

Poiseuille- und Quetschströmungen zwischen gewellten Platten

Nils Altmüller

Lehrstuhl für Technische Mechanik und Strömungsmechanik

SS 2007

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der schleichenden Quetschströmung zwischen gewellten Platten. Die Differentialgleichung wird mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie auf ein lineares Gleichungssystem transformiert. Durch Betrachtung der strömungsmechanischen Größen Druck und Wandschubspannung wird die Quetschströmung analysiert.

Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf dem Phänomen der Wirbelbildung sowie der Kraftberechnung. Es soll insbesondere der Einfluss der Bodenkonturen auf die oben genannten Größen untersucht werden.

Durch die Ähnlichkeit mit einem Teilproblem der Quetschströmung können wesentliche Resultate auf die Poiseuille-Strömung übertragen werden, die daher ebenfalls in dieser Arbeit betrachtet werden kann. Zum Schluss wird ein Vergleich mit einer rein numerischen Lösung vorgenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Das Strömungsproblem	4
1.1	Einführung	4
1.2	Die Quetschströmung	5
1.2.1	Ausgangsgleichungen	7
1.2.2	Randbedingungen	8
1.2.3	Zerlegung der Stromfunktion	10
1.2.4	Der ebene Boden	12
1.3	Die Poiseuille-Strömung	12
1.4	Komplexe Formulierung	14
2	Lösungen der Gleichungen	17
2.1	Fernfeldlösung	17
2.1.1	Aufstellen der Gleichungen	17
2.1.2	Fourierreihenentwicklungen	19
2.1.3	Reduzierung der Gleichungen	20
2.1.4	Bestimmung der Konstanten	21
2.1.5	Aufstellen des linearen Gleichungssystems	22
2.1.6	Bestimmung der weiteren Funktionen	24
2.1.7	Die harmonische Bodenkontur	25
2.1.8	Fehleranalyse	27
2.2	Nahfeldlösung	27
3	Wirbelbildung und Kraftbetrachtung	32
3.1	Die Wandschubspannung	32
3.2	Wirbelbildung	35
3.3	Druck und Kraftgleichungen	40
4	Vergleich mit anderen Methoden	44
5	Zusammenfassung und Ausblicke	47
A	Mathematische Ergänzungen	50
A.1	Herleitung der Bestimmungsgleichungen	50

A.1.1	Gleichungen für ψ_1 und ψ_2	51
A.2	Fernfeldgleichungen	52
A.2.1	Eliminieren der Funktion Q^φ	52
A.2.2	Das lineare Gleichungssystem	54
A.2.3	Berechnung der trigonometrischen Integrale	55
A.3	Herleitung der Druckgleichung	57

Kapitel 1

Das Strömungsproblem

1.1 Einführung

Die Strömungslehre befasst sich mit dem Verhalten von Fluiden. Ein Fluid ist Materie mit der Eigenschaft sich unter Einfluss von Scherkräften unbegrenzt zu verformen.

Zur Bestimmung der Strömungsgrößen stehen die Gleichungen der Kontinuumsmechanik zur Verfügung. Diese Gleichungen ergeben sich durch das Aufstellen der Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn ein Fluid einen linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Deformationstensor erfüllt. Derartige Fluide werden auch als Newtonsche Fluide bezeichnet. Viele in der Praxis auftretende Fluide können näherungsweise als Newtonsches Fluid angesehen werden.

Durch das Einsetzen dieses linearen Materialgesetzes in die Gleichungen der Kontinuumsmechanik entstehen die so genannten Navier-Stokes-Gleichungen. Diese Gleichungen spielen eine herausragende Rolle in der Strömungslehre, da sie eine Vielzahl von Strömungen richtig beschreiben.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn das Fluid als inkompressibel angenommen wird, d.h. dass die materielle Zeitableitung der Dichte verschwindet. (Das bedeutet nicht unbedingt, dass die Dichte im gesamten Fluid konstant ist.)

Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung (Erhaltungssatz der Masse) bilden ein System von vier nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die vier gesuchten Funktionen $\vec{v}(x, y, z, t)$ und $p(x, y, z, t)$. Hierbei ist \vec{v} das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld und p der Druck. Die notwendigen Randbedingungen erhält man, indem die Normal- und Tangentialgeschwindigkeiten an den Rändern vorgegeben werden. Diese ergeben sich z.B. durch Haftbedingungen oder die Undurchlässigkeit von festen Wänden.

Da die Navier-Stokes-Gleichungen nichtlinear sind, ist es in der Regel nicht möglich, exakte Lösungen anzugeben. Sie existieren meist nur, wenn die nichtlinearen Terme

verschwinden. Um Lösungen zu finden, werden häufig weitere Vereinfachungen vorgenommen.

Die wichtigste Kennzahl der Strömungsmechanik ist die sogenannte Reynoldszahl Re . Sie ist definiert durch das Verhältnis von Reibung zu Trägheit. Für die Grenzfälle $Re \rightarrow 0$ und $Re \rightarrow \infty$ lassen sich die Gleichungen stark vereinfachen.

Für $Re \rightarrow \infty$ gehen die Navier-Stokes-Gleichungen in die Euler Gleichung über. (Falls Grenzschichteffekte berücksichtigt werden, entstehen die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen)

In der vorliegenden Diplomarbeit wird der Grenzfall $Re \rightarrow 0$ betrachtet. Derartige Strömungen werden auch als schleichende Strömungen bezeichnet. Sie werden durch langsame Strömungen oder durch Strömungen mit hoher Zähigkeit verwirklicht. In diesem Fall entstehen aus den nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen die linearen Stokes-Gleichungen.

1.2 Die Quetschströmung

Unter einer Quetschströmung versteht man die Strömung eines Fluides, welches sich in einem vertikalen Spalt befindet, und durch die Bewegung der begrenzenden Wänden aufeinander zu verdrängt wird. Sie besitzt viele Anwendungen in der Technik und in der Theorie. Die Quetschströmung besitzt selbst für den Fall der ebene Platte keine exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung. In der Literatur sind daher zur näherungsweisen Berechnung häufig Störungsansätze zu finden. (z.B. in [6])

Die Strömung wird in dieser Arbeit als eben angenommen, d.h. es besteht keine y -Abhängigkeit (y steht senkrecht zur Zeichenebene) und das Geschwindigkeitsfeld in y -Richtung verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluss der gewellten Bodenkontur (siehe Abbildung 1.1) auf die strömungsmechanischen Größen der Quetschströmung betrachtet werden. Insbesondere soll der Einfluss der Geometrie auf die Wirbelbildung betrachtet werden. Je nach Anwendung können Wirbel erwünscht oder unerwünscht sein. Die hier betrachteten Bodenkonturen müssen gewisse Eigenschaften wie Symmetrie und Differenzierbarkeit erfüllen. Um die Lösungsansätze aus [1] anwenden zu können, muss die Kontur periodisch in x -Richtung verlaufen. Des Weiteren werden nur Konturen betrachtet, die sich als Funktion $b(x)$ darstellen lassen und mindestens einmal stetig differenzierbar sind. Auf überhängende Konturen wie in [9] dargestellt oder Konturen mit spitzen Ecken wird hier nicht eingegangen. Wenn weiterhin die Symmetriebedingung $b(x) = b(-x)$ erfüllt ist, lassen sich die späteren Gleichungen stark vereinfachen. Außerdem soll die folgende Mittelungseigenschaft gelten:

$$\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} b(x) dx = 0 \quad (1.1)$$

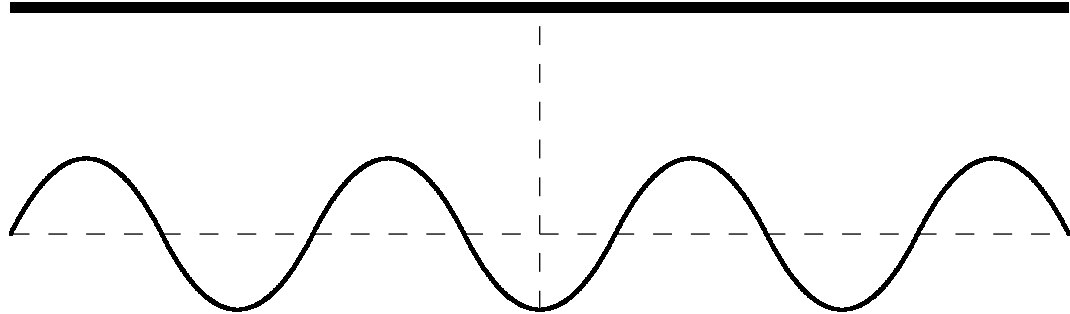


Abbildung 1.1: Das Strömungsproblem

(λ ist hierbei die Periodenlänge.) Es hat sich in [1] gezeigt, dass viele wichtige, repräsentative Bodenkonturen diese Bedingungen erfüllen. Eine Übersicht von allgemeineren Bodenkonturen findet man in [9].

Für die Sinkgeschwindigkeit der oberen Platte sind in der Literatur häufig zwei verschiedene Modelle zu finden. Bei dem einen wird die Geschwindigkeit als konstant angenommen, bei dem anderen Modell ist die Kraft konstant. In dieser Arbeit wird ausschließlich eine konstante Sinkgeschwindigkeit betrachtet.

Es wird nur der Fall untersucht, bei dem sich die Platte entgegen der z -Richtung bewegt. Ansonsten können durch den Unterdruck Kavitationsblasen entstehen.

Die Ausdehnung der Platten in z -Richtung wird ebenfalls als unendlich angenommen. Aus diesem Grund brauchen keine Ausflusseffekte an den Rändern berücksichtigt werden.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn die Höhe zunächst als konstant angenommen wird. Anstatt einer undurchlässigen Platte, die sich mit der Geschwindigkeit W nach unten bewegt, wird ein durchlässiges 'Sieb' betrachtet, das in der Höhe h mit der Geschwindigkeit W durchflossen wird. (Siehe Abbildung 1.2) Das vollständige Problem erhält man wieder, indem die Zeitabhängigkeit der Höhe

$$h(t) = h_0 - W \cdot t \quad (1.2)$$

eingesetzt wird und für alle Zeiten $t_0 \leq t < \frac{h_0}{w}$ das obige Strömungsproblem gelöst wird. Hier bezeichnet t_0 den Startzeitpunkt und $h_0 = h(t_0)$ die Anfangshöhe. Anfahrereffekte können mit dieser Methode nicht berücksichtigt werden.

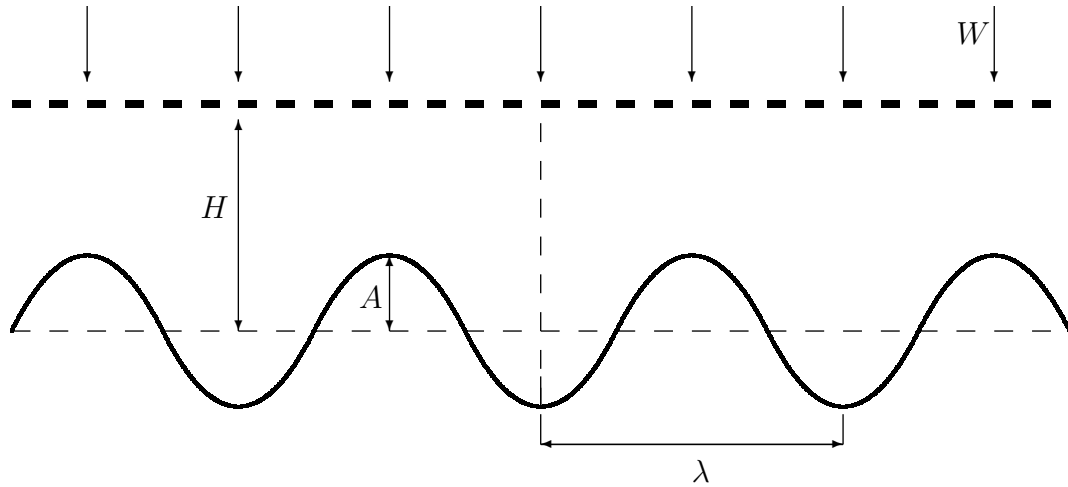


Abbildung 1.2: Alternative Betrachtungsweise

1.2.1 Ausgangsgleichungen

Die Ausgangsgleichungen für die folgenden Betrachtungen sind die ebenen Navier-Stokes-Gleichung sowie die Kontinuitätsgleichung. Diese lauten in dimensionsbehafteter Form:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla \tilde{p} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.4)$$

Zunächst werden die dimensionsbehafteten Größen entdimensioniert. Die dimensionsbehafteten Längen \tilde{x} und \tilde{z} werden durch die Periodenlänge entdimensioniert.

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} \tilde{x} \quad (1.5)$$

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} \tilde{z} \quad (1.6)$$

Die dimensionsbehafteten Geschwindigkeiten \tilde{u} und \tilde{w} werden durch die Sinkgeschwindigkeit W entdimensioniert.

$$u = \frac{1}{W} \tilde{u} \quad (1.7)$$

$$w = \frac{1}{W} \tilde{w} \quad (1.8)$$

Eine Abschätzung, warum die lokale Zeitableitung ebenfalls verschwindet, findet man in [6]. Der Einfluss der Schwerkraft kann wegen des geringen Höhenunterschie-

des vernachlässigt werden. Für den dimensionslosen Druck ergibt sich aus den anderen Größen die nachfolgende Darstellung:

$$p = \frac{\lambda}{2\pi\eta W} \tilde{p} \quad (1.9)$$

Als dimensionslose Geometrieparameter ergeben sich:

$$a = \frac{2\pi}{\lambda} A \quad (1.10)$$

$$h = \frac{2\pi}{\lambda} H \quad (1.11)$$

Hier ist a die Welligkeit und h der entdimensionierte mittlere Plattenabstand. Da bei schleichenden Strömungen der Einfluss der Trägheit gegenüber der Reibung zu vernachlässigen ist, verschwinden die Terme der linken Seite und es ergeben sich die Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nabla^2 u \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nabla^2 w \quad (1.13)$$

Bei ebenen Strömungen ist es immer möglich, eine so genannte Stromfunktion $\psi(x, z)$ einzuführen, die die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.14)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.15)$$

Aus physikalischer Sicht sind die Niveaulinien der Stromfunktion gerade die Stromlinien. (Stromlinien sind die Tangentialkurven des Geschwindigkeitsfeldes.)

Einsetzen der Stromfunktion in die Gleichungen (1.12) und (1.13) sowie Bildung der Rotation (d.h. $\frac{\partial}{\partial z}(1.12) - \frac{\partial}{\partial x}(1.13)$) liefert

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (1.16)$$

Hierbei handelt es sich um eine partielle, elliptische Differentialgleichung 4. Ordnung für die skalare Stromfunktion $\psi(x, z)$. Der Druck konnte also eliminiert werden.

1.2.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen für das Strömungsproblem ergeben sich zum einen aus den Haftbedingungen am Boden und zum anderen durch die Vorgabe der Geschwindigkeit am oberen Rand. Da die untere Platte eine feste Wand darstellt, kann sie nicht

vom Fluid durchdrungen werden. Des Weiteren haftet das Fluid an der Wand. Daher ergeben sich für die Bodenplatte die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{t} &= 0\end{aligned}\tag{1.17}$$

Hierbei ist \vec{t} der Tangentialvektor an der Bodenplatte sowie \vec{n} der Normalvektor. Für die Bodenkontur $b(x)$ lauten diese:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ b'(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -b'(x) \\ 1 \end{pmatrix}\tag{1.18}$$

Das Einsetzen der Stromfunktion für u und w in (1.17) liefert die Tangential- bzw. die Normalgleichung für die Bodenplatte:

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b'(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - b'(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0\tag{1.19}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b'(x) \\ 1 \end{pmatrix} = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot b'(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0\tag{1.20}$$

Für den oberen Rand muss ebenfalls die Haftbedingung aufgestellt werden. Bei der Normalkomponente ist zu beachten, dass die Strömungsgeschwindigkeit durch den oberen Rand festgelegt ist:

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0\tag{1.21}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=h} = -1\tag{1.22}$$

Die Gleichungen (1.20) und (1.22) sind offensichtlich integrierbar und können daher auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\psi(x, b(x)) = \psi_b = \text{const}\tag{1.23}$$

$$\psi(x, h) = x + \psi_c\tag{1.24}$$

Hierbei sind ψ_b und ψ_c die Integrationskonstanten. Da die Stromfunktion nur bis auf eine additive Konstante festgelegt ist, kann man $\psi_b = 0$ für die Stromfunktion entlang der Bodenkontur vorgeben. Dass $\psi_c = 0$ gelten muß, erkennt man bei Betrachtung der integralen Massenbilanz. Zunächst wird das Kontrollvolumen K wie in Abbildung 1.3 festgelegt. Dies geschieht, indem ein beliebiges $x = x_0$ zunächst fest gewählt wird. \vec{n} ist wieder der äußere Normalenvektor. Die integrale Massenbilanz lautet für ein inkompressibles Fluid:

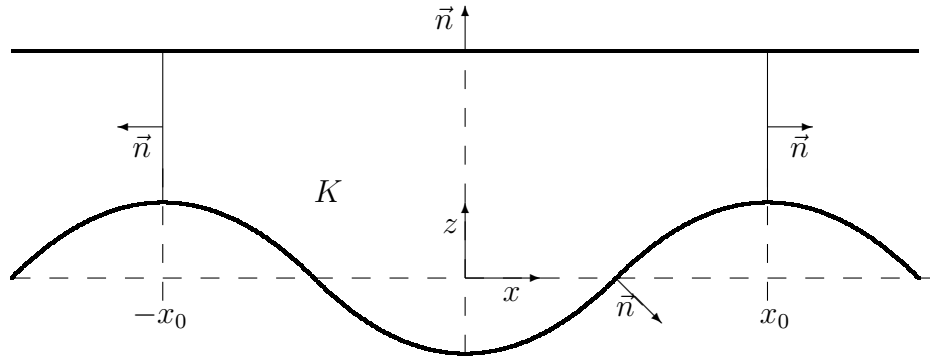


Abbildung 1.3: Das Kontrollvolumen

$$\int_{\partial K} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (1.25)$$

Unter der Berücksichtigung, dass $u(x, z) = -u(-x, z)$ gilt, kann der Ausfluss bei x_0 und $-x_0$ zusammengefasst werden. Wenn zusätzlich die Undurchlässigkeit der Bodenkontur und die konstanten Einströmgeschwindigkeit beachtet wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -2x_0 + 2 \int_{b(x_0)}^h \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{x=x_0} dz \\ = & -2x_0 + 2 \left(\psi(x_0, h) - \underbrace{\psi(x_0, b(x_0))}_{=0} \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow \psi(x_0, h) = x_0 \quad (1.27)$$

Da dies für jedes beliebige x_0 gilt, resultiert daraus, dass $\psi_c \equiv 0$ ist.

1.2.3 Zerlegung der Stromfunktion

Aus Gleichung (1.24) ist ersichtlich, dass die Stromfunktion nicht periodisch in x -Richtung sein kann. Dies ist jedoch notwendig, um die Lösungsansätze aus [1] übernehmen zu können. Daher ist es sinnvoll, die Stromfunktion in geeigneter Weise zu zerlegen. Bei Betrachtung von Gleichung (1.24) erscheint folgende Zerlegung der Stromfunktion sinnvoll:

$$\psi(x, z) = \psi_1(x, z) x + \psi_2(x, z) \quad (1.28)$$

Diese Zerlegung liegt auch bei Betrachtung der exakten Lösung des ungewellten Bodens nahe, da diese ja von der Form $\psi(x, z) = f(z)x$ ist.

Es erscheint zunächst so, als ob die Zerlegung das Problem unnötig vergrößere. Durch die Zerlegung entsteht jedoch auch eine zusätzliche Wahlfreiheit für die Randbedingungen. Diese kann dazu benutzt werden, die Teilprobleme ψ_1 und ψ_2 als periodisch in x -Richtung anzunehmen.

Durch das Einsetzen der Zerlegung in die Bi-Laplacegleichung (1.16) und den Randbedingungen (1.19),(1.21),(1.23) und (1.24) werden im Anhang A.1.1 die folgenden Gleichungen hergeleitet:

$$\Delta^2 \psi_1 = 0 \quad (1.29)$$

$$\psi_1(x, h) = 1 \quad (1.30)$$

$$\psi_1(x, b(x)) = 0 \quad (1.31)$$

$$\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - b'(x) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \quad (1.33)$$

$$\Delta^2 \psi_2 = -4 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi_1 \quad (1.34)$$

$$\psi_2(x, h) = 0 \quad (1.35)$$

$$\psi_2(x, b(x)) = 0 \quad (1.36)$$

$$\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - b'(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \quad (1.38)$$

Hierbei handelt es sich um ein System partieller Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen $\psi_1(x, z)$ und $\psi_2(x, z)$. Das System ist einseitig entkoppelt, d.h. die Funktion $\psi_1(x, z)$ ist unabhängig von $\psi_2(x, z)$ und kann isoliert betrachtet werden. Bei der Berechnung von $\psi_2(x, z)$ geht die vorher berechnete Funktion $\psi_1(x, z)$ als Inhomogenität ein.

Im Folgenden wird der Anteil ($\psi_1 x$) der Stromfunktion als "Fernfeldlösung" bezeichnet sowie ψ_2 als "Nahfeldlösung". Diese Bezeichnung erscheint sinnvoll, da der Einfluss von ψ_2 in der Umgebung des Staupunktes groß ist, während er für hinreichend große x zu vernachlässigen ist. Wo die einzelnen Einflussbereiche liegen, ist später gut aus den Stromlinienbildern zu erkennen und hängt von der Bodenkontur und der Plattenhöhe ab.

1.2.4 Der ebene Boden

Für den Spezialfall des ebenen Bodens, d.h. $b(x) \equiv 0$, lässt sich für das System (1.29)-(1.38) eine exakte Lösung angeben. In diesem Fall haben die Randbedingungen (1.30)-(1.33) die einfache Form:

$$\psi_1(x, h) = 1 \quad (1.39)$$

$$\psi_1(x, 0) = 0 \quad (1.40)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.41)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (1.42)$$

Da die x- Abhängigkeit nicht mehr explizit auftritt, wird ein Lösungsansatz gewählt, der nur von z abhängt. Es wird der einfachste polynomiale Ansatz gewählt, der die Bi-Laplace-Gleichung identisch erfüllt:

$$\psi_1(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \quad (1.43)$$

Aus den Gleichungen (1.40) sowie (1.41) ergibt sich, dass $c = 0$ und $d = 0$ ist. Aus (1.39) und (1.42) folgen die Gleichungen:

$$ah^3 + bh^2 = 1 \quad (1.44)$$

$$3ah^2 + 2bh = 0 \quad (1.45)$$

Hieraus lassen sich die verbleibenden Konstanten leicht bestimmen. Es ergibt sich für das ψ_1 :

$$\psi_1(z) = \frac{1}{h^3}(-2z^3 + 3hz^2) \quad (1.46)$$

Da ψ_1 nicht von x abhängt, verschwindet die Inhomogenität in (1.34). Dadurch, dass die Randbedingungen (1.35)-(1.38) ebenfalls verschwinden, muss $\psi_2 \equiv 0$ gelten. Für die Stromfunktion ψ ergibt sich die aus der Literatur bekannte Lösung:

$$\psi(x, z) = \frac{1}{h^3}(-2z^3 + 3hz^2)x \quad (1.47)$$

Diese Lösung ist auch die nullte Näherung für einen später verwendeten Störungsansatz über die Bodenwelligkeit.

1.3 Die Poiseuille-Strömung

Eine Strömung wird als Poiseuille-Strömung bezeichnet, wenn sie durch einen Druckgradienten angetrieben wird. Die Strömung ist stationär und sie besitzt für den ebenen Boden eine exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung.

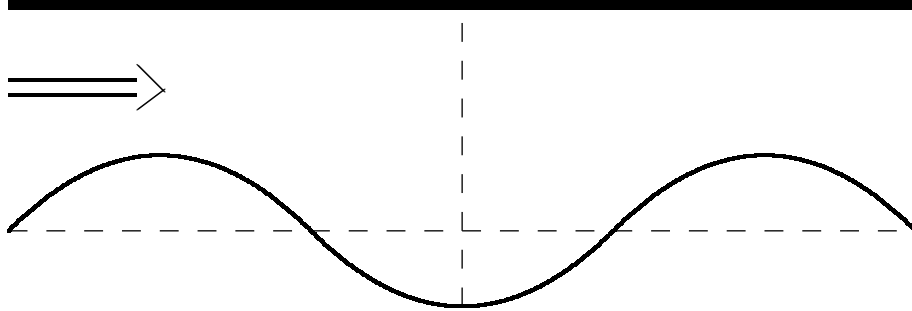


Abbildung 1.4: Die Poiseuille-Strömung

Auch hier soll wieder der Einfluss der Bodengeometrie auf das Strömungsverhalten einer schleichenden Strömung betrachtet werden. Die Bedingungen an die Bodengeometrie aus Kapitel 1.2 sollen auch hier gelten. Für die Realisierung kommen im wesentlichen zwei Modelle in Frage. Zunächst kann der Druckgradient vorgegeben werden. Der Volumenstrom \dot{Q} ergibt sich dann als Funktion des Druckgradienten. Dieses Modell wird in der Literatur vorwiegend verwendet. Die zweite Möglichkeit ist es, den Volumenstrom vorzugeben. In diesem Fall lässt sich dann daraus der Druckgradient berechnen. In dieser Arbeit wird ausschließlich die zweite Methode verwendet, da in diesem Fall die Ähnlichkeit zur Quetschströmung besonders deutlich wird.

Haftbedingungen:

Da auch hier die Haftbedingung gilt und die Bodenplatte undurchlässig ist, stimmen die Randbedingungen am Boden mit denen der Quetschströmung überein. Für die obere Platte muss die Durchflussbedingung (1.22) geändert werden, da bei der Poiseuille-Strömung die obere Platte undurchlässig und fest ist. Es gilt also:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=h} = 0 \quad (1.48)$$

Da die weiteren Haftbedingungen mit denen der Quetschströmung identisch sind, ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen:

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (1.49)$$

$$\psi(x, h) = \psi_s \quad (1.50)$$

$$\psi(x, b(x)) = 0 \quad (1.51)$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - b'(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0 \quad (1.52)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (1.53)$$

Hierbei wurde bereits der Wert der Stromlinie auf der Bodenkontur identisch Null gesetzt. Die Konstante ψ_s entsteht, da (1.48) integrierbar ist. Die Bedeutung von ψ_s wird bei der folgenden Betrachtung klar: Sei \dot{Q} wieder der Volumenstrom (pro Tiefeneinheit). Dieser lässt sich gemäß [1], wie folgt, berechnen:

$$\dot{Q} = \int_{b(x)}^h u(x, z) dz = \int_{b(x)}^h \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \psi(x, h) - \psi(x, b(x)) = \psi_s \quad (1.54)$$

Die Integrationskonstante ψ_s lässt sich also als ebener Volumenstrom interpretieren. Dieser ist nach obiger Annahme gegeben.

Bei der Betrachtung der Gleichungen (1.49)-(1.53) fällt auf, dass sie mit den Gleichungen (1.29)-(1.33) zur Bestimmung des ψ_1 der Fernfeldlösung nahezu identisch sind: Anstelle der Konstanten ψ_s in (1.50) steht in Gleichung (1.30) die Konstante 1. Dieser geringe Unterschied führt dazu, dass sich die Lösung von ψ_1 fast exakt für die Poiseuille-Strömung übernehmen lässt.

1.4 Komplexe Formulierung

In [1] wird die zweidimensionale Bi-Laplace Gleichung mit Hilfe der Funktionentheorie gelöst. Hierzu wurden zuerst die Koordinaten x und z zu einer komplexen Koordinate zusammengefasst

$$\xi := \frac{1}{2}(z + ix) \quad (1.55)$$

Die Bodenkurve bzw. die Darstellung der oberen Platte lautet in dieser Formulierung

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \rightarrow \frac{1}{2}(b(x) + ix) \quad (1.56)$$

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \rightarrow \frac{1}{2}(h + ix) \quad (1.57)$$

In [1] wird schrittweise eine Lösung für die Bi-Laplace-Gleichung hergeleitet. Hierbei wurde ausgenutzt, dass sich die Bi-Laplace-Gleichung in eine Laplace-Gleichung und eine Poisson-Gleichung aufspalten lässt. Unter der Voraussetzung, dass die Stromfunktion reell und periodisch in x -Richtung ist, lässt sich die folgende, allgemeine Lösung konstruieren:

$$\psi = Bz^2 + \frac{C}{3}z^3 + 2\Re(R(\xi) + zQ(\xi)) \quad (1.58)$$

Hierbei sind $Q(\xi)$ und $R(\xi)$ zwei in x -Richtung periodische, holomorphe Funktionen sowie B und C zwei Integrationskonstanten. Da $Q(\xi)$ eine holomorphe Funktion ist,

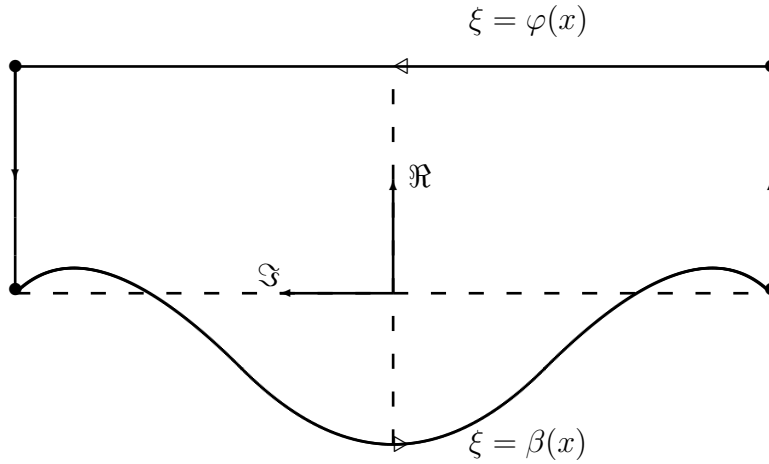


Abbildung 1.5: Integrationsweg γ

gilt für jeden geschlossenen Weg γ die Cauchysche Integralformel (siehe z.B. [5]) :

$$Q(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' \quad (1.59)$$

$Q(\xi)$ kann also für jeden Punkt ξ , der innerhalb von γ liegt, durch die Randwerte $Q(\gamma)$ berechnet werden. Im folgenden wird γ als der Rand des Strömungsgebietes gewählt. (Abbildung 1.5)

In [1] und [9] wird gezeigt, dass sich (1.59) in diesem Fall mit der folgenden Formel berechnen lässt:

$$Q(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} [\coth(\varphi(x) - \xi)\varphi'(x)Q^{\varphi}(x) - \coth(\beta(x) - \xi)\beta'(x)Q^{\beta}(x)]dx \quad (1.60)$$

Hierbei wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} Q^{\beta}(x) &:= Q(\beta(x)), & Q^{\varphi}(x) &:= Q(\varphi(x)) \\ R^{\beta}(x) &:= R(\beta(x)), & R^{\varphi}(x) &:= R(\varphi(x)) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Diese Funktionen sind ebenfalls 2π -periodisch, da Q und R periodisch sind. Die Ableitungen lassen sich mit der Kettenregel bestimmen:

$$\frac{d}{dx}Q^{\beta} = Q' \Big|_{\xi=\beta(x)}\beta'(x), \quad \frac{d}{dx}Q^{\varphi} = Q' \Big|_{\xi=\varphi(x)}\varphi'(x) \quad (1.62)$$

$$\frac{d}{dx}R^{\beta} = R' \Big|_{\xi=\beta(x)}\beta'(x), \quad \frac{d}{dx}R^{\varphi} = R' \Big|_{\xi=\varphi(x)}\varphi'(x) \quad (1.63)$$

Im Folgenden werden mit dem Cauchyschen Integralsatz Holomorphiebedingungen

für die Funktion $Q(\xi)$ hergeleitet. Eine notwendige Bedingung für die Holomorphie von $Q(\xi)$ ist:

$$\oint_{\gamma} V_n(\xi)Q(\xi)d\xi = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.64)$$

Hierbei sind die $V_n(\xi)$ eine Klasse unabhängiger, 2π periodischer, holomorpher Testfunktionen. Als Testfunktionen werden wie in [1] die Exponentialfunktionen $V_n(\xi) = \exp(-2n\xi)$ gewählt. Es wird wieder der Weg γ aus Abbildung (1.5) benutzt. Da sich die Seitenflanken wegen der Periodizität und des entgegengesetzten Umlaufsinnnes wegheben, bleiben nur der untere und der obere Rand erhalten:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x))Q^{\varphi}(x)\varphi'(x)dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x))Q^{\beta}(x)\beta'(x)dx = 0 \quad (1.65)$$

Das heißt, die Werte von $Q(\xi)$ auf dem oberen und dem unteren Rand sind nicht unabhängig, sondern hängen durch (1.65) voneinander ab. Es genügt also $Q(\xi)$ entlang einer der beiden Konturen zu kennen.

Alle bisherigen Betrachtungen gelten natürlich ebenfalls für die zweite holomorphe Funktion $R(\xi)$.

Kapitel 2

Lösungen der Gleichungen

In diesem Kapitel werden die Nahfeld- und Fernfeldgleichungen gelöst. Dazu wird die allgemeine Lösung aus Abschnitt 1.4 in die entsprechenden Randbedingungen eingesetzt. Zusammen mit den Holomorphiebedingungen stehen Gleichungen zur Verfügung, die es erlauben die Unbekannten Funktionen sukzessive zu eliminieren, bis schließlich eine Unbekannte Funktion übrig bleibt. Diese wird dann in eine Fourierreihe entwickelt. Die Fourierkoeffizienten können schließlich aus den abzählbar unendlich vielen Integralgleichungen bestimmt werden.

Für die Nahfeldgleichung muss zunächst eine allgemeine Lösung hergeleitet werden, die der inhomogenen Bi-Laplace-Gleichung genügt.

2.1 Fernfeldlösung

2.1.1 Aufstellen der Gleichungen

In diesem Abschnitt soll die Lösung für ψ_1 der Fernfeldlösung berechnet werden. Es muss also die homogene Bi-Laplace-Gleichung (1.29) mit den zugehörigen Randbedingungen (1.30)-(1.33) gelöst werden. Im Abschnitt 1.4 wurde eine allgemeine Lösung für die homogene Bi-Laplace-Gleichung angegeben. Mit der obigen Notation lautet diese:

$$\psi_1 = Bz^2 + \frac{C}{3}z^3 + 2\Re(R_1(\xi) + zQ_1(\xi)) \quad (2.1)$$

Zur Bestimmung der Konstanten B und C sowie der holomorphen Funktionen $Q_1(\xi)$ und $R_1(\xi)$ stehen die Randbedingungen (1.30)-(1.33) sowie die Holomorphiebedingungen (1.65) zur Verfügung. In die Randbedingungen (1.30) und (1.31) kann die Lösung (2.1) direkt eingesetzt werden. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$Bh^2 + \frac{C}{3}h^3 + 2\Re(R_1^\varphi(x) + hQ_1^\varphi(x)) = 1 \quad (2.2)$$

$$Bb(x)^2 + \frac{C}{3}b(x)^3 + 2\Re(R_1^\beta(x) + b(x)Q_1^\beta(x)) = 0 \quad (2.3)$$

Diese Gleichungen haben eine Sonderstellung, denn sie werden für die Bestimmung der Konstanten benötigt. Für die späteren Gleichungen werden die folgenden Identitäten benötigt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Re Q(\xi) = -\frac{1}{2} \Im Q'(\xi) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Im Q(\xi) = \frac{1}{2} \Re Q'(\xi) \quad (2.5)$$

Unter Berücksichtigung der oberen Gleichungen kann die Randbedingung (1.32) geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - b'(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=b(x)} \\ &= 2Bb(x) + Cb(x)^2 + 2 \frac{d}{dx} \Im R_1^\beta(x) + 2b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) + 2\Re Q_1^\beta(x) \quad (2.6) \\ &= 2Bb(x) + Cb(x)^2 + 2 \frac{d}{dx} \Im R_1^\beta(x) + 2 \frac{d}{dx} (b(x) \Im Q_1^\beta(x)) - 2b'(x) \Im Q_1^\beta(x) + 2\Re Q_1^\beta(x) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wurden die Gleichungen (1.62) und (1.63) für die Ableitungen von $R_1^\beta(x)$ und $Q_1^\beta(x)$ benutzt. (2.6) und die differentielle Form von (2.3) können als Imaginär- bzw. Realteil der folgenden komplexen Gleichung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (R_1^\beta(x) + b(x)Q_1^\beta(x) + \frac{B}{2}b(x)^2 + \frac{C}{6}b(x)^3) \\ &+ i(\Re Q_1^\beta(x) - b'(x)\Im Q_1^\beta(x) + Bb(x) + \frac{C}{2}b(x)^2) = 0 \quad (2.7) \end{aligned}$$

Analog dazu ergibt sich aus (1.32) die folgende komplexe Gleichung:

$$\frac{d}{dx} (R_1^\varphi(x) + hQ_1^\varphi(x)) + i(\Re Q_1^\varphi(x) + Bh + \frac{C}{2}h^2) = 0 \quad (2.8)$$

Die Holomorphiebedingungen für $Q_1(\xi)$ und $R_1(\xi)$ lauten nach Kapitel 1.4 :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x)) R_1^\varphi(x) \varphi'(x) dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) R_1^\beta(x) \beta'(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x)) Q_1^\varphi(x) \varphi'(x) dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) Q_1^\beta(x) \beta'(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

Die Gleichungen (2.9) und (2.10) müssen für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein. Es handelt sich hierbei um ein System von abzählbar unendlich vielen Integralidentitäten.

2.1.2 Fourierreihenentwicklungen

Um zu erkennen von welcher Parität die holomorphen Funktionen sind, muss die Symmetrie der Stromfunktion betrachtet werden:

$$\psi(x, z) = -\psi(-x, z) \quad (2.11)$$

Wie sich diese Symmetrie auf die Funktionen $\psi_1(x, z)$ und $\psi_2(x, z)$ auswirkt, zeigt die Gleichung:

$$\psi_1(x, z) \cdot x + \psi_2(x, z) = \psi(x, z) = -\psi(-x, z) = \psi_1(-x, z) \cdot x - \psi_2(-x, z) \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1(x, z) = \psi_1(-x, z) \quad (2.13)$$

$$\psi_2(x, z) = -\psi_2(-x, z) \quad (2.14)$$

Die Funktion ψ_1 muss demnach von gerader Parität sein, während ψ_2 eine ungerade Funktion darstellt.

Da die Funktionen $Q_1^\varphi(x)$, $Q_1^\beta(x)$, $R_1^\varphi(x)$ und $R_1^\beta(x)$ periodisch sind, können sie in Fourierreihen entwickelt werden. Die Parität von ψ_1 überträgt sich auf die holomorphen Funktionen. Daher folgt, dass die Funktionen $\Re Q_1(\xi)$ und $\Re R_1(\xi)$ von gerader Parität sein müssen. Durch Differenzieren wird ersichtlich, dass $\Im Q_1(\xi)$ und $\Im R_1(\xi)$ ungerade Funktionen sind. (Nach [12] ist die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion).

Da die Imaginärteile von $R_1(\xi)$ und $Q_1(\xi)$ in der Stromfunktion nicht auftreten, sind sie nur bis auf eine Konstante durch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen bestimmt. Mit dieser Wahlfreiheit kann man die imaginäre Konstante der Fourierentwicklung gleich 0 setzen. Somit entsteht für die Fourierreihe von $Q_1^\beta(x)$ die folgende Darstellung:

$$Q_1^\beta(x) = q_0^\beta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^\beta \cos(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m^\beta \sin(mx) \quad (2.15)$$

Für die im Folgenden wichtige Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ ergibt sich daher die Fourierreihe:

$$\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \quad (2.16)$$

Für die weiteren Funktionen $Q_1^\varphi(x)$, $R_1^\varphi(x)$ und $R_1^\beta(x)$ werden die Reihenentwicklungen analog zu $Q_1^\beta(x)$ eingeführt.

2.1.3 Reduzierung der Gleichungen

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Gleichungen vereinfacht, indem die Funktionen sukzessive durch einander ersetzt werden. Es muss hierzu eine Fallunterscheidung zwischen $n = 0$ und $n \neq 0$ vorgenommen werden. Falls $n \neq 0$ können die Gleichungen (2.9) und (2.10) partiell integriert werden. Die Randterme verschwinden aus Periodizitätsgründen. Es ergeben sich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x)) \frac{d}{dx} R_1^\varphi(x) dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \frac{d}{dx} R_1^\beta(x) dx = 0 \quad (2.17)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) dx = 0 \quad (2.18)$$

Die Gleichungen (2.7) bzw. (2.8) können nach $\frac{d}{dx} R_1^\beta(x)$ bzw. $\frac{d}{dx} R_1^\varphi(x)$ aufgelöst werden:

$$\frac{d}{dx} R_1^\beta(x) = -b(x) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - (\Re Q_1^\beta(x) + Bb(x) + \frac{C}{2} b(x)^2) 2\beta'(x) \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dx} R_1^\varphi(x) = -h \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) - i (\Re Q_1^\varphi(x) + Bh + \frac{C}{2} h^2) \quad (2.20)$$

Die Gleichungen (2.19) und (2.20) können nun in (2.17) eingesetzt werden. Es entsteht eine Gleichung, die nur noch von $Q_1^\varphi(x)$ und $Q_1^\beta(x)$ (bzw. von deren Ableitungen!) abhängen:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi(x)) \left[-h \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) - (\Re Q_1^\varphi(x) + Bh + \frac{C}{2} h^2) i \right] \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \left[-b(x) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - (\Re Q_1^\beta(x) + Bb(x) + \frac{C}{2} b(x)^2) 2\beta' \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Im Anhang A.2.1 wird gezeigt, dass die verbleibende Holomorphie-Bedingung (2.18) dazu verwendet werden kann, auch die Funktion $Q_1^\varphi(x)$ aus der Gleichung (2.21) zu eliminieren, so dass als einzige unbekannte Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ verbleibt:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2n} \exp(-2nh) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\exp(2n\beta(x))} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} dx \quad (2.22) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \left[\frac{iB}{n} + \frac{iC}{n} \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) + (h - b(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} \right] dx \end{aligned}$$

Die abzählbar unendlichen vielen Integralidentitäten dienen nun dazu, die Fourierkoeffizienten der Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ zu berechnen.

2.1.4 Bestimmung der Konstanten

In diesem Teil werden die Konstanten C und B bestimmt. (Im Gegensatz zur Filmströmung über die geneigte Platte ist es hier nicht möglich, die Konstanten B und C vom ebenen Boden zu übernehmen. Dies würde zu Widersprüchen in den Gleichungen führen.)

Zur vereinfachenden Darstellung der Gleichungen wird für das Periodenmittel die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\langle \cdot \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cdot dx \quad (2.23)$$

Zunächst werden die Holomorphiebedingungen (2.9) und (2.10) für den bisher ausgeschlossenen Fall $n = 0$ behandelt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} R_1^\varphi(x) \cdot i dx - \int_{-\pi}^{+\pi} R_1^\beta(x)(b'(x) + i)dx = 0 \quad (2.24)$$

Da $\Im \langle R_1^\varphi(x) \rangle$ und $\Im \langle R_1^\beta(x) \rangle$ in 2.1.2 identisch Null gesetzt werden, liefert der Realteil von (2.24) keine neuen Gleichungen.

Nun wird der Imaginärteil betrachtet:

$$\langle \Re R_1^\varphi(x) \rangle = \langle \Re R_1^\beta(x) \rangle - \langle b(x) \Im \frac{d}{dx} R_1^\beta(x) \rangle \quad (2.25)$$

Der letzte Term wurde hierbei einmal partiell integriert. Für den Imaginärteil von (2.10) bei $n = 0$ folgt analog:

$$\langle \Re Q_1^\varphi(x) \rangle = \langle \Re Q_1^\beta(x) \rangle - \langle b(x) \Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \rangle \quad (2.26)$$

Als Nächstes wird das Periodenmittel $\langle \cdot \rangle$ des Imaginärteils der Gleichung (2.19) gebildet. (Der Realteil führt zu keinen neuen Gleichungen!)

$$\langle \Im \frac{d}{dx} R_1^\beta(x) \rangle = -\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - (\langle \Re Q_1^\beta(x) \rangle + B \langle b(x) \rangle + \frac{C}{2} \langle b(x)^2 \rangle) \quad (2.27)$$

$\langle b(x) \rangle$ verschwindet wegen der Mittelungsbedingung aus Abschnitt 1.2. Daraus ergibt sich:

$$\Re \langle Q_1^\beta(x) \rangle = -\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - \frac{C}{2} \langle b(x)^2 \rangle \quad (2.28)$$

Bei der analogen Betrachtung des Imaginärteils von (2.20) folgt:

$$B = -\frac{1}{2h} [Ch^2 + 2\Re Q_1^\varphi(x)] \quad (2.29)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.26) und (2.28) lässt sich die Konstante B auf die Form

$$B = -\frac{1}{2h} [C(h^2 - \langle b^2(x) \rangle) - 4\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle] \quad (2.30)$$

bringen. Jetzt wird das Periodenmittel über die noch nicht benutzte Gleichung (2.3) gebildet und nach $\Re\langle R_1^\beta(x) \rangle$ umgestellt:

$$2\Re\langle R_1^\beta(x) \rangle = -2\Re\langle b(x)Q_1^\beta(x) \rangle - B\langle b^2(x) \rangle - \frac{C}{3}\langle b^3(x) \rangle \quad (2.31)$$

In Gleichung (2.2) werden nun die Identitäten (2.25) und (2.26) eingesetzt:

$$\begin{aligned} Bh^2 + \frac{C}{3}h^3 - 1 + 2\Re\langle R_1^\beta(x) \rangle - 2\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im R_1^\beta(x) \rangle \\ - 4h\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - Ch\langle b^2(x) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Im Anschluss daran wird der Imaginärteil von (2.19) in die obige Gleichung eingesetzt. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.30) und (2.28) ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\frac{C}{6}h^3 + \frac{C}{2}\langle b^2(x) \rangle h - 1 - B\langle b^2(x) \rangle - \frac{C}{3}\langle b^3(x) \rangle - 2\langle b(x) \Re Q_1^\beta(x) \rangle \\ - 2\langle b(x) \cdot (-b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) - \Re Q_1^\beta(x) - Bb(x) - \frac{C}{2}b^2(x)) \rangle \\ + 2h\langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - Ch\langle b^2(x) \rangle - 2h\langle b(x) \Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nach einigen elementaren Umformungen sowie erneutes Ausnutzen der Gleichung (2.30) kann die Konstante C wie folgt geschrieben werden:

$$C = \frac{h + 2(h^2 - \langle b^2 \rangle) \langle b \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - 2h \langle b^2 \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle}{-\frac{h^4}{6} - h^2 \langle b^2 \rangle + \frac{2}{3}h \langle b^3 \rangle + \frac{1}{2} \langle b^2 \rangle^2} \quad (2.34)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die Konstante für den ebenen Boden ($b(x) \equiv 0$) $C = -\frac{6}{h^3}$ ergibt. Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Abschnitt 1.2.4 überein. Die Konstante B lässt sich nun aus (2.30) berechnen.

2.1.5 Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Mit der Gleichung (2.21) sowie den Konstanten (2.34) und (2.30) stehen nun die Gleichungen für die Berechnung von $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ zur Verfügung. Sie lauten:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2n} \exp(-2nh) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d}{dx} \overline{\exp(2n\beta(x)) Q_1^\beta(x)} dx \\ = \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \left[\frac{iB}{n} + \frac{iC}{n} \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) + (h - b(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} \right] dx \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit den Konstanten

$$C = \frac{1}{\alpha} (h + 2\delta \langle b(x) \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle - 2h \langle b(x)^2 \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle) \quad (2.36)$$

$$B = \gamma (1 - 2 \langle b(x)^2 \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle) + \rho \langle b \frac{d}{dx} \Im Q_1^\beta(x) \rangle \quad (2.37)$$

Hierbei wurden zur Übersichtlichkeit die folgenden Konstanten eingeführt:

$$\alpha = -\frac{1}{6}h^4 - h^2\langle b^2 \rangle + \frac{2}{3}h\langle b^3 \rangle + \frac{1}{2}\langle b^2 \rangle^2 \quad (2.38)$$

$$\delta = (h^2 - \langle b^2 \rangle) \quad (2.39)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}\frac{\delta}{\alpha} \quad (2.40)$$

$$\rho = \frac{1}{h}\left[-\frac{\delta^2}{\alpha} + 2\right] \quad (2.41)$$

Für $\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x)$ wird die entsprechende Fourierreihe (2.76) eingesetzt.

$$\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \quad (2.42)$$

Nun wird die Fourierreihe in die Gleichungen (2.35)-(2.37) eingefügt. Die Exponentialfunktionen aus Gleichung (2.35) lassen sich mit Hilfe der Eulerschen Formel umschreiben:

$$\exp(-n(b(x) + ix)) = \exp(-nb(x)) \cdot (\cos(nx) - i \sin(nx)) \quad (2.43)$$

Nach dem Einsetzen der Fourierreihe sowie dem Ausmultiplizieren der Terme entstehen Produkte von trigonometrischen Funktionen. Wie in A.2.1 gezeigt wird, ergeben sich für den Realteil der Gleichung (2.35) Terme der folgenden Form:

$$\sin(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{1}{2}(\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) \quad (2.44)$$

Für den Imaginärteil entstehen die Formeln:

$$\sin(nx) \cdot \sin(mx) = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \quad (2.45)$$

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) \quad (2.46)$$

Die Gleichungen (2.44)-(2.46) finden sich z.B. in [4].

Da das Integral über eine ungerade Funktion verschwindet, ist der Realteil von Gleichung (2.35) identisch erfüllt und braucht nicht weiter betrachtet zu werden. Für den Imaginärteil ergibt sich im Anhang A.2.2 die Darstellung:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[F_{n,m}^- + \frac{E_{-n,n-m}^0 - E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} \right] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[F_{n,m}^+ - \frac{E_{-n,n-m}^0 + E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} \right] \\ & + \frac{E_{n,m}^0}{n} \left[(\rho b_{1,m} - 2\gamma b_{2,m}) + \frac{1}{n} \left(\frac{2\delta}{\alpha} b_{1,m} - \frac{2h}{\alpha} b_{2,m} \right) \right] + \frac{1}{n} E_{n,n}^1 \left(\frac{2\delta}{\alpha} b_{1,m} - \frac{2h}{\alpha} b_{2,m} \right) \\ & = \frac{1}{n} E_{n,n}^0 \left[2\gamma + \frac{2h}{\alpha n} \right] + E_{n,n}^1 \frac{2h}{\alpha n} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Hierbei wurden die schon in [7] verwendeten Abkürzungen benutzt:

$$E_{n,k}^p := \int_{-\pi}^{+\pi} b(x)^p \exp(-n b(x)) \cos(kx) dx \quad (2.48)$$

$$F_{n,m}^{\pm} := \left(h \pm \frac{1}{2n}\right) (E_{n,n-m}^0 \pm E_{n,n+m}^0) - (E_{n,n-m}^1 \pm E_{n,n+m}^1) \quad (2.49)$$

$$b_{p,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} b(x)^p \cdot \cos(mx) dx \quad (2.50)$$

Da (2.47) für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten muss, handelt es sich hierbei um ein abzählbar unendliches lineares Gleichungssystem für die Unbekannten A_m und B_m , $m \in \mathbb{N}$. Um das lineare Gleichungssystem mit dem Computeralgebrasystem Mathematica [16] lösen zu können, wird die Fourierreihe nach endlich vielen Termen abgebrochen. Als Gleichungen stehen (2.47) mit $n \in \{-N, \dots, -1, 1, \dots, N\}$ zur Verfügung.

Obwohl das lineare Gleichungssystem sowohl für $n > 0$ als auch für $n < 0$ gilt, sollte bei der realen Implementierung beachtet werden, dass es für $n < 0$ zu Produkten von sehr kleinen und sehr großen Zahlen kommt. Dies führt leicht zu großen numerischen Fehlern. Um diese zu verhindern, sollte die Gleichung für $n < 0$ mit $(2n \exp(2nh))$ multipliziert werden. Wird dies nicht gemacht, können schon geringe Plattenabstände oder moderate Modenzahl zu Problemen führen.

Die Gleichung (2.47) enthält alle notwendigen Informationen zur Berechnung von $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$.

2.1.6 Bestimmung der weiteren Funktionen

Nachdem im vorigen Abschnitt die Fourierkoeffizienten für die Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta$ berechnet wurden, können hieraus nun die Fourierkoeffizienten der anderen Funktionen bestimmt werden.

Die Koeffizienten für $Q_1^\beta(x)$ erhält man direkt durch Integration der Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$. (Die Vertauschbarkeit von Integration und Reihe sind nach [12] erlaubt. Da die Reihe nach endlich vielen Termen abgebrochen wird, entstehen ohnehin keine Probleme.)

Da

$$\langle Q_1^\beta(x) \rangle = \langle q_0^\beta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^\beta \cos(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m^\beta \sin(mx) \rangle = q_0^\beta \quad (2.51)$$

gilt, kann die Konstante q_0^β direkt aus Gleichung (2.28) bestimmt werden. (Die Integrale müssen in der Regel numerisch berechnet werden. Für den später betrachteten Spezialfall der harmonischen Bodenkontur lassen sie sich exakt bestimmen.)

Nun wird die Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x)$ bestimmt. Durch das Einsetzen der Reihenentwicklungen von $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ und $\frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x)$ in die integrierte Holomorphiebedingung (2.18) und nach Vereinfachungen mit Hilfe der Eulerschen Formel, entsteht ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Fourierkoeffizienten. Die Funktion $\frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)$ geht als Inhomogenität in das Gleichungssystem ein. (Tatsächlich genügt es N-mal ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten zu lösen.)

$Q_1^\varphi(x)$ lässt sich wieder durch Integration von $\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x)$ ermitteln. Die Konstante q_0^φ ergibt sich direkt aus Gleichung (2.26).

Die Funktion $R_1^\varphi(x)$ kann aus Gleichung (2.20) gewonnen werden. Hierzu werden die schon bekannten Reihen von $\frac{d}{dx}Q_1^\varphi$ und Q_1^φ in die Gleichung eingesetzt. Ein direkter Koeffizientenvergleich liefert die gesuchten Fourierkoeffizienten für $R_1^\varphi(x)$. $\frac{d}{dx}R_1^\beta(x)$ lässt sich nicht ohne weiteres direkt aus der Gleichung (2.19) bestimmen, da es zu Produkten der Fourierreihen mit der Bodenfunktion kommt. Für spezielle Bodenkonturen, (wie z.B. der harmonische Boden), lassen sich die Fourierkoeffizienten mit Hilfe den für Fourierreihen gültigen Faltungsformeln exakt berechnen. Im Allgemeinen müssen die Fourierkoeffizienten jedoch numerisch berechnet werden. Alternativ hätte $\frac{d}{dx}R_1^\beta(x)$ auch aus der Holomorphiebedingung (2.17) berechnet werden können. Aus numerischer Sicht ist das obige Vorgehen jedoch sinnvoller. Die verbleibenden Konstanten r_0^β und r_0^φ ergeben sich aus Gleichung (2.31) bzw. aus Gleichung (2.25).

Nachdem sämtliche Randwerte berechnet wurden, können nun die inneren Punkte mit Hilfe der Cauchy-Integrale (1.60) berechnet werden. Es wurde zwar eine Aufteilung des komplexen Integrals in zwei reelle Integrale vorgenommen; dies brachte jedoch keinen Zeitgewinn bei der Implementierung, da Mathematica ohnehin komplex rechnen kann.

Nachdem nun die holomorphen Funktionen $Q(\xi)$ und $R(\xi)$ berechnet wurden, ist ψ_1 vollständig bestimmt.

2.1.7 Die harmonische Bodenkontur

Die Gleichungen (2.47) aus Abschnitt 2.1.5 gelten für jede beliebige Bodenkontur $b(x)$, die die Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2 erfüllt. Die Integrale (2.48) und (2.50) sind jedoch in der Regel nicht exakt auswertbar. Bei der numerischen Berechnung der Integrale mit dem hier verwendeten Computeralgebrasystem Mathematica kann es zu erheblichen numerischen Fehlern kommen. Eine Alternative besteht darin, die Bodenkontur so zu wählen, dass eine exakte Auswertung möglich ist. Diese Methode wurde zum Beispiel mit einer logarithmischen Bodenkontur in [9] benutzt.

Hier soll exemplarisch die harmonische Bodenkontur $b(x) = -a \cos(x)$ näher betrachtet werden.

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die folgende Reihendarstellung:

$$\exp(-nb(x)) = \exp(na \cos(x)) = I_0(na) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \cos(lx) \quad (2.52)$$

Hierbei sind die $I_k(x)$ die modifizierten Bessel-Funktionen. Die Reihe findet man z.B. in [3]. Wird diese Darstellung in (2.48) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 E_{n,k}^p &= \int_{-\pi}^{+\pi} (-a \cos(x))^p (I_0(na) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \cos(lx)) \cos(kx) dx \\
 &= (-a)^p I_0(na) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)^p \cos(kx) dx \\
 &+ 2(-a)^p \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)^p \cos(lx) \cos(kx) dx
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Da in Gleichung (2.47) lediglich die Fälle $E_{n,k}^0$ und $E_{n,k}^1$ auftreten, können die Integrale in (2.53) explizit angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 E_{n,k}^0 &= 2\pi I_0(na) \delta_{k,0} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \pi \delta_{l,|k|} \\
 &= 2\pi I_{|k|}(na)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Hierbei wurde die nachfolgende Gleichung aus [4] verwendet (Es gilt $l > 0$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx) \cos(kx) dx = \pi \delta_{l,|k|} \tag{2.55}$$

Für $E_{n,k}^1$ wird das Integral über das Produkt der drei Cosinusfunktionen benötigt. Die Herleitung für die allgemeine Formel befindet sich im Anhang A.3. Es ergibt sich die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 E_{n,k}^1 &= -a I_0(na) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x) \cos(kx) \\
 &\quad - 2a \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x) \cos(lx) \cos(kx) dx \\
 &= -a I_0(na) \cdot \pi \delta_{1,|k|} \\
 &\quad - 2a \sum_{l=1}^{\infty} I_l(na) \left(\frac{\pi}{2} \delta_{1,|l-|k||} + \frac{\pi}{2} \delta_{1,l} \delta_{k,0} \right) \\
 &= -a\pi (I_{|k|+1}(na) + I_{|k|-1}(na))
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Die Integrale aus (2.50) vereinfachen sich bei der harmonischen Bodenkontur durch Anwenden der Gleichung (2.55) zu:

$$b_{1,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} -a \cos(x) \cdot \cos(mx) = -\frac{a}{\pi} \delta_{1,m} \cdot \pi = -a \delta_{1,m} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2,m} &= \frac{a^2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)^2 \cdot \cos(mx) dx \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx) dx}_{=0} + \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2x) \cdot \cos(mx) dx = \frac{a^2}{2} \delta_{2,m}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Damit sind die Koeffizienten der Matrix des linearen Gleichungssystems (2.47) ohne Integration berechenbar.

2.1.8 Fehleranalyse

An dieser Stelle der Diplomarbeit sollen die Fehler analysiert werden, die durch die bisherige Vorgehensweise entstanden sind.

Zum Einen ist ein Fehler durch die Reduzierung der Fourierreihe, auf eine Summe mit nur endlich vielen Gliedern, entstanden. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Parameterwerte, führt eine Erhöhung der Modenzahl stets zu einer Verkleinerung des Fehlers. Selbst Geometrien mit einem sehr geringen Unterschied zwischen der Amplitude und der Plattenhöhe führten für eine moderate Modenzahl von $N=25$ zu einem Fehler der Größenordnung 10^{-8} . (Für die später betrachtete Nahfeldlösung, musste die Modenzahl jedoch erhöht werden).

Zum Anderen bildet sich ein Fehler durch die numerische Berechnung der Integrale (2.48) und (2.50). Dieser Fehler ist behebbar, falls die Integrale durch eine geeignete Wahl der Bodenkontur analytisch gelöst werden können (z.B. durch den logarithmische Boden aus [9]), oder mit Hilfe entsprechender Reihendarstellungen berechnet werden können. Da Mathematica exakt mit den Besselfunktionen rechnen kann, ist hier kein weiterer Fehler entstanden.

Des Weiteren ergibt sich ein Fehler durch die schlechte Kondition des linearen Gleichungssystems aus (2.47). Dieser Fehler kann durch eine genügend große Anzahl an Nachkommastellen behoben werden. (Im vorliegenden Fall wurden 120 Stellen verwendet. Für Mathematica stellt das Rechnen mit derart vielen Stellen nach dem Komma kein Problem dar, es geht jedoch zu Lasten der Rechengeschwindigkeit.)

Eine elegantere Methode findet sich in [9]. Hier wird die Konditionszahl der Matrix durch eine geschickte Vorkonditionierung gering gehalten. Es reicht eine Rechengenauigkeit von 15 Stellen.

2.2 Nahfeldlösung

Das folgende Ziel ist es die Nahfeldgleichungen (1.34)-(1.38) zu lösen. Um analog zur Fernfeldgleichung vorgehen zu können, benötigt man zunächst die Inhomogenität von (1.34). Diese lässt sich wie folgt aus ψ_1 berechnen:

$$-4 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi_1 = -4 \frac{\partial}{\partial x} (2B + 2Cz + 2\Re Q'_1(\xi)) = +4\Im Q''_1(\xi) \quad (2.59)$$

Die Nahfeldlösung ψ_2 muss also der folgende Differentialgleichung genügen:

$$\Delta^2 \psi_2 = 4\Im Q''_1(\xi) \quad (2.60)$$

Um eine allgemeine Lösung für ψ_2 zu finden, wird nach der folgenden bewährten Methode vorgegangen: Man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, indem die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ψ_H

mit einer speziellen Lösung ψ_P der inhomogenen Differentialgleichung superponiert wird:

$$\psi_2(x, z) = \psi_H(x, z) + \psi_P(x, z) \quad (2.61)$$

Dieser Ansatz ist erlaubt, da die Differentialgleichung linear ist. Als spezielle Lösung wird

$$\psi_P = 2 \cdot z^2 \Im Q_1(\xi) \quad (2.62)$$

gewählt. Dass ψ_P tatsächlich eine Lösung von (2.60) ist, erkennt man bei der folgenden Betrachtung. Sei φ zunächst eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann zeigt man mit Hilfe der Formeln aus Anhang A.1 die Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta(z^2\varphi)) &= \Delta(z^2\Delta\varphi + 4z\frac{\partial}{\partial z}\varphi + 2\varphi) \\ &= z^2\Delta^2\varphi + 4z\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi + 2\Delta\varphi + 4z\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi + 8\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi + 2\Delta\varphi \end{aligned} \quad (2.63)$$

Für das obige φ in (2.63) wird nun $\Im Q_1(\xi)$ eingesetzt. Unter der Berücksichtigung, dass der Imaginärteil einer holomorphen Funktion wieder holomorph ist, es gilt also $\Delta\Im Q_1(\xi) = 0$, vereinfacht sich die Formel zu:

$$\Delta(\Delta(2z^2\Im Q_1(\xi))) = 16\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Im Q_1(\xi) = 4\Im Q_1''(\xi) \quad (2.64)$$

Also erfüllt ψ_P die inhomogene Bi-Laplace-Gleichung (2.60). Die allgemeine Lösung der homogenen Bi-Laplace-Gleichung ist bereits aus der Fernfeldlösung bekannt. Daher folgt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Bi-Laplace-Gleichung:

$$\psi_2 = B_2z^2 + \frac{C_2}{3}z^3 + 2z^2\Im Q_1(\xi) + 2\Re(R_2(\xi) + zQ_2(\xi)) \quad (2.65)$$

Anstatt ψ_2 in die Randbedingungen (1.35)-(1.38) einzusetzen, genügt es lediglich ψ_P zu betrachten, weil die Rechenschritte für ψ_H mit denen der Fernfeldlösung identisch sind. Da die Differentialoperatoren linear sind, kann die Gesamtlösung aus den Teillösungen zusammengesetzt werden.

Für (1.35) und (1.36) lässt sich ψ_P direkt einsetzen:

$$\psi_p(x, b(x)) = 2b(x)^2\Im Q_1^\beta(x) \quad (2.66)$$

$$\psi_p(x, h) = 2h^2\Im Q_1^\varphi(x) \quad (2.67)$$

Für (1.37) und (1.38) werden die folgenden Ableitungen benötigt:

$$\frac{\partial\psi_p}{\partial z} = z^2\Im Q_1'(\xi) + 4z\Im Q_1(\xi) \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = 2z^2\Im \frac{i}{2}Q_1'(\xi) = z^2\Re Q_1'(\xi) \quad (2.69)$$

Damit ergibt sich für (1.38):

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\psi_P}{\partial z}\right|_{z=h} &= h^2\Im\frac{2}{i}\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x) + 4h\Im Q_1^\varphi(x) \\ &= -2h^2\Re\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x) + 4h\Im Q_1^\varphi(x)\end{aligned}\quad (2.70)$$

Die folgenden Rechenschritte sind analog zu denen der Fernfeldlösung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}(2.67) + i(2.70)\right) = -ih^2\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x) + (2h\Im Q_1^\varphi(x))i \quad (2.71)$$

Für die Bedingung (1.37) berechnet man:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial\psi_P}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi_P}{\partial x}\right]_{z=b(x)} &= b(x)^2\Im\left[\frac{2}{b'(x) + i}\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x)\right] + 4b(x)\Im Q_1^\beta(x) \\ &\quad - b'(x)b(x)^2\Re\left[\frac{2}{b'(x) + i}\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x)\right] \\ &= -2b(x)^2\Re\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x) + 4b(x)\Im Q_1^\beta(x)\end{aligned}\quad (2.72)$$

Nun werden die Gleichungen (2.66) und (2.72) wieder geeignet kombiniert:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}(2.66) + i(2.72)\right) = -ib(x)^2\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x) + (2b(x)\Im Q_1^\beta(x))2\beta' \quad (2.73)$$

Aus diesen Gleichungen kann man jetzt vollkommen analog zur Fernfeldlösung (die Inhomogenitäten werden einfach mitgeführt!) die folgende nur noch von $\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x)$ abhängige Gleichung hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{2n}\exp(-2nh)\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{\exp(2n\beta)}\cdot\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x) \\ & -\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(-2n\beta)\left[\frac{iB_2}{n} + \frac{iC_2}{n}\left(\frac{1}{n} + b(x)\right) + (h - b(x))\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x) - \frac{1}{2n}\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x)\right]dx \\ = & \int_{-\pi}^{+\pi}\exp(-2n\beta)\left[-ib(x)^2\frac{d}{dx}Q_1^\beta(x) + (2b(x)\Im Q_1^\beta(x))2\beta'\right]dx \\ & -\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(-2n\varphi)\left[-ih^2\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x) + (2h\Im Q_1^\varphi(x))i\right]dx\end{aligned}\quad (2.74)$$

In Abschnitt 2.1.2 wurde gezeigt, dass es sich bei ψ_2 um eine ungerade Funktion handelt. Diese Eigenschaft überträgt sich nach (2.65) auf $\Re Q_2(\xi)$ und $\Re R_2(\xi)$. Durch Differenzieren erhält man, dass $\Im Q_2(\xi)$ und $\Im R_2(\xi)$ eine gerade Parität besitzen.

Diese Information wird nun benutzt, um analog zu 2.1.2 die Fourierreihenentwicklungen aufzustellen. Für $Q_2^\beta(x)$ ergibt sich:

$$Q_2^\beta(x) = q_0^\beta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^\beta \cos(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m^\beta \sin(mx) \quad (2.75)$$

Für $\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x)$ folgt entsprechend:

$$\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \quad (2.76)$$

Nach dem Einsetzen von (2.76) in (2.74) ist erkennbar, dass diesmal bei dem Imaginärteil nur Terme der Form

$$\sin(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{1}{2}(\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) \quad (2.77)$$

auftreten. Da das Integral über eine ungerade Funktion verschwindet, ist der Imaginärteil von Gleichung (2.74) nur erfüllbar, wenn die Konstanten B_2 und C_2 identisch Null sind. In diesem Fall ist der Imaginärteil stets erfüllt und muss nicht weiter beachtet werden. (Dass die Konstanten verschwinden müssen, ergibt sich auch bei einer, zur Fernfeldlösung analogen, Herleitung der Bestimmungsgleichung für die Konstanten.)

Der Realteil von (2.74) liefert das folgende Gleichungssystem für die Koeffizienten A_m und B_m , $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[G_{n,m}^+ - \frac{E_{-n,n-m}^0 + E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} \right] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[G_{n,m}^- + \frac{E_{-n,n-m}^0 - E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} \right] = 2K_n \end{aligned} \quad (2.78)$$

Mit den Abkürzungen:

$$G_{n,m}^\pm := \left(-h \pm \frac{1}{2n}\right) (E_{n,n-m}^0 \pm E_{n,n+m}^0) + (E_{n,n-m}^1 \pm E_{n,n+m}^1) \quad (2.79)$$

und der Inhomogenität:

$$\begin{aligned} K_n & := \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta) [-i b(x)^2 \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) + (2b(x)Q_1^\beta(x))2\beta'] dx \\ & - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\varphi) [-ih^2 \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) + (2hQ_1^\varphi(x))i] dx \end{aligned} \quad (2.80)$$

$E_{n,k}^p$ ist wie in Gleichung (2.48) definiert.

(Für die tatsächliche Implementierung wurde die Inhomogenität durch einige Umformungen vereinfacht, so dass die modifizierten Besselfunktionen direkt eingesetzt

werden konnten. Des Weiteren wurde wieder eine Fallunterscheidung zwischen $n < 0$ und $n > 0$ durchgeführt, um den numerischen Fehler gering zu halten!

Durch das Gleichungssystem (2.78) sind die Fourierkoeffizienten und damit die Funktion $\frac{d}{dx}Q_2^\beta(x)$ eindeutig bestimmt. (Natürlich entsteht wieder ein Fehler durch den Reihenabbruch!) Da für die Matrixkoeffizienten wieder nur die Integrale $E_{n,k}^0$ und $E_{n,k}^1$ berechnet werden müssen, kann die Reihendarstellung mit den modifizierten Besselfunktionen aus Abschnitt 2.1.7 übernommen werden.

Die weiteren Funktionen werden ebenfalls in die entsprechenden Reihen entwickelt und analog zu Abschnitt 2.1.6 berechnet. Es treten lediglich die zusätzlichen Inhomogenitäten auf. Weiterhin ergibt sich, dass die Konstanten q_0^β , q_0^φ , r_0^β und r_0^φ verschwinden.

Bei der Implementierung fällt auf, dass die Nahfeldlösung für große Plattenabstände wesentlich schneller konvergiert, als die Fernfeldlösung. Bei geringen Abständen konvergiert die Nahfeldlösung hingegen nur langsam. (Daher musste in diesem Fall die Modenzahl erhöht werden).

Kapitel 3

Wirbelbildung und Kraftbetrachtung

3.1 Die Wandschubspannung

Die Wandschubspannung stellt eine sehr wichtige strömungsmechanische Größe dar. Sie ermöglicht es, Aussagen über die Wirbelenstehung zu treffen, ohne die vollständige Stromfunktion berechnen zu müssen. (Insbesondere brauchen die aufwendigen Cauchy-Integrale nicht berechnet werden!)

Falls die Wandschubspannung in einem Punkt gleich 0 wird, löst die Strömung dort ab. Es entsteht ein Wirbel. Um die Breite des Wirbels zu kennen, genügen also schon die Informationen über die Nullstellen der Wandschubspannung. Nach [9] lässt sich die Wandschubspannung durch die folgende Gleichung berechnen:

$$\tau_w = \Delta\psi \Big|_{\xi=\beta(x)} \quad (3.1)$$

Für die Wandschubspannung der Fernfeldlösung τ_F ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta(\psi_1 \cdot x) &= x\Delta\psi_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\psi_1 \\ &= x(2B + 2Cz + 2\Re Q_1'(\xi)) - 2\Im R_1'(\xi) - 2z\Im Q_1'(\xi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_F(x) &= x \left[(2B + 2C b(x)) + 2\Re \left(\frac{2}{b'(x) + i} \cdot \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \right) \right] \\ &\quad - 2 \left(\frac{2}{b'(x) + i} \cdot \frac{d}{dx} R_1^\beta(x) \right) - 2b(x) \Im \left(\frac{2}{b'(x) + i} \cdot \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die zwei letzten Terme der Gleichung (3.3) verschwinden, da

$$\begin{aligned} &(b'(x)\Im \frac{d}{dx} R_1^\beta(x) - \Re \frac{d}{dx} R_1^\beta(x)) + b(x)(b'(x)\Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \Re \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)) \\ &= b'(x)\Im \left(\frac{d}{dx} R_1^\beta(x) + b(x) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \right) - \Re \left(\frac{d}{dx} R_1^\beta(x) + b(x) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

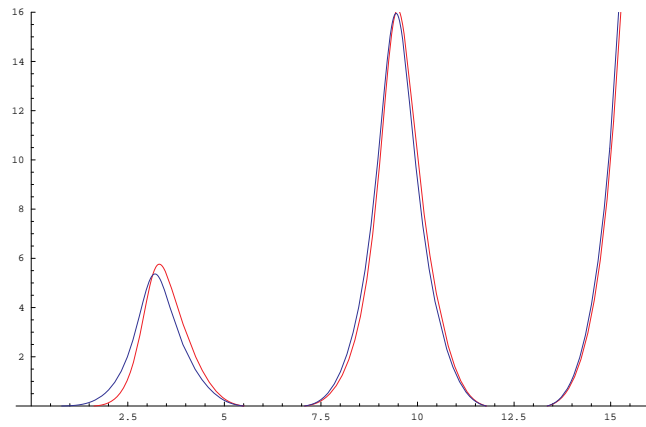


Abbildung 3.1: Wandschubspannung: $[0; 5\pi]$

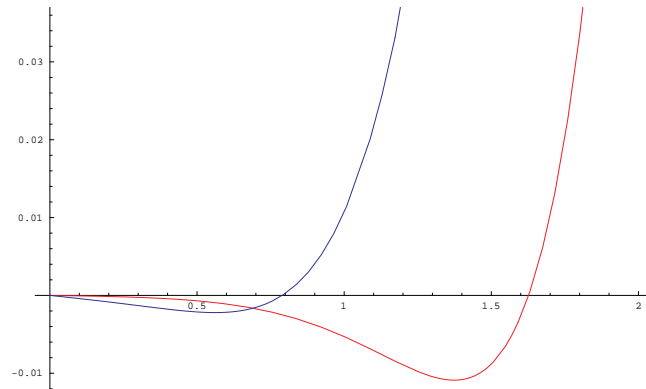


Abbildung 3.2: Wandschubspannung: $[0; 2]$

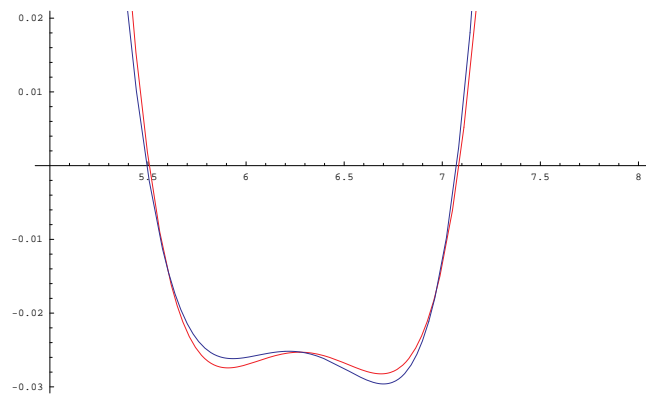


Abbildung 3.3: Wandschubspannung: $[5; 8]$

gilt. Dass die Gleichung identisch Null ist, erkennt man durch Betrachtung des Real- und des Imaginärteils von Gleichung (2.19). Es folgt für die Wandschubspannung der Fernfeldlösung:

$$\tau_F = x \left[2B + 2C b(x) + 4 \frac{b'(x) \Re \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) + \Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)}{b'^2(x) + 1} \right] \quad (3.5)$$

Da bei der Poiseuille Strömung $\psi = \psi_1$ gilt, folgt für die Wandsschubspannung der Poiseuille- Strömung:

$$\tau_P(x) = \Delta(\psi) \Big|_{\xi=\beta(x)} = 2B + 2C b(x) + 4 \frac{b'(x) \Re \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) + \Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)}{b'^2(x) + 1} \quad (3.6)$$

Es ist ersichtlich, dass die Wandschubspannungen $\tau_F(x)$ und $\tau_P(x)$ identische Nullstellen besitzen. (Eine Ausnahme tritt bei dem Staupunkt $x = 0$ auf, dort muß τ_F aus Symmetriegründen ebenfalls verschwinden!) Dies bedeutet, dass bei Vernachlässigung der Wandschubspannung der Nahfeldlösung τ_N die Eintrittswelligkeit (diejenige Welligkeit, bei der zum ersten Mal ein Wirbel auftritt) sowie die Wirbelbreite identisch sind.

Aus physikalischer Sicht ist dies unmittelbar einleuchtend, da sich die Quetschströmung für große x wie die Poiseuille-Strömung verhält.

Natürlich sind die Wandschubspannungen von ganz unterschiedlicher Art: Während τ_P periodisch in x -Richtung ist (wie z.B. auch die Couette-Strömung oder die Filmströmung über eine geneigte Platte), wächst τ_F mit größer werdendem x an. Dies resultiert daher, dass die Geschwindigkeit in x -Richtung zunimmt.

Nun wird im Folgenden die Wandschubspannung der Nahfeldlösung τ_N berechnet. Mit Gleichung (3.1) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_2 &= \Delta(2z^2 \Im Q_1(\xi) + 2\Re(R_2(\xi) + zQ_2(\xi))) \\ &= 2z^2 \underbrace{\Delta \Im Q_1(\xi)}_{=0} + 4z \Im Q_1'(\xi) + 4\Im Q_1(\xi) + 2\Re Q_2'(\xi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\tau_N(x) = 4\Im Q_1^\beta(x) + 8b(x) \frac{b'(x) \Im \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \Re \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x)}{b'(x)^2 + 1} + 4 \frac{b'(x) \Re \frac{d}{dx} Q_2^\beta(x) + \Im \frac{d}{dx} Q_2^\beta(x)}{b'(x)^2 + 1} \quad (3.8)$$

Wie groß die Unterschiede zwischen der gesamten Wandschubspannung $\tau_w = \tau_N + \tau_F$ und der Wandschubspannung der Fernfeldlösung τ_F ist, wird in den Abbildungen 3.1-3.3 deutlich. In blauer Farbe ist die Wandschubspannung der Fernfeldlösung τ_F dargestellt, in roter Farbe sieht man die gesamte Wandschubspannung τ_w . Die Abbildung 3.1 zeigt die Wandschubspannungen für das Intervall $[0; 5\pi]$. Es ist deutlich zu sehen, dass die Abweichung in der Nähe des Staupunktes mit wachsendem x schnell geringer wird. Abbildung 3.2 zeigt die Wandschubspannungen in der Umgebung des Staupunktes. Die Nullstellen weichen erheblich voneinander ab, der tatsächliche Wirbel im Staupunkt hat also deutlich andere Maße als von der reinen Fernfeldlösung

vorausgesagt. Dass dieser Unterschied jedoch lediglich in der Staupunktmulde nennenswert ist, zeigt Abbildung 3.3. Sie stellt die Wandschubspannung nach einer Periode dar (also die Mulde nach der Staupunktmulde). Es ist klar zu erkennen, dass die Nullstellen nahezu übereinstimmen. In den weiteren Perioden wird der Abstand noch geringer.

Die obigen Resultate zeigen die Besonderheit des Staupunktes: Die Staupunktmulde ist die Einzige, in der zwei Wirbel nebeneinander auftreten. (Dies ist offensichtlich, denn die Symmetriebedingung muss erfüllt sein). Zudem haben die Wirbel im Staupunkt eine größere Höhe, als die folgenden Wirbel. (Dies ist aus der Abbildung 3.2 ersichtlich). Wegen dieser Eigenschaft gibt es auch Geometrieparameter (z.B. $h = 4$ und $a = 1$) bei denen lediglich im Staupunkt ein Wirbel entsteht, während die weiteren Mulden wirbellos bleiben (siehe Abbildung 3.12).

Die obigen Resultate wurden für alle betrachteten Parameter h und a beobachtet. Der erhöhte Staupunktwirbel ist gut in dem Stromlinienbild 3.4 zu erkennen.

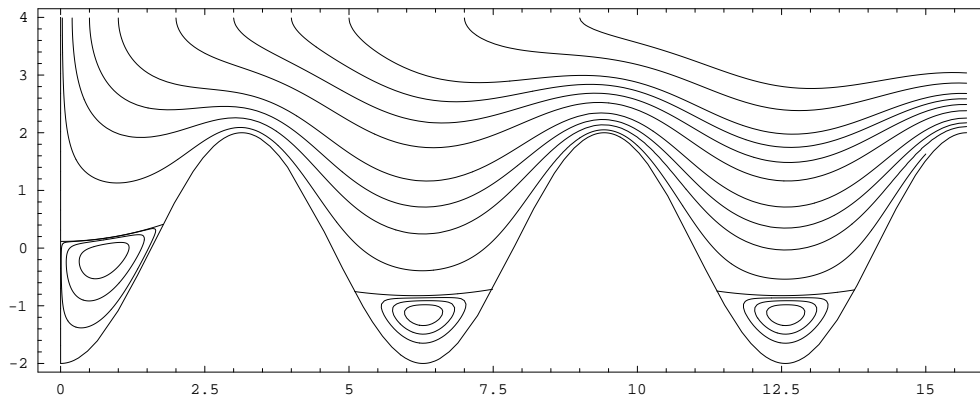


Abbildung 3.4: Stromlinien: $h = 4$, $a = 2$

3.2 Wirbelbildung

In dem vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Nullstellen der Wandschubspannungen der Poiseuille-Strömung und der Fernfeldlösung identisch sind. Da sich die Wandschubspannung der Nahfeldlösung nahezu nur auf die Staupunktmulde auswirkt, reicht es, bei der Wirbelentstehung, lediglich die Poiseuille-Strömung zu betrachten. Der Wirbel im Staupunkt bedarf natürlich einer gesonderten Betrachtung.

In Abbildung 3.5-3.7 sind Stromlinienbilder der Poiseuille-Strömung zu erkennen. Die Abbildungen zeigen die Wirbelentwicklung für eine konstante Höhe bei einer variierenden Amplitude. Es zeigt sich, dass mit wachsender Welligkeit auch der Wirbel

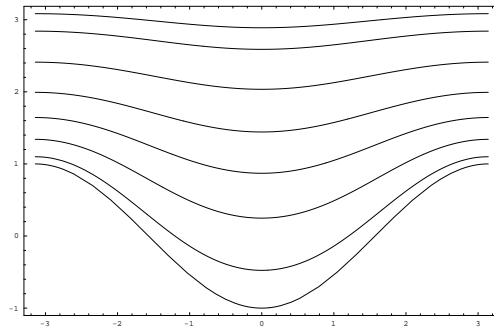


Abbildung 3.5: Poiseuille-Strömung: $h = 4, a = 1$

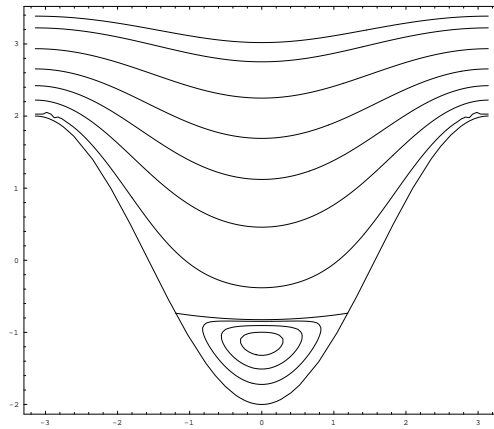


Abbildung 3.6: Poiseuille-Strömung: $h = 4, a = 2$

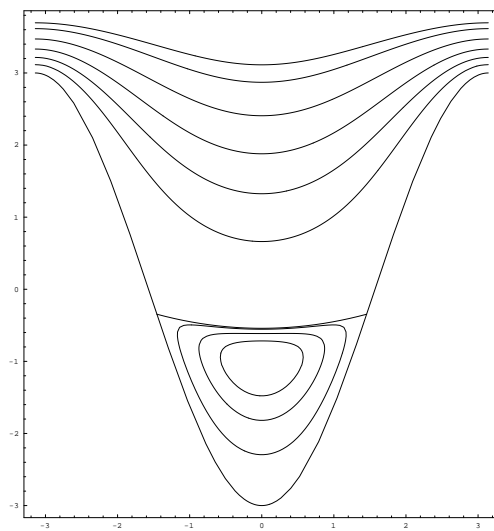


Abbildung 3.7: Poiseuille-Strömung: $h = 4, a = 3$

wächst. Dies steht in Übereinstimmung mit dem Verhalten der Couette-Strömung aus [1]. Allerdings ist auch ein Unterschied erkennbar.

Die Separatrix ist bei der Couette-Strömung konvex gekrümmt. Im Fall der Poiseuille-Strömung ist sie stets konkav.

Die Abbildungen 3.9 - 3.11 zeigen die Stromlinienbilder für die Konstante Welligkeit $a = \frac{\pi}{2}$, wobei die Höhe variiert wurde. Hier ist deutlich zu erkennen, dass der Wirbel mit geringerem Plattenabstand kleiner wird. Dies ist ein großer Unterschied zu der Couette-Strömung. Nach [1] ist es dort sogar bei beliebig kleiner Welligkeit möglich, Wirbel zu erzeugen, indem der Plattenabstand hinreichend klein gewählt wird.

Da die Wirbelhöhe mit abnehmender Plattenhöhe kleiner wird, ergeben sich zwei natürliche Fragen:

1. Ist die Wirbelbildung stets verhinderbar, indem man die Plattenhöhe hinreichend gering wählt?
2. Ist es bei jeder beliebigen Welligkeit möglich, Wirbel zu erzeugen, wenn der Plattenabstand nur hinreichend groß gewählt wird?

Um die erste Frage beantworten zu können, betrachtet man Abbildung 3.8.

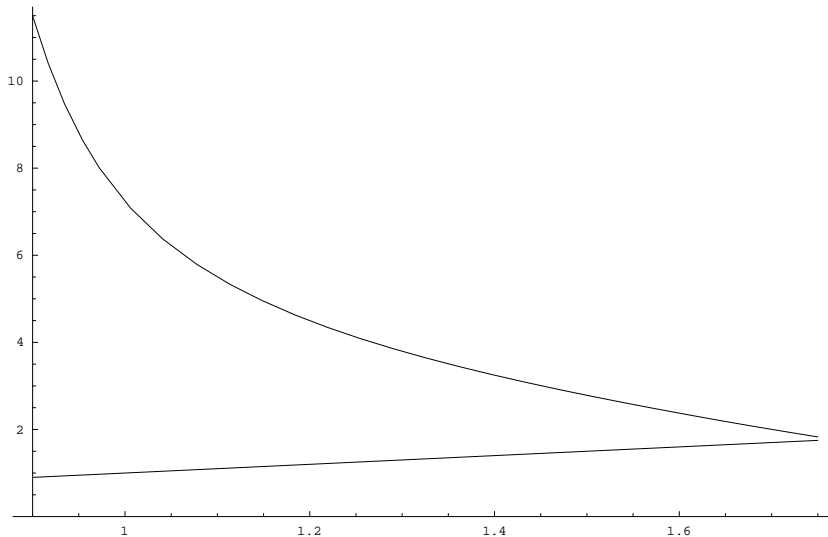


Abbildung 3.8: Maximale Höhe bei der keine Wirbelbildung eintritt

Auf der Abzisse ist die Welligkeit angegeben, auf der Ordinate die maximale Höhe bei der noch keine Wirbel entstehen.

Es ist ersichtlich, dass ab einer Welligkeit von $a \approx 1.75$ der Plattenabstand gleich oder kleiner als die Amplitude sein müsste. Dies ist offensichtlich physikalisch unsinnig!

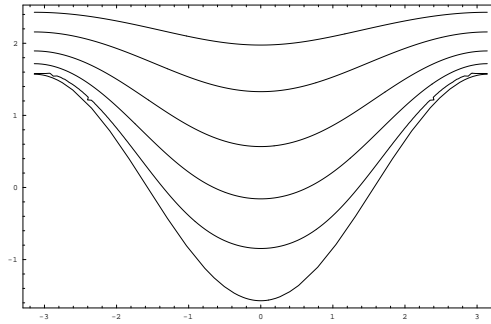


Abbildung 3.9: Poiseuille-Strömung: $h = 3, a = \frac{\pi}{2}$

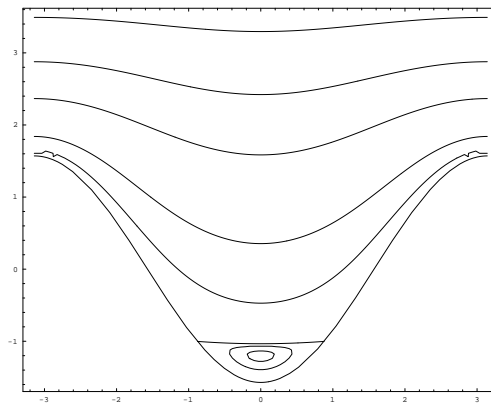


Abbildung 3.10: Poiseuille-Strömung: $h = 4, a = \frac{\pi}{2}$

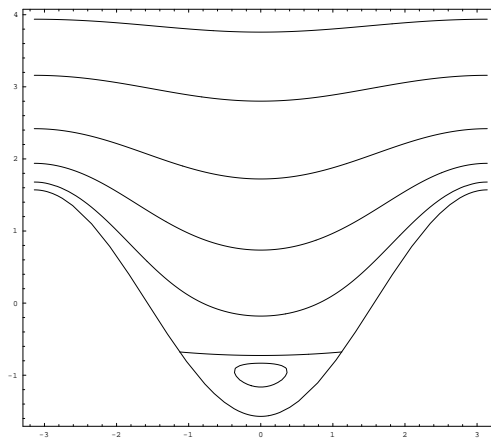


Abbildung 3.11: Poiseuille-Strömung: $h = 5, a = \frac{\pi}{2}$

Die zweite Frage ist schwieriger zu beantworten. Es ist bis zu einer Welligkeit von $a \approx 0.8$ gelungen, Höhen zu finden, bei der Wirbel entstehen. Für kleinere Amplituden war dies nicht mehr möglich, da die Mindesthöhe für die Wirbelbildung sehr stark ansteigt. Es liegt die Vermutung nahe, dass eine Mindestwelligkeit zur Wirbelbildung notwendig ist.

Im Folgenden wird nun der Staupunktwirbel betrachtet. Wie oben gezeigt, können durch den Einfluss der Nahfeldlösung Wirbel in der Staupunktmulde entstehen, auch wenn in den anderen Mulden keine Wirbelbildung stattfindet. (Das Stromlinienbild 3.12 zeigt diesen Fall bei den Parametern $h = 4$ und $a = \frac{6}{5}$)

Eine ähnliche Betrachtung, wie die der Poiseuille-Strömung liefert, dass im Stau- punkt eine Wirbelbildung ab einer Amplitude von $a \approx 0.5$ möglich ist. Als kleinste Welligkeit, bei der die Wirbelbildung auch bei geringen Höhen nicht mehr unter- drückt werden kann, wurde die Amplitudene $a \approx 1.6$ gefunden. Dieser Wert kann jedoch leicht abweichen, da die Konvergenz der Nahfeldlösung bei dem geringen Plattenabstand sehr schlecht ist.

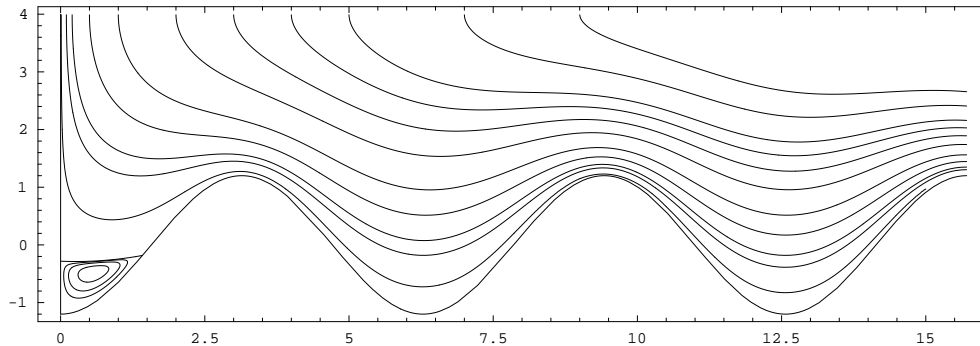


Abbildung 3.12: Stromlinien: $h = 4$, $a = \frac{6}{5}$

3.3 Druck und Kraftgleichungen

Eine weitere interessante Größe ist diejenige Kraft, die aufgewendet werden muss, um die obere Platte mit einer konstanten Geschwindigkeit nach unten zu drücken. Aus der Literatur ist die Kraft für die ebene Platte bekannt: $F \sim \frac{\dot{h}}{h^3}$. Hier wird mit \dot{h} die Sinkgeschwindigkeit bezeichnet. Um die obere Platte ganz auf die untere Platte zu drücken ist also eine unendlich große Kraft notwendig! Wenn von einer konstanten Kraft ausgegangen wird, ist dieses Ziel in einer endlichen Zeit nicht zu erreichen.

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Kraft für verschiedene Geometrieparameter entwickelt. Die Kraft wird nicht nur mit der ebenen Platte verglichen, sondern auch mit der ersten Näherung eines Störungsansatzes.

Um die Kraft berechnen zu können, muss zunächst die Gleichung für den Druck bestimmt werden. Die Bestimmungsgleichungen sind die Stokes-Gleichungen (1.12) und (1.13). Durch Einsetzen der Stromfunktion ψ ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \quad (3.10)$$

Hiermit wurde im Anhang A.3. die folgende Gleichung für den Druck ermittelt:

$$p(x, z) = p_0 - 2Bz + C(x^2 - z^2) - 4\Re Q_1(\xi) + 2\Im Q_1'(\xi)x + 2\Re R_1'(\xi) - 2z\Re Q_1'(\xi) + 2\Im Q_2'(\xi) \quad (3.11)$$

Da der Druck nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, tritt noch die Integrationskonstante p_0 auf.

Um die notwendige Kraft auf die obere Platte berechnen zu können, benötigt man den Wanddruck. Dieser lautet für die obere Wand:

$$p(x, h) = p_0 - 2Bh + C(x^2 - h^2) - 4\Re Q_1^\varphi(x) - 4\Im \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) \cdot x + 4\Im \frac{d}{dx} R_1^\varphi(x) - 4h\Im \frac{d}{dx} Q_1^\varphi(x) - 4\Re \frac{d}{dx} Q_2^\varphi(x) \quad (3.12)$$

Die Kraft erhält man nun durch Integration über der Wanddruck:

$$F = \int_{-L}^{+L} p(x, h) dx \quad (3.13)$$

Hierbei ist $2L$ die Länge auf der x-Achse. Je nachdem über wie viele Perioden integriert wird, ist der Einfluss des Staupunktes größer oder kleiner. (Dies ist unbefriedigend, da es bisher nicht nötig war, sich auf eine Anzahl von Perioden zu beschränken.

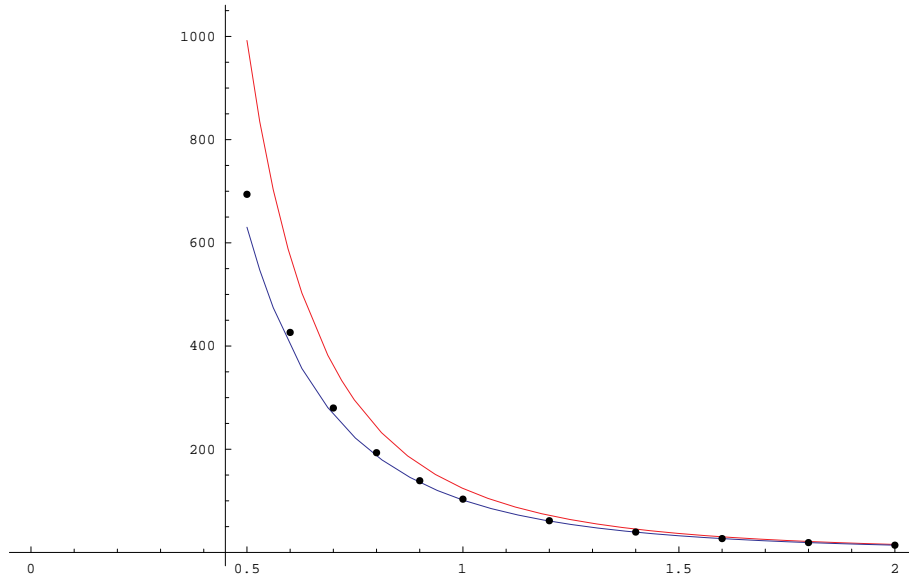


Abbildung 3.13: Kraft bei konstanter Welligkeit $a = 1/10$

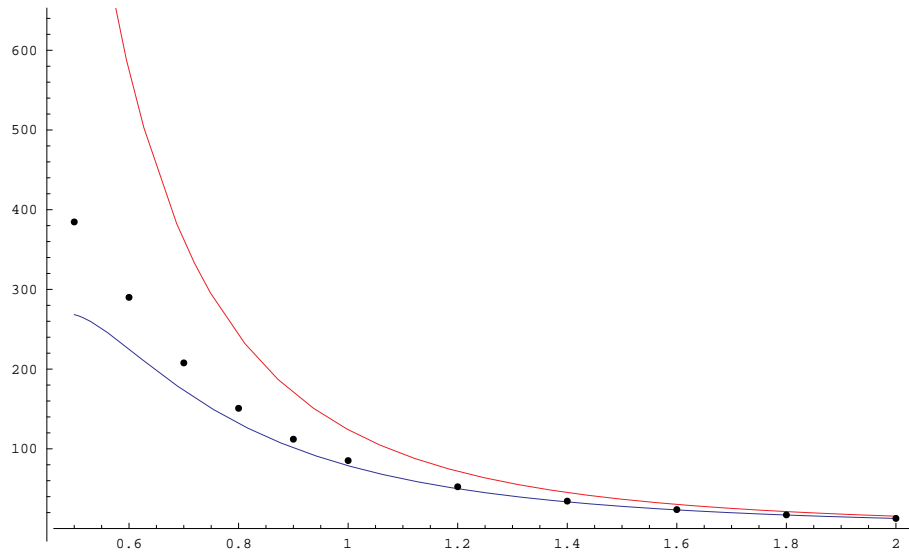


Abbildung 3.14: Kraft bei konstanter Welligkeit $a = 1/5$

Falls es bei späteren theoretischen Betrachtungen gelänge eine geeignete Zerlegung für den Druck zu finden, könnte dieser Makel behoben werden.)

In Abbildung 3.13 ist die resultierende Kraft für eine konstante Welligkeit und variierenden Höhen zu sehen.

(Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde an Stelle von F die Kurve für $-F$ gezeichnet, da die Kraft in negativer Richtung wirkt!) Die rote Kurve zeigt die benötigte Kraft für den ebenen Boden. In blauer Farbe ist die Kurve zu sehen, die mit einem Störungsansatz über die Welligkeit berechnet wurde. Die Punkte sind die Werte, die mit der obigen Methode der komplexen Variablen berechnet wurden. Es ist gut zu sehen, dass der Störungsansatz für geringe Welligkeiten, wie $a = \frac{1}{10}$, noch brauchbare Resultate liefert. Bei einer Welligkeit von $a = \frac{1}{5}$ ist die Übereinstimmung mit der "exakten Lösung" der komplexen Variablen Methode schon deutlich geringer. Es ist jedoch bei beiden Methoden sichtbar, dass für den gewellten Boden eine geringere Kraft aufgewendet werden muss, als für den ebenen Boden. Dies kann dadurch erklärt werden, dass durch die Welligkeit eine Unterschicht entsteht, die zu einer Art "Polstereffekt" führt.

Im Folgenden soll nun der Einfluss der Welligkeit bei größeren Amplituden betrachtet werden. Diese Kraft ist mit dem Störungsansatz nicht mehr berechenbar. Abbildung 3.15 zeigt die benötigte Kraft bei verschiedenen Welligkeiten. Die Höhe wurde konstant gelassen. Es ist erkennbar, dass es durch die Erhöhung der Welligkeit zu einer weiteren Reduktion der benötigten Kraft kommt. Wie weit sich der Effekt der Kraftreduktion "ausreizen" lässt, kann hier nicht beantwortet werden, da es bei einem zu geringem Abstand zwischen Amplituden- und Plattenhöhe zu Konvergenzproblemen kommt.

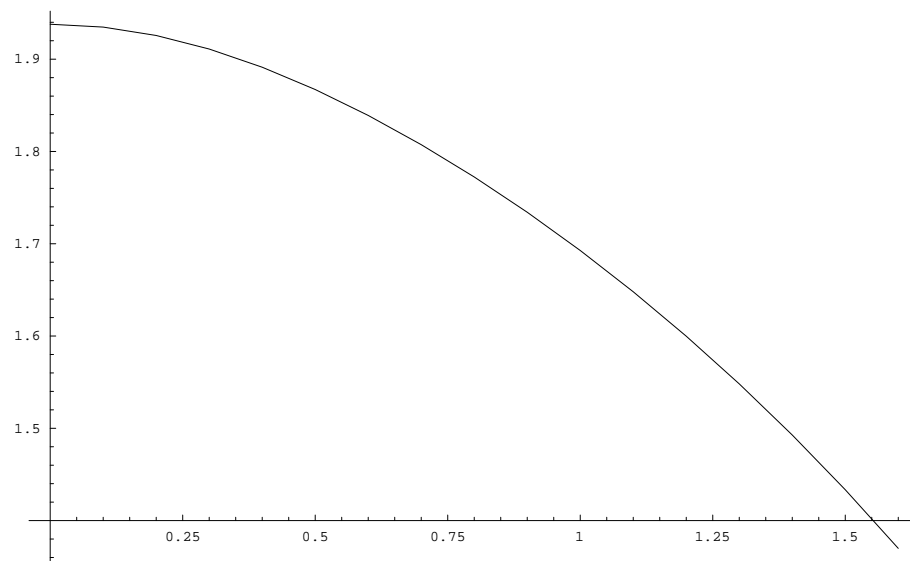


Abbildung 3.15: Kraft bei variierender Amplitude

Kapitel 4

Vergleich mit anderen Methoden

Quetschstömung:

Da dem Autor keine experimentellen Ergebnisse zum Vergleich mit den theoretisch, berechneten Lösungen vorliegen, wird diese mit einer rein numerischen Methode verglichen.

Hierfür wird das Finite-Elemente-Programm Comsol benutzt. Comsol gestattet es, die Stokes-Gleichungen direkt in das Programm einzugeben. Auch die Haftbedingungen an der unteren Platte sowie die Einflussbedingung durch die obere Platte bereiten keine Schwierigkeiten. Es ist jedoch nicht direkt möglich, die untere Platte als Funktion einzugeben.

Hierzu muss eine Routine geschrieben werden, die die Punkte der Funktion berechnet und geeignet interpoliert. Diese Einschränkung ist nicht gravierend, da Comsol bei der Gittergenerierung selbst einen Fehler macht. Bei einer hinreichend großen Anzahl an Stützstellen kann der Fehler kleiner gemacht werden als derjenige Fehler, der ohnehin verursacht wird. Falls die Routine erst einmal geschrieben ist, kann jede beliebige Funktion dargestellt werden.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen den Vergleich zwischen der mit Mathematica berechneten Lösung der komplexen Variablen Methode und der von Comsol berechneten Lösung der Finiten-Elemente-Methode. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Lösungsansätze. Diese Übereinstimmung änderte sich auch für andere Geometrieparameter h und a nicht. Der Vorteil von Comsol liegt in der einfachen Handhabung sowie einiger optimierter Routinen zur Berechnung spezieller Probleme.

Da es sich um ein Finites-Elemente-Programm handelt, kann die Gitterverfeinerung lokal erfolgen, d.h. "interessante" Gebiete können lokal mit einem feineren Gitter überzogen werden. Der große Nachteil dieser rein numerischen Methode ist, dass die "interessanten" Gebiete nicht unbedingt als solche erkannt werden. Die Separatrix (diejenige Stromlinie, die das Rezirkulationsgebiet von der übrigen Strömung

trennt) in der Abbildung 4.1 konnte nur exakt bestimmt werden, da die genaue Lage schon aus der theoretischen Betrachtung bekannt war. Ohne die Kenntniss der Wandschubspannung ist die Frage der Existenz eines Wirbels schwer zu beantworten.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit bietet ein vorgenommener Störungsansatz. Hierfür wurden die Randbedingungen (1.19) und (1.23) in Taylorreihen entwickelt. Als Störungsparameter dient die Bodenwelligkeit. Anschließend wurde der Störungsansatz in die Differentialgleichung sowie in die Randbedingungen eingesetzt und bis zur ersten Ordnung berechnet. Als Lösungsansätze wurden Produkte aus Polynomen und trigonometrischen Funktionen verwendet.

Bis zu einer Welligkeit von $a = \frac{1}{10}$ ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Methoden. Für Wirbelanalysen eignet sich der Störungsansatz natürlich nicht.

Poiseuille-Strömung:

Eine Vergleichsmöglichkeit für die Poiseuille-Strömung bietet [8]. In deren Arbeit wird die Stokes-Gleichung über eine gewellte Platte mit Hilfe einer Padè-Approximation näherungsweise gelöst werden. Nach einer entsprechenden Umskalierung der Geometrieparameter ergeben die Stromlinienbilder eine gute Übereinstimmung mit den Vorliegenden der Poiseuille-Strömung. Insbesondere die Tripelpunkte sowie die Wirbelhöhe sind nahezu identisch.

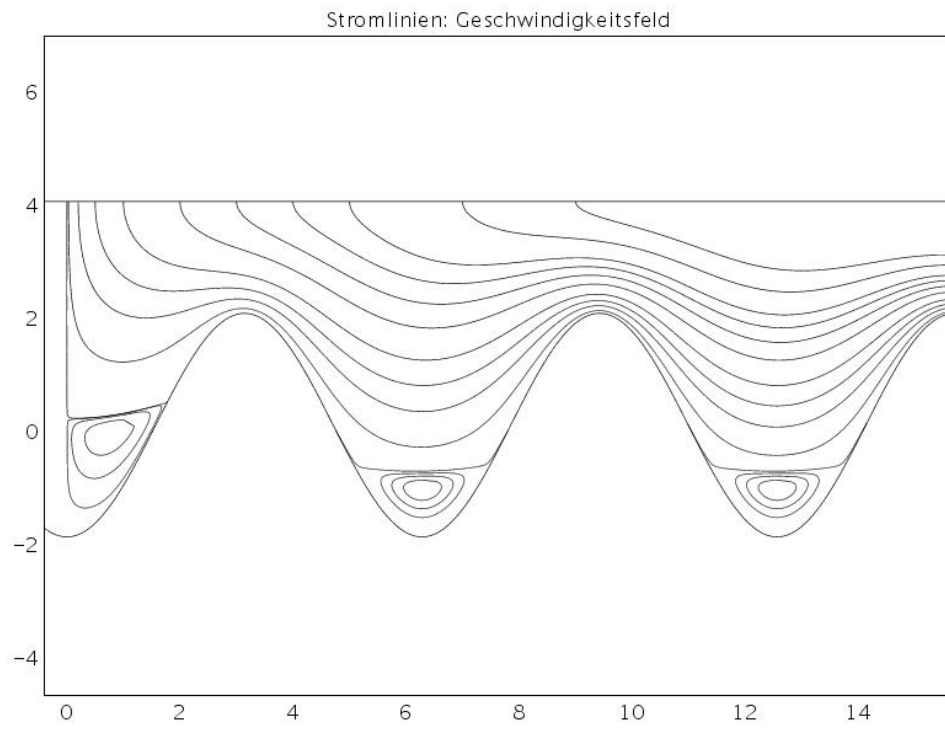


Abbildung 4.1: Stromlinien: Cmsol

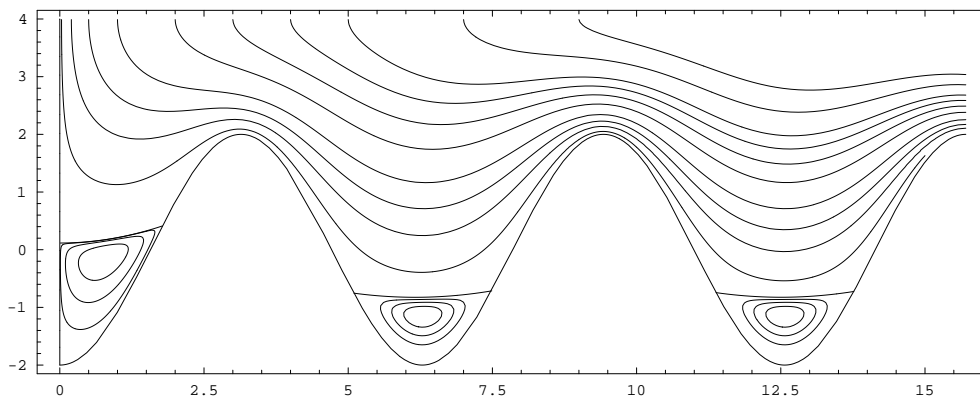


Abbildung 4.2: Stromlinien: Mathematica

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblicke

Das Ziel in der vorliegenden Diplomarbeit war es, die Wirbelbildung sowie die Kraft bei der Quetschströmung zwischen gewellten Platten zu analysieren.

Um die komplexe Variablen Methode aus [1] benutzen zu können, musste die Stromfunktion in geeigneter Weise zerlegt werden.

Es entstand ein einseitig entkoppeltes System partieller Differentialgleichungen. Die gesuchten Funktionen konnten mit Hilfe der komplexen Variablen Methode bestimmt werden. Hier wurde speziell die harmonische Bodenkontur betrachtet, da dort die Integrale durch die modifizierte Bessel-Funktion vereinfacht werden konnten.

Bei der Analyse der Wirbelbildung war zu erkennen, dass ein grundsätzlich anderes Verhalten als bei der Couette-Strömung vorlag. Bei der Quetschströmung nimmt die Wirbelhöhe bei sinkendem Plattenabstand ab. In einigen Fällen war es sogar möglich durch einen hinreichend dichten Plattenabstand die Wirbelbildung gänzlich zu unterdrücken. Dies gelingt jedoch nur bis zu einer kritischen Welligkeit von $a \approx 1.6$. Bei einer größeren Amplitude kommt es in jedem Fall zur Wirbelbildung. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass es eine Mindestwelligkeit für die Wirbelbildung gibt. Unterhalb dieser Welligkeit ist eine Wirbelbildung auch bei einem großen Plattenabstand ausgeschlossen. Die Mindestwelligkeit für einen Wirbel im Staupunkt liegt bei $a \approx 0.5$

Die Frage nach der Wirbelenstehung ist insbesondere für die Praxis interessant. Da in den Wirbeln keinen Flüssigkeitsaustausch mit der Umgebung stattfindet, können Wirbel je nach Anwendung erwünscht oder unerwünscht sein.

Als weitere Größe wurde diejenige Kraft betrachtet, die aufgewendet werden muss, um die obere Platte in Richtung der unteren zu drücken. An dieser Stelle zeigte sich, dass die harmonische Bodenkontur zu einer Reduktion der benötigten Kraft führte. Es zeigt sich bei geringer Welligkeit eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Kraftberechnung mit Hilfe eines Störungsansatzes und der hier verwendeten Methode. Bei steigender Amplitude konnte ein weiteres Sinken der Kraft beobachtet werden. Über den Grenzfall, bei dem die Plattenhöhe gegen die Amplitude strebt,

kann aus Gründen der Konvergenz keine Aussage getroffen werden.

Durch die Ähnlichkeit der Poiseuille-Strömung zu einem Teilproblem der Quetschströmung (der Fernfeldlösung) können viele Resultate übernommen werden. Auch in diesem Fall existiert eine Welligkeit, ab der eine Wirbelbildung nicht mehr zu verhindern ist ($a \approx 1.75$). Die Mindestwelligkeit für die Wirbelbildung liegt bei $a \approx 0.8$. Wie in Kapitel 4 gezeigt wurde, besteht eine gute Übereinstimmung von der hier benutzten Methode mit anderen Lösungsansätzen.

Die vorliegende Arbeit kann als Basis für weiterführende Betrachtungen genutzt werden. Es wäre insbesondere interessant, auch andere Bodenkonturen mit der komplexen Variablen Methode zu untersuchen. (Ein Beispiel für eine nichtharmonische Bodenkontur findet sich in der folgenden Abbildung 5.1. Diese wurde rein numerisch mit Comsol berechnet.) Zwar können auch einige nichtharmonische Bodenkonturen mit Hilfe der modifizierten Bessel-Funktionen dargestellt werden; dies ist jedoch auf Grund von Faltungsprodukten sehr aufwendig und war im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht möglich.

Eine andere, interessante Klasse von Funktionen sind die in [9] eingeführten logarithmischen Bodenkonturen. Bei ihnen lassen sich analytische Vereinfachungen durchführen. Insbesondere die Betrachtung der Kraft bei unterschiedlichen Bodenkonturen könnte weitere spannende Ergebnisse liefern. Ist eine weitere Verringerung der Kraft bei bestimmten Bodenkonturen möglich?

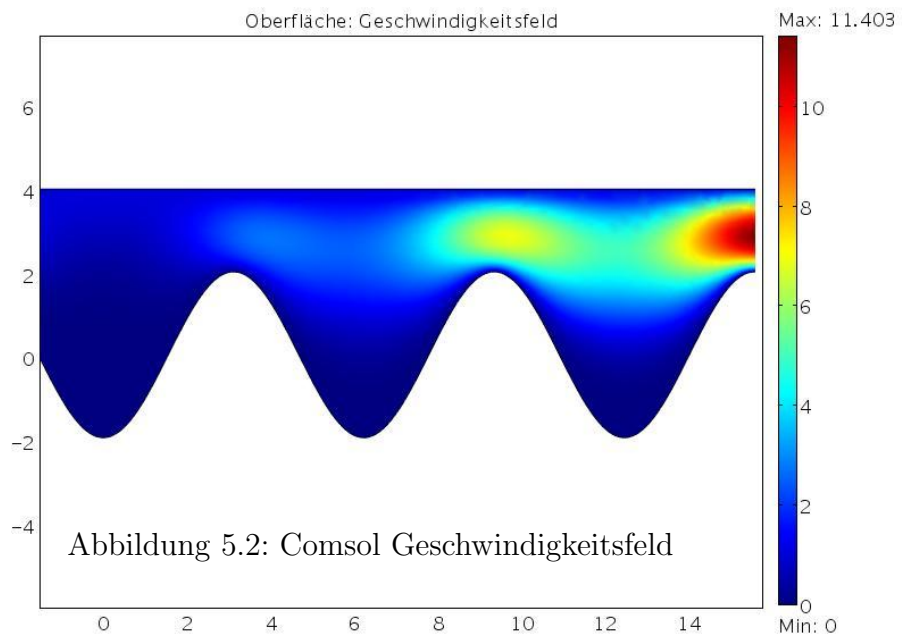
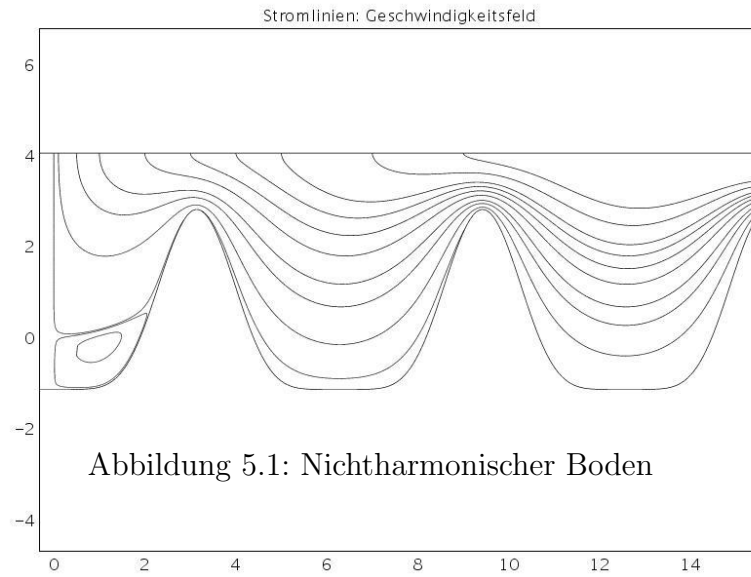
Eine Erweiterung des hier verwendeten Modells wäre das Berücksichtigen von Ausflusseffekten an den Rändern. Ansätze für den ebenen Boden finden sich in [6]

Des Weiteren wäre es für die Praxis interessant zu berechnen, wie lange ein beliebiges Teilchen im Quetschspalt verbleibt. Dieses Problem ist selbst für den ebenen Boden nicht leicht zu lösen, da vorher die Bahnlinien berechnet werden müssen. (Da das Problem instationär ist, sind Bahnlinien nicht mit den Stromlinien identisch!) Dies führt bei dem ebenen Boden auf Abelsche Differentialgleichungen.

Für den gewellten Boden lassen sich die Bahnlinien nur noch numerisch berechnen. Eine Analyse des Geschwindigkeitsfeldes für verschiedene Geometrien könnte ebenfalls zu interessanten Ergebnissen führen. Abbildung 5.2 zeigt das von Comsol berechnete Geschwindigkeitsfeld für den harmonischen Boden.

Bezüglich der Poiseuille-Strömung wäre es wissenswert, wie eine Lösung mit Hilfe der komplexen Variablen Methode angegeben werden kann, bei der der Druckgradient als konstant angenommen wird. Dieser Fall wird vorwiegend in der Literatur untersucht.

In dieser Diplomarbeit wurde ausschließlich der Fall eines konstanten Volumenstroms betrachtet, da somit die Lösung direkt aus der Fernfeldlösung übernommen werden konnte.



Anhang A

Mathematische Ergänzungen

A.1 Herleitung der Bestimmungsgleichungen

Lemma A1: Sei $\psi(x, z)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gelten die im Folgenden häufig benutzten Gleichungen:

$$\Delta(\psi x) = x\Delta\psi + 2\frac{\partial}{\partial x}\psi \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta(\psi z^2) = z^2\Delta\psi + 4z\frac{\partial}{\partial z}\psi + 2\psi \quad (\text{A.2})$$

Anmerkung: Im folgenden werden die Argumente der Funktionen weggelassen, wenn eindeutig ist, worum es sich handelt.

Beweis:

$$\begin{aligned} \Delta(\psi x) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (\psi x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \right) + x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \\ &= \left(x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi = x\Delta\psi + 2\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\psi z^2) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2z\psi \right) + z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \\ &= z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2\psi + z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \\ &= z^2 \Delta\psi + 4z \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2\psi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Gleichungen für ψ_1 und ψ_2

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, das System von Differentialgleichungen (1.29)-(1.38) für die Funktionen ψ_1 und ψ_2 herzuleiten. Dazu wird zuerst die Zerlegung (1.28) in die Bi-Laplace-Gleichung (1.16) eingesetzt. Mit Hilfe der obigen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta\psi) &= \Delta(\Delta(\psi_1 \cdot x + \psi_2)) = \Delta(x \cdot \Delta\psi_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\psi_1 + \Delta\psi_2) \\ &= x \cdot \Delta^2\psi_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi_1 + \Delta^2\psi_2 = 0\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Es sind verschiedene Aufteilungen für der Funktionen ψ_1 und ψ_2 denkbar. Die folgende Zerlegung ist für das Problem besonders zweckmäßig, da die Gleichung dort einseitig entkoppelt ist und immer noch eine Bi-Laplace-Gleichung erfüllen muss. (Dies wäre im Falle $\psi_2 = 0$ nicht der Fall)

$$\Delta^2\psi_1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta^2\psi_2 = -4\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi_1 \quad (\text{A.7})$$

Als Nächstes wird die Randbedingung (1.24) betrachtet. Sie ist sehr wichtig, da diese Gleichung die Zerlegung erst notwendig gemacht hat:

$$\psi(x, h) = \psi_1(x, h) \cdot x + \psi_2(x, h) = x \quad (\text{A.8})$$

$$\Rightarrow \psi_1(x, h) = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\psi_2(x, h) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Die Randbedingung (1.21) liefert:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = \left[x\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z} - b'(x) \left(x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \overbrace{\psi_1(x, b(x))}^{=0} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} \right) \right]_{z=b(x)} \quad (\text{A.11})$$

$$= x \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \right]_{z=b(x)} + \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi_2}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - b'(x)\frac{\partial\psi_2}{\partial x} \right]_{z=b(x)} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Die Zerlegungen für die Randbedingungen (1.21) und (1.19) ergeben sich analog.

A.2 Fernfeldgleichungen

A.2.1 Eliminieren der Funktion Q^φ

Mit der Hilfe der Holomorphie-Bedingung (2.10) wird die Funktion $Q_1^\varphi(x)$ aus der Gleichung (2.21) eliminiert werden. Zuerst wird die Identität

$$\Re Q(\xi) = \frac{1}{2}(Q(\xi) + \overline{Q(\xi)}) \quad (\text{A.14})$$

in die Gleichung (2.21) eingesetzt und es wird berücksichtigt, dass die Konstanten auf der linken Seite aus Gründen der Periodizität verschwinden. Des Weiteren kann die Funktion $\frac{d}{dx}Q_1^\varphi(x)$ mit Hilfe der integrierten Holomorphiebedingung (2.18) auf die rechte Seite gebracht werden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \varphi)(Q_1^\varphi(x) + \overline{Q_1^\varphi(x)}) \cdot i \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) \left[(h - b(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - (Q_1^\beta(x) + \overline{Q_1^\beta(x)}) \cdot 2\beta' \right. \\ & \quad \left. - B b(x) 2\beta' - \frac{C}{2} b^2(x) 2\beta' \right] dx \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Das $Q_1^\varphi(x)$ der linken Seite hebt sich mit dem $Q_1^\beta(x)$ der rechten Seite gemäß Gleichung (2.10) weg. Die Funktionen $\overline{Q_1^\varphi(x)}$ und $Q_1^\beta(x)$ werden einmal partiell integriert. Nun wird die Identität

$$\exp(-n(h + ix)) = \exp(-2nh) \exp(n(h - ix)) = \exp(-2nh) \overline{\exp(2n\varphi)} \quad (\text{A.16})$$

verwendet. Es ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2n} \exp(-2nh) \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{\exp(2n \varphi)} \cdot \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\varphi(x)} dx \quad (\text{A.17}) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(2n \beta) \left((h - b(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} - B b(x) 2\beta' - \frac{C}{2} b^2(x) 2\beta' \right) dx \end{aligned}$$

Die Konstanten werden jetzt gesondert betrachtet:

$$\begin{aligned} & 2B \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b(x) \cdot \beta' \, dx \\ &= \frac{B}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) (b'(x) + i - i) dx \\ &= \frac{2B}{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) \beta' dx}_{=0} - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) \cdot \frac{iB}{n} dx \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

Für C folgt analog:

$$\begin{aligned}
 & C \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b^2(x) \beta' dx \\
 = & \frac{C}{2n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) 2b(x) (b'(x) + i - i) dx \\
 = & \frac{2C}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b(x) \beta' dx - \frac{iC}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b(x) dx \\
 = & \frac{C}{n^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) (b'(x) + i - i) dx - \frac{iC}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b(x) dx \\
 = & \frac{2C}{n^2} \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) \beta' dx}_{=0} - \frac{iC}{n^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) dx - \frac{iC}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) b(x) dx \\
 = & - \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n \beta) \frac{iC}{n} \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) dx \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

Die obigen Ergebnisse werden jetzt in (A.17) eingesetzt. Außerdem wird die integrierte Holomorphiebedingung (2.18) unter Berücksichtigung des konjugiert-komplexen auf $\frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)}$ angewendet. Es ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2n} \exp(-2nh) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\overline{\exp(2n\beta(x))}}{\exp(2n\beta(x))} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} dx \tag{A.20} \\
 = & \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-2n\beta(x)) \left[\frac{iB}{n} + \frac{iC}{n} \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) + (h - b(x)) \frac{d}{dx} Q_1^\beta(x) - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} \overline{Q_1^\beta(x)} \right] dx
 \end{aligned}$$

A.2.2 Das lineare Gleichungssystem

Im Folgenden wird das lineare Gleichungssystem (2.47) hergeleitet. Hierzu wird die Fourierreihenentwicklung (2.42) in die Gleichung (2.35) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2n} \exp(-2nh) \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(nb(x)) (\cos(nx) - i \sin(nx)) \\
 & \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) - i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \right) \\
 = & \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-nb(x)) (\cos(nx) - i \sin(nx)) \\
 & \cdot \left[\frac{i}{n} (\gamma + \rho \sum_{m=1}^{\infty} B_m \langle b(x) \cos(mx) \rangle - 2\gamma \sum_{m=1}^{\infty} B_m \langle b^2(x) \cos(mx) \rangle) \right. \\
 & + \frac{i}{n} \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) \left[\frac{h}{\alpha} + 2 \frac{\delta}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \langle b(x) \cos(mx) \rangle - 2 \frac{h}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \langle b^2(x) \cos(mx) \rangle \right] \\
 & + (h - b(x)) \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) + i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \right) \\
 & \left. - \frac{1}{2n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) - i \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(mx) \right) \right] \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

Nun werden die Terme ausmultipliziert und nach Real- und Imaginärteil aufgeteilt. Der Realteil besitzt nur Terme der Form (2.44). Da das Integral über die ungerade Funktion verschwindet, ist der Realteil identisch erfüllt. Für den Imaginärteil ergibt sich mit den Formeln (2.45) und (2.46):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2n} \exp(-2nh) \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(nb(x)) \\
 & \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_m (-\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m (-\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \right] dx \\
 = & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-nb(x)) \\
 & \cdot \left[(h - b(x)) \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m (-\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) \right) \right. \\
 & - \frac{1}{2n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m (-\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m (-\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \right) \left. \right] dx \\
 & + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-nb(x)) \cos(nx) \\
 & \cdot \left[\gamma + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(\frac{1}{2} \rho b_{1,m} - \gamma b_{2,m} \right) + \left(\frac{1}{n} + b(x) \right) \left(\frac{h}{\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(\frac{\delta}{\alpha} b_{1,m} - \frac{h}{\alpha} b_{2,m} \right) \right) \right] dx \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

Hierbei sind die $b_{p,m}$ die in Gleichung (2.50) definierten Fourierkoeffizienten der Funktion $b(x)^p$. Mit der Abkürzung (2.48) vereinfacht sich die Gleichung (A.22) zu

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[\frac{E_{-n,n-m}^0 - E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} + h(E_{n,n-m}^0 - E_{n,n+m}^0) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2n} (+E_{n,n-m}^0 - E_{n,n+m}^0) - (E_{n,n-m}^1 - E_{n,n+m}^1) \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[\frac{E_{-n,n-m}^0 + E_{-n,n+m}^0}{2n \exp(2nh)} - h(E_{n,n-m}^0 - E_{n,n+m}^0) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2n} (+E_{n,n-m}^0 + E_{n,n+m}^0) + (E_{n,n-m}^1 + E_{n,n+m}^1) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{n} E_{n,n}^0 \left[(\rho b_{1,m} - 2\gamma b_{2,m}) + \frac{1}{n} \left(\frac{2\delta}{\alpha} b_{1,m} - \frac{2h}{\alpha} b_{2,m} \right) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{n} E_{n,n}^1 \left(\frac{2\delta}{\alpha} b_{1,m} - \frac{2h}{\alpha} b_{2,m} \right) \right] \\
 & = \frac{1}{n} E_{n,n}^0 \left[2\gamma + \frac{2h}{\alpha n} \right] + E_{n,n}^1 \frac{2h}{\alpha n} \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung (2.49) ergibt sich schließlich die Formel(2.47)

A.2.3 Berechnung der trigonometrischen Integrale

In Gleichung (2.56) muss das folgende Integral berechnet werden:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x) \cos(lx) \cos(kx) dx \tag{A.24}$$

Es ist $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Zur Vereinfachung werden die Gleichungen (2.45) und (2.46) benutzt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(lx) \cdot \cos(kx) \cdot \cos(x) dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(l-k)x + \cos(l+k)x] \cdot \cos(x) dx \\
 & = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(l-k-1)x + \cos(l-k+1)x \\
 & \quad + \cos(l+k-1)x + \cos(l+k+1)x] dx \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $|l - |k|| \neq 1$ gilt, kann (A.25) direkt integriert werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(l - k - 1)x + \cos(l - k + 1)x + \cos(l + k - 1)x + \cos(l + k + 1)x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(l - k - 1)x}{l - k - 1} + \frac{\sin(l - k + 1)x}{l - k + 1} + \frac{\sin(l + k - 1)x}{l + k - 1} + \frac{\sin(l + k + 1)x}{l + k + 1} \right]_{-\pi}^{+\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Jetzt wird der Fall $|l - |k|| = 1$ und $k \neq 0$ betrachtet. Es kann immer nur ein Argument der Cosinusfunktionen aus Gleichung (A.25) gleich Null sein.

Die übrigen drei Terme können somit weiterhin integriert werden und leisten keinen Beitrag zum Integral. Es bleibt das Integral über die Konstante Eins.

Das Integral ergibt also $\frac{\pi}{2}$.

Abschließend wird der Fall $|l - |k|| = 1$ und $k = 0$ betrachtet.

Dies bedeutet offensichtlich, dass $l = 1$ ist. Hier liefern zwei Terme den Beitrag $\frac{\pi}{2}$.

Als Gesamtlösung ergibt sich demnach:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(lx) \cdot \cos(kx) \cdot \cos(x) \, dx = \frac{\pi}{2} \delta_{|l-|k||,1} + \frac{\pi}{2} \delta_{1,l} \delta_{0,k} \tag{A.27}$$

A.3 Herleitung der Druckgleichung

Um die Gleichungen für den Druck zu berechnen, werden die rechten Seiten der Stokes Gleichungen ausgerechnet. (Die schon für die Wandschubspannung berechneten Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 werden übernommen):

$$\begin{aligned}
 \Delta(\psi_1 x + \psi_2) &= (2B + 2Cz + 2\Re Q_1'(\xi))x - 2\Im R_1'(\xi) - 2z\Im Q_1'(\xi) \\
 &\quad + 4z\Im Q_1'(\xi) + 4\Im Q_1(\xi) + 2\Re Q_2'(\xi) \\
 &= (2B + 2Cz + 2\Re Q_1'(\xi))x - 2\Im R_1'(\xi) \\
 &\quad + 2z\Im Q_1'(\xi) + 4\Im Q_1(\xi) + 2\Re Q_2'(\xi)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \Delta(\psi_1 x + \psi_2) &= 2B + 2Cz + 2\Re Q_1'(\xi) - \Im Q_1''(\xi)x - \Re R_1''(\xi) \\
 &\quad + z\Re Q_1''(\xi) + 2\Re Q_1'(\xi) - \Im Q_2''(\xi) \\
 &= 2B + 2Cz + 4\Re Q_1'(\xi) - \Im Q_1''(\xi)x - \Re R_1''(\xi) \\
 &\quad + z\Re Q_1''(\xi) - \Im Q_2''(\xi) \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Durch Integration nach z und Beachtung des Vorzeichens folgt:

$$\begin{aligned}
 p(x, z) &= -2Bz - Cz^2 - 4\Re Q_1(\xi) + 2\Im Q_1'(\xi)x + 2\Re R_1'(\xi) \\
 &\quad - 2z\Re Q_1'(\xi) + 2\Im Q_2'(\xi) + f(x)
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Hierbei ist $f(x)$ eine Integrationsfunktion. Analog folgt die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \Delta(\psi_1 x + \psi_2) &= 2Cx + \Re Q_1''(\xi)x - \Im R_1''(\xi) \\
 &\quad + 2\Im Q_1'(\xi) + z\Im Q_1''(\xi) + 2\Im Q_1'(\xi) + \Re Q_2'(\xi) \\
 &= 2Cx + \Re Q_1''(\xi)x - \Im R_1''(\xi) + 4\Im Q_1'(\xi) + z\Im Q_1''(\xi) + \Re Q_2'(\xi) \\
 &= \frac{\partial p}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Nun wird (A.31) nach x integriert:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow p(x, z) &= +Cx^2 - 4\Re Q_1(\xi) + 2\Im Q_1'(\xi)x + 2\Re R_1'(\xi) \\
 &\quad - 2z\Re Q_1'(\xi) + 2\Im Q_2'(\xi) + g(z)
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Hierbei ist $g(z)$ wieder die entstehende Integrationsfunktion. Wenn man nun die beiden Gleichungen für den Druck kombiniert und die Integrationskonstante p_0 einführt (Der Druck ist nur bis auf eine Konstante bestimmt), entsteht die Formel für den Druck:

$$\begin{aligned}
 p(x, z) = & p_0 - 2Bz + C(x^2 - z^2) - 4\Re Q_1(\xi) + 2\Im Q_1'(\xi)x \\
 & + 2\Re R_1'(\xi) - 2z\Re Q_1'(\xi) + 2\Im Q_2'(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{A.33}$$

Eine Zerlegung des Drucks in einen Fernfeld- und einen Nahfeldteil (analog zur Wandschubspannung) ist nicht möglich, da weder $(\psi_1 x)$ noch ψ_2 die homogene Bi-Laplace-Gleichung erfüllen.

Die Stokes-Gleichungen müssen folglich nicht integrabel sein. Es ist jedoch sinnvoll für weiterführende theoretische Betrachtungen eine geeignete Zerlegung des Drucks zu finden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Scholle, Einfluß der Randgeometrie auf die Strömung in fluiden Schichten, Habilitationsschrift, Universität Bayreuth, 2004
- [2] J. H. Spurk, N. Aksel, Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömungen, Springer, 2007, 7. Auflage
- [3] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications New York, 1970, 9. Auflage
- [4] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 1980
- [5] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer, 2000, 3. Auflage
- [6] T. Gerlich, Die systematische Behandlung der ebenen Quetschströmung, Dissertationsschrift, 1997
- [7] M. Scholle, Hydrodynamical modelling of lubricant friction between rough surfaces, Tribology International, 2006
- [8] A. E. Malevich, V. V. Mityushev, P. M. Adler, Stokes flow through a channel with wavy walls, Acta Mechanica, 2005
- [9] A. Rund, Optimierung des Materialtransportes bei schleichenden Filmströmungen, Diplomarbeit, 2005
- [10] H. Kopka, Latex - Einführung, Addison - Wesley, 2. Auflage, 1996
- [11] H. Kopka, Latex - Erweiterung, Addison - Wesley, 3. Auflage, 1997
- [12] W. A. Strauss, Partielle Differentialgleichungen - Eine Einführung, Vieweg, 1995
- [13] R. L. Panton, Incompressible Flow, Wiley, 1997, 3. Auflage
- [14] S. Wolfram, Das Mathematica Buch, Addison - Wesley, 3. Auflage, 2005 3. Auflage

- [15] E. H. K. Stelzer, *Mathematica - Ein systematisches Lehrbuch mit Anwendungsbeispielen*, Addison - Wesley, 1993
- [16] *Mathematica 5.2*, Wolfram
- [17] *Comsol Multiphysics*