollfunktionen!

Die Einfachintegrale lassen sich aus den Kontrollfunktionen sehr einfach berechnen. Es müssen nur die Flächen einiger Rechtecke addiert werden, vgl. die Implementierung des Euler-Verfahrens `taylor1_stck_konst()` aus dem Modul `taylor.c` bzw. die Funktion `einfachintegral_berechnen()` aus dem Modul `taylor_utils.c`.

Ist es bei den Einfachintegralen noch möglich, in jedem Schritt deren Wert erneut zu berechnen, wie bei der Implementierung des Euler-Verfahrens, so ist dies für die Doppelintegrale nicht sinnvoll. Sie sollten vor dem Start des Unterteilungsalgorithmus berechnet und abgespeichert werden, um dann immer wieder auf die vorhandenen Werte zurückgreifen zu können. Wichtig ist hierbei, zu prüfen, ob die Bedingung (4.14) – sie lautet hier  $\beta \leq h^{N+2-l(a)} = h^2$  – erfüllt ist, damit die näherungsweise Berechnung der Integrale nicht die Ordnung des Taylor-Verfahrens vermindert. Zu diesem Zweck kann  $P$  aus Satz 4.6.1 vom Benutzer gewählt werden. Da die Berechnung der Kontrollintegrale hier auf sehr einfache Weise implementiert wurde, ist zusätzlich darauf zu achten, daß die Anzahl der Konstanzintervalle  $P$  ohne Rest teilt. Ist die Bedingung an  $\beta$  erfüllt, so kann für die Doppelintegrale der Satz 4.6.1 verwendet werden. Dies geschieht in der Funktion `doppelintegral_berechnen()` aus dem Modul `taylor_utils.c`. Mit den nun bekannten Doppelintegralen steht dann der Anwendung des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 nichts mehr im Weg.

## 5.2 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt soll der Unterteilungsalgorithmus auf zwei Beispiele in der Ebene angewendet werden, d. h. die Unbekannte der Differentialgleichungen in diesem Abschnitt ist  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ , der Vektor  $x = (x_1, x_2)^T$  beschreibt einen Zustand im Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ . Bei beiden Beispielen handelt es sich um kontroll-affine Differentialgleichungen, d. h. die Taylor-Verfahren aus Kapitel 4 können verwendet werden.

Das erste Beispiel ist von einfacher Gestalt, der schwache Einzugsbereich läßt sich theoretisch bestimmen. Daher ist es bei diesem Beispiel möglich, den durch die verschiedenen

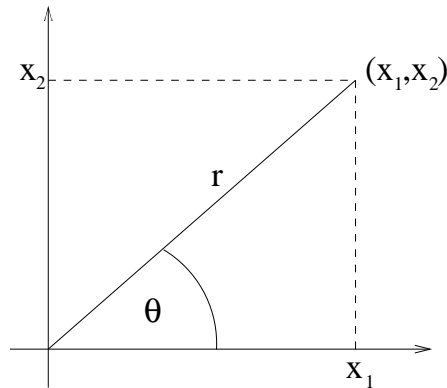


Abbildung 5.1: Die verwendeten Polarkoordinaten:  $r = \|x\|$ ,  $x_1/r = \cos\theta$ ,  $x_2/r = \sin\theta$

Taylor-Verfahren beeinflussen Fehler des Unterteilungsalgorithmus anzugeben und auszuwerten. Dies soll dabei helfen, zu beurteilen, ob sich der Aufwand, der durch die Verwendung eines Taylor-Verfahrens höherer Ordnung oder durch die Verwendung von stückweise konstanten Kontrollfunktionen entsteht, lohnt im Vergleich zur Verwendung des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle, bei dem der Aufwand vergleichsweise gering ist.

Das zweite Beispiel beschreibt eine chemische Reaktion, die durch Kühlung gesteuert wird. Bei diesem Beispiel sind die Einzugsbereiche theoretischen Überlegungen nicht zugänglich. Der Einsatz des Unterteilungsalgorithmus ist also notwendig, wenn man mehr über diese die Reaktion charakterisierenden Mengen erfahren möchte.

Die jeweils angegebenen Laufzeiten in diesem Abschnitt wurden auf einem PC mit Intel® Pentium® 4 CPU 1700MHz, 512 MB Arbeitsspeicher und 520 MB Swap-Partition ermittelt. Bei dem verwendeten Betriebssystem handelt es sich um die Linux-Distribution Red-Hat 9 (Shrike) mit dem Kernel 2.4.20-8, dem gcc-Compiler 3.2.2-5 und der glibc-2.3.2-11.9.

## Einfaches Beispiel

Das einfache Beispiel wird durch die Gleichung

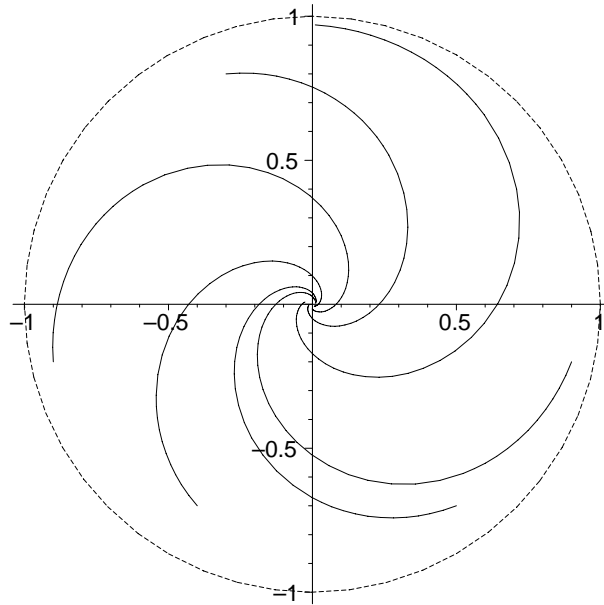
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \|x(t)\|^2 x(t) - \begin{pmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \end{pmatrix} \|x(t)\| \quad (5.1)$$

beschrieben.

Zur Erinnerung:  $\|\cdot\|$  stellt die Euklidische Norm dar, im  $\mathbb{R}^2$  gilt also

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Zunächst soll eine attrahierende Menge für das einfache Beispiel (5.1) sowie deren Einzugsbereich theoretisch bestimmt werden.



$$x_0 \in \{(0.01, 0.97)^T, (0.5, -0.7)^T, (-0.3, 0.8)^T, (-0.4, -0.7)^T, (-0.9, -0.2)^T, (0.9, -0.2)^T\}$$

Abbildung 5.2: Einige Trajektorien von (5.1) für Anfangswertepaare innerhalb des Einheitskreises und  $t \in [0, 2\pi]$

Das System (5.1) lautet in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}r(t) &= r(t)^3 - r(t)u_1(t)\cos\theta(t) - r(t)u_2(t)\sin\theta(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\theta(t) &= -1 + u_1(t)\sin\theta(t) - u_2(t)\cos\theta(t),\end{aligned}$$

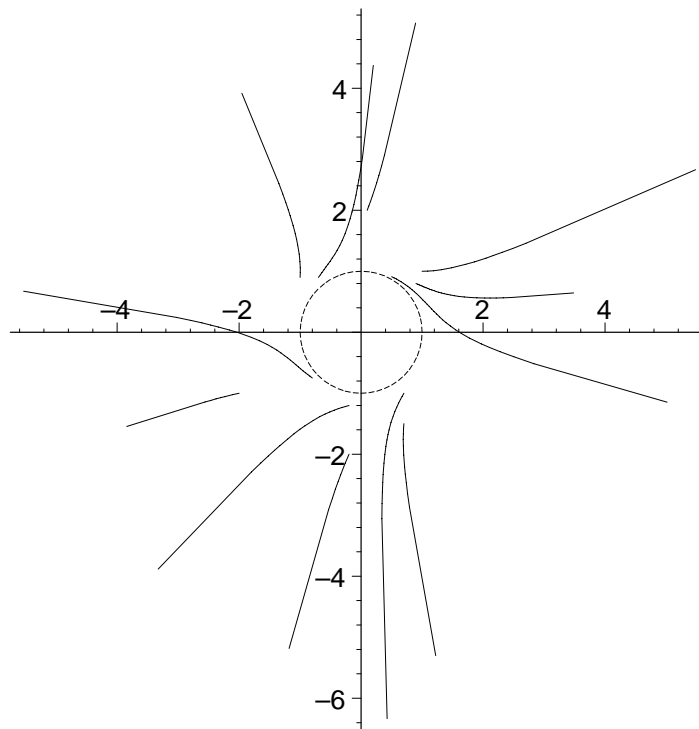
vgl. z. B. [Au 97, Satz 5.2.1]. Wählt man nun Kontrollvektoren  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$  auf dem Einheitskreis, also  $u_1(t) = \cos\theta(t)$ ,  $u_2(t) = \sin\theta(t)$ , so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}r(t) &= r(t)^3 - r(t)(\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)) &= r(t)^3 - r(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\theta(t) &= -1 + \cos\theta(t)\sin\theta(t) - \sin\theta(t)\cos\theta(t) &= -1 + \sin(\theta(t) - \theta(t)) = -1.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht lösen, für  $r(t)$  kann man z. B. MAPLE verwenden. Für  $r(0) = r_0$  und  $\theta(0) = \theta_0$  gilt:

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^{2t}(1 - r_0^2)}}, \\ \theta(t) &= -t + \theta_0.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Lösungen sieht man, daß die Trajektorien von (5.1) mit Anfangswertepaaren  $x_0$  innerhalb des Einheitskreises von den Kontrollfunktionen  $u_1(t) = \cos\theta(t)$  und



$$x_0 \in \{(1, 1)^T, (-2, -1)^T, (-1, 0.9)^T, (0.7, -1.5)^T, (0.1, 2)^T, (-0.2, -2)^T, \\ (0.9, 0.8)^T, (-0.8, -0.75)^T, (-0.7, 0.9)^T, (0.7, -1)^T, (0.5, 0.91)^T, (-0.2, -1.2)^T\}$$

Abbildung 5.3: Einige Trajektorien von (5.1) für Anfangswertepaare außerhalb des Einheitskreises und  $t \in [0, 2]$

$u_2(t) = \sin \theta(t)$  zum Ursprung gesteuert werden (vgl. Abb. 5.2). Trajektorien mit Anfangswertepaaren auf dem Einheitskreis bleiben dort. Trajektorien mit Anfangswertepaaren außerhalb des Einheitskreises hingegen streben nach außen (vgl. Abb. 5.3). Diese Trajektorien existieren allerdings nicht für alle Zeiten! In der numerischen Simulation wird daher für  $|x_1(t)| > 3$  oder  $|x_2(t)| > 3$  die Ableitung  $\dot{x}(t) = 0$  bzw.  $g^j(t, x) = 0$  gesetzt.

Insgesamt ergibt sich, daß  $A = \{0\}$  eine schwach attrahierende Menge für das System (5.1) ist und  $\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$  der zugehörige Einzugsbereich.

$\mathcal{D}(A)$  ist dynamisch robust nach Definition 2.3.3 mit der Lyapunov-Funktion

$$V(x) = \begin{cases} 1 - \|x\|, & x \in \mathcal{D}(A), \\ 0, & x \notin \mathcal{D}(A), \end{cases}$$

dem Robustheits-Maß  $\gamma_1(r) = \eta_1 r$ ,  $\eta_1 > 1$ , der Rate  $\mu(r, t) = e^{-bt} r$ , wobei die Konstante  $b$  die Bedingung  $V(x)\|x\| > (b + 1/\eta_1)V(x)$  erfüllen muß, der Robustheits-Umgebung  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq c\}^C$  für ein passend gewähltes  $c$  mit  $0 < c < 1$  und  $a = V(x)$  für  $x \in \partial B$ .

Weiter ist  $\mathcal{D}(A)$  schrumpfend invers  $\gamma_2$ -robust stark vorwärtsinvariant nach Definition 2.1.5 für  $\gamma_2(r) = \eta_2 r$  mit  $\eta_2 \geq \frac{1}{2}$ .

Aufgrund des Satzes 3.2.7 ist also zu erwarten, daß sich der bei der Anwendung des Unterteilungsalgorithmus durch die Zustandsraumdiskretisierung entstehende Fehler entsprechend der Abschätzung

$$h^*(E^{j+1}, \partial\mathcal{D}(A)) \leq \max \{ \gamma(\varepsilon), \gamma(\varepsilon^j) \} + h\varepsilon^j \quad (5.2)$$

verhält für  $\gamma(r) = \eta r$  mit  $\eta > 1$ . Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß  $h$  die Schrittweite der Zeitdiskretisierung beschreibt,  $\varepsilon^j$  die Genauigkeit der Zustandsraumdiskretisierung (d. h. der Durchmesser der Zellen ist  $\leq h\varepsilon^j$ ) und  $\varepsilon$  den inneren Fehler der Zustandsraumdiskretisierung. In [Gr 02, C.1] wurde der durch die Zustandsraumdiskretisierung entstehende Fehler näher untersucht. Hier soll stattdessen der Einfluß des durch die Zeitdiskretisierung entstehenden Fehlers auf das Ergebnis des Unterteilungsalgorithmus festgestellt werden.

Der Fehler eines Taylor-Verfahrens der Ordnung  $N$  ist nach Satz 4.5.3 jeweils von der Ordnung  $N$ . In der Implementierung des Unterteilungsalgorithmus und der Taylor-Verfahren ändern sich jedoch mit der Schrittweite auch die Kontrollfunktionen. Sie sind jeweils auf dem Intervall  $[0, h]$  konstant oder stückweise konstant auf  $[0, h]$  mit der angegebenen Anzahl von Konstanzintervallen. Dies kann die Fehlerordnung zusätzlich beeinflussen!

Um zu sehen, mit welcher Fehlerordnung die oben beschriebenen Taylor-Verfahren in den Unterteilungsalgorithmus eingehen, wird dieser Algorithmus in Kombination mit den verschiedenen Taylor-Verfahren angewendet, um den schwachen Einzugsbereich der Differentialgleichung (5.1) zu berechnen. Dabei wird jeweils die Schrittweite  $h$  des Taylor-Verfahrens variiert. Der entstehende Fehler wird hierbei gemessen als der Hausdorffsche Abstand des Einheitskreises von  $E^{j+1}$ . Zusätzlich wird jeweils die mit dem Befehl `time` ermittelte Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus bis zum Erreichen des Stop-Kriteriums angegeben, um eine Aussage über den durch die Taylor-Verfahren entstehenden Aufwand machen zu können.

Zuvor ist jedoch noch nachzuweisen, daß es sich bei (5.1) tatsächlich um eine kontroll-affine Differentialgleichung handelt. Dies ergibt sich sofort aus folgender Darstellung von (5.1):

$$\dot{x}(t) = g^0(x(t)) + g^1(x(t)) u_1(t) + g^2(x(t)) u_2(t),$$

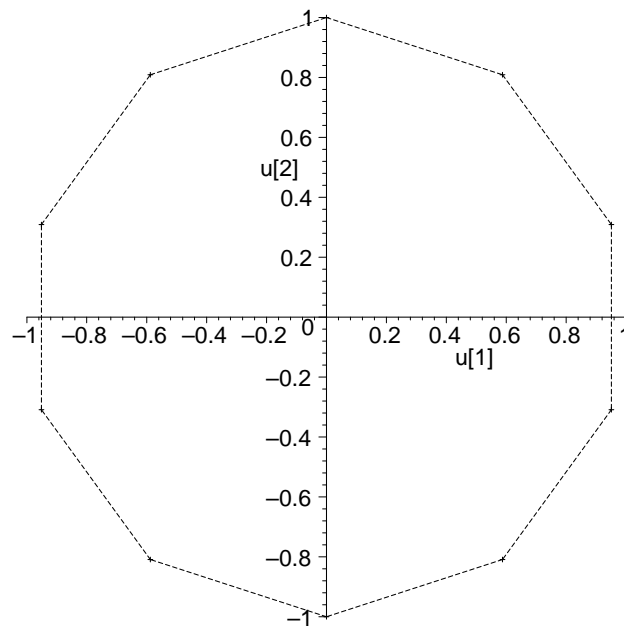
wobei

$$g^0(x) = \begin{pmatrix} x_2 + \|x\|^2 x_1 \\ -x_1 + \|x\|^2 x_2 \end{pmatrix},$$

$$g^1(x) = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\|x\| \end{pmatrix}.$$

Taylor-Verfahren können also zur Näherung dieser Gleichung verwendet werden.

Aus dem oben gesagten ergibt sich, daß es sinnvoll ist, einige Kontrollwerte auf dem Einheitskreis zu wählen. Für die für diese Arbeit berechneten Näherungen des schwachen Einzugsbereiches des einfachen Beispiels wurden 10 Kontrollwerte verwendet, vgl. Abb. 5.4. Als Grundmenge wurde  $\Omega = [-2, 2]^2$  gewählt, die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  bestand aus 32 mal 32 Quadraten, die Testpunkte waren jeweils die 4 Ecken eines Quadrats, die Zielmenge  $\mathcal{S}$  war die Kreisfläche um den Ursprung mit Radius 0.25, also  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 0.25\}$ .



$$u \in \{(0.0, 1.0)^T, (-0.587785, 0.809017)^T, (0.951057, 0.309017)^T, (0.951057, -0.309017)^T, \\ (0.587785, -0.809017)^T, (0.0, -1.0)^T, (-0.587785, -0.809017)^T, (-0.951057, -0.309017)^T, \\ (-0.951057, 0.309017)^T, (0.587785, 0.809017)^T\}$$

Abbildung 5.4: Die verwendeten 10 Kontrollwerte  $u$  auf dem Einheitskreis

Die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  und die Zielmenge  $\mathcal{S}$  sind in Abb. 5.7 dargestellt. Die maximale Zahl von Zellen, bis zu der der Unterteilungsalgorithmus angewendet werden soll, wurde auf 500 000 gesetzt.

Für die hier angestrebte Überprüfung der Fehlerordnung der Taylor-Verfahren, genügen für die Taylor-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle zwei Konstanzintervalle. Für das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 muß für die Berechnung der Doppelintegrale die Bedingung  $\beta \leq h^2$  erfüllt sein. Bei der kleinsten verwendeten Schrittweite  $h = 0.4$  gilt dies für  $P \geq 25$ . Da  $P$  auch durch die Anzahl 2 der Konstanzintervalle teilbar sein muß, ist das kleinstmögliche  $P$ , das mit der Schrittweite  $h = 0.4$  verwendet werden kann, 26. Für die Erstellung der Fehlergraphen der Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle in Abb. 5.8 wurden also 2 Konstanzintervalle verwendet, die für das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle benötigten Doppelintegrale wurden mit  $P = 26$  berechnet. Später in diesem Abschnitt wird dann darauf eingegangen, in wie weit sich der durch dieses Taylor-Verfahren entstehende Fehler durch die Verwendung von drei oder mehr Konstanzintervallen verbessern läßt.

Die Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen jeweils die mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle berechnete Menge  $E^{j+1}$  nach 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 und 20 Iterationen, also den angenäherten Rand des Einzugsbereiches des Systems (5.1). Abb. 5.7 zeigt die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  mit der Zielmenge  $\mathcal{S}$  und alle Zellen nach 20 Iterationen bei Verwendung

des Euler-Verfahrens. Man beachte, daß die Zellen deutlich innerhalb und außerhalb des Einheitskreises nicht etwa verfeinert sondern zusammengefaßt wurden!

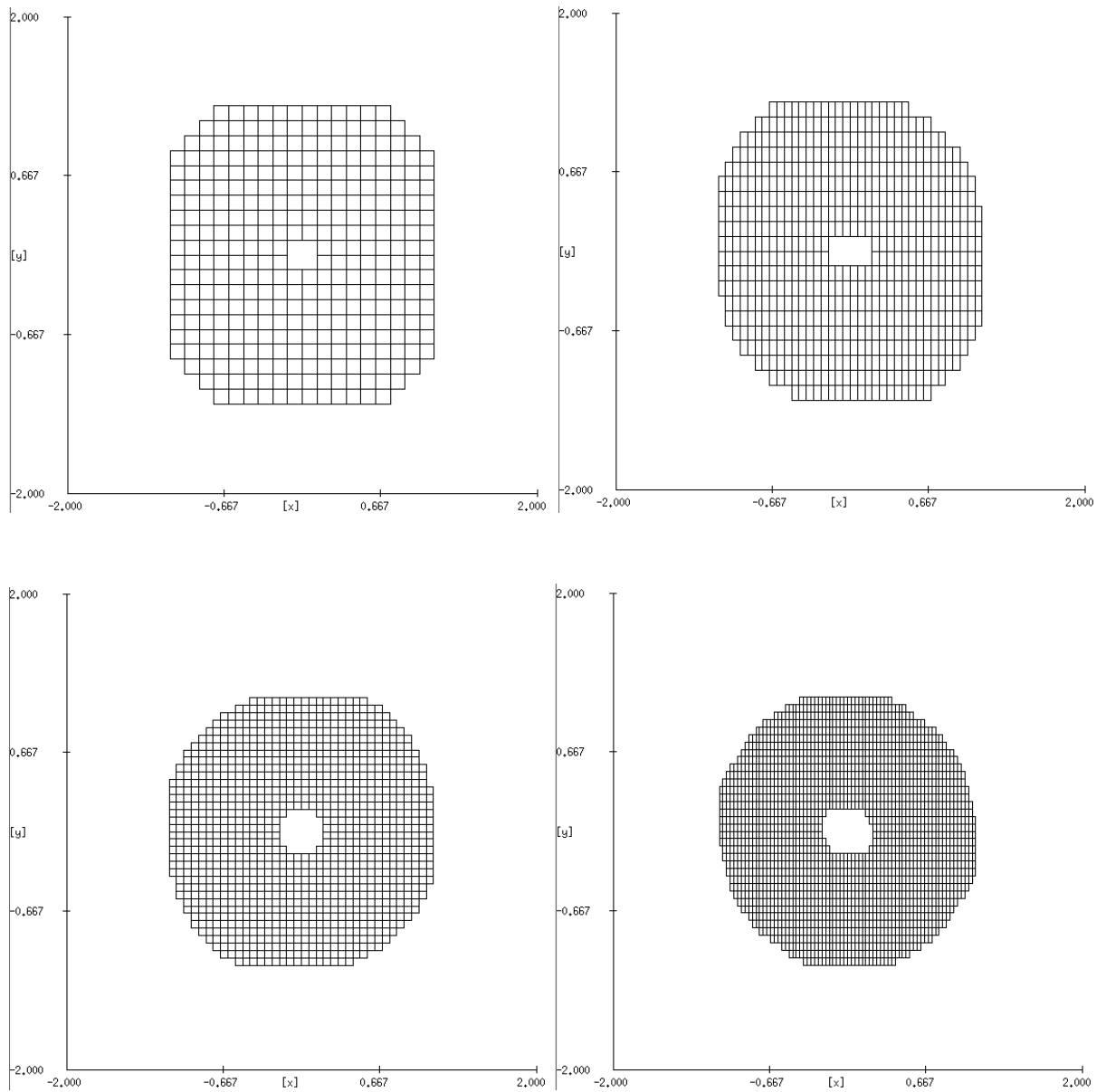


Abbildung 5.5: Der Rand des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels berechnet mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle nach jeweils 0, 1, 2 und 3 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus



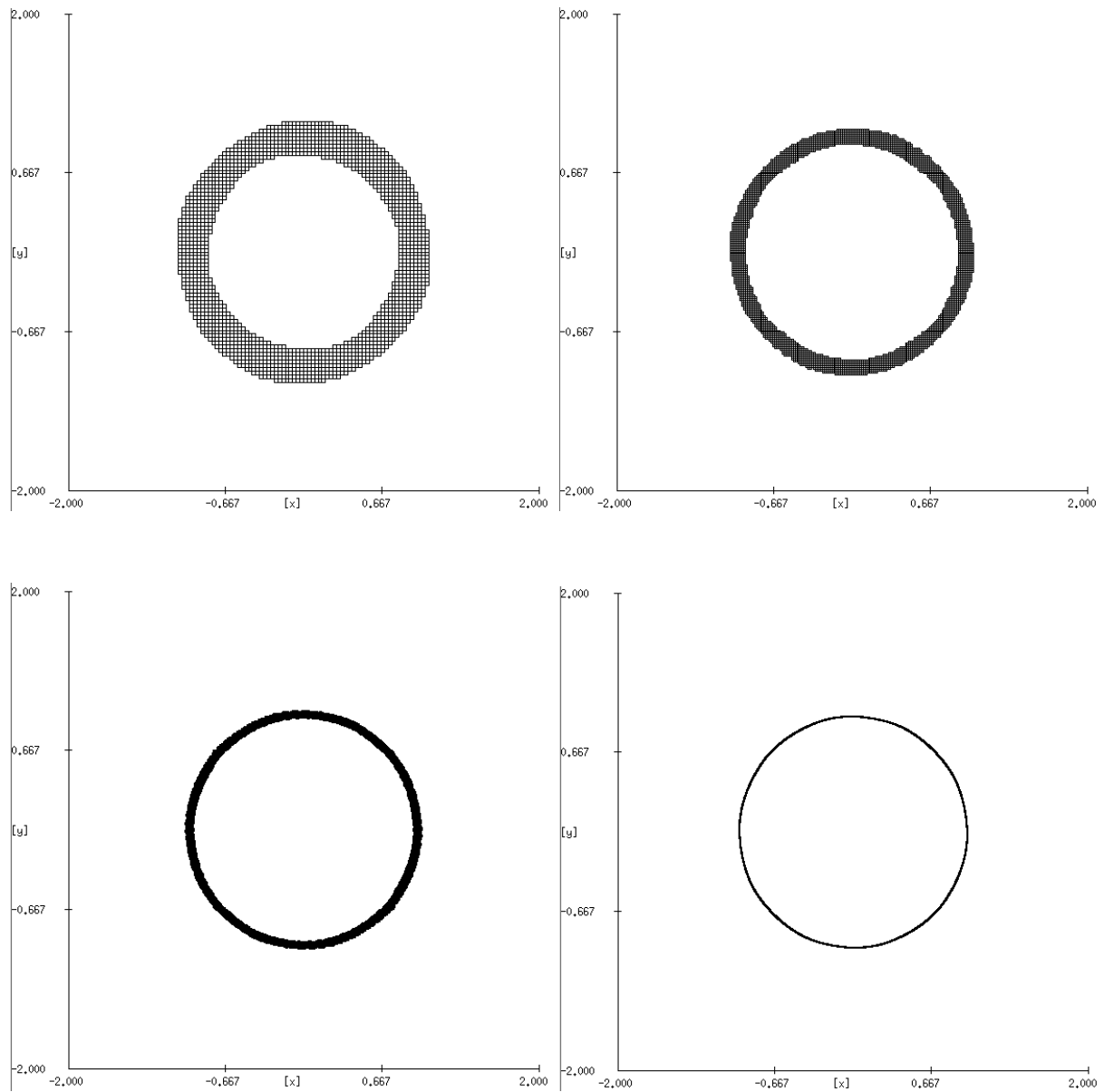


Abbildung 5.6: Der Rand des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels berechnet mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle nach jeweils 4, 6, 8 und 20 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus

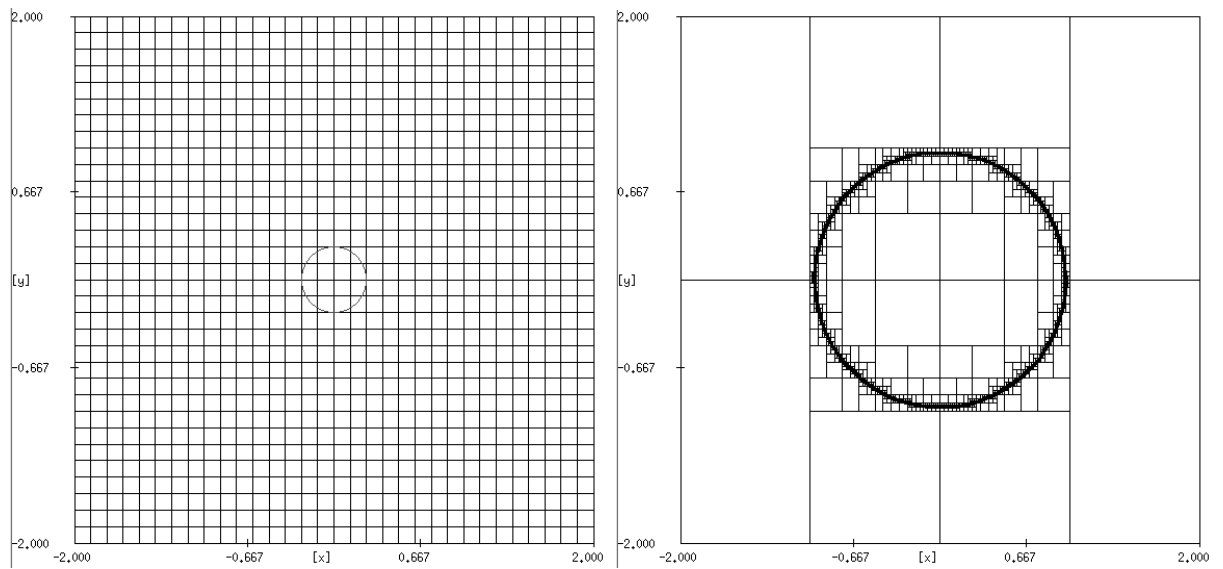


Abbildung 5.7: Die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  mit der Zielmenge  $\mathcal{S}$  (links) und alle Zellen nach 20 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus (rechts)

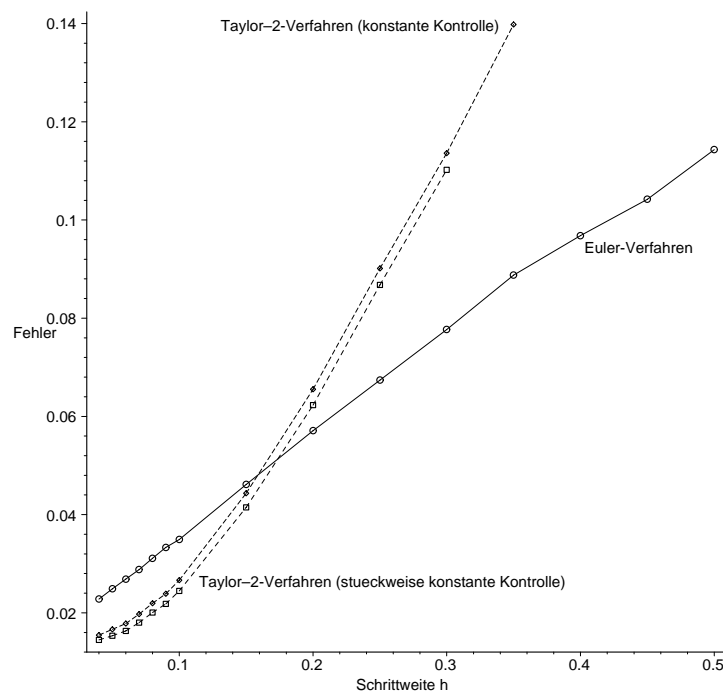
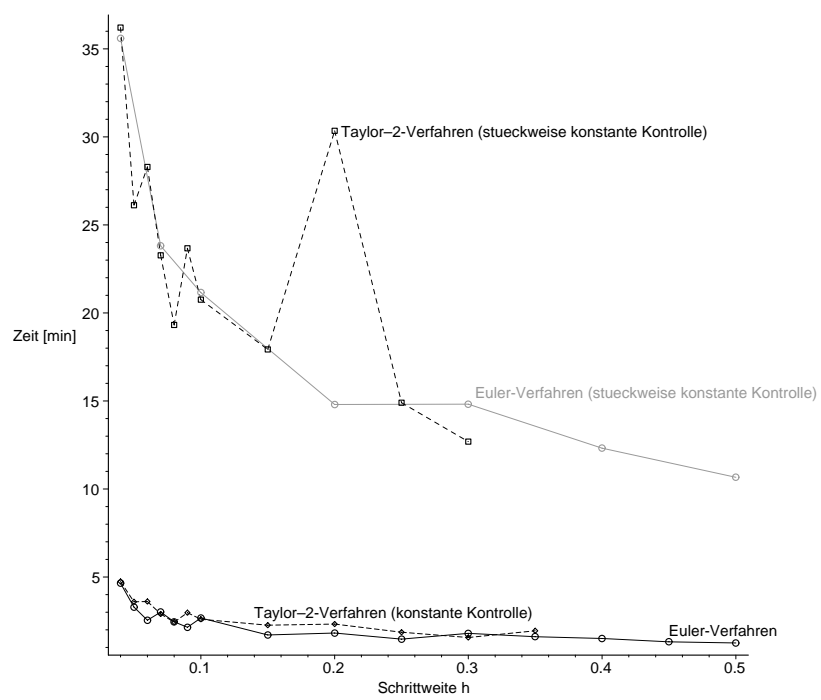


Abbildung 5.8: Der Fehler des Unterteilungsalgorithmus bei der Berechnung des Einzugsbereiches des einfachen Beispiels abhängig von der Schrittweite  $h$  der verwendeten Taylor-Verfahren

Bei der Verwendung der anderen implementierten Taylor-Verfahren sieht man mit bloßem Auge keinen Unterschied zu diesem einfachen Euler-Verfahren. Daher nun zu den Abbildungen 5.8 und 5.9: Dort ist zu erkennen, daß für dieses einfache Beispiel tatsächlich die Euler-Verfahren in der Ordnung  $O(h)$  und die Taylor-Verfahren der Ordnung 2 in der Ordnung  $O(h^2)$  in den Fehler des Unterteilungsalgorithmus eingehen. Man erhält sogar für das Euler-Verfahren mit konstanter und das mit stückweise konstanter Kontrolle hier jeweils die exakt gleichen Werte für den Fehler, auch wenn man mit einer ungeraden Zahl von Kontrollwerten arbeitet, daher findet sich in der Abb. 5.8 nur ein Fehlergraph für beide Euler-Verfahren. Der Aufwand für das Euler-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle ist natürlich wesentlich höher als für jenes mit konstanter Kontrolle, vgl. Abb. 5.9. Daher ist der Einsatz dieses Verfahrens für dieses Beispiel nicht sinnvoll. Anders bei den Taylor-Verfahren der Ordnung 2: Hier zeigt sich eine Verbesserung des Fehlers bei der Verwendung des Verfahrens mit stückweise konstanter Kontrolle gegenüber dem mit konstanter Kontrolle, diese Verbesserung wird allerdings mit einem deutlich höheren Aufwand bezahlt, vgl. Abb. 5.9.

Abbildung 5.9: Die Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus abhängig von  $h$

$h$	Konstanzintervalle								
	2 ( $P = 26$ )			3			4		
	Iterationen	time [min]	$\Delta Z$ [min]	$P$	Iterationen vor Abbruch	$\Delta Z$ [min]	$P$	Iterationen vor Abbruch	$\Delta Z$ [min]
0.3	22	12.7	13	6	19	155	4	12	68
0.25	22	14.9	15	6	19	183	4	12	131
0.2	22	30.3	33	6	18	172	–	–	–
0.15	21	17.9	18	9	18	578	–	–	–
0.1	20	20.8	23	12	17	485	–	–	–
0.09	20	23.7	24	12	17	736	–	–	–
0.08	19	19.3	20	–	–	–	–	–	–
0.07	19	23.3	25	–	–	–	–	–	–
0.06	19	28.3	30	–	–	–	–	–	–
0.05	18	26.1	27	–	–	–	–	–	–
0.04	18	36.2	38	–	–	–	–	–	–

Tabelle 5.1:  $P$ , Anzahl der beendeten Iterationen und Laufzeit des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle

Nun soll noch festgestellt werden, ob bei dem Taylor-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle eine weitere Verbesserung des Fehlers erreicht werden kann, wenn man die Anzahl der Konstanzintervalle erhöht.

Leider bricht das Programm zur Berechnung des Einzugsbereiches auf dem verwendeten Rechner bei einer Anzahl von Konstanzintervallen  $\geq 3$  ab, bevor das eingestellte Stop-Kriterium erreicht ist, da die Kapazität des vorhandenen Arbeits- und Swapspeichers überschritten wird ('out of memory'). Daher sind die Ergebnisse für mehr als 2 Konstanzintervalle nicht direkt vergleichbar mit den mit 2 Konstanzintervallen gerechneten! Auch kann so keine Angabe über die Laufzeit mit Hilfe des Befehls `time` ermittelt werden. Als Behelf zum Vergleich der Laufzeiten wird deshalb in Tabelle 5.1 und Abb. 5.11 die Zeitdifferenz  $\Delta Z$  zwischen der Speicherung des Gitters nach 0 Iterationen und der Speicherung des Gitters nach der letzten beendeten Iteration angegeben. Für die Berechnungen mit 2 Konstanzintervallen stehen sowohl die mit `time` ermittelten Laufzeiten des Unterteilungsalgorithmus aus Abb. 5.9 zur Verfügung – da dieser in diesem Fall bis zum Erreichen des Stop-Kriteriums läuft und regulär beendet wird – als auch die aus der Zeitdifferenz  $\Delta Z$  der Speicherungen der Gitter ermittelten Laufzeiten. In Tabelle 5.1 kann man anhand dieser Laufzeiten sehen, daß der Behelf zur Laufzeit-Messung nahe genug an der tatsächlich benötigten Rechenzeit liegt, um einen Vergleich zu ermöglichen.

Weiter wird in dieser Tabelle das jeweils verwendete  $P$  angegeben. Es wurde für mehr als 2 Konstanzintervalle jeweils das kleinstmögliche  $P$  verwendet, das die Bedingung  $\beta \leq h^2$  erfüllt und sich durch die Anzahl der Konstanzintervalle teilen läßt. Schließlich wird in Tabelle 5.1 noch die jeweils vor dem Abbruch erreichte Anzahl von Iterationen angegeben.

Abb. 5.10 zeigt, daß sich in Hinblick auf die erreichte Verbesserung des Fehlers des Unterteilungsalgorithmus der Einsatz des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle und der Verwendung von mehr als zwei Konstanzintervallen lohnt. Betrachtet man allerdings Abb. 5.11 so sieht man, daß der Aufwand bei dem Einsatz dieses

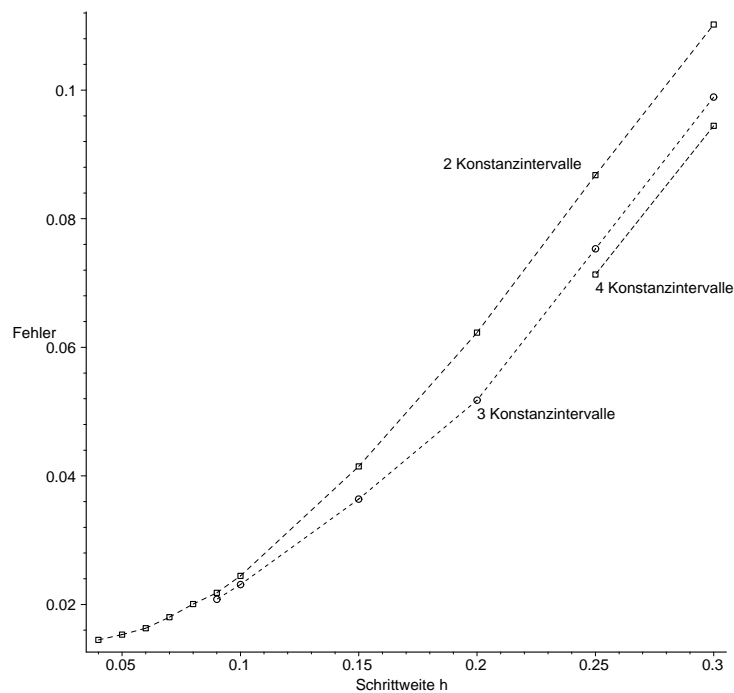


Abbildung 5.10: Der Fehler des Unterteilungsalgorithmus bei der Verwendung des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle

Verfahrens enorm ist, besonders wenn man bedenkt, daß für 3 und 4 Konstanzintervalle relativ wenig Iterationen durchgeführt werden konnten.

In diesem Zusammenhang muß die Frage gestellt werden, wie der benötigte Aufwand verringert werden kann.

Der Unterteilungsalgorithmus eignet sich gut für eine Parallelisierung. Man könnte daher die Berechnungen in einem Cluster durchführen und erhielte so deren Ergebnis zumindest früher. So könnten auch mehr Iterationen durchgeführt werden, da mehr Arbeits- und Swapspeicher zur Verfügung stünde. Der benötigte Aufwand wird auf diese Weise jedoch nicht vermindert sondern nur verteilt!

Sinnvoller wäre es daher, die Komplexität der Berechnungen zu verringern. Da die Anzahl der Kontrollfunktionen mit der Verwendung von mehr Konstanzintervallen exponentiell wächst, wäre es vernünftig nur einige dieser Kontrollfunktionen auszuwählen – besonders wenn man bedenkt, daß je mehr Konstanzintervalle verwendet werden auch umso mehr Kontrollfunktionen entstehen, die sich kaum unterscheiden. Durch eine gute Strategie zur Auswahl der Kontrollfunktionen könnte also der Aufwand der Berechnungen verringert werden, und es würden dadurch vermutlich keine großen Einbußen bei der Genauigkeit dieser Berechnungen verursacht.

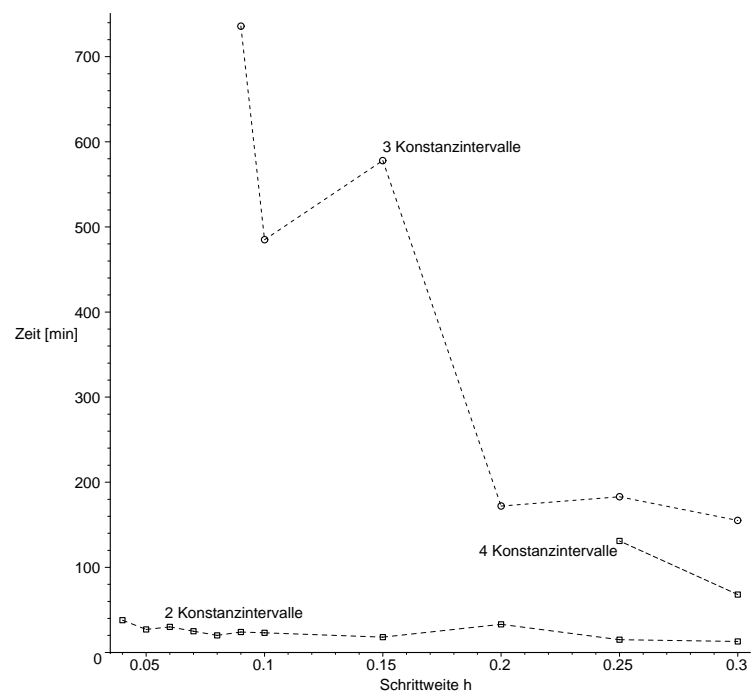


Abbildung 5.11: Die Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus bei der Verwendung des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle

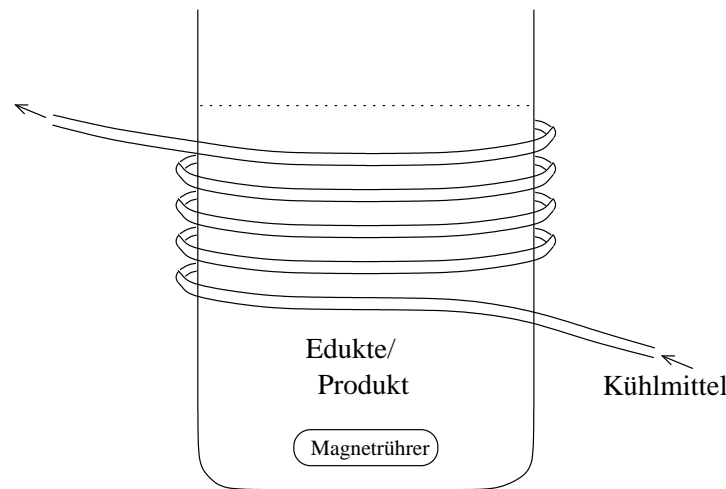


Abbildung 5.12: Ein kleiner Rührkessel

## Chemische Reaktion

Zum Abschluß dieser Arbeit soll nun ein Beispiel betrachtet werden, bei dem Einzugsbereiche nicht durch theoretische Überlegungen gefunden werden können. Bei einem solchen Beispiel läßt sich der Einsatz von numerischen Verfahren nicht vermeiden, wenn man genaueres über dessen Einzugsbereiche in Erfahrung bringen möchte.

Es handelt sich bei dem Beispiel um den *stetigen Rührkessel-Reaktor* aus [Co/Kl 00, Section 9.1], der eine exotherme chemische Reaktion modelliert, die durch Kühlung gesteuert wird. Die rechte Seite dieser Reaktion ist gegeben durch die Funktionen

$$f_1(x, u) = -x_1 + B\alpha(1 - x_2) e^{x_1} - u(x_1 - x_c) \quad \text{und} \quad f_2(x, u) = -x_2 + \alpha(1 - x_2) e^{x_1},$$

das die Reaktion beschreibende System lautet also

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -x_1(t) + B\alpha(1 - x_2(t)) e^{x_1(t)} - u(t)(x_1(t) - x_c) \\ -x_2(t) + \alpha(1 - x_2(t)) e^{x_1(t)} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

bzw. in der kontroll-affinen Form

$$\dot{x}(t) = g^0(x(t)) + g^1(x(t)) u(t)$$

mit

$$g^0(x) = -x + \alpha(1 - x_2) e^{x_1} \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g^1(x) = - \begin{pmatrix} x_1 - x_c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei stellt  $x_1(t)$  die Temperatur dar,  $x_2(t)$  ist die Produktkonzentration,  $\alpha$  und  $B$  sind positive technische Konstanten,  $x_c$  ist die Temperatur des Kühlmittels,  $u(t)$  steuert dessen Durchflußrate, vgl. Abb. 5.12.



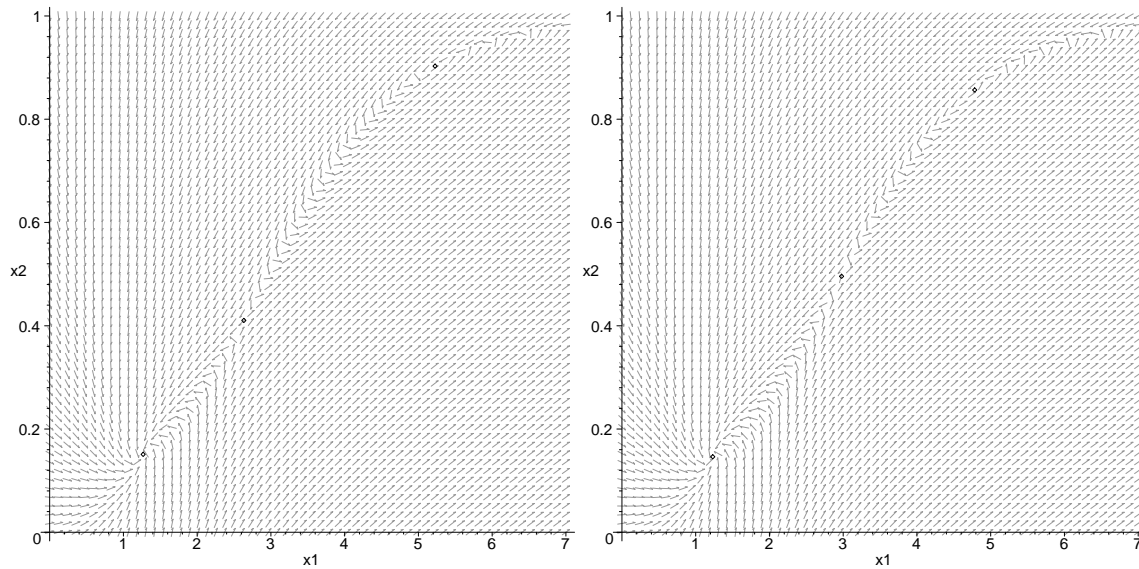


Abbildung 5.13: Angenäherte Gleichgewichte und das Vektorfeld der chemischen Reaktion für  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 10$ ,  $x_c = 1$  und  $u = 0.9$  (links) bzw.  $u = 1.0$  (rechts)

Um die Grundmenge  $\Omega$  und die Zielmenge  $\mathcal{S}$  richtig wählen zu können, ist es von Vorteil, die Gleichgewichte  $x^*$  der chemischen Reaktion zu kennen. Durch das Auflösen von  $f_2(x^*, u) = 0$  erhält man zunächst

$$x_2^* = \frac{\alpha e^{x_1^*}}{1 + \alpha e^{x_1^*}},$$

aus  $f_1(x^*, u) = 0$  ergibt sich dann, daß  $x_1^*$  folgende Gleichung lösen muß:

$$-x_1^* + B\alpha \left( 1 - \frac{\alpha e^{x_1^*}}{1 + \alpha e^{x_1^*}} e^{x_1^*} \right) + u(x_c - x_1^*) = 0.$$

Die Abb. 5.13 zeigt drei durch numerische Berechnung angenäherte Gleichgewichte der chemischen Reaktion für  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 10$ ,  $x_c = 1$  und  $u = 0.9$  bzw.  $u = 1.0$  sowie das Vektorfeld der Reaktion.

Der schwache Einzugsbereich um das Gleichgewicht links unten soll nun gefunden werden. Die Ergebnisse der Näherung dieses Einzugsbereiches mit dem Unterteilungsalgorithmus in Kombination mit verschiedenen Taylor-Verfahren ist auf den Abbildungen 5.14 bis 5.18 dargestellt.

Für diese Näherungen wurden die Parameter wie folgt gewählt:

Für die Kontrollwerte 0.9 und 1.0 gibt es Gleichgewichte, also ist es sinnvoll Kontrollwerte im Intervall  $[0.9, 1.0]$  zu verwenden; hier waren es jeweils 21 Kontrollwerte. Die Grundmenge  $\Omega$  soll den Einzugsbereich enthalten, es wurde das Rechteck  $[1.22842, 1.2691] \times [0.145004, 0.152039]$  gewählt, die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  von  $\Omega$  bestand jeweils aus 64 mal 64 Rechtecken. Wie bei dem einfachen Beispiel wurden auch hier 4 Punkte pro Zelle (Ecken der Rechtecke) getestet. Die Zielmenge  $\mathcal{S}$  soll eine Umgebung eines der Gleichgewichte sein.

Verfahren	Kontrolle	Laufzeit [min]
Euler	konstant	3.7
Euler	stückweise konstant (2 Konstanzintervalle)	66.5
Taylor Ordnung 2	konstant	4.0
Taylor Ordnung 2	stückweise konstant (2 Konstanzintervalle, $P = 10$ )	71.3

Tabelle 5.2: Laufzeit des Unterteilungsalgorithmus bei der Verwendung verschiedener Taylor-Verfahren

Für  $u = 1.0$  ist das linke untere Gleichgewicht ungefähr der Punkt  $(1.24, 0.15)^T$ .  $\mathcal{S}$  wurde als Kreis mit Radius 0.000922 um den Punkt  $(1.24876, 0.148508)^T$  gewählt. Das linke untere Gleichgewicht ist also in  $\mathcal{S}$  enthalten. Die maximale Zahl von Zellen, bis zu der der Algorithmus angewendet werden soll, wurde auf 300 000 gesetzt. Als Schrittweite  $h$  für die verschiedenen Taylor-Verfahren wurde jeweils  $h = 0.1$  verwendet.

Nun einige Erläuterungen zu den folgenden Abbildungen 5.14 bis 5.18:

Die beiden Abbildungen 5.14 und 5.15 zeigen die Menge  $E^{j+1}$  berechnet mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und  $P = 10$  nach jeweils 0, 1, 2, 4, 6 und 13 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus.

Auf Abb. 5.16 ist die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  mit der Zielmenge  $\mathcal{S}$  zu sehen und alle Zellen nach 13 Iterationen des Algorithmus bei Verwendung desselben Taylor-Verfahrens wie bei den beiden vorhergehenden Abbildungen. Wie bei dem einfachen Beispiel ist hier gut zu erkennen, daß Zellen, die nicht weiter verfeinert werden mußten, zusammengefaßt wurden.

Abb. 5.17 zeigt die Näherung  $E^{j+1}$  des Randes des schwachen Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe verschiedener Taylor-Verfahren:

Links oben mit dem Euler-Verfahren mit konstanter Kontrolle, rechts oben mit dem Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit konstanter Kontrolle und unten mit dem Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und  $P = 10$ .

Je besser das gewählte Verfahren in Abb. 5.17, desto höher liegt der Einzugsbereich. Da dies schwer zu erkennen ist, sind in Abb. 5.17 einige Hilfslinien eingezeichnet und die 3 Einzugsbereiche in Abb. 5.18 noch einmal gemeinsam dargestellt.

Wie schon beim einfachen Beispiel macht es hier keinen Unterschied, ob man ein Euler-Verfahren mit konstanter oder stückweise konstanter Kontrolle verwendet, oder zumindest läßt sich an der graphischen Darstellung kein Unterschied erkennen. Wegen des wesentlich höheren Aufwandes ist also vom Einsatz des Euler-Verfahrens mit stückweise konstanter Kontrolle abzuraten.

Mit allen Verfahren wurden jeweils 13 Iterationen bis zum Erreichen des Stop-Kriteriums durchgeführt. In Tabelle 5.2 sind die dabei mit Hilfe des Befehls `time` gemessenen Laufzeiten des Unterteilungsalgorithmus in Kombination mit den verschiedenen Taylor-Verfahren aufgeführt.

An den Abbildungen 5.18 und 5.17 sieht man, daß es für einen Überblick über Aussehen und Lage des gesuchten Einzugsbereiches ausreichend ist, eines der beiden Verfahren mit konstanter Kontrolle, bei denen der Aufwand vergleichsweise gering ist, zu verwenden.

Kommt es jedoch darauf an, den gesuchten Einzugsbereich möglichst genau darzustellen, lohnt sich der höhere Aufwand für das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle durchaus. Der mit Hilfe dieses Verfahrens berechnete Einzugsbereich ist deutlich verschoben gegenüber den Einzugsbereichen, die unter Verwendung der beiden einfacheren Verfahren berechnet wurden.

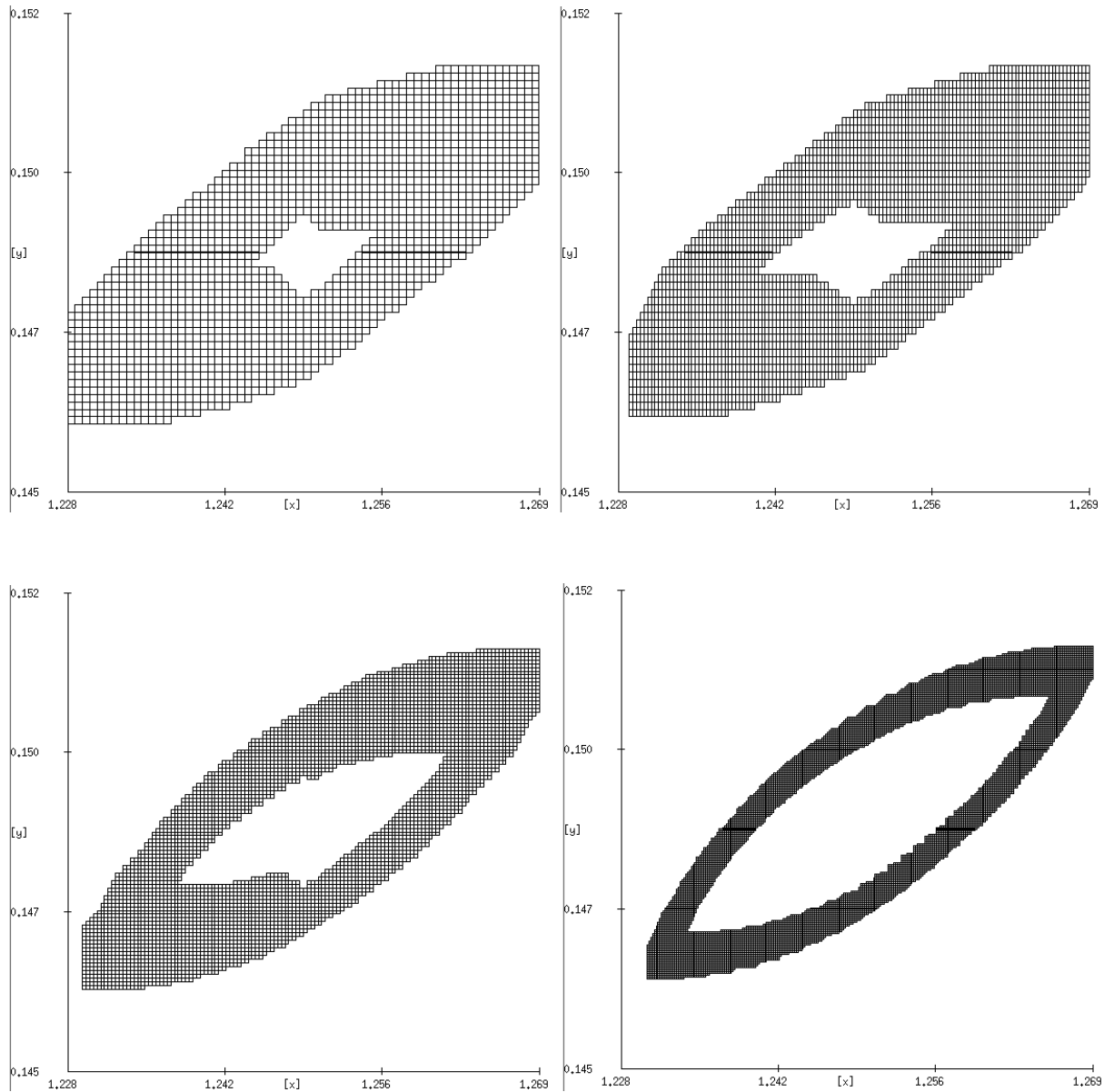


Abbildung 5.14: Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und  $P = 10$  nach jeweils 0, 1, 2 und 4 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus

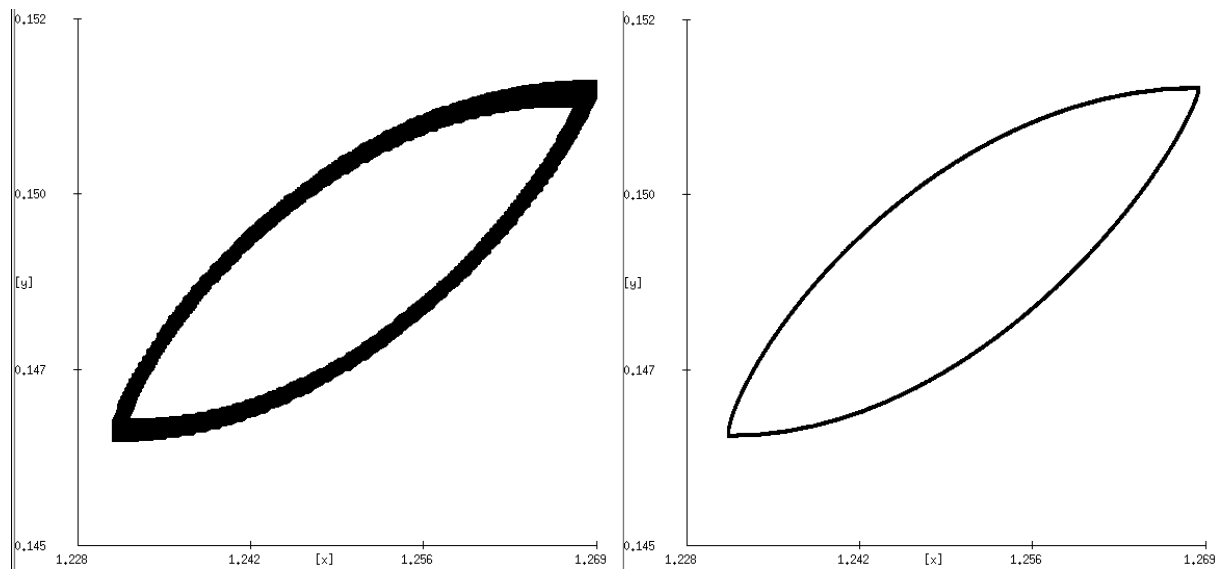


Abbildung 5.15: Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle mit 2 Konstanzintervallen und  $P = 10$  nach jeweils 6 und 13 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus

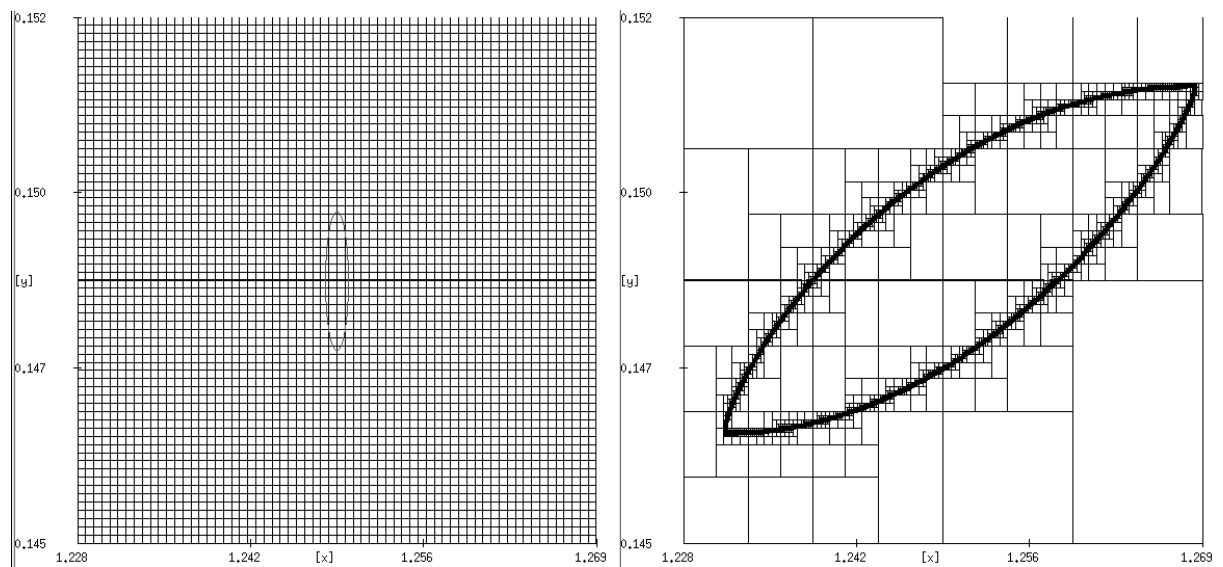


Abbildung 5.16: Die Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}^0$  mit der Zielmenge  $\mathcal{S}$  (links) und alle Zellen nach 13 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus (rechts)

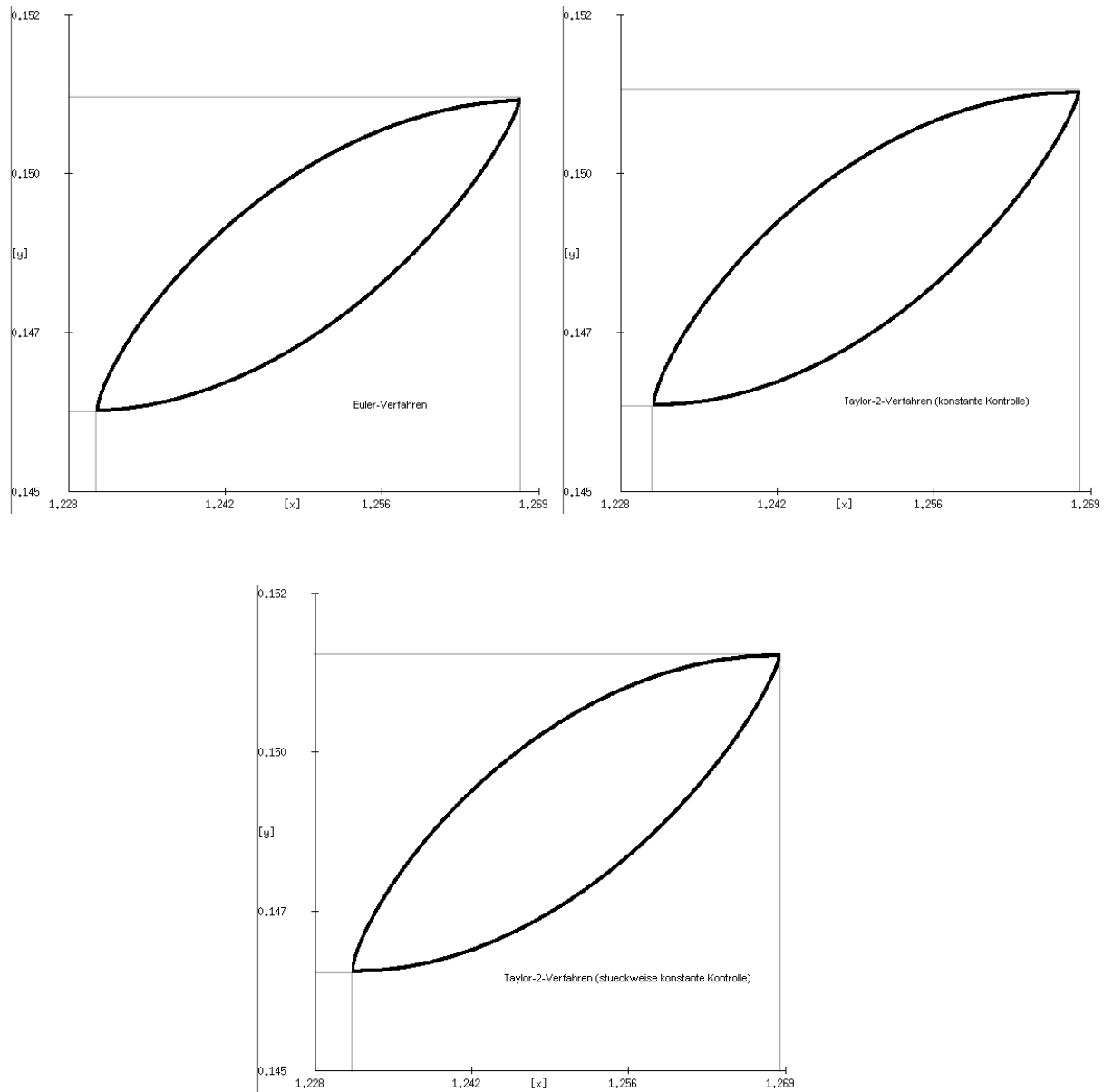


Abbildung 5.17: Der Rand des Einzugsbereiches der chemischen Reaktion berechnet mit Hilfe verschiedener Taylor-Verfahren

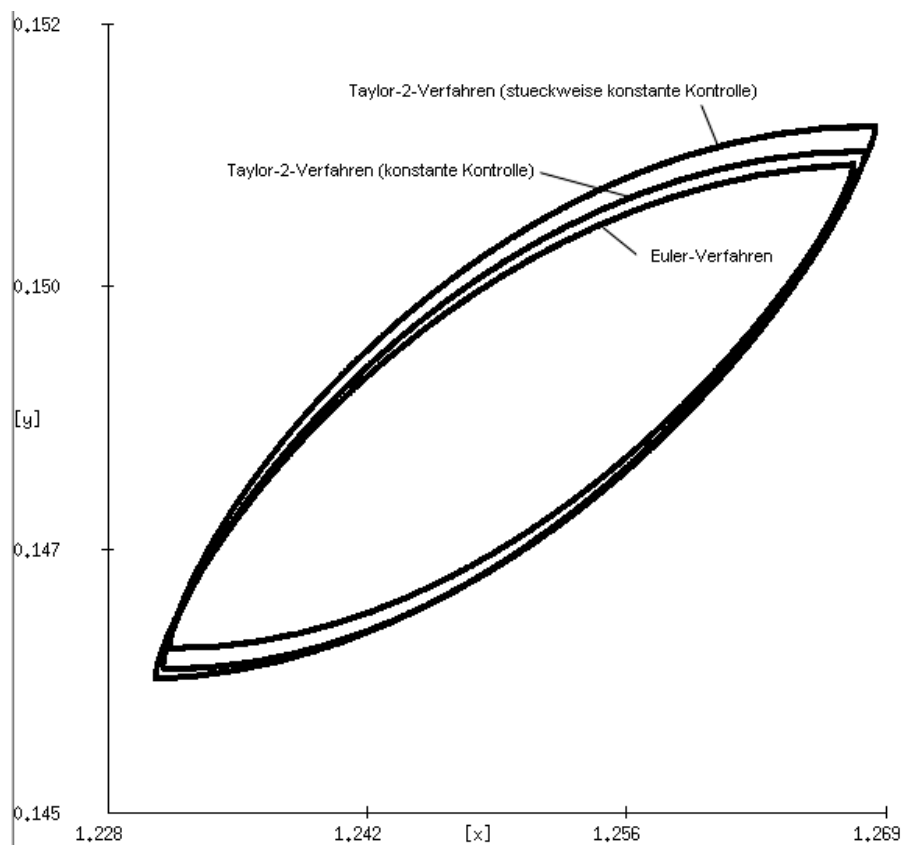


Abbildung 5.18: Die drei Einzugsbereiche aus der vorhergehenden Abb. 5.17

## Diskussion der Ergebnisse

Die Frage, ob das Ergebnis des Unterteilungsalgorithmus mit einem Verfahren höherer Ordnung verbessert werden kann, kann für ausreichend kleine Schrittweiten  $h$  eindeutig mit „Ja“ beantwortet werden. Da der Aufwand für das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit konstanter Kontrolle nur geringfügig größer als der für das Euler-Verfahren mit konstanter Kontrolle ist, kann die Verwendung dieses Verfahrens für  $h$  klein genug mit gutem Gewissen empfohlen werden.

Anders sieht es bei der Verwendung von stückweise konstanten Kontrollen aus. Das Euler-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle hat bei den beiden hier verwendeten Beispielen nicht einmal unterschiedliche Ergebnisse als das Euler-Verfahren mit konstanter Kontrolle bewirkt. Der Aufwand dieses Verfahrens ist im Vergleich mit dem des Euler-Verfahrens mit konstanter Kontrolle jedoch enorm. Außerdem kann das Ergebnis dieses Verfahrens auch durch das Euler-Verfahren mit konstanter Kontrolle simuliert werden, wenn man für jenes mehr Kontrollen verwendet. Das Euler-Verfahren mit stückweise konstanter Kontrolle sollte daher nur zu Referenzzwecken eingesetzt werden.

Das Taylor-Verfahren der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle bewirkt im Vergleich zu den Verfahren mit konstanter Kontrolle eine Verbesserung, die umso größer ist, je mehr Konstanzintervalle verwendet werden. Da jedoch mit der Anzahl der Konstanzintervalle die Anzahl der Kontrollfunktionen und damit der Aufwand exponentiell steigt, sind die Anwendungsmöglichkeiten beschränkt. Die mit Hilfe des Taylor-Verfahrens der Ordnung 2 mit stückweise konstanter Kontrolle trotz vorzeitigem Abbruch der Berechnungen schon erreichte Verbesserung läßt es wünschenswert erscheinen, dieses Verfahren in Bezug auf den Aufwand zu optimieren, z. B. durch eine geeignete Strategie zur Auswahl einiger Kontrollfunktionen.



# Anhang A

## Quellcode der Taylor-Verfahren

Der Vollständigkeit halber kann man in diesem Anhang den in C geschriebenen Quellcode der implementierten Taylor-Verfahren nachlesen. Die Routinen zur Näherung von Trajektorien mit Taylor-Verfahren finden sich im Modul `taylor.c` (Abschnitt A.3). Für diese Näherung benötigte Hilfsfunktionen wie die Berechnung der Doppelintegrale oder des größten gemeinsamen Teilers, sind im Modul `taylor_utils.c` (Abschnitt A.4) enthalten. Diese beiden Module sind vollständig abgedruckt.

Der Auszug aus dem Modul `globvar.c` im folgenden Abschnitt A.1 enthält die genutzten globalen Variablen, der Ausschnitt aus der Header-Datei `defs.h` (Abschnitt A.2) einige Präprozessor-Anweisungen.

### A.1 Globale Variablen – Modul `globvar.c`

```
int anz_kont_intervalle;
/* Anzahl der Intervalle, auf denen die Kontrollfunktion konstant ist. */
int anz_kont_fkten;
/* Anzahl der stueckweise konstanten Kontrollfunktionen */
real ***u_s;
/* das Feld der Kontrollfunktionen,
   u_s[dim_control=anz_fs-1][anz_kont_fkten][anz_kont_intervalle],
   anz_fs: Anzahl Summanden des affin kontrollierten Systems */
real ***einfachintegral;
/* Einfachintegral fuer taylor2_stck_konst,
   einfachintegral[schritte][anz_kont_fkten][anz_fs] */
real ****doppelintegral;
/* Doppelintegral fuer taylor2_stck_konst,
   doppelintegral[schritte][anz_kont_fkten][anz_fs][anz_fs] */
int new_max_control;
/* Ersatz fuer globale Variable max_control, die anders genutzt wird,
   wenn ein Verfahren mit stueckweise konstanter Kontrolle gewaehlt wurde. */
int schritte;
```

## A.2 Präprozessor-Anweisungen – Header-Datei defs.h

```
#define FOR( var, start, end ) \
    for( (var) = (start); (var) < (end); (var)++ )
#define DOALLOC( nitems, type ) \
    ( (type*) malloc( (size_t) (nitems)*sizeof( type ) ) )
#define UNALLOC( ptr ) \
    free( (void*) (ptr) )
```

## A.3 Taylor-Verfahren – Modul taylor.c

```
/* Dateiname:          taylor.c
   von:                Christine
   enthaelt:           - taylor1(...) - Taylor1-Verfahren fuer affin kontrollierte Systeme
                       (Kontrolle konstant, identisch mit Euler-Verfahren
                       aus euler.c)
                       - taylor2(...) - Taylor2-Verfahren fuer affin kontrollierte Systeme
                       (Kontrolle konstant)
                       - taylor1_stck_konst(...) - Taylor1-Verfahren fuer affin kontrollierte
                       Systeme (Kontrolle stueckweise konstant)
                       - taylor2_stck_konst(...) - Taylor2-Verfahren fuer affin kontrollierte
                       Systeme (Kontrolle stueckweise konstant)

   Aufruf in:         equation.c
   zuletzt geaendert: 17.05.2003                                     */

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include "defs.h"
#include "headers.h"

extern int in_grid(qgrid*, real *);
extern qgrid *wgp;

/* Fuer stueckweise konstante Kontrolle benoetigte Variablen: */
extern real ***u_s, ***einfachintegral, ****doppelintegral;
extern int new_max_control, anz_kont_intervalle, anz_kont_fkten;

/* Wir betrachten die affin kontrollierte Differentialgleichung:
      dx/dt = f(0)(t,x) + summe( f(j)(t,x)*u(j-1)(t), j=1..m)   (*)
   Allerdings nur den autonomen Fall, also   f(j)(t,x) = f(j)(x).                                     */

void taylor1(real x[], int dim, real h, int schritte, int anz_fs, RHSAC fs, real ctrl[],
             int *outgrid) {

    /* taylor1() implemetiert das Euler-Verfahren fuer die Gleichung (*), es lautet:
       X_neu[k] = X_alt[k] + f(0)[k](X_alt)*h + summe( f(j)[k](X_alt)*Integral(j), j=1..m )
       mit Integral(j) = integral( u(j-1)(t) ds, ds=t_alt..t_neu),
       da u(j-1)(t) = u(j-1) = konstant und t_neu-t_alt = h gilt:
       Integral(j) = h * u(j-1)

       Eingabe: x[] - Vektor X_alt
                dim - Dimension der Gleichung
                h - Schrittweite
                schritte - Anzahl der Schritte
```

```

anz_fs - Anzahl der Summanden des affin kontrollierten Systems (m)
fs - die f(j)
ctrl[] - Kontrollvektor u
*outgrid - gibt an, ob das Ergebnis X_neu im Gitter liegt
Ausgabe: x[] - Vektor X_neu
*/

int j, k, l, again;
real f_ergebnis[anz_fs][dim];

FOR(1,0,schritte) {

  FOR(j,0,anz_fs) { /* Funktionswerte berechnen */
    (*fs)(j,x,f_ergebnis[j]);
  }

  FOR(k,0,dim) { /* Euler-Verfahren anwenden */
    x[k]=x[k]+h*f_ergebnis[0][k];
    FOR(j,1,anz_fs) {
      x[k]=x[k]+f_ergebnis[j][k]*h*ctrl[j-1];
    }
  }

  if (outgrid!=NULL)
    if (!in_grid(wgp, x)) {
      *outgrid=1;
    }
}

}

void taylor2(real x[], int dim, real h, int schritte, int anz_fs, RHSAC fs, real ctrl[],
  int *outgrid) {

/* taylor2() implementiert ein Taylor-Verfahren ohne Ableitungen fuer die Gleichung (*),
es lautet:


$$X_{neu}[k] = X_{alt}[k] + (1/2) * f(0)[k](X_{alt}) * h$$


$$+ \text{summe}( f(j)[k](X_{alt}) * \text{Integral}(j), j=1..m )$$


$$+ (1/2) * f(0)[k]( X_{alt} + f(0)(X_{alt}) * h ) * h$$


$$+ (1/h) * \text{summe}( ( f(i)[k]( X_{alt} + f(j)(X_{alt}) * h ) - f(i)[k](X_{alt}) ) * \text{Integral}(i,j),$$


$$i,j=0..m, i+j!=0)$$


mit  $\text{Integral}(j) = h * u\_shift(j)$  und
 $\text{Integral}(i,j) = (1/2) * h^2 * u\_shift(i) * u\_shift(j)$ 

Eingabe: x[] - Vektor X_alt
dim - Dimension der Gleichung
h - Schrittweite
schritte - Anzahl der Schritte
anz_fs - Anzahl der Summanden des affin kontrollierten Systems (m)
fs - die f(j)
ctrl[] - Kontrollvektor u, u_shift = [1,u[0],u[1], ..., u[m]]
*outgrid - gibt an, ob das Ergebnis X_neu im Gitter liegt

```

```

    Ausgabe: x[] - Vektor X_neu */

int i, j, k, l;

real f_ergebnis[anz_fs][dim];
real stelle[anz_fs][dim];
real f_erg_stelle[dim];
real shift_ctrl[anz_fs];

shift_ctrl[0] = 1.0; /* u_shift: Ergaenzung des Kontrollvektors um u(0)=1 */
FOR(j,1,anz_fs) { /* Kontrollwerte aus u eintragen */
    shift_ctrl[j] = ctrl[j-1];
}

FOR(l,0,schritte) {

    FOR(j,0,anz_fs) {

        (*fs)(j,x,f_ergebnis[j]); /* Funktionswerte an Stelle X_alt berechnen */

        FOR(k,0,dim) { /* Stellen, an denen die f(j) ausgewertet werden sollen, berechnen */
            stelle[j][k] = x[k]+h*f_ergebnis[j][k];
        }

    }

    fs(0,stelle[0],f_erg_stelle); /* f(0) auf Stelle(0) anwenden */

    FOR (k,0,dim) { /* 'einfache Summanden' des Taylor-2-Verfahrens */

        x[k] = x[k] + h * (f_ergebnis[0][k] + f_erg_stelle[k]) / 2.0;

        FOR(j,1,anz_fs) {
            x[k] = x[k] + h*f_ergebnis[j][k]*shift_ctrl[j];
        }

    }

    FOR(j,0,anz_fs) { /* die Doppelsumme des Taylor-2-Verfahrens */
        FOR(i,0,anz_fs) {
            if (i+j!=0) {
                fs(i,stelle[j],f_erg_stelle); /* f(i) auf Stelle(j) anwenden */
                FOR(k,0,dim) {
                    x[k] = x[k] + h*(f_erg_stelle[k]-f_ergebnis[i][k])*shift_ctrl[i]*shift_ctrl[j]/2.0;
                }
            }
        }
    }

    if (outgrid!=NULL)
        if (!in_grid(wgp, x)) {
            *outgrid=1;
        }

}

}

```

```

void taylor1_stck_konst(real x[], int dim, real h, int schritte, int anz_fs,
                      RHSAC fs, int ctrl_nr, int *outgrid) {

/* Wie taylor1, aber mit stueckweise konstanten Kontrollfunktionen.
   Integral(j) wird hier als Summe von Rechteckflaechen berechnet.

   Eingabe: ctrl_nr - Nummer der stueckweise konstanten Kontrollfunktion.
            Die Kontrollfunktionen sind gespeichert in der globalen Variable ***u_s,
            ctrl_nr ist der zweite Index dieses Feldes, der erste ist die Nummer
            des Summanden des affin kontrollierten Systems, der dritte ist
            die Nummer des zu benutzenden Kontrollwertes. */

int i, j, k, l;
real f_ergebnis[anz_fs][dim];

real integral = 0.0; /* das Kontrollintegral Integral(j) */

/* Zur Berechnung des Kontrollintegrals:

nr=2          -----
nr=1    -----      -----
nr=0  -----      -----      -----

                                minibreite
                                -/\-
                                /  \
-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----
|       |       |       |       |       |       |
0       l*h    stelle          (l+1)*h    schritte*h
|       |       = l*h+i*minibreite      |       |
|       |       |                       |       |
l=0     i=0          i=P-1              l=schritte-1      */

real stelle; /* Dort befinden wir uns im Intervall schritte*h gerade. */

int minischritte = anz_kont_intervalle*schritte/ggt(anz_kont_intervalle,schritte);
/* Soviele Schritte muessen insgesamt im Intervall schritte*h
   gemacht werden, um die Kontrollintegrale zu berechnen. */

int P = minischritte/schritte;
/* Soviele Schritte davon werden in jedem Schritt der Laenge h gemacht, i=0..P-1. */
real minibreite = schritte*h/minischritte; /* So breit ist ein Schritt zur Berechnung des
                                             Kontrollintegrals (schritte*h=Gesamtbreite) */

int nr; /* Nummer des zu benutzenden Kontrollwertes, der dritte Index von ***u_s */

FOR(l,0,schritte) {

FOR(j,0,anz_fs) { /* Funktionswerte berechnen */
  (*fs)(j,x,f_ergebnis[j]);
}

/* Euler-Verfahren anwenden */

```

```

FOR(k,0,dim) {
  x[k]=x[k]+h*f_ergebnis[0][k];
}

FOR(j,1,anz_fs) {

  integral=0.0;

  FOR(i,0,P) { /* Kontrollintegral */
    stelle = l*h+i*minibbreite;
    nr = (int) ( ( stelle/ (schritte*h) )/anz_kont_intervalle );
    /* aktuelle Stelle durch Breite eines Intervalls, auf dem die Kontrolle konstant ist. */

    integral += u_s[j-1][ctrl_nr][nr]*minibbreite;
    /* Wert im Intervall * Breite des Intervalls */
  }

  FOR(k,0,dim) {
    x[k]=x[k]+f_ergebnis[j][k]*integral;
  }

}

if (outgrid!=NULL)
  if (!in_grid(wgp, x)) {
    *outgrid=1;
  }

}

}

void taylor2_stck_konst(real x[], int dim, real h, int schritte, int anz_fs,
                      RHSAC fs, int ctrl_nr, int *outgrid) {

  /* Wie taylor2, aber mit stueckweise konstanten Kontrollfunktionen,
     vgl. taylor1_stck_konst */

  int i, j, k, l;
  real f_ergebnis[anz_fs][dim];
  real stelle_arr[anz_fs][dim];
  real f_erg_stelle[dim];

  real integral = 0.0, stelle;

  int nr;

  FOR(l,0,schritte) {

    FOR(j,0,anz_fs) {

      (*fs)(j,x,f_ergebnis[j]); /* Funktionswerte an Stelle X_alt berechnen */

      FOR(k,0,dim) { /* Stellen, an denen die f(j) ausgewertet werden sollen, berechnen */
        stelle_arr[j][k] = x[k]+h*f_ergebnis[j][k];
      }
    }
  }

```

```

}

fs(0,stelle_arr[0],f_erg_stelle); /* f(0) auf Stelle(0) anwenden */

/* 'einfache Summanden' des Taylor-2-Verfahrens */

FOR(k,0,dim) {
  x[k] = x[k] + h * (f_ergebnis[0][k] + f_erg_stelle[k]) / 2.0;
}

FOR(j,1,anz_fs) {

  FOR(k,0,dim) {
    x[k] = x[k] + f_ergebnis[j][k]*einfachintegral[1][ctrl_nr][j];
  }

}

FOR(j,0,anz_fs) { /* die Doppelsumme des Taylor-2-Verfahrens */
  FOR(i,0,anz_fs) {
    if (i+j!=0) {

      fs(i,stelle_arr[j],f_erg_stelle); /* f(i) auf Stelle(j) anwenden */

      FOR(k,0,dim) {
        x[k] = x[k] +(f_erg_stelle[k]-f_ergebnis[i][k])*doppelintegral[1][ctrl_nr][j][i]/h;
      }
    }
  }
}

if (outgrid!=NULL)
  if (!in_grid(wgp, x)) {
    *outgrid=1;
  }
}
}

```

## A.4 Hilfsfunktionen – Modul taylor\_utils.c

```

/* Dateiname:      taylor_utils.c
   von:            Christine
   enthaelt:       einige Hilfsfunktionen fuer taylor.c
   Aufruf in:     taylor.c
   zuletzt geaendert: 02.03.2003 */

#include <math.h>
#include "defs.h"
#include "headers.h"

extern real ***u_s;

```

```

extern int anz_kont_intervalle, schritte;

void einfachintegral_berechnen(int anz_fs, int l, int ctrl_nr, int P, real minibreite,
                             real h, real einfachintegral[]) {

    /* Diese Funktion berechnet eine Zeile des Einfachintegralfelds, Parameter:

        anz_fs: Anzahl Summanden der DG
        l: Nr. des aktuellen Schritts im Intervall (globale Variable schritte = Anz. schritte)
        ctrl_nr: Nr. einer Kontrollfunktion
        P, minibreite: vgl. taylor.c
        h: Schrittweite des Verfahrens
        doppelintegral: Platz fuer's Ergebnis */

    int j, i, nr;
    real stelle;

    FOR(j,1,anz_fs) {

        einfachintegral[j] = 0.0;

        /* Einfach-Integral */
        FOR(i,0,P) {
            stelle = l*h+i*minibreite;
            nr = (int) ( ( stelle/(schritte*h) )/anz_kont_intervalle );
            /* aktuelle Stelle durch Breite eines Intervalls,
               auf dem die Kontrolle konstant ist. */

            einfachintegral[j] += u_s[j-1][ctrl_nr][nr]*minibreite;
            /* Wert im Intervall * Breite des Intervalls */
        }

    }

}

void doppelintegral_berechnen(int j, int anz_fs, int l, int ctrl_nr, int P, real minibreite,
                              real h, real doppelintegral[]) {

    /* Diese Funktion berechnet eine Zeile der Doppelintegralfelds, Parameter:

        j: Nr. eines Summanden der DG (lokale Variable i auch!)
        anz_fs: Anzahl Summanden der DG
        l: Nr. des aktuellen Schritts im Intervall (globale Variable schritte = Anz. schritte)
        ctrl_nr: Nr. einer Kontrollfunktion
        P, minibreite: vgl. taylor.c
        h: Schrittweite des Verfahrens
        doppelintegral: Platz fuer's Ergebnis */

    real *ui, *uj; /* Kontrollfunktionen, werden aus ***u_s herauskopiert */
    int i, k1, k2, nr_k1, nr_k2; /* vgl. taylor.c */
    real stelle_k1, stelle_k2; /* vgl. taylor.c */

    ui=DOALLOC(anz_kont_intervalle,real);
    uj=DOALLOC(anz_kont_intervalle,real);

    FOR(i,0,anz_fs) {

```



```

if ((i+j)!=0) {

    doppelintegral[i]=0.0;

    if (i==0 && j!=0) {
        eins(ui,anz_kont_intervalle);
        arraycopy(u_s[j-1][ctrl_nr], uj, anz_kont_intervalle);
    } else if (j==0 && i!=0) {
        eins(uj,anz_kont_intervalle);
        arraycopy(u_s[i-1][ctrl_nr], ui, anz_kont_intervalle);
    } else {
        arraycopy(u_s[i-1][ctrl_nr], ui, anz_kont_intervalle);
        arraycopy(u_s[j-1][ctrl_nr], uj, anz_kont_intervalle);
    }

    /* Doppelintegral, vgl. Satz 4.6.1 */
    FOR(k2,0,P) {
        FOR(k1,0,k2+1) { /* <=> for(k1=0..k2) */
            stelle_k1 = 1*h+k1*minibreite;
            stelle_k2 = 1*h+k2*minibreite;
            nr_k1 = (int) ( ( stelle_k1/(schritte*h) )/anz_kont_intervalle );
            nr_k2 = (int) ( ( stelle_k2/(schritte*h) )/anz_kont_intervalle );
            doppelintegral[i]+=ui[nr_k1]*uj[nr_k2]*pow(minibreite,2.0);
        }
    }
}

UNALLOC(ui);
UNALLOC(uj);

}

void kontrollfunktion(int i,int s,int a,real kontrollwerte[],real u[]) {

    /* Belegt u mit der zu i gehoerenden stueckweise konstanten Funktion.
       s: Anzahl Teilintervalle, a: Anzahl Kontrollwerte, kontrollwerte: die Kontrollwerte,
       u: die Werte der stueckweise konstanten Funktion (Rueckgabe) */

    /* Es gibt a^s moegliche i's, denn wir wollen alle Variationen der Kontrollwerte (mit Wiederholungen). */

    /* Die Reihenfolge der Kontrollfunktionen ist so aehnlich wie in einer Tabelle von Wahrheitswerten,
       nur dass es mehr als zwei Werte gibt, also z. B. fuer s=2, a=3, Kontrollintervall [0,2]:
           0 0
           0 1
           0 2
           1 0
           1 1
           1 2
           2 0
           2 1
           2 2 */

    extern int anz_kont_fkten; /* = pow(a,s); */
    /* So viele Kontrollfunktionen erhaelt man aus a Kontrollwerten und s Intervallstuecken*/

```

```
int j=0; /* Spalte der Tabelle */

FOR(j,0,s) {
    u[j] = kontrollwerte[((i / ((int)(anz_kont_fkten/pow(a,j+1)))) % a)];
}

}

void eins(real *u, int s) {

    int j;

    FOR(j,0,s) { /* Die Einskrollfunktion fuellen. */
        u[j]=1.0;
    }

}

void arraycopy(real *quelle, real *ziel, int dim) {

    int j;

    FOR(j,0,dim) {
        ziel[j]=quelle[j];
    }

}

int ggt(int zahl1,int zahl2) {

    /* Berechnet ggT von zahl1 und zahl2 nach Euklidischem Algorithmus. */

    int kleiner, groesser, rest;

    if( zahl1 <= zahl2 ) {
        kleiner = zahl1;
        groesser = zahl2;
    } else {
        kleiner = zahl2;
        groesser = zahl1;
    }

    rest = (groesser % kleiner);

    while(rest > 0) {
        groesser = kleiner;
        kleiner = rest;
        rest = (groesser % kleiner);
    }

    return(kleiner);

}
```

# Notation

## Kapitel 1: Vorbereitungen und Voraussetzungen

### Abschnitt 1.1: Die dynamischen Systeme

- $t$  Zeit  $t \in \mathbb{R}_0^+$
- $x$   $x \in \mathbb{R}^d$  Zustand im Zustandsraum  $\mathbb{R}^d$   
oder  $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  Unbekannte der Differentialgleichungen
- $x_0$  Anfangswert  $x(0) \in \mathbb{R}^d$
- $U$   $U \subset \mathbb{R}^m$  kompakte Menge von Eingangswerten
- $\mathcal{U}$   $\mathcal{U} := \{u: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow U \mid u \text{ meßbar}\}$  Menge der Eingangsfunktionen
- $u$   $u \in U$  Eingangswert oder  $u \in \mathcal{U}$  Eingangsfunktion (Störung oder Kontrolle)
- $\&_s$  Verkettung zweier Eingangsfunktionen am Zeitpunkt  $s$
- $\mathcal{U}(B)$   $\mathcal{U}(B) := \{\bar{u}: B \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow U \mid \bar{u}(x_0, \cdot) \in \mathcal{U} \quad \forall x_0 \in B\}$   
Menge der von Anfangswerten aus  $B$  abhängigen Eingangsfunktionen
- $W$   $W \subset \mathbb{R}^n$  Menge von Störwerten
- $\mathcal{W}$   $\mathcal{W} := \{w: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow W \mid w \text{ meßbar und lokal wesentlich beschränkt}\}$   
Menge der Störfunktionen
- $w$   $w \in W$  Störwert oder  $w \in \mathcal{W}$  Störfunktion
- $\mathcal{P}$   $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^\delta$ , Menge nichtvorausschauender Strategien,  
abgeschlossen bezüglich Verschiebungen
- $p[u]$   $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  nichtvorausschauende Funktion,  $p[u] \in \mathcal{W}$  Störfunktion
- $f^0$   $f^0: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  rechte Seite der Differentialgleichung (1.1)
- $f$   $f: \mathbb{R}^d \times U \times W \rightarrow \mathbb{R}^d$  rechte Seite der gestörten Differentialgleichungen (1.2) und (1.3)
- $\varphi$   $\varphi(t, x_0, u, \overset{w}{p[u]})$  Lösung der Differentialgleichungen (1.1)  
$$\dot{x}(t) = f^0(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$$
  
bzw. (1.2) und (1.3)  
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \overset{w}{p[u](t)}), \quad x(0) = x_0$$

$h$	$h > 0$ Zeitschritt
$\varphi_h$	$\varphi_h(x, u) := \varphi(h, x, u, 0)$ Zeit- $h$ -Abbildung der Differentialgleichung (1.1)
$\phi_h^0$	$\phi_h^0: \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ rechte Seite des zeitdiskreten System (1.11)
$\phi_h$	$\phi_h: \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^d$ rechte Seite der gestörten zeitdiskreten Systeme (1.12) und (1.13)
$\Phi_h$	$\Phi_h(t, x_0, u, \overset{w}{p[u]})$ Trajektorie der zeitdiskreten Systeme (1.12) und (1.13) $x(t+h) = \phi_h(x(t), u(t+\cdot), \overset{w(t+\cdot)}{p[u](t+\cdot)})$
$\Psi$	$\varphi$ oder $\Phi_h$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$ oder $h\mathbb{Z}$

## Abschnitt 1.2: Normen, Mengen, Abstände und Vergleichsfunktionen

$\ \cdot\ $	Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$
$\ \cdot\ _\infty$	$L_\infty$ -Norm auf $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{W}$
$\ \cdot\ _{[a,b]}$	Einschränkung der $L_\infty$ -Norm auf Intervalle
$A^C$	Komplement einer Menge $A$
$cl A$	Abschluß
$int A$	Inneres
$\partial A$	Rand
$Pot(A)$	Potenzmenge
$d(x, D)$	Punkt-Mengen-Abstand
$h^*(C, D)$	Hausdorffscher Semiabstand
$h(C, D)$	Hausdorffabstand
$\mathcal{B}(r, D)$	Kugel um $D$
$\mathcal{K}, \mathcal{K}_\infty, \mathcal{L}, \mathcal{KL}, \mathcal{KLD}$	Klassen von Vergleichsfunktionen

## Kapitel 2: Attrahierende Mengen und Einzugsbereiche

### Abschnitt 2.1: Starke dynamische Konzepte

$\mathcal{W}_\alpha$	$\mathcal{W}_\alpha = \{w \in \mathcal{W} \mid \ w\ _\infty \leq \alpha\}$
$\Psi_\alpha(t, x_0)$	$\Psi_\alpha(t, x_0) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}_\alpha} \Psi(t, x_0, u, w)$
$\Psi_\alpha(t, B)$	$\Psi_\alpha(t, B) = \bigcup_{x_0 \in B} \Psi_\alpha(t, x_0)$ für eine Menge $B$
$\mathcal{R}(B)$	$\mathcal{R}(B) = \bigcup_{\alpha > 0, t \geq 0} \Psi_\alpha(t, B)$
$\Psi_{\alpha(t)}(t, x_0)$	$\Psi_{\alpha(t)}(t, x_0) = \{\Psi(t, x_0, u, w) \mid u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}, \ w(t)\  \leq \alpha(t) \text{ für fast alle } t > 0\}$
$\Psi_{\alpha(t)}(t, B)$	$\bigcup_{x_0 \in B} \Psi_{\alpha(t)}(t, x_0)$ für eine Menge $B$

$\nu(w, t), \nu_0(w, t), \nu_h(w, t)$  vgl. Definition 2.1.6 von sISDS

### Abschnitt 2.2: Schwache dynamische Konzepte

$\mathcal{P}_\alpha$   $\mathcal{P}_\alpha = \{p \in \mathcal{P} \mid \|p[u]\|_\infty \leq \alpha \text{ für alle } u \in \mathcal{U}\}$

$\mathcal{T}$  Menge aller streng aufsteigenden Zahlenfolgen aus  $\mathbb{R}_0^+$   
 $\leq$  schwach vgl. Definition 2.2.1  
 $\in$  schwach vgl. Definition 2.2.2

$\tilde{\nu}(p, t), \tilde{\nu}_0(p, t), \tilde{\nu}_h(p, t)$  vgl. Definition 2.2.8 von wISDS

### Abschnitt 2.3: Einzugsbereiche

$\mathcal{D}(A)$  Einzugsbereich

## Kapitel 3: Berechnung von Einzugsbereichen

### Abschnitt 3.1: Diskretisierung des Zustandsraums

$Q, Q_i$  Zellen  
 $\mathcal{Q}$  Zellüberdeckung  
 $\mathcal{C}_\mathcal{Q}$  Familie aller möglichen Vereinigungen von Zellen aus einer Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$   
 $\text{diam}(Q)$  Durchmesser einer Zelle  $Q$   
 $\text{diam}(\mathcal{Q})$  maximaler Durchmesser der Zellen in einer Zellüberdeckung  $\mathcal{Q}$   
 $\hat{\phi}_h$  Zustandsraumdiskretisierung  
 $\Delta_i$  Genauigkeit einer Zustandsraumdiskretisierung  
 $\hat{\Phi}_h$  Iterierte  
 $\mathcal{U}$  Menge aller Eingangsfolgen

## Kapitel 4: Einschrittverfahren höherer Ordnung

### Abschnitt 4.3: Notationen mit Multi-Indizes

$\mathbf{a}$   $\mathbf{a} = (j_1, \dots, j_l)$  Multi-Index  
 $l(\mathbf{a})$  Länge des Multi-Index  $\mathbf{a}$   
 $\odot$  Multi-Index der Länge 0  
 $\mathfrak{M}_m$  Menge aller Multi-Indizes  
 $-\mathbf{a}$   $-\mathbf{a} = (j_2, \dots, j_l)$   
 $\mathbf{a}-$   $\mathbf{a}- = (j_1, \dots, j_{l-1})$   
 $*$  Verkettung zweier Multi-Indizes

$I_{\mathfrak{a}}$  iteriertes Kontrollintegral  
 $G_{\mathfrak{a}}$  Koeffizienten-Funktion  
 $L^j$  Differentialoperatoren, vgl. Definition 4.3.4

$\mathcal{A}$  hierarchische Menge  
 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$  Restmenge

#### **Abschnitt 4.5: Taylor-Verfahren**

$\mathcal{A}_N$   $\{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}_m \mid l(\mathfrak{a}) \leq N\}$

#### **Abschnitt 4.6: Näherung mehrfacher Kontrollintegrale**

$P$   $P \in N$ , vgl. Satz 4.6.1  
 $\beta$   $\beta = h/P$ , vgl. Satz 4.6.1

# Literaturverzeichnis

- [Au 97] Aulbach, Bernd: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum, 1997.
- [Co/Kl 00] Colonius, Fritz/Kliemann, Wolfgang: *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, 2000.
- [De/Ho 97] Dellnitz, Michael/Hohmann, Andreas: *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*, Numerische Mathematik (Springer), Volume 75, S. 293-317, 1997.
- [Go 94] R.A. Gordon *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [Gr 01] Grüne, Lars: *Subdivision Techniques for the Computation of Domains of Attraction and Reachable Sets*, NOLCOS 2001, St. Petersburg, Russia, 762-767.
- [Gr 02] Grüne, Lars: *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, Springer, 2002.
- [Gr 03] Grüne, Lars: *Corrections and improvements to the book Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, URL: <http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/papers/corrections.pdf>, letzte Änderung 24. April 2003.
- [Gr/Kl 01] Grüne, L./Kloeden, P. E.: *Higher order numerical schemes for affinely controlled nonlinear systems*, Numerische Mathematik (Springer), Volume 89 Issue 4, S. 669-690, 2001.
- [He 91] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis – Teil 1*, B. G. Teubner Stuttgart, 1991 (9. Auflage).
- [Jä 84] Jänich, Klaus: *Lineare Algebra*, Springer, 1984 (3. Auflage).
- [Kl 99] Kloeden, Peter E.: *Numerische Dynamik*, Vorlesung im Sommersemester 1999.
- [Kl 99/00] Kloeden, Peter E.: *Numerik für Anfangswertaufgaben*, Vorlesung im Wintersemester 1999/2000.
- [Sz 97] Szolnoki, Dietmar: *Berechnung von Viabilitätskernen*, Diplomarbeit, Universität Augsburg, 1997.

# Index

- Abstand
  - Hausdorffabstand, 14
  - Hausdorffscher Semiabstand, 14
  - Punkt-Menge, 14
- additive Kontrolle, 74
- affin, 63
- asymptotisch stabil
  - schwach, 31
  - stark, 19
- attrahierende Menge
  - für Zustandsraumdiskretisierungen, 47
  - schwach, 31
  - stark, 19
- Attraktionsrate, 20, 32
- aufgeblasenes System
  - zeitdiskret, 11
  - zeitkontinuierlich, 8
  - zustandsabhängig, 8, 11
- Durchmesser, 44
- dynamisch robust, 40
- dynamisch stabil, 20, 32
- Eingang-
  - folgen, Menge aller, 45
  - funktionen, Menge aller, 6
- Einzugsbereich, 39
- Erreichbarkeitsmenge, 18
- Familie von Umgebungen
  - kontrahierbar, 33
  - kontrahierend, 21
- hierarchische Menge, 68
- innerer Fehler, 45
- ISDS
  - schwach (w), 32
  - stark (s), 20
- iterierte, 45
- iteriertes Integral, 67
- Koeffizienten-Funktion, 67
- kommutative Kontrolle, 74
- komplementär beschränkt, 15
- kontroll-affin, 64
- kontrollierbar, 31
- Kontrollierbarkeitsmenge, 40
- Kontrollintegral, 67
- Kugel, 15
- Lyapunov-Funktion
  - sISDS, 26
  - wISDS, 37
- Multi-Index, 66
- nichtvorausschauend, 7
- Norm
  - $L_\infty$ -Norm, 13
  - Euklidische, 13
- overshoot gain, 20, 32
- Polarkoordinaten, 82
- Restmenge, 68
- rigoros, 45
- Robustheitsverstärkung, 20, 32
- Rührkessel, 96
- stabil, 20, 32
- Taylor-Approximation, 70
- Taylor-Verfahren, 72
- Überschwingungsverstärkung, 20, 32
- Vergleichsfunktion, 15
- Verkettung
  - Multi-Indizes, 67



- Eingangsfunktionen, 6
- Viabilität, 31
- vorwärtsinvariant
  - $\gamma$ -robust, 20, 32
  - kontrolliert, 31
  - schwach, 30
  - stark, 19
- Zeit- $h$ -Abbildung, 10
- Zelle, 44
- Zellüberdeckung, 44
- Zustandsraumdiskretisierung, 44