Numerische Berechnung des Lyapunov-Spektrums bilinearer Kontrollsysteme

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg

vorgelegt von
Lars Grüne
aus Augsburg

Augsburg
September 1996

Bezeichnungen

$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{S}^d$	d-dimensionale Einheitssphäre
$\mathbb{P}^d$	d-dimensionaler reeller Projektiver Raum
M, N	Riemannsche Mannigfaltigkeiten
TM	Tangentialbündel an M
$\pi : V \to M$	Vektorraumbündel mit Mannigfaltigkeit M als Basisraum
$\pi : \mathcal{V} \to B$	Vektorraumbündel mit metrischem Raum B als Basisraum
V, $\mathcal{V}$	Kurzschreibweise für Vektorraumbündel
V_p, $\mathcal{V}_b$	Fasern der Vektorraumbündel
$\mathbb{P}V$, $\mathbb{P}\mathcal{V}$	Projektive Bündel
$\mathbb{P}$	Projektionsabbildung von V (bzw. $\mathcal{V}$) nach $\mathbb{P}V$ (bzw. $\mathbb{P}\mathcal{V}$)
$d(\cdot,\cdot)$	Metrik
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	positiv definite, symmetrische Bilinearform (Skalarprodukt)
$B_\varepsilon(x)$	offener Ball um x mit Radius ε
X, Y	Vektorfelder
U	Kontrollwertebereich
u	Kontrollwert
$\mathcal{U}$	Menge der meßbaren Kontrollfunktionen mit Werten in U
$u(\cdot)$	Kontrollfunktion
$\varphi(t,x,u(\cdot))$	Lösungstrajektorie zur Zeit t mit Anfangswert x und Kontrollfunktion $u(\cdot)$
$\lambda(x,u(\cdot))$	Lyapunov-Exponent
κ, κ^*, $\tilde{\kappa}$	extremale Lyapunov-Exponenten
Σ_{Ly}, Σ_{Fl}, Σ_{Mo}	Lyapunov-, Floquet- und Morse-Spektrum
O_T^+, O_T^-	positiver und negativer Orbit bis zur Zeit T
O^+, O^-	positiver und negativer Orbit
D, C	Kontrollmenge, invariante Kontrollmenge
E	Kettenkontrollmenge
$A(D)$, $A(C)$, $A(E)$	Einzugsbereiche der (Ketten-)Kontrollmengen
${}_{\mathbb{P}}D$, ${}_{\mathbb{P}}C$, ${}_{\mathbb{P}}E$	(Ketten-)Kontrollmengen in $\mathbb{P}V$
Φ	Kontrollfluß
ζ	(ε,T)-Kette

${}_{\mathbb{P}}\mathcal{E}$	Morse Menge
$\mathcal{A}({}_{\mathbb{P}}\mathcal{E})$	Einzugsbereich einer Morse Menge
$\lambda(x, u(\cdot))$	Durchschnittsfunktional
J_δ	diskontiertes Funktional
λ^+, λ^-	Optimale Wertefunktionen des Durchschnittsproblems
v_δ^+, v_δ^-	Optimale Wertefunktionen des diskontierten Problems
δ	Diskontrate
L	Lipschitzkonstante
γ	Hölder-Exponent
h	Zeitschrittweite
$\mathcal{U}_h$	Diskretisierung von $\mathcal{U}$
Ψ	Parametrisierung
Ξ	Gitter
Q	Quaderelement des Gitters
F	(diskretes) Feedback

Einleitung

Die mathematische Analyse dynamischer Vorgänge ist bis heute von den Konzepten geprägt, die Alexander M. Lyapunov in seiner Dissertation [Lya92] vor über hundert Jahren entwickelt hat.

Zwei seiner Konzepte haben sich besonders erfolgreich als universelle Hilfsmittel durchsetzen können. Zum einen sind dies die *Lyapunov-Funktionen*: Dies sind Funktionen, die entlang von Lösungstrajektorien monoton fallen, und so ein globales Bild des dynamischen Verhaltens eines Systems liefern. Ein Minimum solch einer Funktion beschreibt also eine stabile Lösung, im einfachsten Falle also z.B. ein Gleichgewicht, von dem sich Lösungen, die in der Nähe starten, nicht entfernen können, oder gegen welches Lösungen in einer gewissen Umgebung konvergieren.

Das Konzept, welches wir in dieser Arbeit betrachten wollen, ist das der *Lyapunov-Exponenten*. Diese wurden in [Lya92] als *charakteristische Zahlen* eingeführt. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Realteile der Eigenwerte einer Matrix: Das Stabilitätsverhalten der Lösungen einer autonomen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung ist gerade durch die Realteile der Eigenwerte der zu dieser Gleichung gehörigen Matrix bestimmt. Betrachtet man zeitvariante lineare Differentialgleichungen, so bilden die Lyapunov-Exponenten gerade die Verallgemeinerungen dieser Größen. Lyapunov interessierte sich nun besonders dafür, was sich mit diesen Größen aussagen läßt, wenn diese zeitabhängige lineare Differentialgleichung die Linearisierung einer nichtlinearen Gleichung darstellt. Unter gewissen Regularitätsbedingungen lassen sich über die Lyapunov-Exponenten tatsächlich Aussagen über das Stabilitätsverhalten einer nichtlinearen zeitabhängigen gewöhnlichen Differentialgleichung gewinnen. Ein Hauptproblem hierbei ist, daß sich der Lyapunov-Exponent einer Lösungstrajektorie, der ja eine asymptotische Größe ist, im allgemeinen nicht als Limes für $t \to \infty$ darstellen läßt, sondern nur als Limes Superior.

Diese Regularitätsbedingungen wurden daraufhin für eine Reihe verschiedener Differentialgleichungen untersucht. Es dauerte aber bis 1968, als V.I. Oseledets den „Multiplikativen Ergodensatz“ veröffentlichte [Ose68], bis ein allgemeines Kriterium für die Regularität gefunden wurde. Dieser Satz zeigt mit maßtheoretischen Überlegungen, daß die geforderte Regularitätsbedingung mit Wahrscheinlichkeit 1 bezüglich eines invarianten Maßes für das System erfüllt ist. Insbesondere ist – wie bei den Eigenwerten – die Anzahl der unterschiedlichen Lyapunov-Exponenten durch die Dimension des Systems begrenzt, und man erhält Verallgemeinerungen von Eigenräumen, in denen diese Exponenten angenommen werden. Eine Reihe von Implikationen dieses Satzes, vor allem für stochastische Systeme, finden sich in den Proceedings-Bänden [AW86] und [ACE91].

Für Kontrollsysteme, bei denen die Lösungen von einer ganzen Familie deterministischer *Kontrollfunktionen* abhängen, ist dieser Satz nicht anwendbar. Bereits die Konstruktion eines invarianten Maßes versagt hier, da dieses von der jeweils verwendeten Kontrollfunktion abhängig wäre. Die Zahl der möglichen Lyapunov-Exponenten ist insbesondere wegen der Abhängigkeit von den Kontrollfunktionen nicht endlich. Während Lyapunov-Funktionen in der mathematischen Kontrolltheorie in den letzten Jahrzehnten reichlich Anwendung fanden, wurde die Theorie der Lyapunov-Exponenten erst in den letzten Jahren von F. Colonius und W. Kliemann entwickelt (siehe z.B. [CK93] und [CK96]), und wird in Kürze zusammenfassend in [CK97] erscheinen.

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist die numerische Berechnung des Lyapunov-Spektrums bilinearer Kontrollsysteme, also die Bestimmung der Menge aller möglichen Lyapunov-Exponenten zu allen möglichen Kontrollfunktionen und Anfangswerten. Schon bei einfachen Systemen lassen sich die Lyapunov-Exponenten analytisch nicht mehr bestimmen. Es ist daher notwendig, numerische Algorithmen zu entwickeln, die die Berechnung dieser Kenngrößen ermöglichen. Für stochastische Systeme gibt es hier bereits Berechnungsmöglichkeiten (z.B. durch die numerische Lösung der Fokker-Planck Gleichung, vgl. [ACE91]), für deterministische semilineare zeitdiskrete Systeme existiert ein Algorithmus von Barabanov [Bar89], mit dem sich entscheiden läßt, ob der maximale Lyapunov-Exponent (also das Supremum des gesamten Spektrums) kleiner oder größer als Null ist.

Wir werden hier einen Algorithmus entwickeln, der es ermöglicht, das gesamte Lyapunov-Spektrum zu berechnen. Darüberhinaus werden wir aus der numerischen Lösung eine Möglichkeit zur numerischen Berechnung von Kontrollstrategien zur Realisierung der *extremalen* Lyapunov-Exponenten herleiten. Insbesondere führt dies auf die Berechnung stabilisierender Kontrollen. Stellt unser bilineares System eine Linearisierung eines nichtlinearen Systems dar, so können wir zeigen, daß sich mit einer solchen Kontrollstrategie auch das nichtlineare System stabilisieren läßt. Wir sind also damit wieder bei der ursprünglichen Zielsetzung Lyapunovs angelangt, über die Lyapunov-Exponenten eines linearisierten Systems Stabilitätsaussagen für ein nichtlineares System zu erhalten.

Wir gehen dabei in dieser Arbeit wie folgt vor. Zunächst werden wir in Kapitel 1 die Theorie des Lyapunov-Spektrums bilinearer Kontrollsysteme aus [CK97] kurz darstellen. Hauptresultat dieses Kapitels ist, daß das Lyapunov-Spektrum aus einer durch die Dimension des Systems beschränkten Anzahl von *abgeschlossenen Intervallen* besteht. Darüberhinaus werden wir einige Aussagen über das Systemverhalten in endlicher Zeit beweisen.

Um nun also das gesamte Spektrum zu berechnen, genügt es, die Ränder der Intervalle zu bestimmen, aus denen das Spektrum besteht. Da diese Ränder gerade gewisse extremale Lyapunov-Exponenten darstellen, läßt sich dieses Problem auf die Lösung eines optimalen Steuerungsproblems zurückführen, und zwar eines sogenannten *Durchschnittskosten- bzw. Durchschnittsertragsproblems.* Im zweiten Kapitel werden wir dies exakt formulieren, und zeigen, daß sich dieses Problem durch ein *diskontiertes optimales Steuerungsproblem* mit kleiner Diskontrate approximieren läßt. Im allgemeinen ist diese Approximationseigenschaft nicht gültig; wir werden aber sehen, daß unter genau den gleichen Bedingungen, unter denen die Struktur des Spektrums geklärt werden kann, auch diese Approximationseigenschaft gilt. Darüberhinaus werden wir unter schwächeren Bedingungen zeigen, wie sich verschiedene extremale Lyapunov-Exponenten approximieren lassen.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns eingehender mit diskontierten optimalen Steuerungsproblemen, und werden diverse Eigenschaften der *optimalen Wertefunktionen* dieser Probleme erläutern. Insbesondere sind dies das *Bellmansche Optimalitätsprinzip* und die *Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung.*

Diese zwei Prinzipien bilden den Schlüssel zur numerischen Berechnung der optimalen Wertefunktion im vierten Kapitel. Dort werden verschiedene *Diskretisierungsschritte* diskutiert und durchgeführt, die dann zur numerischen Lösung des Problems führen. Speziell auf die Diskretisierung des Zustandsraumes, die in höheren Dimensionen sehr aufwendig wird, wird in dieser Darstellung Wert gelegt. Außerdem führen wir hier das Konzept der *diskreten Feedbacks* ein, eine Klasse von Kontrollfunktionen, die sich in natürlicher Weise aus der Diskretisierung ergibt, und für die wir eine Reihe nützlicher Eigenschaften nachweisen werden.

Im fünften Kapitel wenden wir diese diskreten Feedbacks an, und zeigen, daß diese sowohl für bilineare als auch – über ein Linearisierungsresultat – für nichtlineare Kontrollsysteme *stabilisierende Kontrollen* darstellen.

Abschließend werden wir im sechsten Kapitel eine Reihe von numerischen Beispielen betrachten, die die in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen illustrieren.

Einige der hier vorgestellten Resultate wurden im Laufe der Entstehungszeit dieser Dissertation bereits in den Artikeln [Grü96c], [Grü96a] und [Grü96b] formuliert. Da diese Resultate im Rahmen dieser Arbeit aber allesamt erweitert und zum großen Teil verbessert wurden, werden die bereits in diesen Artikeln formulierten Resultate hier noch einmal aufgeführt und — mit wenigen Ausnahmen — noch einmal bewiesen.

Ein großer Teil dieser Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsschwerpunktes „Ergodentheorie, Analysis und effiziente Simulation Dynamischer Systeme“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft, für deren Förderung ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken möchte.

Zum Ende dieser Einleitung sollen nun all diejenigen Personen erwähnt werden, die zum Entstehen dieser Arbeit mittelbar oder unmittelbar beigetragen haben. Zuallererst ist dies natürlich mein Betreuer, Fritz Colonius, der durch seine ständige Motivation, unzählige Ratschläge und seine unermüdliche Diskussionsbereitschaft entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Weiterer Dank für viele erhellende und anspornende Diskussionen gebührt Wolfgang Kliemann, speziell während meiner — leider nur kurzen — Aufenthalte an der Iowa State University in Ames/Iowa. Gerhard Häckl danke ich nicht nur für die Einzelheiten, die ich von ihm über Kontrollmengen gelernt habe, sondern vor allem für seine Geduld, sich alle noch so unausgegorenen Ideen von mir ernsthaft anzuhören. Darüberhinaus danke ich Fabian Wirth für die Ausdauer, mit der er das von mir im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm angewendet und getestet hat. Nicht zuletzt möchte ich mich bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls für angewandte Mathematik I für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die vielfältige Hilfe bei allen erdenklichen Problemen während der Entstehung dieser Arbeit bedanken.

Mein besonderer Dank geht zuguterletzt an meine Freundin Brigitte für ihre Unterstützung, insbesondere während der letzten Wochen der Fertigstellung dieser Arbeit.

Augsburg, im September 1996

Zusammenfassung der Resultate

Wir wollen die wichtigsten in dieser Arbeit erzielten Resultate noch einmal zusammenfassen. Diese lassen sich in drei Themenkomplexe einteilen: *Approximation*, *Numerische Berechnung* und *Stabilisierung*.

In der *Approximation* konnte gezeigt werden, daß die optimale Wertefunktion des diskontierten optimalen Steuerungsproblems für $\delta \to 0$ Werte zwischen den extremalen Floquet- und den extremalen Morse-Exponenten annimmt. Unter der Bedingung, daß diese Exponenten übereinstimmen, folgt also die Konvergenz. Die Übereinstimmung dieser Spektren ist dabei gerade die Bedingung, unter der die Struktur des Lyapunov-Spektrums bekannt ist. Wir erhalten also ein Approximationsresultat unter genau der Bedingung, unter der Aussagen über das Spektrum möglich sind. Für gewisse extremale Exponenten konnte Konvergenz auch unter schwächeren Bedingungen nachgewiesen werden.

Zur *Numerischen Berechnung* haben wir einen Algorithmus entwickelt, der durch die Adaptivität der Ortsdiskretisierung, und hierbei speziell durch die Richtungsverfeinerungen Lösungen der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung in Dimension 3 und (mit Abstrichen bei der Genauigkeit) auch in Dimension 4 möglich macht. Durch die Zerlegung der Zeitdiskretisierung in die Approximation der Menge der meßbaren Kontrollfunktionen und die numerische Approximation der Trajektorien konnte eine verfeinerte Abschätzung des Diskretisierungsfehlers gewonnen werden, die die Konstruktion der diskreten Feedbacks ermöglicht.

Für die *Stabilisierung* bilinearer Kontrollsystems konnten wir zeigen, daß die Stabilisierbarkeit durch diskrete Feedbacks äquivalent ist zur asymptotischen Kontrollierbarkeit mittels open-loop Kontrollen. Dieses Resultat konnte durch ein Linearisierungsresultat auch auf nichtlineare Kontrollsysteme an singulären Punkten verallgemeinert werden, wobei wir dabei das Konzept der exponentiellen Stabilität bzw. Kontrollierbarkeit verwendeten. Da die Lyapunov-Exponenten gerade exponentielle Stabilität messen, haben wir somit das maximal mögliche Resultat erhalten, das sich mit diesem Ansatz erzielen läßt. Darüberhinaus sind die stabilisierenden diskreten Feedbacks numerisch berechenbar, und wir konnten in diversen numerischen Beispielen die Stabilität nachweisen.

Literaturverzeichnis

[ACE91] L. Arnold, H. Crauel, and J.-P. Eckmann, editors. *Lyapunov Exponents.* Springer Verlag, Berlin, 1991.

[AW86] L. Arnold and V. Wihstutz, editors. *Lyapunov Exponents.* Springer Verlag, Berlin, 1986.

[Bar89] N.E. Barabanov. Method for the computation of the Lyapunov exponent of a differential inclusion. (English, Russian original). *Autom. Remote Control*, 4:475–479, 1989.

[CK93] F. Colonius and W. Kliemann. Maximal and minimal Lyapunov exponents of bilinear control systems. *J. Differ. Equations*, 101:232–275, 1993.

[CK96] F. Colonius and W. Kliemann. The Lyapunov spectrum of families of time varying matrices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1996. to appear.

[CK97] F. Colonius and W. Kliemann. *The Dynamics of Control.* Birkhäuser, 1997.

[Grü96a] L. Grüne. An adaptive grid scheme for the discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Numer. Math.*, 1996. To appear.

[Grü96b] L. Grüne. Discrete feedback stabilization of semilinear control systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1:207–224, 1996.

[Grü96c] L. Grüne. Numerical stabilization of bilinear control systems. *SIAM J. Control Optim.*, November 1996. To appear.

[Lya92] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion.* Comm. Soc. Math. Kharkow (in Russian), 1892. (reprinted in English, Taylor & Francis, London, 1992).

[Ose68] V. I. Oseledets. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.