

# Analysis I und II

Lars Grüne  
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik  
Mathematisches Institut  
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik  
Universität Bayreuth  
95440 Bayreuth  
`lars.gruene@uni-bayreuth.de`  
`num.math.uni-bayreuth.de`

Vorlesungsskript  
3. Auflage  
Winter- und Sommersemester 2021/2022



# Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2021/2022 und im Sommersemester 2022 an der Universität Bayreuth gehalten habe. Es ist die dritte, gründlich überarbeitete Auflage des gleichnamigen Skripts aus den Jahren 2011/2012. Eine elektronische Version dieses Skripts gibt es unter

<https://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/lars-gruene/skripten/>.

Die einzelnen Kapitel des Skriptes wurden auf Basis der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher erstellt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei den vielen aufmerksamen Student:innen sowie bei meinen Mitarbeiter:innen bedanken, die viele Fehler gefunden haben, die in dieser Version korrigiert werden konnten.

Die Verantwortung für alle verbleibenden Fehler liegt selbstverständlich bei mir. Hinweise dazu werden gerne entgegengenommen.

Bayreuth, August 2022

LARS GRÜNE



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion</b>	<b>1</b>
1.1 Ein einführendes Beispiel . . . . .	1
1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion . . . . .	3
1.3 Beispiele für die vollständige Induktion . . . . .	6
1.4 Weitere Anmerkungen zum Induktionsprinzip . . . . .	12
<b>2 Die reellen Zahlen</b>	<b>15</b>
2.1 Mengennotation . . . . .	15
2.2 Die Körperaxiome . . . . .	16
2.3 Die Anordnungsaxiome . . . . .	19
2.4 Das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	25
2.5 Infimum und Supremum . . . . .	28
2.6 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ . . . . .	33
<b>3 Folgen</b>	<b>37</b>
3.1 Definition und Beispiele . . . . .	37
3.2 Konvergenz . . . . .	38
3.3 Eigenschaften und Rechenregeln konvergenter Folgen . . . . .	41
3.4 Uneigentliche Konvergenz . . . . .	46
3.5 Cauchy-Folgen und monotone Folgen . . . . .	48
3.6 Teilfolgen . . . . .	53
<b>4 Reihen</b>	<b>59</b>
4.1 Definition und Beispiele . . . . .	59
4.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen . . . . .	62
4.3 Absolute Konvergenz . . . . .	66

<b>5 Funktionen</b>	<b>75</b>
5.1 Definition und Beispiele . . . . .	75
5.2 Grenzwerte bei Funktionen . . . . .	80
5.3 Stetigkeit . . . . .	82
5.4 Sätze über stetige Funktionen . . . . .	84
5.5 Das $\varepsilon$ - $\delta$ Kriterium für Stetigkeit . . . . .	87
<b>6 Exponentialfunktion und Logarithmus</b>	<b>93</b>
6.1 Definition der Exponentialfunktion . . . . .	93
6.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Exponentialfunktion . . . . .	97
6.3 Umkehrfunktionen . . . . .	99
6.4 Die Logarithmusfunktion . . . . .	101
6.5 Limesverhalten von $\exp$ und $\ln$ . . . . .	104
6.6 Anhang: Elementarer Beweis von Satz 6.3 . . . . .	108
<b>7 Die komplexen Zahlen</b>	<b>111</b>
7.1 Definition und Rechenregeln . . . . .	111
7.2 Veranschaulichung . . . . .	113
7.3 Komplexe Folgen und Reihen . . . . .	114
7.4 Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .	115
<b>8 Die trigonometrischen Funktionen</b>	<b>119</b>
8.1 Definition . . . . .	119
8.2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus . . . . .	120
8.3 Die Zahl $\pi$ . . . . .	123
8.4 Umkehrfunktionen . . . . .	128
8.5 Polarkoordinaten . . . . .	129
<b>9 Differentiation</b>	<b>133</b>
9.1 Definition und Beispiele . . . . .	133
9.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Differentiation . . . . .	139
9.3 Einseitige Ableitungen . . . . .	144
9.4 Die Ableitung als Funktion . . . . .	145

<b>10 Anwendungen der Differentialrechnung</b>	<b>149</b>
10.1 Extremwerte und der Mittelwertsatz . . . . .	149
10.2 Die Taylor-Entwicklung . . . . .	155
10.3 Die Regeln von L'Hospital . . . . .	163
<b>11 Das Riemann-Integral</b>	<b>165</b>
11.1 Integrale für Treppenfunktionen . . . . .	165
11.2 Das Riemann-Integral . . . . .	168
11.3 Riemann-Summen . . . . .	170
11.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	172
<b>12 Differential- und Integralrechnung</b>	<b>173</b>
12.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	174
12.2 Rechenregeln . . . . .	177
<b>13 Eigenschaften und Erweiterungen</b>	<b>183</b>
13.1 Eigenschaften des Riemann-Integrals . . . . .	183
13.2 Weitere Riemann-integrierbare Funktionen . . . . .	186
13.3 Uneigentliche Integrale . . . . .	188
<b>14 Funktionenfolgen</b>	<b>191</b>
14.1 Definitionen . . . . .	191
14.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	192
14.3 Potenzreihen . . . . .	197
14.4 Das Riemann-Integral für Funktionenfolgen . . . . .	199
14.5 Anhang: Eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 0 . . . . .	200
<b>15 Das Lebesgue-Integral</b>	<b>203</b>
15.1 Lebesgue-Nullmengen . . . . .	204
15.2 Monotone Konvergenz von Treppenfunktionen . . . . .	207
15.3 Definition des Lebesgue-Integrals . . . . .	212
15.4 Uneigentliche Lebesgue-Integrale . . . . .	218
<b>16 Eigenschaften des Lebesgue-Integral</b>	<b>221</b>
16.1 Elementare Eigenschaften . . . . .	221
16.2 Konvergenzsätze . . . . .	223

<b>17 Funktionen im <math>\mathbb{R}^n</math> und topologische Grundlagen</b>	<b>229</b>
17.1 Metrik und Norm . . . . .	232
17.2 Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	239
<b>18 Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>245</b>
18.1 Grenzwerte . . . . .	245
18.2 Stetigkeit . . . . .	248
18.3 Lineare Funktionen . . . . .	252
18.4 Weitere Stetigkeitskriterien . . . . .	255
<b>19 Kompaktheit</b>	<b>257</b>
19.1 Definition und Beispiele . . . . .	257
19.2 Eigenschaften kompakter Mengen . . . . .	259
19.3 Kompaktheit und Grenzwerte . . . . .	260
19.4 Kompaktheit und Stetigkeit . . . . .	261
19.5 Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	262
<b>20 Differenzierbarkeit im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>265</b>
20.1 Differenzierbarkeit . . . . .	266
20.2 Partielle Ableitungen . . . . .	267
20.3 Die Richtungsableitung . . . . .	273
20.4 Der Gradient . . . . .	275
20.5 Rechenregeln für Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	276
20.6 Höhere partielle Ableitungen . . . . .	277
<b>21 Anwendungen der Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>281</b>
21.1 Taylor-Polynome . . . . .	281
21.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	284
21.3 Extremwerte . . . . .	286
<b>22 Implizite Funktionen und Umkehrfunktionen</b>	<b>293</b>
22.1 Implizite Funktionen . . . . .	293
22.2 Der Banach'sche Fixpunktatz . . . . .	298
22.3 Der Satz über implizite Funktionen . . . . .	299
22.4 Umkehrfunktionen . . . . .	303
22.5 Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	306



<b>23 Das Riemann-Integral im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>309</b>
23.1 Treppenfunktionen . . . . .	309
23.2 Definition des Riemann-Integrals . . . . .	314
23.3 Der Satz von Fubini für stetige Funktionen . . . . .	316
23.4 Integrale über Teilargumente . . . . .	319
<b>24 Das Lebesgue-Integral im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>323</b>
24.1 Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	323
24.2 Das Lebesgue-Integral für Borel-messbare Funktionen . . . . .	325
24.3 Borel-messbare Mengen . . . . .	325
24.4 Lebesgue-messbare Mengen und allgemeines Lebesgue-Integral . . . . .	327
24.5 Der Satz von Fubini . . . . .	328
24.6 Die Transformationsformel . . . . .	331
24.7 $L^p$ -Räume . . . . .	333
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>339</b>
<b>Index</b>	<b>340</b>

# Kapitel 1

## Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion

Stand:  
2. August 2022

Der Hauptgegenstand der Analysis sind die Funktionen. Dies sind mathematische Objekte, die Beziehungen zwischen Zahlen ausdrücken. Funktionen werden wir in einigen Kapiteln einführen und ausführlich untersuchen. Zunächst wollen wir uns aber mit den zu Grunde liegenden Objekten, den Zahlen beschäftigen. In diesem Kapitel geht es dabei um die einfachsten Zahlen, die *natürlichen Zahlen*

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Hier vereinbaren wir, dass die natürlichen Zahlen die “0” enthalten, in manchen Büchern wird mit der “1” begonnen, was für die folgenden Ausführungen aber keinen wesentlichen Unterschied macht. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Man kann natürliche Zahlen auf streng mathematische Weise definieren — durch sogenannte *Axiome* —, worauf wir am Ende dieses Kapitels kurz eingehen werden. Für diese Vorlesung reicht die aus der Schule bekannte “informelle” Vorstellung von den natürlichen Zahlen aber völlig aus. Neben den natürlichen Zahlen werden wir in diesem Kapitel auch die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen verwenden, wobei wir erst einmal davon ausgehen, dass diese ebenfalls aus der Schule bekannt sind. Mit der genauen Definition der reellen Zahlen werden wir uns im nachfolgenden Kapitel ausführlich beschäftigen.

### 1.1 Ein einführendes Beispiel

Wir wollen in diesem ersten Kapitel eine Beweistechnik einführen, mit der man mathematische Aussagen für alle natürlichen Zahlen beweisen kann. Als Motivation betrachten wir die folgende Aufgabe:

Berechne die Summe der ersten  $n$  positiven natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n.$$

Um diese Summe kürzer schreiben zu können, drücken wir sie mit Hilfe des Summensymbols  $\sum$  aus, das wie folgt definiert ist.

**Definition 1.1** Es seien  $m, n$  natürliche Zahlen mit  $m \leq n$ . Für jede natürliche Zahl  $k = m, \dots, n$  sei  $a_k$  eine reelle Zahl. Dann definieren wir

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Zusätzlich definieren wir für  $m \geq 1$  die *leere Summe* als

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0$$

unabhängig davon, welche Werte die  $a_k$  annehmen. □

Das Symbol “:=” bedeutet dabei, dass das Objekt, das auf der Seite des Doppelpunktes steht, durch den Ausdruck auf der anderen Seite definiert wird, also gerade diesen Wert erhält.

Mit der Summenschreibweise lautet die obige Aufgabe also:

$$\text{Berechne } \sum_{k=1}^n k.$$

Zu dieser Aufgabe gibt es eine Anekdote über den Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855), dessen Lehrer seiner Klasse in seiner Schulzeit die Aufgabe gestellt hat, die ersten 100 Zahlen zusammenzuzählen. Dies ist gerade unsere Aufgabe mit  $n = 100$ . Statt die Zahlen nacheinander zusammenzuzählen, ist Gauß wie folgt vorgegangen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} k &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (49 + 52) + (50 + 51) \\ &= \underbrace{101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{\text{insgesamt 50 Summanden}} = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

und konnte die Lösung damit viel schneller ausrechnen.

Diese Idee lässt sich auf beliebige  $n$  verallgemeinern. Im Fall, dass  $n$  gerade ist, kann man schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= (1 + n) + (2 + (n - 1)) + \dots + ((n/2 - 1) + (n/2 + 2)) + (n/2 + (n/2 + 1)) \\ &= \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)}_{\text{insgesamt } n/2 \text{ Summanden}} = n/2 \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Im Fall, dass  $n$  ungerade ist, kann man den Trick geeignet abändern und erhält das selbe Ergebnis (Übungsaufgabe).

Man könnte nun meinen, dass die Aufgabe damit gelöst ist. Das ist im strengen mathematischen Sinne (den wir in dieser Vorlesung immer anlegen werden) aber nicht richtig. Zwar macht die obige Rechnung plausibel, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{1.1}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Mathematisch gesehen ist das aber noch nicht formal bewiesen! Der Grund liegt in den ‘‘Pünktchen’’ in der Summe  $(1 + n) + (2 + (n - 1)) + \dots + ((n/2 - 1) + (n/2 + 2)) + (n/2 + (n/2 + 1))$ . Zwar ist anschaulich völlig klar, was sich hinter diesen Pünktchen verbirgt, für eine lückenlose mathematische Beweisführung müssten wir die fehlenden Terme aber alle hinschreiben<sup>1</sup>. Dazu müssten wir wissen, wie groß  $n$  ist, damit wir wissen, wie viele Terme wir an Stelle der Pünktchen schreiben müssen. Wir können die obige Rechnung daher für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zu einem formal korrekten Beweis ausbauen, müssen das aber für jedes  $n$  einzeln machen. Weil es aber unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gibt, können wir auf diese Weise keinen Beweis erhalten, der die Formel für alle  $n \in \mathbb{N}$  beweist.

## 1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion löst das gerade erläuterte Problem auf eine elegante Weise. Für ein gegebenes  $n_0 \in \mathbb{N}$  dient das Prinzip dazu, eine Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  zu beweisen. Das Prinzip besteht aus den folgenden beiden Schritten:

- (1) **Induktionsanfang** ( $n = n_0$ ): Beweise, dass  $A(n_0)$  eine wahre Aussage ist
- (2) **Induktionsschritt** ( $n \rightarrow n + 1$ ): Beweise, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt: Falls  $A(n)$  eine wahre Aussage ist, so ist auch  $A(n + 1)$  eine wahre Aussage

Dass damit die Aussage  $A(n)$  tatsächlich für alle  $n \geq n_0$  gilt, ist leicht einzusehen: Dass  $A(n_0)$  gilt, folgt sofort aus (1). Wiederholte Anwendung von (2) liefert dann die Aussage  $A(n_0 + 1)$ ,  $A(n_0 + 2)$ ,  $A(n_0 + 3)$  usw. Wichtig dabei ist, dass man diese wiederholte Anwendung von (2) nicht praktisch ausführen muss: Entscheidend ist, dass man durch den Beweis von (2) weiß, dass man den Induktionsschritt beliebig oft ausführen *könnte*.

Wir illustrieren die Anwendung des Prinzips an dem Problem aus dem vorhergehenden Abschnitt und formulieren das Ergebnis als Satz.

**Satz 1.2** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Beweis:** Wir wenden das Prinzip der vollständigen Induktion für  $n_0 = 0$  auf die Aussage

$$A(n) := \left[ \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

an.

---

<sup>1</sup>Das mag für diese Aufgabe nach übertriebener Genauigkeit aussehen, so bald wir aber etwas kompliziertere Aufgabenstellungen betrachten (einige davon kommen im Rest dieses Kapitels), versagt die Anschauung schnell und es ist überhaupt nicht mehr anschaulich klar, was genau sich hinter den Pünktchen verbirgt.

**Induktionsanfang:**  $n = n_0 = 0$ . Für  $n = 0$  ist die Summe die leere Summe, also gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^0 k = 0.$$

Andererseits gilt

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Damit ist  $A(0)$  bewiesen.

**Induktionsschritt:** Es gelte  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Diese Annahme wird als *Induktionsannahme* bezeichnet. Zu zeigen ist, dass dann auch  $A(n+1)$  gilt, also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Aus der Induktionsannahme wissen wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left( \sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Zu zeigen ist also

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ausmultiplizieren der beiden Zähler liefert, dass diese Gleichung äquivalent ist zu

$$\frac{n^2 + n}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}.$$

Wegen

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2} + (n+1)$$

ist diese Gleichung tatsächlich erfüllt.  $\square$

Voraussetzung für die Anwendung der vollständigen Induktion ist, dass man zunächst einmal einen “Kandidaten” für eine gültige Aussage  $A(n)$  hat. Das Prinzip der Induktion hilft einem im Allgemeinen nicht dabei, die Aussage  $A(n)$  zu finden. Es dient lediglich dazu, eine Aussage, die man — wie im vorhergehenden Abschnitt — für endlich viele  $n$  bereits hergeleitet hat, für *alle*  $n \geq n_0$  mathematisch rigoros zu beweisen — oder zu widerlegen, wenn man beim Beweis des Induktionsschritts feststellt, dass dieser nicht gilt. Das Finden der Aussage<sup>2</sup>  $A(n)$ , für die man die Induktion tatsächlich durchführen kann, ist oftmals der schwierigste Teil, wenn man die vollständige Induktion praktisch anwenden will und verlangt meist die richtige Intuition und etwas Kreativität.

Bevor wir weitere Beispiele der vollständigen Induktion kennen lernen, wollen wir für die weiteren Beweise etwas Notation einführen, mit der man die Schreibweise von Beweisen etwas abkürzen kann.

<sup>2</sup>Ebenso muss für die Induktion natürlich auch ein “passendes”  $n_0$  gefunden werden, was aber zumeist einfacher ist, als die Aussage  $A(n)$  zu finden.

Für logische Folgerungen verwenden wir die Folgepfeilnotation<sup>3</sup>. Wenn aus einer Aussage  $A_1$  die Aussage  $A_2$  folgt, dann schreiben wir

$$A_1 \Rightarrow A_2 \quad (1.2)$$

(oder auch  $A_2 \Leftarrow A_1$ ). Dabei wird der Zusatz “ist wahr” oder “ist eine wahre Aussage” zumeist weggelassen. Statt “ $A_1$ ” ist wahr schreiben wir also meist kurz  $A_1$ .

Die im Beweis von Satz 1.2 bewiesene Folgerung kann man mit dieser Schreibweise dann kurz als

$$\text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

schreiben. Allgemein kann man den Induktionsschritt mit dieser Schreibweise kurz als

$$\text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

schreiben.

Dies zeigt bereits eine typische Eigenschaft der hier ganz abstrakt formulierten Aussagen  $A_1$  und  $A_2$ : diese beschreiben meist nicht eine Eigenschaft für eine Zahl, sondern Aussagen, die für viele Zahlen gelten, hier gerade für alle natürlichen Zahlen  $n$ .

Für  $A_1 \Rightarrow A_2$  gibt es verschiedene Sprechweisen:

- $A_1$  impliziert  $A_2$
- wenn  $A_1$  gilt, dann gilt auch  $A_2$
- $A_1$  ist hinreichend für  $A_2$
- $A_2$  folgt aus  $A_1$
- $A_2$  gilt, wenn  $A_1$  gilt
- $A_2$  ist notwendig für  $A_1$

Die letzte Sprechweise ist dabei durch die folgende Tatsache motiviert: Nehmen wir an, die Folgerung  $A_1 \Rightarrow A_2$  ist wahr. Als Beispiel für eine solche wahre Folgerung nehmen wir die Aussage für natürliche Zahlen  $n$

$$\underbrace{n \text{ ist ohne Rest durch 4 teilbar}}_{A_1} \Rightarrow \underbrace{n \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}}_{A_2}.$$

Diese ist sicherlich für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  wahr. Wenn nun  $A_2$  für ein  $n$  nicht gilt, so kann auch  $A_1$  für dieses  $n$  nicht gelten (denn wenn  $A_1$  gälte, würde die obige Folgerung implizieren, dass  $A_2$  auch gilt). Die Eigenschaft “ $n$  ist ohne Rest durch 2 teilbar” ( $A_2$ ) ist also eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Eigenschaft “ $n$  ist ohne Rest durch 4 teilbar” ( $A_1$ ) gilt.

<sup>3</sup>Diese wird an der Tafel öfter benutzt als in diesem Skript.

Den gerade benutzten Zwischenschritt “wenn  $A_2$  nicht gilt, dann gilt auch  $A_1$  nicht”, kann man mit dem Folgepfeil auch als

$$A_2 \text{ gilt nicht} \Rightarrow A_1 \text{ gilt nicht} \quad (1.3)$$

schreiben. Da man die Argumentation von oben in gleicher Weise in umgekehrter Richtung anwenden kann, ist die Folgerung (1.3) gleichbedeutend mit der Folgerung (1.2), was man sich in Beweisen oft zu Nutze macht. Statt “ $A_1$  gilt nicht” schreibt man kurz auch  $\neg A_1$ .

Wenn für zwei Aussagen sowohl  $A_1 \Rightarrow A_2$  als auch  $A_2 \Rightarrow A_1$  gilt, so schreibt man

$$A_1 \Leftrightarrow A_2.$$

Die Aussagen  $A_1$  und  $A_2$  heißen dann *äquivalent* und man sagt auch:  $A_1$  gilt *genau dann*, wenn  $A_2$  gilt<sup>4</sup>.

### 1.3 Beispiele für die vollständige Induktion

In diesem Abschnitt wollen wir das Prinzip der vollständigen Induktion an einigen Beispielaussagen illustrieren und dabei nebenbei einige Aussagen beweisen, die im weiteren Verlauf der Vorlesung nützlich sind.

Wir beginnen mit der Frage nach einer Formel für die Summe

$$\sum_{k=0}^n x^k,$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$  ist und wir vereinbaren, dass  $x^0 = 1$  gelten soll. Diese Summe wird *geometrische Reihe* genannt und wird uns im weiteren Verlauf der Vorlesung noch öfter begegnen. Wir betrachten hier den Fall  $x \neq 1$ ; warum, werden wir in Kürze sehen. Das ist aber keine große Einschränkung, weil wir für den Fall  $x = 1$  gar keinen Induktionsbeweis benötigen: in diesem Fall gilt nämlich  $x^k = 1$  für alle  $k$  und wir erhalten direkt  $\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1$ .

Um eine Idee zu bekommen, wie die Lösung für  $x \neq 1$  aussehen könnte (denn solch eine “Idee” brauchen wir ja, um die Induktion überhaupt zu beginnen), testen wir zunächst einmal kleine  $k$ :

$$\sum_{k=0}^0 x^k = 1, \quad \sum_{k=0}^1 x^k = 1 + x, \quad \sum_{k=0}^2 x^k = 1 + x + x^2, \quad \sum_{k=0}^3 x^k = 1 + x + x^2 + x^3, \dots$$

Hier sieht man noch nicht so wirklich viel. Die richtige Idee ist nun, die Ausdrücke auf der rechten Seite mit  $1 - x$  zu erweitern (wer darauf zum ersten Mal gekommen ist, ist meines Wissens nicht überliefert). Damit erhält man

$$1 \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x}, \quad (1+x) \frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x-x-x^2}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x},$$

<sup>4</sup>Die Aussagen “ $A_1$  gilt, wenn  $A_2$  gilt” und “ $A_1$  gilt genau dann, wenn  $A_2$  gilt” werden oft verwechselt, was schon zu manchem falschen Beweis geführt hat. In der Kurzschreibweise lautet die erste Aussage  $A_1 \Leftarrow A_2$  und die zweite  $A_1 \Leftrightarrow A_2$ . Hier ist die Verwechslungsgefahr viel geringer.

$$(1+x+x^2)\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3}{1-x} = \frac{1-x^3}{1-x},$$

$$(1+x+x^2+x^3)\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4}{1-x} = \frac{1-x^4}{1-x}.$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

gilt (und erklärt auch, warum wir  $x = 1$  ausgeschlossen haben, denn durch  $1-1=0$  kann man nicht teilen). Dass diese Vermutung tatsächlich stimmt, beweisen wir wieder per Induktion.

**Satz 1.3** Für die geometrische Reihe gilt für jedes  $x \neq 1$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage<sup>5</sup>

$$A(n) := \left[ \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right]$$

per Induktion beginnend mit  $n = n_0 = 0$ . Hierfür gilt

$$\sum_{k=0}^0 x^k = 1 = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^1}{1-x} \Rightarrow A(n_0).$$

Für den Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$  nehmen wir an, dass  $A(n)$  für ein gegebenes  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Für  $n+1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ (Ind. ann.)}} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}, \end{aligned}$$

was genau  $A(n+1)$  ist. □

Betrachten wir nun zur Abwechslung ein Problem, in dem keine Summe auftaucht. Es geht um die Frage, auf wie viele verschiedene Arten man die Elemente einer  $n$ -elementigen Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  anordnen kann.

---

<sup>5</sup>Wenn man etwas Übung im Umgang mit der vollständigen Induktion hat, kann man die ausführliche Definition von  $A(n)$  im Beweis auch weglassen, was wir im Folgenden auch machen werden. Für den Anfang ist es aber sicherlich eine gute Hilfe, genau hinzuschreiben, was man eigentlich beweisen will.



Auch hier machen wir wieder eine Vorüberlegung, um auf einen Ansatz für die Induktion zu kommen: An der ersten Stelle der Anordnung haben wir genau  $n$  Möglichkeiten, um ein Element zu wählen. An der zweiten Stelle bleiben dann noch  $n - 1$  Möglichkeiten, an der dritten  $n - 2$  usw. bis für die letzte Stelle schließlich noch genau ein Element übrig bleibt. Insgesamt führt das auf

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten. Diese Zahl wird  $n$  *Fakultät* genannt und mit  $n!$  bezeichnet. Führt man analog zum Summensymbol (und mit den gleichen  $m$ ,  $n$  und  $a_k$  wie in Definition 1.1) ein Produktsymbol mittels

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

und das *leere Produkt* als

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1$$

ein, so kann man die Fakultät auch als

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

schreiben.

Den folgenden Satz beweisen wir wieder mit Induktion, wodurch wir das informelle “usw.” in der obigen Begründung vermeiden können.

**Satz 1.4** Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer  $n$ -elementigen Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ , beträgt  $n!$ .

**Beweis:** Per vollständiger Induktion mit  $n_0 = 1$ .

Für  $n = n_0 = 1$  gibt es offensichtlich genau eine Möglichkeit der Anordnung, weswegen die Aussage wegen  $1! = 1$  für  $n_0 = 1$  stimmt.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Für eine Menge mit  $n + 1$  Elementen gibt es dann gerade  $n + 1$  verschiedene Elemente, die an der ersten Stelle der Anordnung stehen können. Für die in der Anordnung folgenden restlichen  $n$  Elemente gibt es nach Induktionsannahme jeweils gerade  $n!$  Möglichkeiten. Insgesamt erhalten wir also

$$(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$$

mögliche Anordnungen, womit die Aussage für  $n + 1$  bewiesen ist.  $\square$

Die Fakultät ist aber nicht nur für die Beschreibung von Teilmengen gut. Im Rest dieses Abschnitts betrachten wir das Problem, den Ausdruck

$$(x + y)^n$$

für zwei reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  auszumultiplizieren. Das Resultat, das wir so herleiten wollen, wird *Binomischer Lehrsatz* genannt.

Um zu einer Aussage  $A(n)$  zu kommen, für die wir dann einen Induktionsbeweis führen können, ist hier eine etwas längere Vorüberlegung nötig. Wir beginnen wieder damit, die Lösung für kleine  $n$  zu berechnen. Das ist natürlich mit etwas Rechenaufwand verbunden; der Kürze halber stellen wir hier nur die Ergebnisse für  $n = 0, \dots, 4$  dar:

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1 \\(x+y)^1 &= x+y \\(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Die etwas seltsame Anordnung der rechten Seiten dieser Gleichungen in Dreiecksform hilft jetzt, ein Muster bei den Vorfaktoren der einzelnen Terme zu erkennen. Schreiben wir diese ohne die  $x$  und  $y$  hin (und schreiben eine 1, wo kein expliziter Vorfaktor steht), so erhält man

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}$$

Das Muster, das man jetzt erkennen kann, besteht darin, dass die Einträge am Rand immer den Wert 1 haben und jede nicht am Rand stehende Zahl gerade die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen ist. Die entstehende Figur nennt man nach Blaise Pascal (1623–1662) das *Pascalsche Dreieck*, es war tatsächlich aber bereits vor Pascal bekannt<sup>6</sup>. Die Einträge im Pascalschen Dreieck werden als *Binomialkoeffizienten* bezeichnet. Wir nummerieren die Einträge im Pascalschen Dreieck nun von oben nach unten mit  $n$  und von links nach rechts mit  $k$  durch (jeweils beginnend mit 0) und bezeichnen den jeweiligen Binomialkoeffizienten mit  $\binom{n}{k}$ , also z.B.  $\binom{2}{1} := 2$ ,  $\binom{4}{3} := 4$  oder allgemein

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}$$

Dann erhalten wir aus dem Pascalschen Dreieck die Beziehungen

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad (1.4)$$

sowie

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \quad (1.5)$$

<sup>6</sup>In Wikipedia findet man viele interessante Informationen dazu, die man natürlich mit der bei Wikipedia-Einträgen immer angebrachten Vorsicht betrachten sollte.

Durch diese Beziehungen sind die Binomialkoeffizienten für alle  $n \geq 0$  und alle  $k = 0, \dots, n$  eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen, die wir hier aus Zeitgründen nicht ausführen, kommt man auf die Vermutung, dass die Binomialkoeffizienten durch die Formel

$$\prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (1.6)$$

gegeben ist, die man (wie man mit etwas Überlegen sieht) für  $k = 0, \dots, n$  auch als

$$\prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

schreiben kann, wenn wir die Konvention  $0! = 1$  verwenden. Aus dieser Darstellung folgt insbesondere

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

d.h. die Formel liefert wegen (1.5) den korrekten Wert für alle Randelemente im Pascalschen Dreieck. Wir beweisen nun per Induktion, dass die Formel (1.6) auch für alle anderen Einträge im Pascalschen Dreieck stimmt.

**Lemma 1.5** <sup>7</sup> Für die Binomialkoeffizienten gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k = 0, \dots, n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage per Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  gibt es nur den Koeffizienten  $\binom{0}{0}$ , für den die Formel wegen

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^0 \frac{n-j+1}{j} = 1$$

gilt (beachte, dass wir hier wieder das leere Produkt benutzt haben).

Für den Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$  nehmen wir an, dass die Formel für ein gegebenes  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k = 0, \dots, n$  stimmt. Für die Elemente am Rand hatten wir bereits vorher überlegt, dass die Formel wegen (1.7) stimmt. Im Induktionsschritt müssen wir also nur noch zeigen, dass die Formel für  $n+1$  auch für die nicht am Rand liegenden Elemente stimmt. Dazu ist zu beweisen, dass (1.4) gilt, d.h. dass die Formel für  $n+1$  gerade gleich der Summe der Formeln für die beiden darüberstehenden Koeffizienten aus der Zeile  $n$  ist, dass also

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$

<sup>7</sup>Ein Lemma ist in der Mathematik eine Hilfsaussage, die meist zur Vorbereitung des Beweises eines Satzes benötigt wird.

gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
 \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(k+1)n! + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}
 \end{aligned}$$

ist dies aber gerade erfüllt, womit der Induktionsschritt bewiesen ist.  $\square$

Schauen wir jetzt zurück auf die Herleitung des Pascalschen Dreiecks aus den Koeffizienten des ausmultiplizierten Terms  $(x+y)^n$ , kommt man leicht auf die Vermutung

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \quad (1.8)$$

Diese Gleichung ist gerade die Aussage des *Binomischen Lehrsatzes*, den wir jetzt formulieren und beweisen.

**Satz 1.6** Für alle reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  und jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt (1.8).

**Beweis:** Mit vollständiger Induktion über  $n$ . Für  $n=0$  gilt  $(x+y)^0 = 1$  und

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1.$$

Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Zum Beweis des Induktionsschritts rechnen wir

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
 \text{(Ind.-annahme)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
 &= \left( x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \right) + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \right) \\
 &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \underbrace{x^{n-(k-1)} y^k}_{=x^{n+1-k}} + y^{n+1} \\
 &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
 (1.4) &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
 (1.7) &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k,
 \end{aligned}$$

womit die Aussage für  $n+1$  gilt und der Induktionsschritt bewiesen ist.  $\square$

## 1.4 Weitere Anmerkungen zum Induktionsprinzip

Betrachtet man die vorhergehenden Abschnitte, so kann man mit gewissem Recht feststellen, dass manche Argumente nicht ganz konsequent sind. So haben wir viel Aufwand getrieben, um die ‘‘Pünktchen’’ aus dem Beweis von (1.1) mit Hilfe der vollständigen Induktion zu entfernen. Tatsächlich finden sich die Pünktchen aber bereits in der Definition der Summe  $\sum_{k=m}^n a_k$  und sogar in der Definition der natürlichen Zahlen ganz am Anfang dieses Kapitels.

Tatsächlich kann man durch Anwendung induktiver Definitionen, die Pünktchen komplett vermeiden. Die Summe kann man z.B. (mit  $m$  und  $n$  wie in Definition 1.1) alternativ mittels

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^j a_k := \sum_{k=m}^{j-1} a_k + a_j \quad \text{für } j = m, \dots, n$$

induktiv definieren. Der Grund dafür, dass wir das nicht gleich am Anfang gemacht haben, liegt einzig und allein darin, dass die Form von Definition 1.1 in diesem einfachen Fall kaum mathematische Missverständnisse hervorrufen wird, dafür aber deutlich anschaulicher ist.

Ähnlich können die natürlichen Zahlen selbst ohne “Pünktchen” definiert werden, und zwar über die folgenden Bedingungen.

- (N0) Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge  $\mathbb{N}$ , die ein ausgezeichnetes Element “0” enthält.
- (N1) Auf  $\mathbb{N}$  ist eine Abbildung  $\nu$  definiert, die jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $\nu(n) \in \mathbb{N}$  mit  $\nu(n) \neq 0$  zuordnet. Diese Abbildung erfüllt  $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \nu(n_1) \neq \nu(n_2)$  für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ .
- (N2) Für jede Teilmenge  $N$  von  $\mathbb{N}$ , welche die 0 und für jedes Element  $n \in N$  auch  $\nu(n)$  enthält, gilt  $N = \mathbb{N}$ .

Die Abbildung  $\nu(n)$  wird dabei als Nachfolgerin von  $n$  bezeichnet. Verwenden wir statt der abstrakten Abbildung  $\nu$  die aus der Schule bekannte Addition, so ergibt sich gerade  $\nu(n) = n + 1$ .

Die Aussagen (N0)–(N2) werden *Peano-Axiome* genannt, nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932). Ein *Axiom* bezeichnet allgemein eine Bedingung, die sich nicht aus anderen Bedingungen folgern lässt und folglich einen “Grundbaustein” in der Definition mathematischer Objekte darstellt.

Man muss etwas nachdenken, um sich davon zu überzeugen, dass die uns seit der Grundschule bekannten natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome eindeutig festgelegt sind — tatsächlich sind sie es wirklich, wir wollen diesen Aspekt aber aus Zeitgründen nicht vertiefen. Eine ausführliche Behandlung findet sich z.B. in Kapitel I.5 des Buchs *Analysis I* von Amman und Escher [1]. Anzumerken ist allerdings noch, dass die Axiome lediglich die Struktur der natürlichen Zahlen festlegen, nicht aber deren Bezeichnung. In der üblichen Notation der natürlichen Zahlen mit arabischen Ziffern gilt

$$\nu(0) = 1, \quad \nu(\nu(0)) = 2, \quad \nu(\nu(\nu(0))) = 3 \text{ usw.}$$

man könnte aber auch ganz andere Symbole wählen, z.B. I, II, III, IV, V, ... wie es im alten Rom gemacht wurde (wo allerdings die Null noch nicht bekannt war) oder 0, 1, 10, 11, 100, ... wie es bei der Binärdarstellung von Zahlen im Computer gemacht wird. Wichtig ist nur, dass die Struktur der Menge  $\mathbb{N}$  unabhängig von der Bezeichnung durch (N0)–(N2) eindeutig festgelegt ist, was bedeutet, dass jede Zahl in einer bestimmten Bezeichnung eindeutig einer Zahl in einer beliebigen anderen Bezeichnung solcherart zugeordnet werden kann, dass die jeweiligen nachfolgenden Zahlen ebenfalls wieder einander zugeordnet werden. Das Axiom (N2) bildet hierbei die formale Grundlage für das Prinzip der vollständigen Induktion, denn sie stellt sicher, dass wir mit dem Induktionsprinzip tatsächlich jedes  $n \in \mathbb{N}$  “erreichen”.



# Kapitel 2

## Die reellen Zahlen

Stand:  
2. August 2022

In diesem Kapitel werden wir die für die Analysis grundlegenden *reellen Zahlen* einführen. Zwar gehen wir davon aus, dass diese aus der Schule bereits bekannt sind, allerdings werden wir dieses Wissen in diesem Kapitel nicht voraussetzen. Zum Beginn führen wir einige Bezeichnungen für Mengen ein, die wir im Folgenden verwenden werden.

### 2.1 Mengennotation

Eine *Menge* schreiben wir als

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\},$$

wobei die  $a_i$  die *Elemente* von  $A$  genannt werden. Falls  $a$  ein Element einer Menge  $A$  ist, schreiben wir  $a \in A$ , falls nicht schreiben wir  $a \notin A$ .

Oft benötigen wir Mengen, die alle Elemente einer (oder mehrerer) gegebenen Menge(n) mit gewissen Eigenschaften enthalten. Dies schreiben wir formal als

$$B := \{a \in A \mid a \text{ erfüllt } \dots\}$$

oder auch als

$$B := \{a \mid a \in A \text{ und } a \text{ erfüllt } \dots\}.$$

Das logische “und” bedeutet dabei, dass  $a$  beide Bedingungen zugleich erfüllen muss und wird auch mit dem Symbol  $\wedge$  abgekürzt. Statt dem Trennstrich “|” kann man hierbei auch den Doppelpunkt “:” verwenden.

Zum Beispiel können wir die Menge aller geraden natürlichen Zahlen auf diese Weise beschreiben als

$$G := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ohne Rest durch } 2 \text{ teilbar}\}$$

oder auch als

$$G := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$

Die übliche Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  können wir mit dieser Schreibweise definieren als

$$A \cup B := \{a \mid a \in A \text{ oder } a \in B\}$$



(gesprochen:  $A$  vereinigt  $B$ ). Hierbei bedeutet das logische “oder”, dass mindestens eine der Bedingungen erfüllt ist<sup>1</sup>. Das logische “oder” wird auch mit  $\vee$  abgekürzt. Der Schnitt zweier Mengen ist definiert als

$$A \cap B := \{a \mid a \in A \text{ und } a \in B\}$$

(gesprochen:  $A$  geschnitten  $B$ ) und die Mengesubtraktion als

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$$

(gesprochen:  $A$  ohne  $B$ , manchmal auch  $A$  minus  $B$ ).

Eine Menge  $B$  heißt *Teilmenge* einer Menge  $A$ , wenn für jedes  $b \in B$  auch  $b \in A$  gilt. Wir schreiben dann  $B \subset A$ .

Für eine Aussage der Form “für alle  $a \in A$  gilt ...” wird oft die Schreibweise “ $\forall a \in A : \dots$ ” verwendet und eine Aussage der Form “es gibt ein  $a \in A$  für das ... gilt” wird oft als “ $\exists a \in A : \dots$ ” geschrieben.

Aus der Schule sind bereits verschiedene Mengen von Zahlen bekannt:

$$\text{die natürlichen Zahlen} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\text{die ganzen Zahlen} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{die rationalen Zahlen} \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ebenso sind die reellen Zahlen bereits bekannt. Da diese für die Analysis eine besondere Bedeutung haben, werden wir sie in diesem Kapitel von Grund auf einführen. Dies geschieht mit Hilfe sogenannter *Axiome*, d.h. durch Bedingungen, die sich nicht aus anderen Bedingungen ableiten lassen.

## 2.2 Die Körperaxiome

Die erste Gruppe von Axiomen, die wir betrachten wollen, sind die sogenannten *Körperaxiome*. Die Idee hinter diesen Axiomen ist, die Regeln für die üblichen Grundrechenarten so auf das Wesentliche zu reduzieren, dass alle bekannten Regeln daraus abgeleitet werden können und dass kein Axiom aus dem anderen abgeleitet werden kann.

**Körperaxiome:** Gegeben sei eine Menge  $\mathbb{K}$  von Zahlen, auf der zwei Operationen  $\oplus$  (“Addition”) und  $\odot$  (“Multiplikation”) definiert sind, die je zwei Elementen  $a, b \in \mathbb{K}$  neue Elemente  $a \oplus b \in \mathbb{K}$  und  $a \odot b \in \mathbb{K}$  (meist kurz geschrieben als  $a \odot b = ab$ ) zuordnen.

Die Menge  $\mathbb{K}$  heißt dann ein *Körper*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind.

(K1) Addition und Multiplikation sind *kommutativ*, d.h. für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \text{und} \quad ab = ba.$$

<sup>1</sup>Im Gegensatz zu dem umgangssprachlichen “oder”, das oft im Sinne “entweder ...oder” verwendet wird. Beim logischen “oder” ist es erlaubt, dass beide Bedingungen zugleich erfüllt sind, beim umgangssprachlichen oder schließt man dies oft aus.

(K2) Addition und Multiplikation sind *assoziativ*, d.h. für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \text{und} \quad (ab)c = a(bc).$$

(K3) Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt

$$a(b \oplus c) = ab \oplus ac.$$

(K4) Es existieren Elemente  $\mathbf{0} \in \mathbb{K}$  und  $\mathbf{1} \in \mathbb{K}$  mit  $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ , so dass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt

$$a \oplus \mathbf{0} = a \quad \text{und} \quad a \odot \mathbf{1} = a.$$

Die Elemente  $\mathbf{0}$  und  $\mathbf{1}$  werden *neutrale Elemente* genannt.

(K5) Für jedes  $a \in \mathbb{K}$  existiert ein Element  $-a \in \mathbb{K}$  und, falls  $a \neq \mathbf{0}$ , ein Element  $a^{-1} \in \mathbb{K}$ , so dass gilt

$$a \oplus (-a) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad a \odot a^{-1} = \mathbf{1}.$$

Die Elemente  $-a$  und  $a^{-1}$  werden *inverse Elemente (zu  $a$ )* genannt.

□

Alle aus der Schule bekannten Rechenregeln lassen sich aus diesen Axiomen ableiten. Hier ein paar Beispiele dafür<sup>2</sup>:

- Es gilt  $a \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . **Beweis:** Aus (K4) folgt  $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ , also auch  $a \odot \mathbf{0} = a \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0})$ . Mit (K3) erhalten wir daraus  $a \odot \mathbf{0} = a \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) = a \odot \mathbf{0} \oplus a \odot \mathbf{0}$ . Addieren wir nun auf beiden Seiten  $-(a \odot \mathbf{0})$  so erhalten wir daraus  $\mathbf{0} = a \odot \mathbf{0} \oplus -(a \odot \mathbf{0}) = a \odot \mathbf{0} \oplus a \odot \mathbf{0} \oplus -(a \odot \mathbf{0}) = a \odot \mathbf{0}$ . □
- Das inverse Element in (K5) ist eindeutig, was wir für die Addition **beweisen:** Seien  $-a$  und  $-\tilde{a}$  zwei inverse Elemente, so gilt

$$\begin{aligned} (-\tilde{a}) &\stackrel{(K4)}{=} (-\tilde{a}) \oplus \mathbf{0} \stackrel{(K1)}{=} \mathbf{0} \oplus (-\tilde{a}) \stackrel{(K5)}{=} (a \oplus (-a)) \oplus (-\tilde{a}) \\ &= ((-a) \oplus a) \oplus (-\tilde{a}) \stackrel{(K2)}{=} (-a) \oplus (a \oplus (-\tilde{a})) \stackrel{(K5)}{=} (-a) \oplus \mathbf{0} \stackrel{(K4)}{=} (-a). \end{aligned}$$

□

- Es gilt  $-(-a) = a$ . **Beweis:** Aus (K1) und (K5) folgt  $(-a) \oplus a = a \oplus (-a) = \mathbf{0}$ . Also ist  $a$  das inverse Element zu  $-a$  und daher wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements gleich  $-(-a)$ . □
- Auf Grund des Assoziativgesetzes ist es gerechtfertigt, einfach  $a \oplus b \oplus c$  oder  $abc$  zu schreiben, weil das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Rechnungen abhängt.

<sup>2</sup>Die Hauptschwierigkeit bei den folgenden Beweisen ist, dass man immer versucht ist, in den Umformungen aus der Schule bekannte Rechenregeln anzuwenden, obwohl diese formal noch gar nicht bewiesen sind. Es braucht erfahrungsgemäß eine gewisse Übung, wirklich nur die Axiome und daraus bereits gefolgerte Tatsachen zu verwenden. Dieses Problem werden wir aber nur in diesem Kapitel haben. So bald wir am Ende dieses Kapitels die reellen Zahlen vollständig eingeführt haben, können wir wieder mit allen aus der Schule bekannten Regeln rechnen.

- Es gilt  $-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$ . **Beweis:** Da sowohl  $(a \oplus b) + (-(a \oplus b)) = \mathbf{0}$  als auch  $(a \oplus b) \oplus (-a) \oplus (-b) = a \oplus (-a) + b \oplus (-b) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$  gilt, folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit des inversen Elements.  $\square$
- Die nicht explizit aufgeführten Operationen Subtraktion und Division lassen sich durch

$$b \ominus a := b \oplus (-a) \quad \text{und} \quad b \oslash a := b \odot a^{-1}$$

für  $-a$  und  $a^{-1}$  aus (K5) definieren, wobei wir im Fall der Division natürlich  $a \neq \mathbf{0}$  voraussetzen.

Betrachten wir die oben genannten Mengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Addition für  $\oplus$  und der üblichen Multiplikation für  $\odot$ , so erfüllen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  die Körperaxiome nicht: In  $\mathbb{N}$  ist z.B. bereits die Existenz von  $-a$  nicht gegeben. In  $\mathbb{Z}$  sind alle Axiome mit Ausnahme der Existenz von  $a^{-1}$  erfüllt<sup>3</sup> — eine solche Struktur nennt man einen *Ring*. Das inverse Element der Multiplikation  $a^{-1}$  fehlt z.B. für die Zahl 2, da  $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ . In  $\mathbb{Q}$  existiert dies und da man auch alle anderen Körperaxiome für  $\mathbb{Q}$  nachprüfen kann, ist  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  ein Körper.

Natürlich sind die Körperaxiome historisch gerade aus der Anschauung der “üblichen” Rechenregeln entstanden. Es gibt aber auch Körper, deren “Addition” und “Multiplikation” anders als üblich definiert sind und die noch nicht einmal unendlich viele Zahlen enthalten müssen. Betrachten wir z.B. die zweielementige Menge  $\{0, 1\}$  und definieren eine “Addition” mittels

$$0 \oplus 0 := 0, \quad 0 \oplus 1 := 1, \quad 1 \oplus 0 := 1, \quad 1 \oplus 1 := 0$$

und eine “Multiplikation” mittels

$$0 \odot 0 := 0, \quad 0 \odot 1 := 0, \quad 1 \odot 0 := 0, \quad 1 \odot 1 := 1,$$

so kann man — durch Ausprobieren aller Möglichkeiten (was einfach aber etwas länglich ist) — nachrechnen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind. Der so definierte Körper wird mit  $\mathbb{F}_2$  bezeichnet und ist ein schönes Beispiel dafür, dass mathematische Definitionen manchmal unerwartete Effekte haben können. Betrachten wir z.B. das Axiom (K5) für  $a = 1$  und die Addition in  $\mathbb{F}_2$ . Aus den gerade definierten Rechenregeln folgt wegen  $1 \oplus 0 = 1$  und  $1 \oplus 1 = 0$ , dass die einzige mögliche Wahl für  $-a$  mit  $a \oplus (-a) = 0$  gerade  $-a = 1$  ist. Es folgt also  $-1 = 1$ , was auf den ersten Blick sicherlich überraschend und sehr ungewöhnlich ist. “Exotische” Körper wie  $\mathbb{F}_2$  sind in vielen Bereichen der Mathematik und auch in Anwendungen wie z.B. der Codierungstheorie wichtige Hilfsmittel, spielen allerdings im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine besondere Rolle. Im Folgenden schreiben wir daher wieder wie üblich  $+$  statt  $\oplus$  und  $\cdot$  statt  $\odot$ .

<sup>3</sup>Deswegen kann man in  $\mathbb{Z}$  mit der gerade angegebenen Regel eine Subtraktion definieren. In  $\mathbb{N}$  geht das nicht auf diese Weise, allerdings kann man die Subtraktion auf  $\mathbb{Z}$  wegen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{N}$  übertragen, wenn man nur Subtraktionen mit Ergebnis  $a - b \in \mathbb{N}$  zulässt. Dies definiert aber keine vollständige Subtraktion auf  $\mathbb{N}$ , weil diese nicht für alle  $a, b$  definiert ist.

## 2.3 Die Anordnungsaxiome

Eine zweite Eigenschaft der bekannten Zahlmengen ist die Tatsache, dass wir je zwei Elemente der Größe nach vergleichen können. Genau wie die Körperaxiome so formuliert sind, dass sich alle bekannten Eigenschaften der Grundrechenarten daraus ableiten lassen, sind die nun folgenden Anordnungsaxiome so beschaffen, dass sich alle Rechenregeln für Ungleichungen daraus ergeben.

Um die Herleitung etwas abzukürzen, beschränken wir uns hierbei auf Körper  $\mathbb{K}$ , die die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  als Teilmenge enthalten. “Enthalten” ist dabei eine informelle Formulierung, die wir noch mathematisch präzise erläutern müssen: Formal bedeutet dies, dass wir jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eindeutig eine Zahl  $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$  zuordnen können, so dass für alle  $n, m, k \in \mathbb{N}$  die Äquivalenz

$$n + m = k \quad \Leftrightarrow \quad n_{\mathbb{K}} + m_{\mathbb{K}} = k_{\mathbb{K}}$$

für die Addition in  $\mathbb{K}$  gilt. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  ist dies erfüllt, wenn wir — wie üblich — jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gerade den Bruch  $n/1 \in \mathbb{Q}$  zuordnen. Das Beispiel  $\mathbb{F}_2$  zeigt aber, dass man auch Körper mit anderen Additionen definieren kann; aus diesem Grund muss es nicht unbedingt der Fall sein, dass man eine Zuordnung finden kann, so dass die Additionen übereinstimmen.<sup>4</sup> Wenn eine solche Zuordnung möglich ist, muss man zwischen  $n$  und  $n_{\mathbb{K}}$  und den verschiedenen Additionen nicht mehr unterscheiden, weil ja stets das gleiche Ergebnis herauskommt. Wir können also einfach  $n$  statt  $n_{\mathbb{K}}$  schreiben.

**Anordnungsaxiome:** Gegeben sei ein Körper  $\mathbb{K}$ , der die natürlichen Zahlen im gerade erläuterten Sinne enthält. In  $\mathbb{K}$  definieren wir gewisse Elemente  $a \in \mathbb{K}$  als *positiv* (Schreibweise:  $a > 0$ ) und verlangen, dass für die positiven Zahlen die folgenden Axiome gelten:

(A1) Für jede Zahl  $a \in \mathbb{K}$  gilt genau eine der drei Relationen

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0.$$

(A2) Aus  $a > 0$  und  $b > 0$  folgt  $a + b > 0$  und  $ab > 0$ .

(A3) (Archimedisches Axiom) Zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{K}$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n - a > 0$ .

□

Ein Körper, der die Axiome (A1), (A2) und (A3) erfüllt wird *archimedisch angeordneter Körper* genannt.

Wenn  $a$  positiv ist, nennen wir  $-a$  *negativ*.

Das Axiom (A1) kann man dann auch wie folgt formulieren: jede Zahl  $a \in \mathbb{K}$  ist entweder positiv oder negativ oder gleich Null. “Entweder . . . oder” bedeutet dabei, dass  $a$  nicht zwei dieser Eigenschaften zugleich haben kann. Axiom (A2) besagt in Worten, dass Summen und Produkte positiver Zahlen wieder positiv sind.

<sup>4</sup>Für  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$  braucht man dies natürlich gar nicht erst versuchen, da bereits die Zuordnung  $n \leftrightarrow n_{\mathbb{K}}$  scheitert, weil  $\mathbb{F}_2$  ja nur 2 Elemente besitzt.

Die Menge der positiven Zahlen wird mit  $\mathbb{K}_+$ , die der negativen mit  $\mathbb{K}_-$  bezeichnet. Zudem schreiben wir für  $a, b \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{array}{lll} a > b, & \text{falls } a - b > 0 & \text{“}a \text{ ist größer als } b\text{”} \\ a \geq b, & \text{falls } a > b \text{ oder } a = b & \text{“}a \text{ ist größer oder gleich } b\text{”} \\ a < b, & \text{falls } b > a & \text{“}a \text{ ist kleiner als } b\text{”} \\ a \leq b, & \text{falls } b \geq a & \text{“}a \text{ ist kleiner oder gleich } b\text{”} \end{array}$$

Die Forderung in Axiom (A3) lässt sich damit umschreiben als  $n > a$ . Das Axiom besagt damit, dass es für jede Zahl  $a \in \mathbb{K}$  eine natürliche Zahl  $n$  geben muss, die größer als  $a$  ist.

Für die rationalen Zahlen  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  sind alle Anordnungsaxiome erfüllt, wenn wir die positiven Zahlen wie üblich als

$$\mathbb{K}^+ = \mathbb{Q}^+ := \{p/q \in \mathbb{Q} \mid p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

definieren. (A1) gilt, weil jede rationale Zahl  $a = p/q$  als Zähler entweder eine natürliche Zahl  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \neq 0$  hat (dann gilt  $a > 0$ ) oder eine negative Zahl  $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  (dann erhalten wir  $a < 0$ ) oder  $p = 0$  und damit  $a = 0$  gilt. Das Axiom (A2) folgt aus den üblichen Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Brüchen und (A3) folgt, wenn wir  $n = 0$  im Fall  $p \notin \mathbb{N}$  und  $n = p + 1$  im Fall  $p \in \mathbb{N}$  wählen.

Alle bekannten Rechenregeln für Ungleichungen lassen sich aus den Axiomen ableiten. Der folgende Satz gibt einige Beispiele für Aussagen, die sich allein aus (A1) und (A2) folgern lassen.

**Satz 2.1** Für einen Körper  $\mathbb{K}$ , der (A1) und (A2) erfüllt, gilt für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{K}$ :

- (1)  $a > b$  und  $b > c \Rightarrow a > c$ .
- (2)  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ .
- (3) Falls  $c > 0$  gilt:  $a > b \Rightarrow ac > bc$ .
- (4)  $a > 0 \Rightarrow -a < 0$  und  $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ .
- (5) Es gilt genau eine der Aussagen  $a > b$ ,  $a = b$ ,  $a < b$ .
- (6)  $a > 0 \Rightarrow a + c > c$ .
- (7)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$ . Insbesondere gilt damit  $1 = 1^2 > 0$ .
- (8) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a > 0 \Rightarrow a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} > 0$ .
- (9) Falls  $a > 0$  und  $b \geq 0$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ .
- (10) Falls  $a \geq -1$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die *Bernoulli'sche Ungleichung*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

**Beweis:** (1) Aus der Annahme folgt per Definition  $a - b > 0$  und  $b - c > 0$ . Daraus folgt  $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c) > 0$  wegen (A2).

(2) Nach Definition der Äquivalenz “ $\Leftrightarrow$ ” bedeutet die zu beweisende Aussage ausgeschrieben

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \text{und} \quad a > b \Leftarrow a + c > b + c.$$

Daher ist es (wie oft, wenn man eine Äquivalenz beweisen will) sinnvoll, diese beiden Folgerungen einzeln zu beweisen. Wir beginnen mit

“ $\Rightarrow$ ”: Es gelte  $a > b$ . Dann folgt

$$a > b \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \Rightarrow a - b + (c - c) = a - b + 0 = a - b > 0.$$

Wegen  $a - b + (c - c) = (a + c) - (b + c)$  erhalten wir also auch  $(a + c) - (b + c) > 0$  woraus per Definition  $a + c > b + c$  folgt.

“ $\Leftarrow$ ”: Es gelte  $a + c > b + c$ . Dann gilt nach dem ersten Teil des Beweises auch  $a + c + d > b + c + d$  für alle  $d \in \mathbb{K}$ . Wählen wir  $d = -c$  so folgt  $c + d = 0$  und damit  $a = a + c + d > b + c + d = b$ .

(3) Es gilt

$$a > b \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \stackrel{\text{(A2)}}{\Rightarrow} (a - b)c > 0 \Leftrightarrow ac - bc > 0 \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} ac > bc.$$

(4) Die erste Aussage folgt aus (2) mit  $b = 0$  und  $c = (-a)$ , denn aus  $a > 0$  folgt  $0 = a + (-a) \stackrel{(2)}{>} 0 + (-a) = -a$ , was nach Definition äquivalent zu  $-a < 0$  ist.

Die zweite Aussage folgt in analoger Weise aus (2) mit  $a = 0$ ,  $b = a$  und  $c = (-a)$ .

(5) Für  $a - b$  gilt nach (A1) genau eine der Aussagen (i)  $a - b > 0$ , (ii)  $a - b = 0$  oder (iii)  $-(a - b) > 0$ , was nach (4) äquivalent zu  $a - b < 0$  ist. Wir zeigen nun, dass jede dieser Aussagen äquivalent zu einer der Aussagen in der Behauptung des Satzes ist.

(i) “ $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ ”: Die Aussage  $a - b > 0$  ist nach Definition gerade äquivalent zu  $a > b$ .

(ii) “ $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ ”: “ $\Rightarrow$ ”: Aus der Aussage  $a - b = 0$  erhalten wir mit (K5), dass  $-b = -a$  sein muss, also folgt wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements  $a = -(-a) = -(-b) = b$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Gilt  $a = b$ , so folgt  $a - b = a - a = a + (-a) = 0$  und damit  $a - b = 0$ .

(iii) “ $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ ”: Die Aussage  $a - b < 0$  ist per Definition äquivalent zu  $0 > a - b$ . Mit Addition von  $c = b$  ist dies nach (2) äquivalent zu  $b > a$  was wiederum per Definition äquivalent zu  $a < b$  ist.

(6) Dies folgt aus (2) mit  $b = 0$ .

(7) Für  $a > 0$  folgt  $a^2 > 0$  aus (A2). Für  $a < 0$  können wir zunächst aus  $a \cdot 0 = 0$  und  $a + (-a) = 0$  folgern, dass sowohl  $a(a + (-a)) = 0$  als auch  $(-a)(a + (-a)) = 0$  gilt. Mit dem Distributivgesetz folgt dann  $a^2 + a(-a) = 0$  und  $(-a)a + (-a)^2 = 0$ , also

$a^2 = -(a(-a)) = -((-a)a) = (-a)^2$ . Wegen  $-a > 0$  folgt aber aus dem ersten Fall, dass  $(-a)^2 > 0$  ist und damit die Behauptung.

(8) Beweis per Induktion über  $n$ : Für  $n = n_0 = 0$  ist die Aussage wegen  $a^0 = 1$  klar. Für  $n \rightarrow n + 1$  gilt nach Induktionsannahme  $a^n > 0$ . Mit (A2) folgt dann  $a^{n+1} = a^n a > 0$ .

(9) Wir wollen die Äquivalenz " $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ " zeigen. Falls  $b = 0$  ist, ist auch  $b^n = 0$  und die Aussage folgt sofort aus (8). Es bleibt der Fall  $b > 0$  zu beweisen.

" $\Rightarrow$ ": **Beweismethode 1, mit Binomischem Lehrsatz:**

Für  $c := a - b > 0$  gilt  $a = b + c$ , also auch  $a^n = (b + c)^n$ . Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt nun

$$(b + c)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} c^k = b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^{n-k} c^k + c^n.$$

Aus  $b > 0$  und  $c > 0$  folgt mit (A2) und (8), dass alle Terme in der letzten Summe  $> 0$  sind und nach (A2) ist damit die gesamte Summe  $> 0$ . Mit (6) erhalten wir damit

$$a^n = (b + c)^n = \underbrace{b^n + c^n}_{c \text{ in (6)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^{n-k} c^k}_{a \text{ in (6)}} > b^n + c^n.$$

Aus  $c > 0$  folgt dann mit (6) die Ungleichung  $b^n + c^n > b^n$  und damit die Behauptung.

**Beweismethode 2, mit vollständiger Induktion über  $n$ :**

Für  $n = 1$  ist die Aussage klar. Für  $n \rightarrow n + 1$  gelte per Induktionsannahme  $a^n > b^n$ , also  $a^n - b^n > 0$ . Nach Annahme gilt  $a > b$  und aus (8) folgt  $a^n > 0$ . Also gilt

$$a^{n+1} = a^n a \stackrel{(2a)}{>} a^n b,$$

Damit folgt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - b^n b \stackrel{(2)}{>} a^n b - b^n b = (a^n - b^n) b \stackrel{(A2)}{>} 0,$$

was per Definition gerade äquivalent zur Ungleichung  $a^{n+1} > b^{n+1}$  ist, die zu beweisen war.

" $\Leftarrow$ ": Für diesen Teil des Beweises wenden wir zum ersten Mal die Gleichwertigkeit der Folgerungen (1.2) und (1.3) an. Statt  $a^n > b^n \Rightarrow a > b$  zeigen wir die Folgerung " $a > b$  gilt nicht  $\Rightarrow a^n > b^n$  gilt nicht" (diese Beweistechnik heißt *Kontraposition*): Wegen (5) ist " $a > b$  gilt nicht" gleichbedeutend mit " $a \leq b$ " und " $a^n > b^n$  gilt nicht" gleichbedeutend mit " $a^n \leq b^n$ ". Wir müssen also die Folgerung

$$a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$$

beweisen. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

Im Fall  $a = b$  folgt  $a^n = b^n$ .

Im Fall  $a < b$  folgt aus dem ersten Teil des Beweises mit vertauschten  $a$  und  $b$ , dass  $a^n < b^n$  gilt. Zusammen zeigen die beiden Fälle gerade die gewünschte Folgerung.

(10) Beweis per Induktion über  $n$ : Für  $n = 0$  gilt die behauptete Ungleichung offensichtlich mit Gleichheit. Für  $n \rightarrow n + 1$  folgt wegen  $1 + a \geq 0$  mit der Induktionsannahme und (3) die Ungleichung

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a,$$

wobei wir im letzten Schritt (7), (A2) und (6) verwendet haben.  $\square$

Alle diese Aussagen konnten wir tatsächlich ohne (A3) beweisen. Ein Beispiel für eine Aussage, für die man (A3) benötigt, ist der folgende Satz.

**Satz 2.2** Für einen Körper  $\mathbb{K}$ , der (A1)–(A3) erfüllt, gilt:

- (a) Für jedes  $b \in \mathbb{K}$  mit  $b > 1$  und jedes  $K \in \mathbb{K}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b^n > K$ .
- (b) Für jedes  $c \in \mathbb{K}$  mit  $0 < c < 1$  und jedes  $\varepsilon \in \mathbb{K}$  mit  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $c^n < \varepsilon$ .

**Beweis:** (a) Für  $a = b - 1$  gilt  $b = 1 + a$ . Für dieses  $a$  liefert die Bernoulli'sche Ungleichung für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$b^n = (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Wählen wir nun  $n$  gemäß (A3) so, dass  $na > K$  ist, so folgt  $b^n > K$ .

(b) Wir zeigen zunächst, dass  $c^{-1} > 0$  ist. Dies benötigen wir, weil wir im nachfolgenden Schritt Satz 2.1(3) mit  $c^{-1}$  an Stelle von  $c$  anwenden wollen.

Zum Beweis von  $c^{-1} > 0$  verwenden wir eine neue Beweistechnik, den *Beweis durch Widerspruch*: Wir nehmen das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung an und zeigen, dass diese Annahme auf einen logischen Widerspruch führt. Folglich muss die Annahme (des Gegenteils) also falsch sein und die zu beweisende Aussage muss gelten.

Hier nehmen wir zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass  $c^{-1} > 0$  nicht gilt. Da  $cc^{-1} = 1$  ist, muss  $c^{-1} \neq 0$  sein (denn ansonsten wäre  $cc^{-1} = c \cdot 0 = 0$ ), also folgt  $c^{-1} < 0$ . Nach Satz 2.1(4) ist dann  $-c^{-1} > 0$  und aus (A2) folgt somit  $(-c^{-1})c > 0$ , weil  $c > 0$ . Wegen  $(-c^{-1})c = -c^{-1}c = -1$  folgt also  $-1 > 0$ . Nach Satz 2.1(7) ist aber  $1 > 0$ . Mit Satz 2.1(4) folgt daraus  $-1 < 0$  und wir erhalten einen Widerspruch.

Als nächstes zeigen wir, dass  $c^{-1} > 1$  gilt. Dies gilt wegen  $c^{-1} = c^{-1} \cdot 1 > c^{-1}c = 1$ , wobei wir für die Ungleichung die Annahme  $c < 1$  und 2.1(3) verwenden, was wegen der eben bewiesenen Ungleichung  $c^{-1} > 0$  möglich ist.

Jetzt setzen wir  $b = c^{-1}$  und  $K = \varepsilon^{-1}$  und wenden (a) an, was wegen  $c^{-1} > 1$  möglich ist. Damit folgt  $(c^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$ . Multiplikation mit  $\varepsilon c^n > 0$  liefert dann

$$c^n = \varepsilon^{-1} \varepsilon c^n < (c^{-1})^n \varepsilon c^n = (c^{-1})^n c^n \varepsilon = \varepsilon.$$

Dabei haben wir  $(c^{-1})^n c^n = 1$  verwendet, was man per Induktion beweisen kann.  $\square$

Anschaulich lässt sich jeder archimedisch angeordnete Körper durch die bekannten Zahlengerade darstellen, auf der größere Zahlen weiter rechts und kleinere Zahlen weiter links eingezeichnet werden. Das Axiom (A3) besagt dann, dass beliebig weit rechts immer noch natürliche Zahlen liegen. Ohne die Anordnungsaxiome wäre eine solche grafische Veranschaulichung nicht möglich.



**Bemerkung 2.3** Nachdem wir nun alle für die Rechenregeln notwendigen Axiome eingeführt haben, werden wir ab jetzt wieder die üblichen Rechenregeln verwenden, ohne jeweils auf die einzelnen Axiome zu verweisen. An einigen Stellen werden wir jedoch der Vollständigkeit halber auf Aussagen aus den eben bewiesenen Sätzen verweisen, auch wenn sich diese leicht aus den üblichen Rechenregeln ableiten lassen.  $\square$

Zm Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einen wichtigen Begriff einführen, den sogenannten *Absolutbetrag*.

**Definition 2.4** Sei  $\mathbb{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper. Der Absolutbetrag einer Zahl  $a \in \mathbb{K}$  ist definiert als

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$\square$

Offensichtlich erfüllt der Absolutbetrag immer  $|a| \geq 0$  und  $|a| = |-a|$ . Zudem gilt der folgende Satz.

**Satz 2.5** In einem archimedisch angeordnetem Körper erfüllt der Absolutbetrag für alle  $a, b \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |ab| &= |a| \cdot |b| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird dabei *Dreiecksungleichung* genannt, die dritte wird als *umgekehrte Dreiecksungleichung* bezeichnet.

**Beweis:** Für die erste Aussage betrachtet man alle Kombinationen der die Fälle  $a \geq 0$ ,  $a < 0$  sowie  $b \geq 0$  und  $b < 0$  einzeln (Übungsaufgabe).

Ebenfalls durch Betrachtung der einzelnen Fälle kann man nachprüfen, dass für jedes  $a \in \mathbb{K}$  immer  $a \leq |a|$  und  $-a \leq |a|$  gilt. Daraus folgt

$$a + b \leq |a| + |b| \quad \text{und} \quad -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Weil zudem entweder  $|a+b| = a+b$  oder  $|a+b| = -(a+b)$  gilt, folgt die Dreiecksungleichung.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

und damit durch Subtraktion von  $|b|$  auf beiden Seiten  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Die gleiche Ungleichung gilt natürlich, wenn wir  $a$  und  $b$  vertauschen und liefert dann  $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$ . Da stets entweder  $||a| - |b|| = |a| - |b|$  oder  $||a| - |b|| = -(|a| - |b|) = |b| - |a|$  gilt, folgt die behauptete Ungleichung.  $\square$

Der Absolutbetrag hat eine nützliche Interpretation auf der Zahlengeraden:  $|a - b|$  ist dort nämlich gerade die Länge des Abstandes zwischen den Zahlen  $a$  und  $b$ . Wir verwenden dies für die folgende Definition.

**Definition 2.6** Für zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{K}$  definieren wir den *Abstand* oder die *Distanz*

$$d(a, b) := |a - b|$$

□

Wir werden im Folgenden zumeist die anschaulichere Schreibweise  $d(a, b)$  für den Abstand verwenden. Aus Definition 2.6 und Satz 2.5 folgt sofort, dass der Abstand für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  die drei Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} \text{Positive Definitheit:} & d(a, b) \geq 0 \text{ und } d(a, b) = 0 \text{ genau dann, wenn } a = b \\ \text{Symmetrie:} & d(a, b) = d(b, a) \\ \text{Dreiecksungleichung:} & d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \end{array}$$

besitzt. Eine Abbildung mit diesen drei Eigenschaften heißt *Metrik* und eine Menge, auf der eine Metrik definiert ist, heißt *metrischer Raum*. Ein archimedisch angeordneter Körper ist also mit  $d(a, b) = |a - b|$  ein metrischer Raum. Wir werden in der Analysis II noch eine Reihe weiterer metrischer Räume kennen lernen (und eine weitere Metrik auf dem Übungsblatt). Aus der Dreiecksungleichung folgt wie beim Betrag die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$d(a, b) - d(b, c) \leq d(a, c).$$

## 2.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir haben die Einführung der Axiome zu Beginn dieses Kapitels dadurch motiviert, dass wir die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  einführen wollen. Bisher werden aber alle Axiome auch durch den Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erfüllt. Es stellt sich also die Frage, warum wir mit diesen nicht zufrieden sind.

Der Grund ist, dass die rationalen Zahlen viele für die Analysis wichtige Zahlen nicht enthalten. Das mag auf den ersten Blick paradox klingen, denn zwischen je zwei rationalen Zahlen  $p_1/q_1$  und  $p_2/q_2$  kann man ja immer eine weitere rationale Zahl “in der Mitte” finden, nämlich gerade

$$\frac{1}{2} \left( \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2}.$$

Das könnte zu der Vermutung verleiten, dass auf der Zahlengeraden zwischen den Elementen von  $\mathbb{Q}$  überhaupt kein Platz mehr für weitere Zahlen ist. Diese Vermutung ist aber falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wir wollen eine Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x > 0$  finden, welche die Gleichung  $x^2 = 2$  löst. Nehmen wir dazu an, dass ein Bruch  $p/q$  mit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$  existiert, so dass

$$\left( \frac{p}{q} \right)^2 = 2$$

ist. Wir nehmen dabei an, dass mindestens eine der beiden Zahlen  $p$  und  $q$  nicht gerade ist. Diese Annahme können wir treffen, da wir ansonsten den Bruch so oft mit der 2 kürzen

könnten, bis sie erfüllt ist<sup>5</sup>. Die obige Gleichung kann man äquivalent umschreiben als

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2.$$

Aus dieser Darstellung folgt sofort, dass  $p^2$  ohne Rest durch 2 teilbar sein muss, dass  $p^2$  also eine gerade Zahl ist. Daraus folgt, dass auch  $p$  eine gerade Zahl ist, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade (dies folgt aus der Tatsache, dass jede ungerade Zahl als  $2k+1$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  geschrieben werden kann und  $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$  ungerade ist, da es gerade 1 mehr als die gerade Zahl  $4k^2 + 2k$  ist).

Also ist  $p/2$  eine ganze Zahl, woraus folgt dass auch  $(p/2)^2 = p^2/4$  eine ganze Zahl ist. Wegen  $q^2 = p^2/2$  ist  $q^2/2 = p^2/4$  also ebenfalls eine ganze Zahl, d.h.  $q^2$  ist ohne Rest durch 2 teilbar. Mit dem gleichen Argument wie oben ist dann auch  $q$  ohne Rest durch 2 teilbar. Folglich sind sowohl  $p$  als auch  $q$  durch zwei teilbar, was der Annahme, dass mindestens eine der beiden Zahlen ungerade ist, widerspricht. Folglich kann kein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$  existieren.  $\square$

Dieser Beweis geht auf den griechischen Mathematiker Euklid zurück, die Erkenntnis, dass  $x^2 = 2$  in  $\mathbb{Q}$  nicht lösbar ist, ist also bereits mehrere 1000 Jahre alt.

Die Idee des nun folgenden Vollständigkeitsaxioms liegt darin, den Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  zu definieren, indem man die “Lücken” in  $\mathbb{Q}$  füllt, die rationalen Zahlen also vervollständigt. Es gibt mehrere verschiedene Arten, dieses Axiom zu formulieren. Hier geben wir eine anschauliche Methode an, die auf Karl Weierstraß (1815–1897) zurückgeht. Dazu benötigen wir noch ein paar Definitionen.

**Definition 2.7** Sei  $\mathbb{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper. Für  $a, b \in \mathbb{K}$  mit  $a < b$  heißt

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\} && \text{kompaktes (oder auch abgeschlossenes) Intervall} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x < b\} && \text{(nach rechts) halboffenes Intervall} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leq b\} && \text{(nach links) halboffenes Intervall} \end{aligned}$$

Die *Länge* eines Intervalls ist definiert als  $|I| := b - a$ .  $\square$

Der Unterschied zwischen den Begriffen “kompakt” und “abgeschlossen” ist, dass kompakte Intervalle immer von der Form  $[a, b]$  sind, während abgeschlossene Intervalle auch eine andere Form haben können (mehr dazu später in Beispiel 5.2(e)). “Kompakt” ist also die genauere Bezeichnung.

**Definition 2.8** Eine *Intervallschachtelung* ist eine unendliche Folge von kompakten Intervallen  $I_0, I_1, I_2, I_3, \dots$ , kurz als  $I_n, n \in \mathbb{N}$  bezeichnet, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.

<sup>5</sup>In der Mathematik gibt es oft Annahmen, die immer erfüllbar sind, indem man die Problemstellung geeignet abändert. Man sagt dann, dass diese Annahme *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* (kurz: o.B.d.A.) gilt. In manchen Büchern findet man dafür auch die Bezeichnung *ohne Einschränkung* (kurz: o.E.).

- (I1)  $I_{n+1} \subseteq I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- (I2) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Intervall  $I_n$  mit Länge  $|I_n| < \varepsilon$ .

□

Mit Hilfe dieser Intervallschachtelungen formulieren wir nun unser letztes Axiom. Darin sei  $\mathbb{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper.

**Vollständigkeitsaxiom:** Zu jeder Intervallschachtelung in  $\mathbb{K}$  gibt es eine Zahl  $a \in \mathbb{K}$ , die in allen Intervallen  $I_n$  liegt.

Beachte, dass diese Zahl  $a$  für jede Intervallschachtelung eindeutig ist: Angenommen, es existieren zwei verschiedene Zahlen  $a$  und  $\tilde{a}$ , die in allen Intervallen liegen. O.B.d.A. sei  $a < \tilde{a}$ . Wir setzen  $\varepsilon := d(\tilde{a}, a) = |\tilde{a} - a| = \tilde{a} - a > 0$  und betrachten ein Intervall  $I_n$  mit  $|I_n| < \varepsilon$ . Mit  $a_n$  und  $b_n$  bezeichnen wir die untere und obere Intervallgrenze von  $I_n$ . Falls dann  $a \in I_n$  liegt, so folgt  $a \geq a_n$  und damit  $b_n - a \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , also  $b_n < a + \varepsilon$ . Folglich ist  $\tilde{a} = a + \varepsilon > b_n$  und kann damit nicht in  $I_n$  liegen. Gleichermaßen führt die Annahme  $\tilde{a} \in I_n$  auf die Aussage  $a \notin I_n$ . Es können also keine zwei verschiedenen Zahlen in allen Intervallen einer Intervallschachtelung liegen.

Die Menge der reellen Zahlen ist nun der Körper, den wir erhalten, indem wir gerade diejenigen Zahlen zu  $\mathbb{Q}$  hinzunehmen, so dass das Vollständigkeitsaxiom erfüllt ist. Bildlich gesprochen ordnet man also jeder Intervallschachtelung eine Zahl zu (wobei man Intervallschachtelungen, die die selbe Zahl ergeben, natürlich auch die selbe Zahl zuordnet) und fügt diese zu  $\mathbb{R}$  hinzu. Die so entstehenden “neuen” Zahlen können dann natürlich nicht mehr als Brüche geschrieben werden, da sie ja nicht in  $\mathbb{Q}$  liegen. Andererseits wäre es ziemlich umständlich, für jede neue Zahl immer die Intervallschachtelung hinzuschreiben, aus der sie hervorgeht. Wir werden am Ende dieses Kapitels sehen, dass man jede reelle Zahl als unendlichen Dezimalbruch schreiben kann, also als

$$c_l c_{l-1} \dots c_1, d_1 d_2 d_3 \dots$$

mit unendlich vielen Nachkommastellen  $d_i$ , wobei  $c_i, d_i \in \{0, \dots, 9\}$  gilt. Da diese Darstellung zum Hinschreiben auch nicht wirklich praktisch ist, gibt es für viele reelle Zahlen eigene Symbole. Die oben gesuchte eindeutige positive Lösung der Gleichung  $x^2 = 2$  wird — wie natürlich bekannt ist — mit  $\sqrt{2}$  bezeichnet, so wie allgemein die positive Lösung der Gleichung  $x^k = y$  mit  $\sqrt[k]{y}$  bezeichnet wird. Die Kreiszahl  $\pi$ , die ebenfalls nicht in  $\mathbb{Q}$  liegt, hat wegen ihrer großen Bedeutung für die Mathematik ebenfalls ein eigenes Symbol.

Dass das oben beschriebene Vorgehen der Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  tatsächlich auf einen sinnvollen Körper führt, dass die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  also tatsächlich existieren und dass in ihnen tatsächlich die gewohnten Rechenregeln gelten, müsste natürlich formal bewiesen werden. Dies würde aber viel mehr Zeit in Anspruch nehmen, als wir in dieser Vorlesung zur Verfügung haben. Eine deutlich ausführlichere — wenngleich auch nicht ganz lückenlose — Darstellung findet sich z.B. im Buch von Amman und Escher [1]. Wir werden ab jetzt mit den reellen Zahlen arbeiten, auch ohne dass wir diesen Beweis hier nachvollziehen. Das Vollständigkeitsaxiom wird uns dabei an einigen Stellen noch einmal begegnen.

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir noch eine Frage beantworten, über die wir oben stillschweigend hinweggegangen sind, obwohl sie die Motivation für den gesamten

Abschnitt war: Wissen wir eigentlich, dass wir es mit dem Vollständigkeitsaxiom tatsächlich geschafft haben, eine Zahl  $x > 0$  mit  $x^2 = 2$  hinzuzufügen? Dass dies tatsächlich gelungen ist, zeigt der folgende Satz.

**Satz 2.9** Es gibt eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{R}$ , so dass die eindeutige Zahl  $x$ , die in allen  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , liegt, positiv ist und die Gleichung  $x^2 = 2$  erfüllt. Insbesondere existiert also ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  und  $x^2 = 2$ .

**Beweis:** Wir konstruieren eine Intervallschachtelung  $I_n = [a_n, b_n]$  mit  $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  wie folgt:

- (1) Setze  $a_0 := 1$ ,  $b_0 := 2$ ,  $n := 0$
- (2) Definiere  $c_n := (a_n + b_n)/2$  (dies ist gerade der Mittelpunkt des Intervalls  $I_n$ )
- (3) (i) Falls  $c_n^2 \geq 2$ , setze  $a_{n+1} := a_n$  und  $b_{n+1} := c_n$ ;  
(ii) sonst setze  $a_{n+1} := c_n$  und  $b_{n+1} := b_n$
- (4) Setze  $n := n + 1$  und gehe zu (2).

Aus der Konstruktion folgt  $I_{n+1} \subseteq I_n$ ,  $a_n^2 \leq 2$  und  $b_n^2 \geq 2$ . Da sich die Länge der Intervalle in jedem Schritt halbiert und  $|I_0| = 2 - 1 = 1$  gilt, folgt außerdem  $|I_n| = (\frac{1}{2})^n$ . Daher ist  $I_n$  eine Intervallschachtelung, denn: Geben wir uns dazu ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vor, so können wir nach Satz 2.2(b) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(\frac{1}{2})^n < \varepsilon$  finden. Damit folgt  $|I_n| = (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$ .

Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt damit, dass ein (eindeutiges)  $x \in \mathbb{R}$  existiert, das in allen  $I_n$  liegt, das also  $a_n \leq x \leq b_n$  erfüllt. Wegen  $x \geq a_0 = 1$  für alle  $n$  ist dieses sicherlich positiv. Es bleibt zu zeigen, dass  $x^2 = 2$  gilt.

Aus den Ungleichungen  $b_n - a_n = |I_n|$ ,  $a_n < b_n \leq b_0 = 2$ ,  $a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2$  und  $a_n^2 \leq x^2 \leq b_n^2$  erhalten wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$d(x^2, 2) = |x^2 - 2| \leq b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq 4|I_n|. \quad (2.1)$$

Daraus folgt  $x^2 = 2$ , denn: wäre  $x^2 \neq 2$  so wäre  $d(x^2, 2) > 0$  und wir könnten zu  $\varepsilon := d(x^2, 2)/4 > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|I_n| < \varepsilon$  finden. Dann wäre aber

$$d(x^2, 2) = 4\varepsilon > 4|I_n|,$$

was ein Widerspruch zu (2.1) wäre. □

## 2.5 Infimum und Supremum

Betrachten wir eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$ , so stellt sich die Frage, ob sie ein größtes oder kleinstes Element besitzt. Eine Grundvoraussetzung dafür ist sicherlich, dass  $M$  keine unendlich großen positiven bzw. keine unendlich kleinen negativen Zahlen enthält. Dies ist gerade der Inhalt der folgenden Definition.

**Definition 2.10** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  gibt, so dass die Ungleichung

$$x \leq s \quad (\text{bzw. } x \geq s)$$

für alle  $x \in M$  gilt. Die Menge  $M$  heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.  $\square$

**Beispiel 2.11** (a) Jedes Intervall  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  und  $(a, b]$  im Sinne von Definition 2.8 ist beschränkt. Hierbei ist jedes  $s \leq a$  eine untere Schranke und jedes  $s \geq b$  eine obere Schranke.

(b) Die Menge  $\mathbb{N}$  ist nach unten durch jedes  $s \leq 0$  beschränkt, nach oben aber unbeschränkt. Die Menge  $\mathbb{Z}$  ist nach oben und unten unbeschränkt.

(c) Die Menge  $M := \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  ist beschränkt; nach oben durch jedes  $s \geq 1$  und nach unten durch jedes  $s \leq 0$ .  $\square$

Was auf den ersten Blick überraschend erscheinen mag, ist die Tatsache, dass es in einer beschränkten Menge keine größte oder kleinste Zahl geben muss. Anschaulich kann man sich das aber gut an den offenen Intervallen klar machen. Das Intervall  $I = (0, 1)$  besteht z.B. aus allen Zahlen, die echt größer als 0 und echt kleiner als 1 sind. Gäbe es eine kleinste Zahl  $x_{\min} \in I$ , so müsste  $x_{\min} \leq 0$  gelten, denn für  $x_{\min} > 0$  ist auch  $x_{\min}/2 > 0$  und die Zahl  $x = \min\{x_{\min}/2, 1/2\}$  liegt echt zwischen 0 und 1 und damit in  $I$ . Da damit  $x \leq x_{\min}/2 < x_{\min}$  gilt, kann  $x_{\min}$  nicht größer als Null sein. Andererseits liegt aber keine Zahl  $x \leq 0$  in  $I$ , weswegen es keine kleinste Zahl in  $I$  gibt.

Ähnlich ist das für die kleinste Zahl in  $M := \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ . Für jedes  $x > 0$  können wir  $n > 1/x$  wählen und erhalten damit  $1/n < x$ , weswegen die kleinste Zahl  $\leq 0$  sein muss. In  $M$  sind aber keine Zahlen  $\leq 0$  enthalten.

Diese Beobachtung ist der Grund dafür, dass man an Stelle von größten (oder kleinsten) Elementen die folgende, auf den ersten Blick etwas umständlichere Definition verwendet.

**Definition 2.12** Eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  heißt *Supremum* einer Menge  $M \subset \mathbb{R}$ , falls  $s$  die kleinste obere Schranke der Menge ist, d.h.

(i)  $s$  ist eine obere Schranke von  $M$

(ii) jede Zahl  $\tilde{s} < s$  ist keine obere Schranke von  $M$

Wenn ein Supremum existiert, ist es eindeutig<sup>6</sup> und wird mit

$$s = \sup M$$

bezeichnet.

Analog definiert man das Infimum  $s = \inf M$  als größte untere Schranke.  $\square$

<sup>6</sup>Angenommen,  $s$  und  $s'$  erfüllen die beiden Eigenschaften, dann muss wegen (ii)  $s' \geq s$  und  $s \geq s'$  gelten, woraus die Gleichheit folgt.

**Beispiel 2.13** Für die Mengen aus Beispiel 2.11 erhält man

(a)  $\sup[a, b] = \sup(a, b) = \sup[a, b) = \sup(a, b] = b$  und  $\inf[a, b] = \inf(a, b) = \inf[a, b) = \inf(a, b] = a$

(b)  $\inf \mathbb{N} = 0$

(c) Für  $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  ist  $\sup M = 1$  und  $\inf M = 0$ .

Im Fall nach oben unbeschränkter Mengen  $M$  schreibt man auch  $\sup M = \infty$  und im nach unten unbeschränkten Fall  $\inf M = -\infty$ . Mit dieser Schreibweise gilt also  $\sup \mathbb{N} = \infty$ .  $\square$

Definition 2.12 enthält die Einschränkung “wenn ein Supremum existiert”. Der folgende Satz zeigt, dass dies für nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmengen in  $\mathbb{R}$  immer erfüllt ist.

**Satz 2.14** Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung für das Supremum, für das Infimum folgt die Aussage analog. Die Existenz des Supremums folgt aus dem Vollständigkeitsaxiom, wenn wir eine Intervallschachtelung konstruieren können, die das Supremum stets enthält. Dazu konstruieren wir eine Intervallschachtelung  $I_n = [a_n, b_n]$  mit  $a_n < b_n$  in der Weise, dass  $b_n$  stets eine obere Schranke ist und  $a_n$  stets keine obere Schranke ist. Aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke folgt, dass es in jedem solchen Intervall enthalten ist und wegen des Vollständigkeitsaxioms foglich in  $\mathbb{R}$  existiert.

Sei  $M$  also eine nichtleere Menge mit einer oberen Schranke  $s$ . Wir setzen  $b_0 := s$ , wählen ein beliebiges Element  $x \in M$  und setzen  $a_0 := x - 1$ . Damit ist sicherlich  $a_n < b_n$  und  $a_n$  ist per Konstruktion keine obere Schranke.

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und  $a_n < b_n$  mit den obigen Eigenschaften gegeben. Dann gehen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 2.9 vor: wir setzen  $c_n := (a_n + b_n)/2$  (Mittelpunkt des Intervalls) und setzen  $a_{n+1} := a_n$  sowie  $b_{n+1} := c_n$  falls  $c_n$  eine obere Schranke von  $M$  Menge ist und  $a_{n+1} := c_n$  und  $b_{n+1} := b_n$  sonst.

Aus der Konstruktion folgt  $a_{n+1} < b_{n+1}$ ,  $a_{n+1}$  ist keine obere Schranke und  $b_{n+1}$  ist eine obere Schranke. Setzen wir diese Konstruktion induktiv fort, so erhalten wir eine Intervallschachtelung, die nach dem Vollständigkeitsaxiom genau ein Element  $x \in \mathbb{R}$  enthält. Dieses Element ist eine obere Schranke, denn wäre es keine, so gäbe es ein  $a \in M$  mit  $a > x$ . Dann müsste jedes  $b_n$  größer als  $a$  sein und hätte daher mindestens den Abstand  $d(x, b_n) > a - x$  von  $x$ . Dann würde  $x$  aber nicht in den Intervallen  $I_n$  mit  $|I_n| < a - x$  liegen. Andererseits kann es keine kleinere obere Schranke  $\tilde{s} < x$  geben, da ansonsten  $d(x, a_n) > x - \tilde{s}$  gälte und  $x$  in keinem  $I_n$  mit  $|I_n| < x - \tilde{s}$  liegen könnte. Also ist  $x$  die kleinste obere Schranke und damit das Supremum von  $M$ .  $\square$

Dass die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (also die Gültigkeit des Vollständigkeitsaxioms) wesentlich für die Existenz des Supremums (bzw. Infimums) ist, kann man sehen, wenn man  $\mathbb{Q}$  statt  $\mathbb{R}$  betrachtet. Z.B. besitzt die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , denn: aus der Definition von  $M$  folgt, dass ein  $s \in \mathbb{Q}$  genau dann eine obere Schranke von  $M$  ist, wenn  $s > 0$  und  $s^2 \geq 2$  gilt. Wir beweisen jetzt, dass es keine kleinste obere Schranke in  $\mathbb{Q}$  geben kann. Sei dazu  $s \in \mathbb{Q}$  eine beliebige obere Schranke, d.h. es gilt  $s > 0$  und  $s^2 \geq 2$ . Weil in  $\mathbb{Q}$  aber kein  $s$  mit  $s^2 = 2$  existiert, folgt daraus  $s^2 > 2$ . Wählen wir nun  $n \in \mathbb{N}$  mit  $1/n < (s^2 - 2)/(2s)$  sowie  $1/n < s$  und setzen  $\tilde{s} := s - 1/n$ , so folgt  $\tilde{s} \in \mathbb{Q}$ ,  $\tilde{s} > 0$   $\tilde{s} < s$  und

$$\tilde{s}^2 = (s - 1/n)^2 = s^2 - 2s/n + 1/n^2 > s^2 - 2s/n > s^2 - (s^2 - 2) = 2.$$

Damit ist  $\tilde{s}$  ebenfalls wieder eine obere Schranke, was der Definition von  $s$  als kleinste obere Schranke widerspricht.

**Bemerkung 2.15** Wir haben die Existenz eines Supremums hier aus dem Vollständigkeitsaxiom gefolgert. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, d.h. man kann das Vollständigkeitsaxiom aus der Existenz des Supremums folgern. Dazu definiert man für eine gegebene Intervallschachtelung  $I_n = [a_n, b_n]$  die Menge  $M = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Aus der Schachtelung folgen die Ungleichungen  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$  und  $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ . Hieraus und aus  $a_n \leq b_n$  folgt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n \leq b_m$ , d.h. jedes  $b_m$  ist eine obere Schranke von  $M$ . Folglich ist  $\sup M \leq b_n$  für alle  $n$ , andererseits ist per Definition  $\sup M \geq a_n$  für alle  $n$ . Daher ist  $\sup M$  in allen Intervallen enthalten. Falls  $\sup M$  also in  $\mathbb{R}$  existiert, ist das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

Alternativ kann man das Vollständigkeitsaxiom in der Definition von  $\mathbb{R}$  also ersetzen durch die Bedingung: "jede nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum in  $\mathbb{R}$ ".  $\square$

Ein besonders schöner Fall tritt auf, wenn das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge  $M$  in der Menge  $M$  selbst enthalten ist, d.h. wenn die Menge ein größtes (oder kleinstes) Element besitzt.

**Definition 2.16** Falls eine Menge  $M$  ein Element  $s \in M$  enthält, für das  $x \leq s$  (bzw.  $x \geq s$ ) gilt für alle  $x \in M$ , so heißt  $s$  das *Maximum* (bzw. *Minimum*) der Menge  $M$ , geschrieben als  $s = \max M$  (bzw.  $s = \min M$ ).  $\square$

Der Zusammenhang zwischen Maximum und Supremum ist wie folgt: Wenn das Maximum  $s = \max M \in M$  existiert, so stimmt es mit dem Supremum überein, denn es ist per Definition eine obere Schranke und für jedes  $\tilde{s} < s$  ist wegen  $\tilde{s} < s \in M$  keine obere Schranke. Umgekehrt gilt: Wenn das Supremum  $\sup M$  existiert, so ist es genau dann ein Maximum, wenn es in  $M$  liegt. Ein Maximum ist also stets ein Supremum, umgekehrt ist ein Supremum aber nur (genau) dann ein Maximum, wenn es in  $M$  liegt. Eine nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt folglich genau dann ein Maximum, wenn  $\sup M \in M$  gilt. Analog gilt dies für das Minimum und das Infimum.

**Beispiel 2.17** (a) Das offene Intervall  $(a, b)$  besitzt wegen  $\sup(a, b) = b \notin (a, b)$  kein Maximum, das kompakte Intervall  $[a, b]$  wegen  $\sup[a, b] = b \in [a, b]$  hingegen schon.

(b) Jede nichtleere Teilmenge  $N \subset \mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum, was wir per Widerspruch beweisen: Angenommen, es existiert kein Minimum in  $N$ . Dann beweisen



wir per Induktion über  $n$ , dass die Zahlen  $0, \dots, n$  nicht in  $N$  liegen können: Wäre  $n = 0 \in \mathbb{N}$  wäre dies auch das Minimum, denn eine kleinere Zahl gibt es nicht in  $\mathbb{N}$ . Liegen nach Induktionsannahme die Zahlen  $0, \dots, n$  nicht in  $N$ , so kann auch  $n + 1$  nicht in  $N$  liegen, da dies ansonsten das Minimum wäre. Folglich liegt kein  $n \in \mathbb{N}$  in  $N$ , was der Tatsache widerspricht, dass  $N$  nichtleer ist.

(c) Jede nach unten beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen besitzt ein Minimum. Falls  $A \subset \mathbb{N}$ , folgt dies direkt aus (b), falls  $A$  negative Zahlen enthält, wählen wir ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > -s$ , wobei  $s$  die untere Schranke von  $A$  ist. Damit definieren wir die Menge

$$\tilde{A} := \{a + k \mid a \in A\}.$$

Aus dieser Definition folgt

$$\tilde{a} \in \tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{a} - k \in A \quad \text{und} \quad a \in A \Leftrightarrow a + k \in \tilde{A}.$$

Für jedes  $\tilde{a} \in \tilde{A}$  gilt für  $a := \tilde{a} - k$  daher  $s \leq a$  und folglich  $\tilde{a} = a + k > a - s \geq 0$ . Die Menge  $\tilde{A}$  ist also eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$  und besitzt damit nach (b) ein Minimum  $\min \tilde{A} \in \tilde{A}$ . Dieses erfüllt  $\min \tilde{A} - k \in A$  und für jedes  $a \in A$  gilt mit  $\tilde{a} := a + k$  die Ungleichung  $\min \tilde{A} - k \leq \tilde{a} - k = a$ . Folglich ist  $\min \tilde{A} - k$  ein Minimum von  $A$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt eine wichtige Konsequenz aus der Existenz des Maximums.

**Satz 2.18** Es sei ein  $s \in \mathbb{R}$  gegeben, so dass für eine gegebene Menge  $M$  die Ungleichung  $x < s$  für alle  $x \in M$  gilt. Dann gilt

$$\sup M \leq s.$$

Falls das Maximum  $\max M$  existiert, gilt die strikte Ungleichung

$$\sup M = \max M < s.$$

Analog gilt die Aussage für Infimum und Minimum mit den Ungleichungen  $\geq$  und  $>$ .

**Beweis:** Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass  $s$  eine obere Schranke ist und das Supremum die kleinste obere Schranke ist.

Die zweite Aussage folgt, weil  $x := \sup M = \max M \in M$  gilt und damit nach Voraussetzung  $\sup M = x < s$  gilt.  $\square$

Der Unterschied zwischen den beiden Aussagen ist, dass im ersten Fall möglicherweise Gleichheit gilt, während im zweiten Fall immer eine strikte Ungleichung sicher gestellt werden kann. Oder anders gesagt: Nur wenn ein Maximum existiert, kann sicher gestellt werden, dass sich die elementweise strikte Ungleichung  $x < s$  auf das Supremum überträgt; im Allgemeinen kann aus dem elementweisen “ $<$ ” beim Übergang zum Supremum das schwächere “ $\leq$ ” werden.

**Beispiel 2.19** Betrachte das offene Intervall  $(a, b)$ . Da alle  $x \in (a, b)$  per Definition  $x < b$  erfüllen, ist  $s = b$  eine Wahl für das  $s$  in Satz 2.18. Wegen  $\sup(a, b) = b$  gilt die strikte Ungleichung aber nicht.

Für das kompakte Intervall  $[a, b]$  erfüllt  $s = b$  die Voraussetzungen von Satz 2.18 gerade nicht, weil für  $x = b$  die strikte Ungleichung  $x < s$  nicht gilt.  $\square$

## 2.6 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns noch kurz mit der Frage beschäftigen, wie viele reelle Zahlen es eigentlich gibt. Die naheliegende Antwort “unendlich viele” ist natürlich richtig, aber wir wollen das hier genauer untersuchen. Insbesondere wollen wir die Größe der Menge  $\mathbb{R}$  mit der Größe der Mengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  vergleichen. Dazu definieren wir einen Größenbegriff für unendliche Mengen.

**Definition 2.20** Eine Menge  $A$  mit unendlich vielen Elementen heißt *abzählbar*, falls jedem Element  $a \in A$  eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  zugeordnet werden kann, so dass kein  $n$  mehrfach vorkommt.

Falls dies nicht möglich ist, heißt sie *überabzählbar*. □

Diese Definition formalisiert etwas ganz Anschauliches, nämlich das Durchnummerieren oder eben Abzählen der Elemente der Menge  $A$ . Offensichtlich ist  $\mathbb{N}$  abzählbar, denn jedem  $n \in \mathbb{N}$  kann natürlich gerade  $n$  selbst zugeordnet werden. Etwas weniger offensichtlich ist, dass auch  $\mathbb{Z}$  abzählbar ist, denn auf den ersten Blick könnte man ja meinen, dass  $\mathbb{Z}$  ungefähr doppelt so viele Elemente wie  $\mathbb{N}$  hat. Dieses Argument gilt aber nur bei endlichen Mengen; bei unendlichen Mengen kann man ein paar Tricks durchführen, die im Endlichen nicht möglich sind. Für  $\mathbb{Z}$  besteht dieser Trick darin, die Elemente wie folgt anzuordnen:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

In dieser Anordnung taucht jedes  $z \in \mathbb{Z}$  irgendwann einmal auf und wenn wir die Elemente in dieser Anordnung von links nach rechts durchnummerieren, haben wir gerade die gewünschte Zuordnung erhalten.

Bei den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erscheint es noch verblüffender, dass eine Abzählung gefunden werden kann, denn auf jede natürliche Zahl  $n$  kommen ja unendlich viele rationale Zahlen (was einfach daraus folgt, dass zwischen je zwei natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen). Trotzdem geht es, wenn man die rationalen Zahlen  $p/q$  wie folgt anordnet und sie gemäß der Pfeilrichtungen durchnummeriert.

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{-2}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 \frac{0}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{-2}{2} & & \frac{2}{2} & & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 \frac{0}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{2}{3} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 \frac{0}{4} & & \frac{-1}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{-2}{4} & & \frac{2}{4} & & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 \frac{0}{5} & & \frac{-1}{5} & & \frac{1}{5} & & \frac{-2}{5} & & \frac{2}{5} & & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

Hierbei werden von links nach rechts alle möglichen Zähler  $p \in \mathbb{Z}$  angeordnet und von oben nach unten alle möglichen Nenner aus  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Da man so alle möglichen rationalen

Zahlen bekommt, fehlt keine in der Tabelle. Die Abzählung erhält man nun, indem man jeweils entlang der Diagonalen zählt. Dass viele der auftretenden Brüche gleiche Werte haben, stört dabei nicht; denn würden wir diese weglassen, würde die abzuzählende Menge ja nur kleiner.

Die Mengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind also abzählbar — nicht aber  $\mathbb{R}$ . Genauer gilt sogar der folgende Satz.

**Satz 2.21** Jedes Teilintervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $a < b$  enthält überabzählbar viele Zahlen.

**Beweis:** Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gäbe eine Abzählung  $[a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . Wir konstruieren nun die folgende Intervallschachtelung  $I_n$ .

Wir beginnen mit dem Intervall  $I_0 = [a, b]$  und konstruieren die Intervalle  $I_n$  für  $n \geq 1$  wie folgt induktiv: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  unterteilen wir  $I_n = [a_n, b_n]$  in die drei gleich großen Teilintervalle

$$\left[ a_n, a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n) \right] \quad \left[ a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n), a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n) \right] \quad \left[ a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n), b_n \right].$$

Falls die Zahl  $x_{n+1}$  kleiner oder gleich  $(a_n + b_n)/2 = a_n + (b_n - a_n)/2$  ist, liegt sie nicht im dritten Intervall und wir wählen  $I_{n+1}$  als das dritte Intervall. Andernfalls liegt  $x_{n+1}$  sicher nicht im ersten der drei Teilintervalle und wir wählen  $I_{n+1}$  gerade als das erste Teilintervall.

Damit erhalten wir eine Intervallschachtelung, da die Intervalle sicherlich ineinander enthalten sind und die Länge des  $n$ -ten Intervalls  $I_n$  gerade  $(1/3)^n$  beträgt, die Intervalllängen also kleiner als jedes  $\varepsilon > 0$  werden. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert nun ein  $s \in \mathbb{R}$ , das in allen Intervallen  $I_n$  enthalten ist. Nach Konstruktion der Intervalle gilt aber  $x_1 \notin I_1$ ,  $x_2 \notin I_2$  usw. Folglich ist  $s \neq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist die obige Abzählung nicht vollständig und wir erhalten den gesuchten Widerspruch.  $\square$

In jedem noch so kleinen Teilintervall von  $\mathbb{R}$  liegen also viel mehr Zahlen als in der ganzen Menge  $\mathbb{Q}$ . Tatsächlich ist übrigens auch die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  überabzählbar, denn wäre diese Menge abzählbar, so wäre es auch die Vereinigung  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

Kann man daraus schließen, dass es Bereiche auf der reellen Zahlengeraden gibt, in denen keine rationalen Zahlen liegen? Das würde der Intuition sicherlich widersprechen, denn wie wir am Anfang von Abschnitt 2.4 beobachtet haben, liegt ja zwischen je zwei rationalen Zahlen wieder eine weitere rationale Zahl. Und tatsächlich kann es solche Bereiche auch nicht geben, denn zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets auch eine rationale Zahl, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.22** Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r \in (x - \varepsilon, x]$ , also insbesondere  $d(x, r) < \varepsilon$ .

**Beweis:** Wähle  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $1/n < \varepsilon$  gilt. Sei  $A$  die Menge der ganzen Zahlen  $> nx$ . Diese Menge ist nach unten durch  $s = nx$  beschränkt und besitzt damit nach Beispiel 2.17(c) ein Minimum  $m$ . Für dieses gilt nach Satz 2.18  $m > nx$  und wegen der Minimalität gilt

zudem  $m - 1 \leq nx$  (andernfalls wäre  $m - 1 \in A$  und  $m$  wäre kein Minimum). Daraus folgt  $r/n > x$  und  $(m - 1)/n \leq x$  und damit

$$x \geq \frac{m - 1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > x - \varepsilon.$$

Folglich gelten für  $r = (m - 1)/n \in \mathbb{Q}$  die Ungleichungen  $r \leq x$  und  $r > x - \varepsilon$ , also  $r \in (x - \varepsilon, x]$  und  $d(x, r) = |x - r| = x - r < x - (x - \varepsilon) = \varepsilon$ .  $\square$

Dieser Satz zeigt, dass es beliebig nahe bei jeder reellen Zahl eine rationale Zahl gibt. Man sagt, dass  $\mathbb{Q}$  *dicht* in  $\mathbb{R}$  liegt. Diese Eigenschaft liefert z.B. die Rechtfertigung dafür, dass Computer oft nur mit rationalen Zahlen rechnen (und davon noch nicht einmal mit allen), weil man jede reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale Zahl annähern kann.

Mit einer kleinen Variante des obigen Beweises kann zudem gezeigt werden, dass jede reelle Zahl als Dezimalbruch<sup>7</sup>

$$\pm c_l c_{l-1} \dots c_1, d_1 d_2 d_3 \dots$$

mit (möglicherweise) unendlich vielen Nachkommastellen  $d_i$  geschrieben werden kann, wobei  $c_i, d_i \in \{0, \dots, 9\}$  gilt. Wir zeigen dies für positive reelle Zahlen  $x > 0$  und setzen dazu in dem Beweis

$$\varepsilon = 10^{-k_1} = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1 - 1 \text{ Stellen}} 1$$

und  $n = 10^{k_1}$  für ein beliebiges  $k_1 \geq 1$  mit  $10^{-k_1} < x$ , so ergibt sich eine rationale Zahl der Form

$$r_1 = \frac{m - 1}{10^{k_1}} = c_l^1 c_{l-1}^1 \dots c_1^1, d_1^1 d_2^1 d_3^1 \dots d_{k_1}^1,$$

d.h. ein Dezimalbruch mit höchstens  $k_1$  Nachkommastellen, der wegen  $x - r_1 < 10^{-k_1} \Rightarrow r_1 > x - 10^{-k_1} > 0$  positiv ist.

Nun konstruieren wir einen weiteren Dezimalbruch  $r_2$  wie folgt: Falls  $r_1 = x$  ist, setzen wir  $r_2 := r_1$  und falls  $r_1 + 10^{-k_1} = x$  ist, setzen wir  $r_2 := r_1 + 10^{-k_1}$ .

Andernfalls gilt nach der Konstruktion im Beweis  $r_1 < x < r_1 + 10^{-k_1}$ , also  $0 < x - r_1 < 10^{-k_1}$ . Wählen wir nun ein  $k_2 \geq k_1 + 1$  mit  $10^{-k_2} < x - r_1$ , so erhalten wir einen neuen endlichen Dezimalbruch  $r_2$  mit höchstens  $k_2$  Nachkommastellen, für den dann  $r_2 \leq x \leq r_2 + 10^{-k_2}$  gilt. Falls  $r_2 = x$  ist, sind wir wieder fertig, ansonsten gelten die Ungleichungen

$$x - r_2 \leq 10^{-k_2} < x - r_1 \Rightarrow r_2 > r_1$$

und

$$r_2 - r_1 = \underbrace{r_2 - x}_{\leq 0} + \underbrace{x - r_1}_{< 10^{-k_1}} < 10^{-k_1}.$$

Folglich ist  $r_2 - r_1$  von der Form

$$r_2 - r_1 = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1 \text{ Stellen}} \tilde{d}_{k_1+1} \tilde{d}_{k_1+2} \dots \tilde{d}_{k_2}$$

<sup>7</sup>In dieser Konstruktion setzen wir die Kenntnis der Dezimalbrüche aus der Schule voraus. Formal werden wir diese in Kapitel 4 definieren.

und damit

$$r_2 = r_1 + (r_2 - r_1) = c_l c_{l-1} \dots c_1^1, d_1^1 d_2^1 d_3^1 \dots d_{k_1}^1 \tilde{d}_{k_1+1}^1 \tilde{d}_{k_1+2}^1 \dots \tilde{d}_{k_2}^1.$$

Also stimmen die Vorkommastellen und die ersten  $k$  Nachkommastellen der beiden Dezimalzahlen überein, d.h.  $r_2$  entsteht aus  $r_1$  durch ‐Anhängen‐ von  $k_2 - k_1$  weiteren Dezimalstellen.

Setzen wir dieses Verfahren fort und erzeugen damit Dezimalbrüche  $r_1, r_2, r_3, \dots$  der Form

$$r_j = c_l^j c_{l-1}^j \dots c_1^j, d_1^j d_2^j d_3^j \dots d_{k_j}^j,$$

so erhalten wir entweder  $r_j = x$  für ein  $j \in \mathbb{N}$ , womit  $x$  ein endlicher Dezimalbruch (und damit insbesondere eine rationale Zahl) ist, oder wir erhalten immer längere Dezimalbrüche, bei denen die Stellen der kürzeren Brüche jeweils mit den entsprechenden Stellen der längeren Brüche übereinstimmen. Wegen  $k_j \geq j$  sind durch die Konstruktion für jeden dieser Dezimalbrüche zudem mindestens  $j$  Nachkommastellen festgelegt. Definieren wir nun den unendlichen Dezimalbruch

$$x' := c_l^1 c_{l-1}^1 \dots c_1^1, d_1^1 d_2^2 d_3^3 \dots,$$

so stimmen die Vorkommastellen und die ersten  $k_j$  Nachkommastellen von  $x'$  mit  $r_j$  überein. Also erhalten wir

$$|x' - r_j| = x' - r_j = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_j \text{ Stellen}} d_{k_j+1}^{k_j+1} d_{k_j+2}^{k_j+2} \dots \leq 10^{-k_j}$$

und damit für alle  $j \geq 1$

$$|x' - x| \leq |x' - r_j| + |r_j - x| \leq 2 \cdot 10^{-k_j}.$$

Wegen  $k_j \geq j$  wird die rechte Seite dieser Ungleichung für große  $j$  beliebig klein, weswegen die Ungleichung für alle  $j \geq 1$  nur gelten kann, wenn  $|x' - x| = 0$  und damit  $x = x'$  gilt.

# Kapitel 3

## Folgen

Stand:  
2. August 2022

### 3.1 Definition und Beispiele

Eine Folge in  $\mathbb{R}$  ist eine Menge reeller Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , so dass jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  genau eine Zahl  $a_n \in \mathbb{R}$  zugeordnet wird.

Eine Folge schreibt man als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Manchmal ist es dabei sinnvoll oder nötig, mit der Nummerierung erst bei einem  $n_0 > 0$  zu beginnen; dies werden wir gegebenenfalls aber immer explizit erwähnen.

#### Beispiel 3.1 (verschiedene Folgen)

- (a) Sei  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhält man die *konstante Folge*  $(a, a, a, a, \dots)$ .
- (b) Sei  $a_n = 1/n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$ . Dann erhält man  $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ .
- (c) Für  $a_n = (-1)^n$  erhält man  $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ .
- (d) Für  $a_n = n/(n+1)$  erhält man  $(0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots)$ .
- (e) Für  $a_n = n/2^n$  erhält man  $(0, 1/2, 1/2, 3/8, 1/4, 5/32, \dots)$ .
- (f) Jede Intervallschachtelung im Sinne von Kapitel 2 ist eindeutig durch die zwei Folgen  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  und  $(b_0, b_1, b_2, \dots)$  definiert.
- (g) Für  $a_n = b^n$  und  $b \in \mathbb{R}$  beliebig erhält man  $(1, b, b^2, b^3, \dots)$ .
- (h) Folgen sind oft rekursiv durch eine Rechenvorschrift definiert. Z.B. erhält man mit  $a_0 = 1, a_1 = 1$  und der Vorschrift  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$  für  $n \geq 2$  die Folge

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Dies ist die sogenannte Fibonacci-Folge. □

Viele Anwendungen der Mathematik führen auf Folgen. Das folgende Beispiel stellt einige (einfache) Anwendungen vor, die wir später noch mathematisch präziser definieren werden.

**Beispiel 3.2 (Folgen aus Anwendungen)**

- (a) (**Marktgleichgewicht**) Ein Bauer erntet eine Menge  $a_0$  kg Kartoffeln und stellt fest, dass der Marktpreis pro Kilogramm Kartoffeln viel zu niedrig ist, um seine Kosten zu decken. Er beschließt, im nächsten Jahr weniger zu pflanzen, so dass die Ernte  $a_1$  kg mit  $a_1 < a_0$  beträgt. Am Ende dieses Jahres stellt es fest, dass der Marktpreis deutlich gestiegen ist und beschließt, im folgenden Jahr die Menge wieder auf  $a_2$  kg mit  $a_2 > a_1$  zu erhöhen. Wenn er jedes Jahr abhängig vom Marktpreis die Menge für das folgende Jahr auf diese Weise anpasst, entsteht eine Folge  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ .
- (b) (**Wassertank**) Ein Wassertank kann durch Ventile gefüllt oder entleert werden. Auf dem Tank ist eine Skala für den Wasserstand, wobei die Marke 0 den gewünschten Stand markiert. Eine Technikerin programmiert einen Computer so, dass dieser jede Sekunde den Wasserstand misst. Ist dieser zu hoch, wird das Ablaufventil automatisch geöffnet, ist dieser zu niedrig, das Zulaufventil. Dadurch entsteht eine Folge von Wasserständen  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ .
- (c) (**Wurzelberechnung**) Ein populärer Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel  $\sqrt{x}$  für ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  funktioniert wie folgt: Wir wählen ein beliebiges  $a_0 > 0$  und berechnen  $a_{n+1}$  aus  $a_n$  rekursiv mittels der Formel

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right). \quad (3.1)$$

Dies erzeugt eine Folge  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ . □

Die Folgen aus den Beispielen werden wir im Folgenden noch einmal aufgreifen und genau analysieren.

## 3.2 Konvergenz

**Definition 3.3** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent*, falls ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, so dass gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass die Ungleichung  $d(a_n, a) < \varepsilon$  gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ .

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(gesprochen:  $a_n$  konvergiert gegen  $a$ ).

Der Wert  $a$  heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Falls  $a = 0$  nennen wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine *Nullfolge*. □

Eine etwas andere Formulierung dieser Definition erhalten wir, wenn wir das Intervall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  für  $\varepsilon > 0$  betrachten. Dieses wird  *$\varepsilon$ -Umgebung von  $a$*  genannt. Aus der Definition der Intervalle und des Betrags folgen die Äquivalenzen

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a_n > a - \varepsilon \text{ und } a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Die Konvergenzbedingung aus Definition 3.3 kann deswegen auch geschrieben werden als:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass alle Folgenglieder  $a_n$  mit  $n \geq N(\varepsilon)$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  liegen.

Damit können wir Konvergenz grafisch wie in Abbildung 3.1 veranschaulichen.

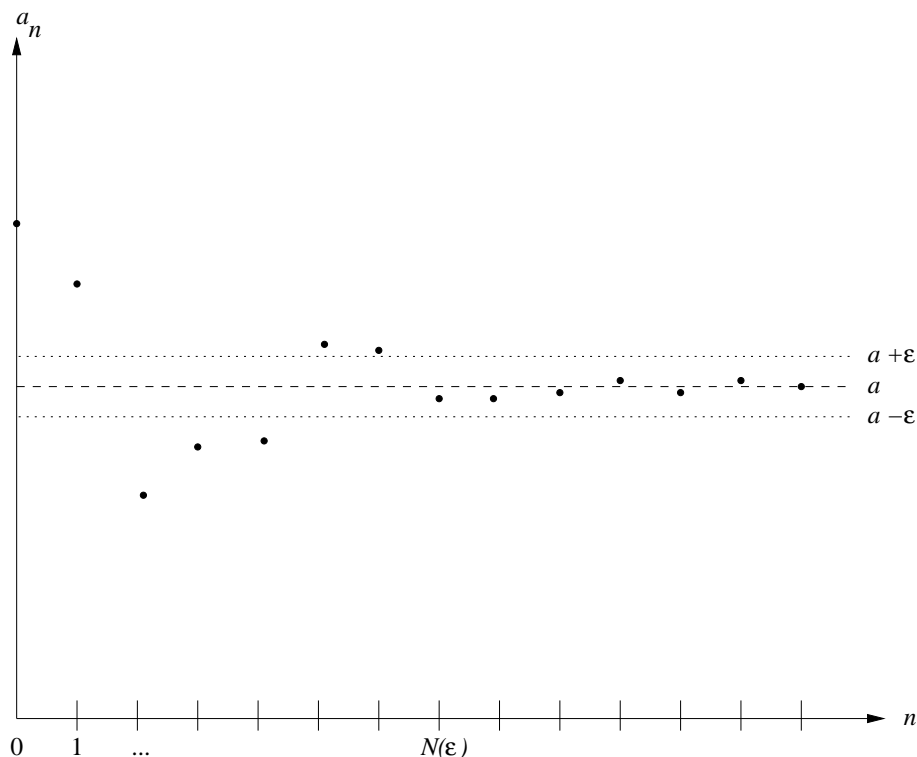


Abbildung 3.1: Illustration der Konvergenz einer Folge

Wenn man an dem Index  $N(\varepsilon)$  nicht interessiert ist, kann man die Bedingung auch schreiben als:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  liegen nur endlich viele Folgenglieder nicht in  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Begründung: Wenn Definition 3.3 mit  $N(\varepsilon)$  erfüllt ist, liegen höchstens die endlich vielen Folgenglieder  $(a_0, \dots, a_{N(\varepsilon)-1})$  außerhalb von  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Wenn umgekehrt nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  liegen und  $N$  der maximale Index dieser Glieder ist, so gilt Definition 3.3 mit  $N(\varepsilon) = N + 1$ .

Eine andere äquivalente Formulierung der Konvergenz gibt der folgende Satz.

**Satz 3.4** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  wenn es eine Nullfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $d(a_n, a) \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ .

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass aus der Konvergenz  $b_n \rightarrow 0$  die Konvergenz  $a_n \rightarrow a$  folgt. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben. Aus  $b_n \rightarrow 0$  folgt die Existenz von  $N(\varepsilon)$  mit  $b_n \leq |b_n| = d(b_n, 0) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Also folgt

$$d(a_n, a) \leq b_n < \varepsilon$$



für alle  $n \geq \max\{N(\varepsilon), n_0\}$ . Also liegen nur endlich viele Folgenglieder  $a_n$  außerhalb von  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , woraus die Konvergenz  $a_n \rightarrow a$  folgt.

Gelte umgekehrt  $a_n \rightarrow a$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $d(a_n, a) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Definieren wir  $b_n := d(a_n, a)$  und  $n_0 := 0$  so gilt offensichtlich  $d(a_n, a) \leq b_n$  und zudem

$$d(b_n, 0) = |b_n| = |d(a_n, a)| = d(a_n, a) < \varepsilon,$$

für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ , also  $b_n \rightarrow 0$ . □

Das Gegenteil der Konvergenz ist die Divergenz.

**Definition 3.5** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *divergent*, falls sie nicht konvergent ist. □

Wir untersuchen nun einige der Folgen aus Beispiel 3.1 auf Konvergenz oder Divergenz:

**Beispiel 3.1(a):** Die Folge ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , denn: sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann gilt für alle  $n \geq 0$  die Ungleichung

$$d(a_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon.$$

Wir erhalten also die gesuchte Bedingung mit  $N(\varepsilon) = 0$ . □

**Beispiel 3.1(b):** Die Folge ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , denn: sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $N(\varepsilon)$  eine natürliche Zahl mit  $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ . Dann gilt  $1/N(\varepsilon) < \varepsilon$  und damit für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  die Ungleichung

$$d(a_n, a) = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Die Folge mit  $a_n = 1/n$  ist also eine Nullfolge. □

**Beispiel 3.1(c):** Die Folge ist divergent, was wir per Widerspruch beweisen. Nehmen wir an, dass ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, so dass die Folge konvergiert. Dann gibt es nach Definition für  $\varepsilon = 1$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass

$$d(a_n, a) < 1$$

gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Für gerades  $n$  ist nun gerade  $a_n = 1$ , daher folgt

$$1 > d(a_n, a) > a_n - a = 1 - a \Rightarrow a > 1 - 1 = 0.$$

Für ungerades  $n$  ist  $a_n = -1$  und daher folgt

$$1 > d(a_n, a) > a - a_n = a - (-1) = a + 1 \Rightarrow a < 1 - 1 = 0.$$

Da  $a$  aber nicht zugleich kleiner und größer als Null sein kann, erhalten wir einen Widerspruch. □

**Beispiel 3.1(d):** Die Folge ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , denn es gilt

$$d(a_n, a) = d\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Da  $b_n := \frac{1}{n}$  gemäß (b) gegen 0 konvergiert, konvergiert  $a_n$  nach Satz 3.4 gegen  $a = 1$ .  $\square$

**Beispiel 3.1(e):** Die Folge ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , ist also eine Nullfolge. Um dies zu sehen, beweist man zunächst per Induktion für alle  $n \geq 4$  die Ungleichung  $n^2 \leq 2^n$ .

Damit erhalten wir

$$\frac{n^2}{2^n} \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

und somit

$$d(a_n, 0) = \left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Wegen  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt die Behauptung nun aus Satz 3.4.  $\square$

Für die Untersuchung weiterer Folgen aus Beispiel 3.1 sowie für die Untersuchung von Beispiel 3.2(c) benötigen wir noch etwas Vorarbeit, die wir im Folgenden machen werden. Für Beispiel 3.2(a) und (b) können wir noch gar keine Aussagen treffen, weil wir ja noch gar keine mathematische Vorschrift für die resultierenden Folgen angegeben haben — diese werden wir uns später überlegen. Trotzdem ist die Konvergenz hier ein sinnvoller Begriff. So ist z.B. die Frage, ob sich die produzierten Mengen in Beispiel 3.2(a) im Laufe der Jahre einem konstanten Wert  $a$  (einem sogenannten *Marktgleichgewicht*) annähern, mathematisch nichts anderes als die Frage nach der Konvergenz der Folge. Ebenso ist die Frage, ob die Strategie der Technikerin in Beispiel 3.2(b) dazu führt, dass der Wasserstand sich in der 0 “einpendelt”, mathematisch nichts anderes als die Frage, ob die resultierende Folge der Wasserstände eine Nullfolge ist.

### 3.3 Eigenschaften und Rechenregeln konvergenter Folgen

**Definition 3.6** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls es ein  $K \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $a_n \leq K$  (bzw.  $a_n \geq K$ ) gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.  $\square$

**Satz 3.7** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Wir zeigen die Beschränktheit nach oben, der Beweis für die Beschränktheit nach unten funktioniert analog.

Sei die Folge also konvergent mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ . Wir wenden Definition 3.3 mit  $\varepsilon = 1$  an. Für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  gilt dann

$$a_n = a_n - a + a \leq |a_n - a| + a = d(a_n, a) + a < 1 + a.$$

Wählen wir nun  $K = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N(\varepsilon)-1}, 1 + a\}$  so gilt  $a_n \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist die Beschränktheit nach oben gezeigt.  $\square$

Die Folge  $a_n = (-1)^n$  zeigt, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, denn diese ist mit  $K = 1$  und  $K = -1$  nach oben und unten beschränkt, konvergiert aber nicht.

Formal haben wir also die Implikation “die Folge konvergiert  $\Rightarrow$  die Folge ist beschränkt” gezeigt. Damit gilt ebenfalls die Implikation “die Folge ist nicht beschränkt  $\Rightarrow$  die Folge

konvergiert nicht”, die wir auch als “die Folge ist nicht beschränkt  $\Rightarrow$  die Folge divergiert” schreiben können. Damit können wir nun zwei weitere Folgen aus Beispiel 3.1 untersuchen.

**Beispiel 3.1(h):** Die Fibonacci-Folge divergiert, denn per Induktion zeigt man leicht die Ungleichung  $a_n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge ist daher unbeschränkt.  $\square$

**Beispiel 3.1(g):** Die Konvergenz oder Divergenz der Folge  $a_n = b^n$  hängt vom Wert von  $b$  ab.

**Fall 1:**  $|b| < 1$ . In diesem Fall existiert nach Satz 2.2(b) für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  (dort einfach  $n$  genannt) mit  $|b|^{N(\varepsilon)} < \varepsilon$ . Damit folgt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$

$$d(a_n, 0) = |b^n| = |b|^n \leq |b|^{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge gegen  $a = 0$ .

**Fall 2:**  $b = 1$ . In diesem Fall gilt  $b^n = 1$  für alle  $n$ , die Folge konvergiert also gegen  $a = 1$ , vgl. Beispiel 3.1(a).

**Fall 3:**  $b = -1$ . In diesem Fall gilt  $b^n = (-1)^n$  für alle  $n$ , die Folge divergiert also, vgl. Beispiel 3.1(c).

**Fall 4:**  $|b| > 1$ . In diesem Fall folgt aus Satz 2.2(a), dass  $|b|^n$  unbeschränkt ist. Damit muss auch  $b^n$  unbeschränkt sein, weswegen die Folge divergiert.  $\square$

Wir fahren fort mit der Herleitung weiterer Eigenschaften und Rechenregeln für Folgen.

**Satz 3.8 (Eindeutigkeit des Limes)** Wenn eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl gegen  $a \in \mathbb{R}$  als auch gegen  $\tilde{a} \in \mathbb{R}$  konvergiert, so gilt  $a = \tilde{a}$ .

**Beweis:** Wir nehmen zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass  $a \neq \tilde{a}$  gilt und setzen  $\varepsilon := d(a, \tilde{a})/2$ . Dann folgt aus Definition 3.3 die Existenz eines  $n \in \mathbb{N}$  mit  $d(a_n, a) < \varepsilon$  und  $d(a_n, \tilde{a}) < \varepsilon$ . Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung für den Abstand  $d$

$$d(a, \tilde{a}) \leq d(a, a_n) + d(a_n, \tilde{a}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, \tilde{a}).$$

Die resultierende Ungleichung  $d(a, \tilde{a}) < d(a, \tilde{a})$  ist aber nicht möglich, woraus der Widerspruch folgt.  $\square$

**Satz 3.9 (Summenregel)** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann ist auch die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n + b_n$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b$ . Kurz geschrieben gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  und seien  $N_a(\varepsilon/2)$  und  $N_b(\varepsilon/2)$  die entsprechenden Indizes aus Definition 3.3. Setze  $N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$

$$d(c_n, a + b) = d(a_n + b_n, a + b) = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

womit die Konvergenz für  $a_n + b_n$  gezeigt ist.  $\square$

Ein **Beispiel** für die Anwendung der Summenregel ist die Folge  $c_n = (n + 1)/n$ . Schreibt man diese nämlich als

$$c_n = \frac{n + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = a_n + b_n,$$

so kann man die Konvergenz für  $a_n$  gegen 1 aus Beispiel 3.1(a) und die Konvergenz von  $b_n$  gegen 0 aus Beispiel 3.1(b) verwenden, um ohne weitere Rechnung die Konvergenz von  $c_n$  gegen  $1 + 0 = 1$  zu folgern.

**Satz 3.10 (Produktregel)** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen. Dann ist auch die Folge  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

**Beweis:** Es sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Nach Satz 3.7 ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Setzen wir  $K$  gleich dem Maximum der Beträge der oberen und unteren Schranken, so folgt  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Indem wir  $K$  — falls nötig — vergrößern, können wir zudem  $|b| \leq K$  annehmen.

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben und seien  $N_a(\varepsilon)$  und  $N_b(\varepsilon)$  gemäß Definition 3.3 für die Folgen  $a_n$  und  $b_n$  gewählt. Dann gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/(2K)), N_b(\varepsilon/(2K))\}$

$$\begin{aligned} d(a_n b_n, ab) &= |a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| \\ &= |a_n| d(b_n, b) + d(a_n, a) |b| < K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 3.11**<sup>1</sup> Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch die Folge  $(\lambda b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda b_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 3.10 mit der konstanten Folge  $a_n = \lambda$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Damit können wir nun auch den Wassertank aus **Beispiel 3.2(b)** behandeln, wenn wir das Öffnen und Schließen der Ventile in geeigneter Form mathematisch definieren. Wir nehmen dazu an, dass das Zulaufventil im Fall  $a_n < 0$  gerade so weit geöffnet wird, dass der Wasserpegel in einer Sekunde um den Betrag  $|\alpha a_n|$  für ein  $\alpha > 0$  zunimmt. Im Fall  $a_n > 0$  nehmen wir an, dass das Ablaufventil gerade so weit geöffnet wird, dass der Pegel um den Betrag  $|\beta a_n|$  für ein  $\beta > 0$  abnimmt. Für den Pegel  $a_{n+1}$  nach einer Sekunde gilt dann entweder

$$a_{n+1} = a_n + |\alpha a_n| = a_n - \alpha a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} = a_n - |\beta a_n| = a_n - \beta a_n$$

<sup>1</sup>Ein *Korollar* bezeichnet eine — zumeist einfache — Folgerung aus vorhergehenden Aussagen.

(beachte, dass im ersten Fall  $a_n < 0$  und damit  $|\alpha a_n| = -\alpha a_n$  gilt). Setzen wir nun voraus, dass  $\alpha = \beta$  ist<sup>2</sup>, so erhalten wir in beiden Fällen die gleiche Vorschrift, die wir als

$$a_{n+1} = a_n - \alpha a_n = (1 - \alpha)a_n$$

schreiben können. Per Induktion kann man dann beweisen, dass die resultierende Folge von der Form  $a_n = a_0(1 - \alpha)^n$  ist, was wir mit  $\lambda = a_0$  und  $b = (1 - \alpha)$  auch als

$$a_n = \lambda b^n$$

schreiben können. Falls  $b^n$  gegen Null konvergiert, konvergiert nach Korollar 3.11 auch  $a_n = \lambda b^n$  gegen Null, womit unser Ziel erreicht wäre.

Betrachten wir nun den Fall, dass der Pegel  $a_0$  am Anfang nicht gleich Null ist (denn dann wäre ja nichts zu tun). Dann ist  $\lambda \neq 0$  und falls  $\lambda b^n$  gegen Null konvergiert, muss nach Satz 3.10 auch  $b^n = \frac{1}{\lambda}(\lambda b^n)$  gegen Null konvergieren (beachte: hier ist  $\lambda \neq 0$  wichtig, damit  $1/\lambda$  existiert). Für  $a_0 \neq 0$  gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0.$$

Nach Beispiel 3.1(g) konvergiert die Folge  $b^n$  nun gerade dann gegen 0, wenn  $|b| < 1$  ist. Folglich pendelt sich der Pegel für  $a_0 \neq 0$  gerade dann wie gewünscht auf die Null ein, wenn  $|1 - \alpha| < 1$  ist, was äquivalent zu  $0 < \alpha < 2$  ist.

Die Technikerin sollte  $\alpha$  also zwischen 0 und 2 wählen. Insbesondere ist der auf den ersten Blick vielleicht naheliegende Schluss, dass der Pegel schneller gegen 0 konvergiert, wenn  $\alpha$  sehr groß gewählt wird, wenn also in jeder Sekunde sehr viel Wasser eingefüllt oder abgelassen wird, falsch!  $\square$

**Korollar 3.12 (Differenzregel)** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen. Dann ist auch die Folge  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis:** Wegen  $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$  folgt die Aussage aus Satz 3.9 und Korollar 3.11.  $\square$

**Satz 3.13 (Quotientenregel)** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ . Dann gibt es ein  $n_0$ , so dass  $b_n \neq 0$  gilt für alle  $n \geq n_0$  und die Folge  $(a_n/b_n)_{n \geq n_0}$  ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

<sup>2</sup>Der Fall  $\alpha \neq \beta$  ist deutlich komplizierter. Bei Interesse können wir diesen in der Fragestunde behandeln.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst die Konvergenz der Folge  $1/b_n$ .

Da  $b \neq 0$  ist, folgt  $|b|/2 > 0$ . Damit gilt für alle  $n \geq N_b(|b|/2)$  mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| = d(b, b_n) < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

woraus insbesondere  $b_n \neq 0$  folgt. Wir können also  $n_0 = N_b(|b|/2)$  wählen.

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben und setze  $N(\varepsilon) := \max\{n_0, N_b(\varepsilon|b|^2/2)\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$

$$d\left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{b}\right) = \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b_n - b| = \frac{1}{|b_n||b|}d(b_n, b) < \frac{2}{|b|^2} \frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$  verwendet haben, was aus  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$  folgt. Dies zeigt, dass  $1/b_n$  konvergent ist mit Limes  $1/b$ .

Die Konvergenz der Folge  $a_n/b_n$  folgt nun wegen

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$$

aus Satz 3.10. □

Damit haben wir die wesentlichen Rechenregeln für konvergente Folgen bewiesen. Mit diesen Regeln kann man Grenzwerte für Folgen mit komplizierten Termen berechnen, wobei man allerdings zumeist die richtige Idee für einen Ansatz braucht. Betrachten wir als **Beispiel** die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{5n^3 + 7n}{n^3 - 3}.$$

Die Quotientenregel ist hier nicht anwendbar, weil weder der Zähler noch der Nenner einzeln konvergieren. Für  $n \geq 1$  können wir den Bruch aber mit  $n^3$  kürzen<sup>3</sup> und erhalten so

$$a_n = \frac{5 + 7/n^2}{1 - 3/n^3}.$$

Jetzt können wir unsere Sätze auf die einzelnen Terme anwenden: Im Zähler gilt  $1/n^2 \rightarrow 0$  wegen Satz 3.10 — angewendet auf  $1/n$  und  $1/n$  — und Beispiel 3.1(b). Wenden wir auf  $1/n^2$  und  $1/n$  noch einmal Satz 3.10 und Beispiel 3.1(b) an, so folgt auch für den Term im Nenner  $1/n^3 \rightarrow 0$ . Nach Korollar 3.11 gilt dann auch  $7/n^2 \rightarrow 0$  und  $3/n^3 \rightarrow 0$ . Mit Satz 3.9 folgt dann, dass der Zähler gegen 5 konvergiert und wegen Korollar 3.12 konvergiert der Nenner gegen 1. Wegen  $1 \neq 0$  ist schließlich Satz 3.13 anwendbar, was für den gesamten Bruch Konvergenz mit Grenzwert  $5/1 = 5$  liefert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch Ungleichungen für Grenzwerte.

---

<sup>3</sup>Dass wir hier das Folgenglied für  $n = 0$  herausnehmen müssen, ist für die Konvergenz und den Grenzwert unerheblich, da die Bedingung in der Definition der Konvergenz ja nur für hinreichend große  $n$  nachgeprüft werden muss.

**Satz 3.14** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen, für die ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis:** Wir setzen  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  und nehmen an, dass  $a > b$  ist. Für alle  $n \geq \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$  mit  $\varepsilon = a/2 - b/2 > 0$  gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad b_n < b + \varepsilon = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Daraus folgt

$$a_n > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > b_n,$$

was der Annahme  $a_n \leq b_n$  widerspricht, da  $n$  beliebig groß ist und damit größer als  $n_0$  gewählt werden kann.  $\square$

**Achtung:** Aus der strikten Ungleichung  $a_n < b_n$  für alle  $n$  folgt im Allgemeinen **nicht** die strikte Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Ein Beispiel hierfür sind die Folgen  $a_n = 0$  und  $b_n = 1/n$ . Hier gilt sicherlich  $a_n < b_n$ , beide Folgen haben aber den Limes 0. Der Grenzwert verhält sich also wie das Supremum: auch wenn alle Folgenglieder/Elemente eine strikte Ungleichung erfüllen, kann für den Grenzwert/das Supremum Gleichheit gelten.

Indem wir entweder  $a_n$  oder  $b_n$  in Satz 3.14 konstant gleich  $A$  oder  $B$  wählen, erhalten wir sofort das folgende Korollar.

**Korollar 3.15** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und  $A, B \in \mathbb{R}$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  gegeben mit  $A \leq a_n \leq B$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt

$$A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq B.$$

### 3.4 Uneigentliche Konvergenz

Divergente Folgen können sich auf ganz unterschiedliche Weisen verhalten. Betrachten wir beispielsweise die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

- (i)  $a_n = 2^n$
- (ii)  $a_n = -2^n$
- (iii)  $a_n = (-2)^n$
- (iv)  $a_n = (-1)^n$

so stellt man fest, dass die Glieder der Folge (i) immer größer werden, die Glieder der Folge (ii) immer kleiner (im Sinne von immer “negativer”) werden und dass die Glieder der Folge (iii) abwechselnd immer größer und immer kleiner werden. Alle diese Folgen sind dabei unbeschränkt und damit divergent. Die Folge (iv) ist beschränkt, ist aber wie in Beispiel 3.1(c) gezeigt ebenfalls divergent.

Wir haben hier also vier Folgen, die alle divergent sind, dies aber auf ganz unterschiedliche Weise. Die folgende Definition umfasst zwei dieser Fälle.

**Definition 3.16** Eine Folge reeller Zahlen heißt *uneigentlich konvergent* gegen  $+\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ ), wenn es zu jedem  $K \in \mathbb{R}$  ein  $M(K) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K) \quad \text{für alle } n \geq M(K).$$

Wir schreiben in diesem Fall auch<sup>4</sup>

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty).$$

Statt uneigentlich konvergent sagt man auch *bestimmt divergent*. □

Wichtig für diese Definition ist nicht, dass ein Folgenglied jeweils größer (bzw. kleiner) ist als das vorhergehende, sondern dass jede beliebige Schranke für hinreichend große  $N$  nicht mehr unterschritten (bzw. überschritten) wird.

Die Folge (i) ist also uneigentlich konvergent gegen  $+\infty$ , die Folge (ii) uneigentlich konvergent gegen  $-\infty$ . Die Folgen (iii) und (iv) sind nicht uneigentlich konvergent.

Mit dem Begriff der uneigentlichen Konvergenz können wir nun auch Grenzwerte von Folgen der Form  $1/a_n$  betrachten, wenn der Grenzwert von  $a_n$  entweder Null ist oder gar nicht im eigentlichen Sinne existiert.

**Satz 3.17** (a) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei uneigentlich konvergent gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ). Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_n \neq 0$  gilt für alle  $n \geq n_0$  und die Folge  $1/a_n$ ,  $n \geq n_0$  ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0,$$

d.h. sie ist eine Nullfolge.

(b) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge für die für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$  (bzw.  $a_n < 0$  für alle  $n \geq n_0$ ) gilt. Dann ist die Folge  $1/a_n$ ,  $n \geq n_0$  uneigentlich konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty \quad (\text{bzw. } = -\infty).$$

---

<sup>4</sup>Beachte, dass  $\infty$  und  $-\infty$  hier nur Symbole sind, keine reellen Zahlen. Die Existenz einer reellen Zahl  $\infty$  würde wegen  $\infty + 1 = \infty$  und  $\infty + 0 = \infty$  implizieren, dass  $1 = 0$  ist, was in den Körperaxiomen explizit ausgeschlossen ist.



**Beweis:** Wir beweisen für beide Teile den Fall “ $\infty$ ”, der Beweis für den Fall “ $-\infty$ ” verläuft analog.

(a) Setzen wir  $n_0 = M(1)$  für  $M(K)$  aus Definition 3.16, so folgt aus  $a_n > 1$  die Ungleichung  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ . Für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  setzen wir  $N(\varepsilon) = \max\{n_0, M(K)\}$  mit  $K = 1/\varepsilon$ . Dann folgt

$$d\left(\frac{1}{a_n}, 0\right) = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K} = \varepsilon.$$

□

(b) Sei  $K > 0$  gegeben. Setzen wir  $M(K) := \max\{n_0, N(\varepsilon)\}$  mit  $\varepsilon = 1/K$  so folgt für alle  $n \geq N(K)$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K.$$

□

### 3.5 Cauchy-Folgen und monotone Folgen

Die bisherige Definition 3.3 der Konvergenz hat den Nachteil, dass man den Grenzwert  $a$  kennen muss, bevor man überprüfen kann, ob eine Folge konvergent ist. Dies macht ihre Verwendung manchmal umständlich oder sogar unmöglich. Mit den nach dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy (1789–1857) benannten Cauchy-Folgen umgeht man dieses Problem, wie der nach der Definition dieser Folgen angegebene Satz 3.19 zeigt.

**Definition 3.18** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

gilt für alle  $n, m \geq C(\varepsilon)$ .

□

Anschaulich besagt diese Definition, dass für  $n, m \geq C(\varepsilon)$  alle Folgenglieder  $a_m$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a_n$  liegen. Im Gegensatz zur Definition der Konvergenz in Definition 3.3 wird diese Umgebung ohne Kenntnis eines Grenzwerts  $a$  definiert. Der folgende Satz zeigt, dass diese Bedingung äquivalent zur Konvergenz ist.

**Satz 3.19** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

**Beweis:** Wir beweisen die Folgerungen “Konvergenz  $\Rightarrow$  Cauchy-Folge” und “Cauchy-Folge  $\Rightarrow$  Konvergenz” und beginnen mit der ersten.

“Konvergenz  $\Rightarrow$  Cauchy-Folge”: Wir verwenden  $N(\varepsilon)$  aus Definition 3.3 und setzen  $C(\varepsilon) := N(\varepsilon/2)$ . Dann gilt für alle  $n, m \geq C(\varepsilon)$  mit der Dreiecksungleichung

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Folglich ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.

“Cauchy-Folge  $\Rightarrow$  Konvergenz”: Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.7 sieht man, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist. Wir definieren zwei Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt:

$$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad c_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Mit dieser Definition gilt dann die Ungleichung

$$b_n \leq a_k \leq c_n \quad \text{für alle } k \geq n. \quad (3.2)$$

Falls nun ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $b_{n_0} = c_{n_0}$ , so folgt aus (3.2)  $a_k = b_{n_0}$  für alle  $k \geq n_0$ . Die Folge  $(a_n)$  ist also konstant gleich  $b_{n_0}$  für  $n \geq n_0$  und konvergiert damit gegen  $b_{n_0}$ .

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass  $b_n < c_n$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $b_n$  gilt

$$b_{n+1} = \inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \geq \min\{\inf\{a_k \mid k \geq n+1\}, a_n\} = \inf\{a_k \mid k \geq n\} = b_n.$$

Analog zeigt man  $c_{n+1} \leq c_n$ . Definieren wir also Intervalle  $I_n := [b_n, c_n]$ , so gilt  $I_{n+1} \subset I_n$ . Zudem folgt aus (3.2), dass  $a_k \in I_n$  gilt für alle  $k \geq n$ .

Aus der Cauchy-Folgen-Eigenschaft folgt  $|a_k - a_n| < \varepsilon$  für alle  $k, n \geq C(\varepsilon)$ . Insbesondere gilt also  $a_k > a_n - \varepsilon$  und  $a_k < a_n + \varepsilon$  für  $n = C(\varepsilon)$  und alle  $k \geq C(\varepsilon)$ . Nach Satz 2.18 übertragen sich diese Ungleichungen (in nicht strikter Form) auf das Supremum und Infimum, also

$$b_n \geq a_n - \varepsilon \quad \text{und} \quad c_n \leq a_n + \varepsilon.$$

Folglich gilt für jedes  $\varepsilon > 0$  mit  $n = C(\varepsilon/4)$  die Ungleichung

$$|I_n| = c_n - b_n \leq a_n + \varepsilon/4 - a_n + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Damit ist  $(I_n)$  eine Intervallschachtelung und nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert ein eindeutiges  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Aus  $a \in I_n$  und der oben bereits bewiesenen Ungleichung  $b_n \leq a_k \leq c_n$  folgt dann für  $k \geq C(\varepsilon)$

$$a_k - a \leq c_n - a \leq c_n - b_n < \varepsilon$$

und

$$a - a_k \leq c_n - a_k \leq c_n - b_n < \varepsilon.$$

Damit gilt auch  $d(a_k, a) < \varepsilon$  und folglich Konvergenz gegen  $a$  mit  $N(\varepsilon) = C(\varepsilon)$ .  $\square$

Mit Hilfe der Cauchy-Folgen können wir ein Konvergenzkriterium herleiten, das in der Analysis eine wichtige Rolle spielt, weil es für eine gegebene Folge oft relativ leicht nachzuprüfen ist. Dazu benötigen wir noch den folgenden Begriff.

**Definition 3.20** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

- *monoton wachsend*, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_{n+1} \geq a_n$  gilt
- *monoton fallend*, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_{n+1} \leq a_n$  gilt.
- *monoton*, falls sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

□

Man kann (teilweise mit etwas Rechnerei) nachprüfen, dass z.B. die Folgen aus Beispiel 3.1(a), (b), (d), (e), (f), (h) monoton sind. Die Folge  $a_n = b^n$  aus Beispiel 3.1(g) ist monoton, falls  $b \geq 0$  ist. Die Folge  $(-1)^n$  aus Beispiel 3.1(c) ist nicht monoton.

**Satz 3.21** Jede beschränkte und monotone reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz für monoton wachsende Folgen, für monoton fallende Folgen verläuft er analog. Wir werden zeigen, dass jede beschränkte und monoton wachsende Folge eine Cauchy-Folge ist, woraus dann die Behauptung mit Satz 3.19 folgt.

Dazu nehmen wir zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchy-Folge ist. Um mit dieser Annahme einen Beweis zu führen, müssen wir uns überlegen, was es formal bedeutet, wenn eine Folge keine Cauchy-Folge ist.

Die Definition der Cauchy-Folge verlangt, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq C(\varepsilon)$ . Wenn eine Folge also keine Cauchy-Folge ist, heißt dies, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass kein solches  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert. Das bedeutet, dass egal wie wir  $C(\varepsilon)$  wählen, immer Zahlen  $n, m \geq C(\varepsilon)$  existieren, so dass  $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ . Da unser  $\varepsilon > 0$  jetzt fest ist, brauchen wir die Abhängigkeit  $C(\varepsilon)$  nicht eigens zu betonen und schreiben einfach  $C$ . Zusammengefasst impliziert die Tatsache, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchy-Folge ist, also die folgende Eigenschaft:

Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $C \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen  $n, m \geq C$  existieren mit  $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ .

Hierbei können wir die Benennung von  $n$  und  $m$  o.B.d.A. so wählen, dass  $n > m$  ist. Wegen der Monotonie der Folge gilt dann

$$a_n - a_m = d(a_n, a_m) \geq \varepsilon \Rightarrow a_n \geq a_m + \varepsilon.$$

Per Induktion beweisen wir jetzt, dass daraus die folgende Aussage folgt: Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$$a_{n_k} \geq a_0 + k\varepsilon. \tag{3.3}$$

$k = 0$ : klar mit  $n_0 = 0$

$k \rightarrow k + 1$ : Nach der Induktionsannahme existiert  $n_k$  mit (3.3). Wenden wir nun die obige Eigenschaft der Nicht-Cauchy-Folge mit  $C = n_k$  an, so finden wir  $n > m \geq n_k$  mit  $a_n \geq a_m + \varepsilon$ . Setzen wir  $n_{k+1} := n$  so gilt wegen der Monotonie der Folge und der Induktionsannahme

$$a_{n_{k+1}} = a_n \geq a_m + \varepsilon \geq a_{n_k} + \varepsilon \geq a_0 + k\varepsilon + \varepsilon = a_0 + (k + 1)\varepsilon.$$

Damit ist (3.3) bewiesen.

Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach Annahme beschränkt ist, existiert nun  $K \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wählen wir nun  $k > (K - a_0)/\varepsilon$ , so folgt  $k\varepsilon > K - a_0$  und damit aus (3.3)

$$a_{n_k} \geq a_0 + k\varepsilon > a_0 + K - a_0 = K.$$

Damit erhalten wir den gesuchten Widerspruch.

Jede beschränkte und monotone Folge ist also eine Cauchy-Folge und damit nach Satz 3.19 konvergent.  $\square$

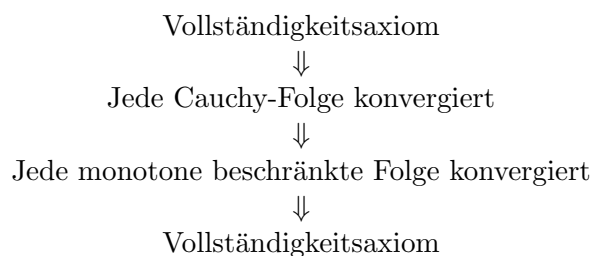
**Beispiel 3.1(f):** Mit diesem Satz können wir nun auch die Konvergenz für die durch die Ränder der Intervallschachtelung in Beispiel 3.1(f) definierten Folgen  $a_n$  und  $b_n$  beweisen: Da die Intervalle verschachtelt sind, muss  $a_{n+1} \geq a_n$  und  $b_{n+1} \leq b_n$  gelten, also sind die Folgen monoton. Aus der Monotonie folgt sofort, dass  $K = a_0$  wegen  $a_n \geq a_0$  eine untere Schranke für  $a_n$  ist. Wegen  $a_n < b_n \leq b_0$  ist zudem  $K = b_0$  eine obere Schranke. Also ist  $a_n$  beschränkt und analog sieht man, dass auch  $b_n$  beschränkt ist. Folglich sind beide Folgen nach Satz 3.21 konvergent.

Tatsächlich können wir hier noch mehr beweisen, nämlich dass beide Grenzwerte  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  in jedem Intervall  $I_n$  liegen. Sei dazu ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Korollar 3.15 liefert wegen  $a_k \geq a_n$  für alle  $k \geq n$  die Ungleichung  $a \geq a_n$ ; analog folgt  $b \leq b_n$ . Wegen  $a_n < b_n$  liefert Satz 3.14 zudem  $a \leq b$ . Folglich gilt

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \Rightarrow a \in I_n \text{ und } b \in I_n.$$

Da wir in Abschnitt 2.4 bereits bewiesen haben, dass es nur ein Element geben kann, das in allen Intervallen  $I_n$  liegt, folgt daraus insbesondere die Gleichheit  $a = b$ .  $\square$

Dieses Beispiel zeigt, dass aus Satz 3.21 das Vollständigkeitsaxiom folgt, denn wir haben ja bewiesen, dass der Grenzwert  $a$  in  $\mathbb{R}$  existiert und in allen Intervallen liegt. Das klingt auf den ersten Blick verwirrend, denn wir hatten ja gesagt, dass ein Axiom eine Bedingung ist, die sich nicht aus anderen Bedingungen ableiten lässt. Betrachtet man aber die einzelnen Schritte, die zu dem gerade gegebenen Beweis geführt haben, so stellt man fest, dass diese wie folgt aufeinander aufbauen.



Damit löst sich die Verwirrung auf, denn wir haben das Vollständigkeitsaxiom aus sich selbst gefolgert, was der Eigenschaft eines Axioms nicht widerspricht. Diese Kette der Folgerungen zeigt aber auch, dass das Vollständigkeitsaxiom äquivalent zu den beiden Eigenschaften in der Mitte der Kette ist. Wir hätten also äquivalent eine dieser beiden Eigenschaften an Stelle des Vollständigkeitsaxioms fordern können, was in einigen Büchern auch so gemacht wird.

Mit den Sätzen aus diesem Abschnitt können wir nun die Methode der Wurzelberechnung aus **Beispiel 3.2(c)** analysieren und insbesondere beweisen, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_0 > 0 \text{ beliebig, } a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right)$$

tatsächlich gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 = x$  konvergiert. Dass solch ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, setzen wir dabei nicht voraus; die Existenz ergibt sich als ‘‘Nebenprodukt’’ aus dem folgenden Beweis, der in 6 Schritte (0-5) unterteilt ist.

0. Als Vorüberlegung beweisen wir zunächst, dass es nur eine positive Lösung  $y \in \mathbb{R}$  der Gleichung  $y^2 = x$  geben kann. Angenommen, für  $\tilde{y} > 0$  gilt ebenfalls  $\tilde{y}^2 = x$ . Dann folgt

$$0 = x - x = y^2 - \tilde{y}^2 = (y + \tilde{y})(y - \tilde{y}).$$

Wegen  $y + \tilde{y} > 0$  muss also  $y - \tilde{y} = 0$  sein, also  $y = \tilde{y}$ . Es gibt also höchstens eine positive Lösung der Gleichung  $y^2 = x$ .

1. Es gilt  $a_n > 0$  für alle  $n$ . Dies folgt leicht per Induktion, da mit  $a_n > 0$  auch der Ausdruck in der Klammer stets  $> 0$  ist.

2. Es gilt  $a_n^2 \geq x$  für alle  $n \geq 1$ , denn:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - x &= \left( \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) \right)^2 - x = \frac{1}{4} \left( a_n^2 + 2x + \frac{x^2}{a_n^2} \right) - x \\ &= \frac{1}{4} \left( a_n^2 - 2x + \frac{x^2}{a_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( a_n - \frac{x}{a_n} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Es gilt  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \geq 1$ , denn:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) = \frac{1}{2a_n} (a_n^2 - x) \geq 0.$$

4. Aus 3. folgt, dass die Folge  $a_n$  für  $n \geq 1$  monoton fallend ist. Folglich ist sie nach oben durch  $a_1$  beschränkt. Da sie gemäß 1. nach unten durch 0 beschränkt ist, ist sie also insgesamt monoton und beschränkt und konvergiert damit nach Satz 3.21 gegen ein  $a \in \mathbb{R}$ . Aus 1. folgt  $a_n > 0$  und damit nach Satz 3.14 auch  $a \geq 0$ . Nach Satz 3.10 konvergiert die Folge  $a_n^2$  gegen  $a^2$  und weil für diese nach 2.  $a_n^2 > x$  gilt, folgt mit Satz 3.14  $a^2 \geq x$ . Also muss wegen  $x > 0$  auch  $a > 0$  gelten.

5. Nach den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten gilt nun (beachte, dass Satz 3.13 wegen  $a > 0$  anwendbar ist und dass die Folge  $(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls gegen  $a$  konvergiert)

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{x}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right).$$

Daraus folgt

$$a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right) \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = a^2 + x \quad \Rightarrow \quad a^2 = x$$

und folglich ist  $a$  eine positive Lösung der Gleichung  $a^2 = x$ . Wir haben damit zugleich die Existenz einer solchen Lösung bewiesen, die wir ab jetzt (wie üblich) mit  $\sqrt{x}$  bezeichnen.  $\square$

### 3.6 Teilfolgen

**Definition 3.22** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge und

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} := (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Beachte, dass aus  $n_k < n_{k+1}$  sofort  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  und damit per Induktion  $n_k \geq k$  folgt.

**Beispiel 3.23** (a) Für die Folge mit  $a_n = (-1)^n$  erhalten wir mit  $n_k = 2k$ , also  $n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = 4, \dots$ , die Teilfolge  $(1, 1, 1, 1, \dots)$ . Für  $n_k = 2k + 1$  erhalten wir die Teilfolge  $(-1, -1, -1, -1, \dots)$ .

(b) Betrachte die Folge mit  $a_n = (-1)^n + (1/2)^n$ , vgl. Abb. 3.2. Hierfür erhalten wir mit

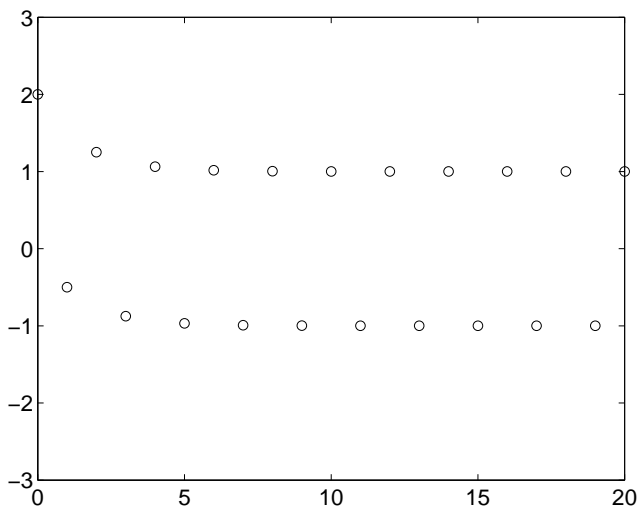


Abbildung 3.2: Illustration der Folge  $a_n = (-1)^n + (1/2)^n$

$n_k = 2k$ , also  $(0, 2, 4, 6, \dots)$ , die Teilfolge  $a_{n_k} = (-1)^{2k} + (1/2)^{2k} = 1 + (1/2)^{2k}$ , also  $(2, 5/4, 17/16, \dots)$ . Für  $n_k = 2k + 1$ , also  $(1, 3, 5, 7, \dots)$ , erhalten wir  $a_{n_k} = -1 + (1/2)^{2k+1}$ , also  $(-1/2, -7/8, -31/32, \dots)$ . □

Wenn die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so folgt aus der Definition der Konvergenz, dass auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, denn wenn  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  gilt, dann gilt wegen  $n_k \geq k$  auch  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$  für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ .

Eine Folge kann aber auch dann konvergente Teilfolgen enthalten, wenn sie selbst nicht konvergent ist. Ein Beispiel ist die Folge  $a_n = (-1)^n$ , denn für diese Folge konvergieren die beiden oben angegebenen Teilfolgen gegen 1 bzw  $-1$ , die Folge selbst konvergiert aber bekanntermaßen nicht.

**Definition 3.24** Ein  $p \in \mathbb{R}$  heißt *Häufungspunkt* einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn es eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt, die gegen  $p$  konvergiert.  $\square$

Eine alternative Charakterisierung, die den Namen “Häufungspunkt” anschaulicher macht, gibt der folgende Satz.

**Satz 3.25** Ein Punkt  $p \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn in jedem Intervall der Form  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  liegen.

**Beweis:** Sei  $p$  ein Häufungspunkt und sei  $a_{n_k}$  die gegen  $p$  konvergierende Teilfolge. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $K(\varepsilon)$ , so dass die unendlich vielen Folgenglieder  $a_{n_k}$ ,  $k \geq K(\varepsilon)$ , in  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  liegen.

Sei umgekehrt  $p$  ein Punkt, so dass für alle  $\varepsilon > 0$  in  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  liegen. Wir konstruieren sukzessive die Indizes  $n_k$  für eine gegen  $p$  konvergierende Teilfolge: setze  $n_0 := 1$  und betrachte  $\varepsilon = 1/k$  für jedes  $k \geq 1$ . Dann gibt es unendlich viele Folgenglieder in  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  und wir wählen  $n_k$  als einen der zugehörigen Indizes. für den  $n_k \geq n_{k-1}$  gilt. Dann gilt für die so definierte Teilfolge  $a_{n_k} \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  und damit  $d(a_{n_k}, p) \leq \varepsilon = 1/k$  woraus die Konvergenz folgt, weil  $1/k$  eine Nullfolge ist.

Aus der Überlegung vor Definition 3.24 folgt sofort, dass eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt. Die folgende Definition gibt uns auch im Falle der Nichtkonvergenz eine Möglichkeit, obere und untere Schranken für die Häufungspunkte einer Folge zu bestimmen, wie wir im Anschluss beweisen werden.

**Definition 3.26** (a) Für eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir die Folge

$$b_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls diese Suprema für alle  $n \in \mathbb{N}$  existieren (also  $< \infty$  sind) und die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so sagen wir, dass der *Limes superior* von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert und definieren diesen als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(b) Für eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir die Folge

$$c_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls diese Infima für alle  $n \in \mathbb{N}$  existieren (also  $> -\infty$  sind) und diese Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so sagen wir, dass der *Limes inferior* von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert und definieren diesen als

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

$\square$

**Beispiel 3.27** (a) Für die Folge mit  $a_n = (-1)^n$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \sup\{a_k | k \geq n\} = 1 \quad \text{und} \quad c_n = \inf\{a_k | k \geq n\} = -1.$$

Die Folgen  $b_n$  und  $c_n$  sind also konstant und konvergieren gegen 1 bzw.  $-1$ . Es gilt also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

(b) Für die Folge mit  $a_n = (-1)^n + (-1/2)^n$  gilt  $b_n = 1 + (1/2)^n$  falls  $n$  gerade ist und  $b_n = 1 + (1/2)^{n+1}$  falls  $n$  ungerade ist. Der Grenzwert ist also 1 und damit gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Analog sieht man  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .  $\square$

**Satz 3.28** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann beschränkt, wenn sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior existieren.

**Beweis:** Wir beweisen zunächst, dass aus der Beschränktheit die Existenz folgt. Wir beweisen dies für den Limes superior; der Beweis für den Limes inferior verläuft analog.

Zunächst folgt aus der Beschränktheit nach oben nach Satz 2.14, dass die Suprema in der Definition von  $b_n$  existieren. Aus der Definition der Folge  $b_n$  folgt

$$b_{n+1} = \sup\{a_k | k \geq n+1\} \leq \max\{\sup\{a_k | k \geq n+1\}, a_n\} = \sup\{a_k | k \geq n\} = b_n.$$

Die Folge  $b_n$  ist also monoton fallend und damit insbesondere durch  $b_0$  nach oben beschränkt. Wegen der Beschränktheit von  $a_n$  nach unten existiert zudem ein  $K \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \geq K$ , woraus mit der Definition des Supremums auch  $b_n \geq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt. Folglich ist  $b_n$  durch  $K$  nach unten beschränkt und damit insgesamt beschränkt und monoton. Die Existenz des Grenzwertes folgt nun aus Satz 3.21.

Wenn nun umgekehrt der Limes Superior existiert, so existieren per Definition die Suprema in der Definition der  $b_n$ . Insbesondere ist also  $b_0$  eine obere Schranke für die Folge, woraus die Beschränktheit nach oben folgt. Analog folgt aus der Existenz des Limes inferior, dass  $c_0$  eine untere Schranke für die Folge ist. Also ist sie beschränkt.  $\square$

Um den Zusammenhang zwischen den Teilfolgen und dem Limes superior und inferior zu beweisen, brauchen wir noch die folgende Hilfsaussage.

**Lemma 3.29** Für eine nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert zu jedem  $b_j$  (bzw.  $c_j$ ) aus Definition 3.26 und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \geq j$  mit

$$d(b_j, a_n) < \varepsilon \quad (\text{bzw. } d(c_j, a_n) < \varepsilon).$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis für die  $b_j$ .

Wegen  $b_j := \sup\{a_n | n \geq j\}$  folgt sofort  $a_n - b_j \leq 0$  für alle  $n \geq j$ . Es genügt also für jedes  $\varepsilon > 0$  die Existenz von  $a_n$ ,  $n \geq j$ , mit  $b_j - a_n < \varepsilon$  zu zeigen, um  $d(b_j, a_n) < \varepsilon$  zu beweisen.

Angenommen, zu einem gegebenen  $\varepsilon > 0$  gibt es kein solches  $a_n$ , d.h. für alle  $n \geq j$  gilt  $b_j - a_n \geq \varepsilon$ . Dann folgt  $a_n \leq b_j - \varepsilon$ , weswegen  $b_j - \varepsilon$  eine obere Schranke der Menge  $\{a_n | n \geq j\}$  ist. Dies wäre aber eine kleinere obere Schranke als  $b_j$ , was der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke widerspricht.  $\square$



**Satz 3.30** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, für die der Limes superior (bzw. der Limes inferior) existiert. Dann ist

$$p := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{bzw. } p := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n)$$

ein Häufungspunkt und für alle weiteren Häufungspunkte  $q \in \mathbb{R}$  gilt

$$q \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{bzw. } q \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz für den Limes superior und konstruieren eine gegen  $p$  konvergierende Teilfolge induktiv wie folgt: Wir setzen zunächst  $n_0 = 0$ . Für jedes  $k \geq 1$  setzen wir  $j = n_{k-1} + 1$  und  $\varepsilon = 1/j$ , wählen den zugehörigen Index  $n$  aus Lemma 3.29 und setzen  $n_k = n$ . Dann gilt per Konstruktion  $n_k \geq j = n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$  (und damit wegen  $n_0 = 0$  insbesondere  $n_k \geq k$ ) und

$$|b_{n_{k-1}+1} - a_{n_k}| = |b_j - a_{n_k}| < \varepsilon = 1/j = 1/(n_{k-1} + 1) \leq 1/k.$$

Sei nun  $p := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir wählen  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so, dass  $|b_k - p| < \varepsilon/2$  und  $1/k < \varepsilon/2$  gilt für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ . Dann folgt

$$|a_{n_k} - p| \leq |a_{n_k} - b_{n_{k-1}+1}| + |b_{n_{k-1}+1} - p| < 1/k + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ , was die Konvergenz von  $a_{n_k}$  gegen  $p$  beweist.

Um die behauptete Ungleichung für die weiteren Häufungspunkte  $q$  zu zeigen, nehmen wir an, dass es eine Teilfolge gibt mit

$$q := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} > \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n =: p.$$

Dann existiert für  $\varepsilon = (q - p)/2$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $a_{n_k} > q - \varepsilon$  gilt für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ . Daraus folgt

$$b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{a_{n_k} \mid n_k \geq n\} \geq q - \varepsilon = q - (q - p)/2 = q/2 + p/2 = p + (q - p)/2$$

und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq p + (q - p)/2 > p$ , was ein Widerspruch zur Definition von  $p$  ist.  $\square$

Ein wichtiger Satz der Analysis — benannt nach den Mathematikern Bernard Bolzano (1781–1848) und Karl Weierstraß (1815–1897) — folgt nun direkt aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

**Satz 3.31 (Satz von Bolzano-Weierstraß)** Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:** Nach Satz 3.28 existiert für eine beschränkte Folge der Limes superior und nach Satz 3.30 ist dieser ein Häufungspunkt. Folglich existiert eine Teilfolge, die gegen den Limes superior konvergiert, die also konvergent ist.  $\square$

Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß kann man den (hier bereits auf anderem Wege bewiesenen) Satz 3.21 über die Konvergenz beschränkter und monotoner Folgen ableiten,

ohne das Vollständigkeitsaxiom benutzen zu müssen (was wir hier nicht durchführen werden). Da der Satz von Bolzano-Weierstraß wiederum auf dem Vollständigkeitsaxiom beruht (denn dieses sichert die Existenz des Supremums im Beweis von Satz 3.28), ist auch dieser Satz äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Folgerungen aus den vorhergehenden Sätzen.

**Korollar 3.32** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge.

(a) Die Folge ist genau dann konvergent, wenn der Limes superior und der Limes inferior existieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(b) Wenn die Folge beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt, dann konvergiert sie.

**Beweis:** (a) Wenn die Folge konvergent ist, so besitzt sie gemäß der Überlegung nach Definition 3.24 genau einen Häufungspunkt  $p$ . Weil jede konvergente Folge nach Satz 3.7 beschränkt ist, existieren nach Satz 3.28 sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior. Nach Satz 3.30 müssen diese dann aber übereinstimmen, denn ansonsten gäbe es zwei unterschiedliche Häufungspunkte.

Wenn umgekehrt Limes superior und Limes inferior existieren und übereinstimmen, gilt nach Satz 3.30 für alle Häufungspunkte die Gleichung  $p = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Nehmen wir nun an, dass die gesamte Folge nicht gegen  $p$  konvergiert. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  für das unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $|a_n - p| \geq \varepsilon$ . Ordnen wir die Menge all dieser  $n$  in der Form  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  aufsteigend an, so erhalten wir eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach Satz 3.28 beschränkt ist, ist auch die Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt, besitzt also nach Satz 3.31 eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ , die dann auch eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist und daher gegen  $p$  konvergiert. Folglich gibt es ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_{k_j}} - p| < \varepsilon$ , was der Definition der  $n_k$  widerspricht.

(b) Wenn die Folge beschränkt ist, dann existieren nach Satz 3.28 sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior und nach Satz 3.30 sind diese Häufungspunkte. Wenn es dann nur einen einzigen Häufungspunkt gibt, müssen die beiden Limes übereinstimmen und die Konvergenz folgt aus (a).  $\square$



# Kapitel 4

## Reihen

Stand:  
2. August 2022

### 4.1 Definition und Beispiele

**Definition 4.1** Für eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt die Folge

$$b_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

(*unendliche*) *Reihe*. Falls die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so nennen wir auch die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  *konvergent* und schreiben den Grenzwert als

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Die endliche Summe  $\sum_{k=0}^n a_k$  wird auch als *Partiellsumme* bezeichnet. □

**Beachte:** Manche Autoren verwenden den Ausdruck “ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ” als symbolische Schreibweise für die unendliche Reihe selbst, auch wenn der Grenzwert nicht existiert. In dieser Vorlesung werden wir diesen Ausdruck ausschließlich für den Grenzwert verwenden. Die Sprechweise “der Grenzwert existiert” ist dabei gleichbedeutend mit “die Reihe konvergiert”.

Oftmals ist es sinnvoll, eine Reihe erst bei einem Index  $k_0 \geq 1$  statt bei 0 beginnen zu lassen, d.h.

$$\sum_{k=k_0}^n a_k.$$

Alle Aussagen in diesem Kapitel gelten analog für solche Reihen, wenn wir die Einschränkung  $n \geq k_0$  beachten.

Ein Beispiel für eine unendliche Reihe erhalten wir aus **Beispiel 3.2(a)**, wenn wir die Regeln, nach denen der Bauer seine Kartoffelproduktion plant, geeignet festlegen. Nehmen wir dazu an, dass der Preis  $p_n$ , den er im Jahr  $n$  pro Kilogramm erzielen kann, direkt von

der von ihm angebotenen Menge abhängt und umso niedriger ist, je höher die angebotene Menge ist. Z.B. können wir annehmen, dass sich der Preis als

$$p_n = c - da_n$$

ausdrücken lässt, wobei  $c$  und  $d$  positive reelle Zahlen sind. Das bedeutet, dass der Preis gerade gleich  $c$  ist, wenn überhaupt keine Kartoffeln angeboten werden und linear abnimmt, je größer das Angebot ist. Dies ist natürlich eine sehr vereinfachte Annahme, da ein Markt normalerweise nach deutlich komplizierteren Regeln funktioniert. Wir nehmen dies jetzt aber der Einfachheit halber an, um zu einer Formel zu kommen, mit der wir weiter rechnen können<sup>1</sup>.

Nehmen wir desweiteren an, dass der Bauer im Folgejahr um so mehr Kartoffeln  $a_{n+1}$  produziert, je höher der Preis  $p_n$  war. Zum Beispiel könnte er nach der Formel

$$a_{n+1} = bp_n$$

mit  $b > 0$  vorgehen, die Menge also einfach proportional dem Vorjahrespreis anpassen.

Wenn der Bauer im Jahr  $n$  die Menge  $a_n$  produziert, ergibt sich der Preis  $p_n = c - da_n$  und damit im Folgejahr die Menge

$$a_{n+1} = bp_n = bc - bda_n.$$

Beginnen wir mit einer beliebigen Menge  $a_0$ , so ergibt sich damit

$$a_1 = bc - bda_0,$$

$$a_2 = bc - bda_1 = bc - bd(bc - bda_0) = bc(1 - bd) + b^2d^2a_0,$$

$$a_3 = bc - bda_2 = bc - bd(bc(1 - bd) + b^2d^2a_0) = bc(1 - bd + b^2d^2) - b^3d^3a_0.$$

Per Induktion kann man dann beweisen, dass für beliebige  $n$  die Gleichung

$$a_n = bc \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-bd)^k \right) + (-bd)^n a_0$$

gilt.

Wenn wir nun wissen wollen, ob sich die produzierte Menge im Laufe der Jahre einer festen Menge  $a$  annähert (einem sogenannten *Marktgleichgewicht*), ist dies mathematisch ausgedrückt nichts anderes als die Frage nach der Konvergenz der Folge  $a_n$ . Da die Folge als einen Bestandteil die Reihe  $\sum_{k=0}^{n-1} (-bd)^k$  enthält, müssen wir dazu untersuchen, wann diese Reihe konvergiert.  $\square$

<sup>1</sup>Diese Vorgehensweise ist fast immer unumgänglich, wenn man reale Gegebenheiten mathematisch modelliert, d.h. in mathematische Formeln "übersetzt". In ökonomischen Zusammenhängen ist das meist offensichtlicher als in technischen oder naturwissenschaftlichen Anwendungen, aber auch dort müssen fast immer Vereinfachungen gemacht werden. Wichtig dabei ist, dass man bei der Interpretation der Ergebnisse am Ende nicht vergisst, dass man gewisse vereinfachende Annahmen gemacht hat.

**Beispiel 4.2** Ein weiteres Beispiel für Reihen sind die am Ende von Kapitel 2 bereits ohne genaue Definition verwendeten unendlichen Dezimalbrüche. Wir beschränken uns hier der einfacheren Notation wegen auf die positiven Dezimalbrüche zwischen 0 und 10, die als

$$d_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

mit  $d_k \in \{0, \dots, 9\}$  geschrieben werden können. Der Wert dieses unendlichen Dezimalbruchs ist dann gerade

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k},$$

d.h. um sicher zu stellen, dass dies überhaupt ein sinnvoll definierter Wert ist, müssen wir zunächst beweisen, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  mit  $a_k = d_k 10^{-k}$  überhaupt konvergiert.  $\square$

Aus der Summenregel für konvergente Folgen in Satz 3.9 ergibt sich wegen

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

(was aus dem Assoziativgesetz und Kommutativgesetz folgt) sofort, dass für zwei konvergente Reihen  $\sum_{k=0}^n a_k$  und  $\sum_{k=0}^n b_k$  auch die Reihe  $\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$  konvergiert und die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

gilt. Ebenso gilt für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  wegen

$$\sum_{k=0}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k,$$

(was aus dem Distributivgesetz folgt) mit Korollar 3.11 für jede konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Deutlich komplizierter ist allerdings die Multiplikation konvergenter Reihen. Der Grund dafür ist, dass hier im Allgemeinen

$$\sum_{k=0}^n (a_k \cdot b_k) \neq \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^n b_k \right)$$

gilt. Z.B. gilt bereits für  $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 (a_k \cdot b_k) = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

aber

$$\left( \sum_{k=0}^1 a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^1 b_k \right) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1.$$

Die Multiplikation werden wir deswegen erst etwas später betrachten.

## 4.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Wir wollen nun Bedingungen angeben, unter denen wir sicher stellen können, dass eine unendliche Reihe konvergiert. Schön wäre dabei ein einfaches Kriterium der Form “die Reihe konvergiert genau dann, wenn die  $a_k$  die Bedingung  $x$  erfüllen”. Leider gibt es eine solche einfache Bedingung  $x$  aber nicht. Die Bedingungen, die wir im Folgenden angeben, sind entweder nur hinreichend oder nur notwendig, oder sie sind nicht einfach oder gelten nur für Reihen mit speziellen Eigenschaften.

Wir beginnen mit einer bereits bekannten Reihe.

**Satz 4.3** Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n x^k$$

konvergiert genau dann, wenn  $|x| < 1$  ist. In diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

**Beweis:** Nach Satz 1.3 gilt für  $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} x^{n+1}.$$

Im Fall  $|x| < 1$  gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte und Beispiel 3.1(g)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1}}_{=0} = \frac{1}{1-x}.$$

Im Fall  $|x| > 1$  oder  $x = -1$  konvergiert  $x^{n+1}$  nach Beispiel 3.1(g) nicht, damit konvergiert auch die Reihe nicht. Im Fall  $x = 1$  gilt  $\sum_{k=0}^n x^k = n+1$ , was ebenfalls nicht konvergiert.  $\square$

Viele Reihen sind allerdings nicht von dieser Form. Ein weiteres Konvergenzkriterium ergibt sich direkt aus der Definition der Cauchy-Folge. Es ist tatsächlich ein “genau-dann-wenn” Kriterium, allerdings nicht direkt für die Glieder der Reihe sondern für Teilsummen.

**Satz 4.4 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen)** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge. Dann existiert der Grenzwert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq C(\varepsilon)$  erfüllt ist.

**Beweis:** Für die Folge

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

gilt

$$d(b_n, b_{m-1}) = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right|.$$

Damit folgt die Aussage direkt aus Satz 3.19, denn die Folge  $b_n$  ist gerade dann eine Cauchy-Folge, wenn die angegebene Bedingung gilt.  $\square$

Aus Satz 4.4 folgt sofort die folgende notwendige Bedingung an die  $a_k$ .

**Satz 4.5** Wenn der Grenzwert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  existiert, so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Beweis:** Es gilt  $a_n = \sum_{k=n}^n a_k$ . Damit gilt für jedes  $\varepsilon > 0$  und alle  $n \geq C(\varepsilon)$  aus Satz 4.4 die Ungleichung  $|a_n - 0| = |a_n| \leq \varepsilon$ , folglich konvergiert  $a_n$  gegen 0.  $\square$

**Beispiel 4.6** Die Reihe  $\sum_{k=0}^n (-1)^k$  konvergiert nicht, weil die Folge  $(-1)^n$  nicht gegen Null konvergiert.  $\square$

Ein hinreichendes Kriterium für Konvergenz lässt sich aus den Sätzen 3.7 und 3.21 ableiten.

**Satz 4.7** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge mit  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert der Grenzwert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  genau dann, wenn die Reihe beschränkt ist, d.h. wenn ein  $K \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Wegen  $a_n \geq 0$  ist die Folge  $b_n = \sum_{k=0}^n a_k \geq 0$  monoton wachsend. Zudem ist sie genau dann beschränkt, wenn sie nach oben beschränkt ist. Daher folgt die Aussage aus den Sätzen 3.7 und 3.21.  $\square$

**Beispiel 4.8** Wir betrachten die Reihen

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Für die erste Reihe —die sogenannte *harmonische Reihe*— betrachten wir die Teilsummen

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$$



und spalten diese Summe in die Summanden mit den Indizes  $\{1, 2\}$  und  $\{2^p + 1, \dots, 2^{p+1}\}$  für  $p = 1, \dots, n$  auf (also  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{5, 6, 7, 8\}$ ,  $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$  usw.). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \left( \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

In jeder Teilsumme befinden sich also  $2^p$  Summanden mit Wert  $\geq 1/2^{p+1}$ , also gilt für den Wert jeder Teilsumme

$$\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{2^{p+1}} = 2^p \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}.$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + n \frac{1}{2} = \frac{n+3}{2}$$

und die Reihe ist nicht beschränkt. Folglich konvergiert die harmonische Reihe nach Satz 4.7 nicht, obwohl man dies wegen  $1/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  zunächst vielleicht vermuten würde.

Für die Reihe  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  zeigen wir nun, dass sie durch  $K = 2$  beschränkt ist und damit nach Satz 4.7 konvergiert. Sei dazu ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gegeben und sei  $m \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $n \leq 2^{m+1} - 1$  ist. Dann gilt mit einer ähnlichen Aufteilung der Indizes wie gerade eben und Satz 1.3

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=0}^m \left( \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^2} \right) \leq \sum_{p=0}^m \left( 2^p \frac{1}{(2^p)^2} \right) \\ &= \sum_{p=0}^m \left( \frac{1}{2} \right)^p = \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1 - 1/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2. \end{aligned}$$

Wir werden später in Beispiel 4.16 zeigen, dass alle Reihen der Form

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$$

für  $p \geq 2$  konvergieren. Mit weitergehenden analytischen Methoden kann man zudem beweisen, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$  ist.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch ein Konvergenzkriterium für Reihen, deren Summanden in jedem Schritt das Vorzeichen wechseln. Reihen dieser Art nennt man *alternierend*. Für den folgenden Satz ist es sinnvoll, die Summanden in der Form  $(-1)^n a_n$  mit  $a_n \geq 0$  zu schreiben.

**Satz 4.9 (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)** Für eine monoton fallende Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  existiert der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Folge  $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$  und die beiden Teilfolgen

$$b_{2n} = (b_0, b_2, b_4, \dots) \quad \text{und} \quad b_{2n+1} = (b_1, b_3, b_5, \dots).$$

Für diese gilt wegen der Monotonie der  $a_k$

$$b_{2n+2} - b_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

und

$$b_{2n+3} - b_{2n+1} = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0.$$

Also ist  $b_{2n}$  monoton fallend und  $b_{2n+1}$  monoton wachsend. Zudem gelten wegen  $b_{2n+1} - b_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \leq 0$  die Ungleichungen

$$b_{2n+1} \leq b_{2n} \leq b_0 \quad \text{und} \quad b_{2n} \geq b_{2n+1} \geq b_1$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit sind beide Folgen monoton und beschränkt und konvergieren damit. Für die Grenzwerte gilt dabei nach den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{2n} - b_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0,$$

weswegen die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit  $b$ , so existieren für jedes  $\varepsilon > 0$  Indizes  $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$|b_{2n} - b| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |b_{2n+1} - b| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Für alle  $n \geq N(\varepsilon) := \max\{2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) + 1\}$  gilt damit

$$|b_n - b| < \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist. □

**Beispiel 4.10** Wir haben in Beispiel 4.8 gesehen, dass die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  nicht konvergiert. Im Gegensatz dazu erfüllt die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \pm \frac{1}{n}$$

die Voraussetzungen von Satz 4.9 und konvergiert also. Die genaue Berechnung des Grenzwertes benötigt Methoden, die wir erst später behandeln. □

Die alternierende harmonische Reihe ist ein schönes Beispiel dafür, dass sich das Konvergenzverhalten einer Reihe verändern kann, wenn man die Glieder einer Reihe umordnet. Wir können die Glieder z.B. wie folgt anordnen

$$\begin{aligned}
 1 & - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 & + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{6} \\
 & + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \right) - \frac{1}{8} \\
 & + \left( \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} \right) - \frac{1}{10} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

d.h. beginnend mit  $1/5$  nehmen wir für  $p = 1, 2, 3, \dots$  immer die nächsten  $2^p$  noch nicht verwendeten positiven Elemente und danach das nächste noch nicht verwendete negative Element. Man kann sich leicht überlegen, dass jeder Summand der alternierenden harmonischen Reihe hier irgendwann einmal auftaucht, dass also kein Summand “verloren geht”, ebenso tritt kein Summand mehrfach auf. Trotzdem hat die neue Reihe ein ganz anderes Konvergenzverhalten: In jeder Zeile summieren sich die Brüche in den Klammern nämlich zu einer Zahl  $> 1/4$  auf, von der dann maximal  $1/6$  abgezogen wird. Insgesamt ergibt sich also in jeder Zeile ein Wert  $> 1/4 - 1/6 = 1/12$ , weswegen die Summe nach  $n$  Zeilen größer als  $n/12$  ist und damit unbeschränkt wächst. Aus der konvergenten alternierenden Reihe ist durch Umordnung eine unbeschränkte und damit divergierende Reihe geworden.

Im nachfolgenden Abschnitt behandeln wir einen “stärkeren” Konvergenzbegriff für Reihen, unter dem sowohl die Konvergenzeigenschaft als auch der Grenzwert unter beliebigen Umordnungen erhalten bleibt.

### 4.3 Absolute Konvergenz

**Definition 4.11** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^n |a_k|$$

konvergiert. □

Dass die absolute Konvergenz tatsächlich ein stärkerer Begriff ist als die “normale” Konvergenz<sup>2</sup>, zeigt der folgende Satz und die nachfolgende Diskussion.

**Satz 4.12** Jede absolut konvergente Reihe ist auch im üblichen Sinne konvergent.

<sup>2</sup>Man sagt, dass eine Eigenschaft *a* *stärker* ist als eine Eigenschaft *b*, wenn die Implikation  $a \Rightarrow b$  gilt, die Implikation  $b \Rightarrow a$  aber nicht gilt.

**Beweis:** Wenn die Reihe absolut konvergiert, existiert nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium aus Satz 4.4 zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{k=m}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq m \geq C(\varepsilon)$ . Damit folgt mit  $(n - m)$ -maliger Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

und die Reihe konvergiert wiederum nach Satz 4.4.  $\square$

Beachte, dass die Aussage des Satzes nicht impliziert, dass die beiden Grenzwerte  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  übereinstimmen. Er sagt lediglich, dass der zweite Grenzwert existiert, falls der erste existiert. Umgekehrt gilt das natürlich nicht, wie die alternierende harmonische Reihe zeigt, die ein Beispiel für eine Reihe ist, die konvergiert aber nicht absolut konvergiert. Dies zeigt, dass die Konvergenz die absolute Konvergenz nicht impliziert; die absolute Konvergenz ist also tatsächlich eine stärkere Eigenschaft. Die Reihe  $\sum_{k=1}^n 1/k^2$  hingegen konvergiert absolut, da für  $a_k = 1/k^2$  wegen  $1/k^2 > 0$  offensichtlich  $|a_k| = a_k$  gilt.

Der folgende Satz zeigt nun, dass im Falle absoluter Konvergenz beliebige Umordnungen nichts am Konvergenzverhalten ändern, ja dass sogar der Grenzwert gleich bleibt. Dazu definieren wir die Umordnung zunächst formal.

**Definition 4.13** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^n a_{\tau(k)}$  mit einer Folge  $(\tau(j))_{j \in \mathbb{N}}$  heißt *Umordnung* einer Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$ , wenn jeder Index  $k \in \mathbb{N}$  genau einmal in der Folge  $(\tau(j))_{j \in \mathbb{N}}$  auftritt<sup>3</sup>.  $\square$

**Satz 4.14** Sei  $\sum_{k=0}^n a_k$  eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung  $\sum_{k=0}^n a_{\tau(k)}$  der Reihe und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

**Beweis:** Sei

$$b := \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wir müssen dann beweisen, dass  $\sum_{k=0}^n a_{\tau(k)}$  gegen  $b$  konvergiert. Da die ursprüngliche Reihe absolut konvergiert, gibt es nach Satz 4.4 zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 = C(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$  mit

$$c_m := \sum_{k=k_0}^m |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

<sup>3</sup>Verwenden wir die in der Linearen Algebra eingeführten Begriffe, so ist  $\tau$  also eine *bijektive Abbildung* von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$ .

für alle  $m \geq k_0$ . Die Folge  $c_m$  ist also monoton und beschränkt und konvergiert damit gegen einen Grenzwert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ , für den nach Satz 3.14

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Daraus folgt<sup>4</sup>

$$\left| b - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da jedes  $k$  in der Folge  $(\tau(j))_{j \in \mathbb{N}}$  auftritt, gibt es also für jedes  $k$  ein  $j_k$  mit  $k = \tau(j_k)$ . Setzen wir nun  $N(\varepsilon) := \max\{j_0, j_1, \dots, j_{k_0-1}\}$  so taucht jedes  $k = 0, \dots, k_0 - 1$  in der Menge  $\{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(N(\varepsilon))\}$  auf. Damit gilt für alle  $m \geq N(\varepsilon)$  die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j_0, \dots, j_{k_0-1}}}^m a_{\tau(k)} \right| \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j_0, \dots, j_{k_0-1}}}^m |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=k_0}^{\max\{\tau(0), \dots, \tau(m)\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass jeder Index  $k$  in der Folge höchstens einmal auftritt. Somit erhalten wir für alle  $m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - b \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

und folglich die behauptete Konvergenz.  $\square$

Nachdem die absolute Konvergenz offenbar eine nützliche Eigenschaft ist (einen weiteren Beleg dafür geben wir im letzten Satz dieses Abschnitts), ist es sinnvoll, Kriterien zu finden, mit denen wir sie für eine gegebene Reihe nachweisen können. Die folgenden beiden Sätze geben zwei solche Kriterien.

**Satz 4.15 (Majorantenkriterium)** Sei  $\sum_{k=0}^n c_k$  eine konvergente Reihe mit  $c_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $k_0 \in \mathbb{N}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $|a_k| \leq c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq k_0$ . Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^n a_k$$

absolut. Die Reihe  $\sum_{k=0}^n c_k$  heißt dann *Majorante* der Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$ .

**Beweis:** Im Fall  $k_0 = 0$  folgt die Aussage wegen

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n c_k = \left| \sum_{k=m}^n c_k \right|$$

<sup>4</sup>Wenn die obere Summationsgrenze endlich ist, folgt die hier verwendete Ungleichung aus der Dreiecksungleichung. Wegen Satz 3.14 überträgt sich die Ungleichung auf die Grenzwerte.

analog zum Beweis von Satz 4.12 aus Satz 4.4.

Im Fall  $k_0 > 0$  definiere  $\tilde{a}_k := c_k$  für  $k = 0, \dots, k_0 - 1$  und  $\tilde{a}_k := a_k$  für  $k \geq k_0$ . Dann erfüllt die Reihe  $\sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$  die Bedingung des Satzes für  $k_0 = 0$  und konvergiert nach dem ersten Teil des Beweises. Aus der Definition der  $\tilde{a}_k$  folgt dann für  $n \geq k_0$  die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k - \sum_{k=0}^{k_0-1} c_k + \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k$$

und weil die Reihe  $\sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert und die beiden anderen Ausdrücke auf der rechten Seite unabhängig von  $n$  sind, konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$ .  $\square$

**Beispiel 4.16** Betrachte die Reihen

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^p}$$

für  $p \geq 2$ . Für  $p = 2$  haben wir die Konvergenz bereits in Beispiel 4.8 bewiesen. Wegen  $k \geq 1$  gilt  $k^q \geq 1$  und damit  $1/k^q \leq 1$  für alle  $q \geq 1$ . Für  $p \geq 3$  erhalten wir so

$$\left| \frac{1}{k^p} \right| = \frac{1}{k^p} = \frac{1}{k^{p-2}} \cdot \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz (und damit auch die übliche Konvergenz) aus dem Majorantenkriterium mit  $k_0 = 0$ .  $\square$

**Beispiel 4.17** Für die Dezimalbrüche aus Beispiel 4.2 gilt

$$|d_k 10^{-k}| \leq 9 \cdot 10^{-k}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=0}^n 9 \cdot 10^{-k} = 9 \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{10} \right)^k$$

nach Satz 4.3 gegen  $9 \frac{1}{1-1/10} = 10$  konvergiert und offensichtlich positive Summanden besitzt, konvergiert also jede Dezimalbruchreihe absolut nach dem Majorantenkriterium. Insbesondere besitzt also jeder unendliche Dezimalbruch einen eindeutig definierten Wert.  $\square$

**Satz 4.18 (Quotientenkriterium)** Sei  $\sum_{k=0}^n a_k$  eine Reihe mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k \geq k_0$ . Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \theta < 1$ , so dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta \quad \text{gilt für alle } k \geq k_0. \quad (4.1)$$

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  absolut.

**Beweis:** Mittels vollständiger Induktion folgt aus der Annahme die Ungleichung

$$|a_k| \leq \theta^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq k_0$ . Die Reihe

$$\sum_{k=0}^n |a_{k_0}| \theta^{k-k_0}$$

ist daher eine Majorante für  $\sum_{k=0}^n a_k$  für  $k \geq k_0$ . Da

$$\sum_{k=0}^n |a_{k_0}| \theta^{k-k_0} = |a_{k_0}| \theta^{-k_0} \sum_{k=0}^n \theta^k$$

wegen  $|\theta| < 1$  nach Satz 4.3 konvergiert, folgt die Konvergenz mit Satz 4.15.  $\square$

**Beispiel 4.19** (a) Die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  mit  $a_k = \frac{k^2}{2^k}$  konvergiert, denn es gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^2 2^k}{2^{k+1} k^2} = \frac{1}{2} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^2$$

und dieser Ausdruck ist für alle  $k \geq k_0 = 3$  kleiner als  $8/9 < 1$ .

(b) Das Beispiel der harmonischen Reihe ( $a_k = 1/k$ ) zeigt, dass die Formulierung der Ungleichung in (4.1) als “ $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta < 1$ ” wichtig ist und die schwächere Ungleichung “ $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ ” nicht ausreicht. Diese schwächere Ungleichung ist nämlich für die harmonische Reihe wegen

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} < 1$$

erfüllt. Da der Bruch  $k/(k+1)$  für große  $k$  aber beliebig nahe bei 1 liegt (denn er konvergiert ja gegen 1), lässt sich kein  $\theta < 1$  finden, für das (4.1) für beliebig große  $k$  gilt. Dies kann auch nicht sein, denn die harmonische Reihe ist ja nicht konvergent.

(c) Das Beispiel  $a_k = 1/k^2$  zeigt, dass das Quotientenkriterium hinreichend aber nicht notwendig ist für die absolute Konvergenz. Ähnlich wie für die harmonische Reihe sieht man hier, dass kein  $\theta < 1$  gefunden werden kann, so dass die (4.1) gilt. Trotzdem ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Aus der Definition des  $\limsup$  folgt, dass die Voraussetzung von Satz 4.18 genau dann erfüllt ist, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

gilt (Übungsaufgabe).  $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels kommen wir nochmal auf die eingangs bereits erwähnte Multiplikation konvergenter Reihen zurück. Wie dort bereits bemerkt, ist die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_k$  nicht der richtige Ausdruck, um das Produkt zweier Reihen als eine Reihe darzustellen. Der folgende Satz zeigt, wie der richtige Ausdruck aussieht. Beachte, dass er nur für absolut konvergente Reihen gilt, weil für seinen Beweis eine Abschätzung von Teilsummen über Beträge nötig ist.

**Satz 4.20 (Cauchy-Produkt von Reihen)** Es seien  $\sum_{k=0}^n a_k$  und  $\sum_{k=0}^n b_k$  absolut konvergente Reihen. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  definiere

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j.$$

Dann ist auch die Reihe  $\sum_{k=0}^n c_k$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

**Beweis:** Es sei  $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$  und  $d_n := \sum_{k=0}^n c_k$ . Wir zeigen zunächst, dass  $d_n$  im üblichen Sinne konvergiert und dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = ab$$

gilt. Die absolute Konvergenz wird dann im nachfolgenden Schritt bewiesen.

Es sei

$$d_n^* := \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \left( \sum_{k=0}^n b_k \right).$$

Nach Satz 3.10 gilt  $d_n^* \rightarrow ab$  für  $n \rightarrow \infty$ . Um zu zeigen, dass auch  $d_n \rightarrow ab$  gilt, beweisen wir, dass die Folge  $(d_n^* - d_n)$  konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n^* - d_n) = 0. \quad (4.2)$$

Damit folgt die Behauptung wegen

$$d_n = \underbrace{d_n^*}_{\rightarrow ab} - \underbrace{(d_n^* - d_n)}_{\rightarrow 0}$$

aus Korollar 3.12.

Zum Beweis von (4.2) schreiben wir  $d_n^*$  nach dem Distributivgesetz als

$$d_n^* = \left( \sum_{i=0}^n a_i \right) \left( \sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j =: \sum_{i,j=0}^n a_i b_j.$$

Den Ausdruck für  $d_n$  schreiben wir um, indem wir  $i = k - j$  als “künstlichen” neuen Summationsindex mit der Nebenbedingung  $j + i = k$  einführen:

$$d_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=k}}^k a_i b_j = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_i b_j = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n a_i b_j.$$

Daraus folgt

$$d_n^* - d_n = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j > n}}^n a_i b_j. \quad (4.3)$$



Sei nun

$$p_n := \left( \sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left( \sum_{k=0}^n |b_k| \right) = \sum_{i,j=0}^n |a_i b_j|.$$

Nach Satz 3.10 konvergiert  $p_n$ , zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es also nach Satz 3.19 ein  $n_0 := C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$|p_n - p_{n_0}| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ . Die Differenz  $p_n - p_{n_0}$  kann man auch schreiben als

$$p_n - p_{n_0} = \sum_{i,j=0}^n |a_i b_j| - \sum_{i,j=0}^{n_0} |a_i b_j| = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \geq n_0+1 \text{ oder } j \geq n_0+1}}^n |a_i b_j|. \quad (4.4)$$

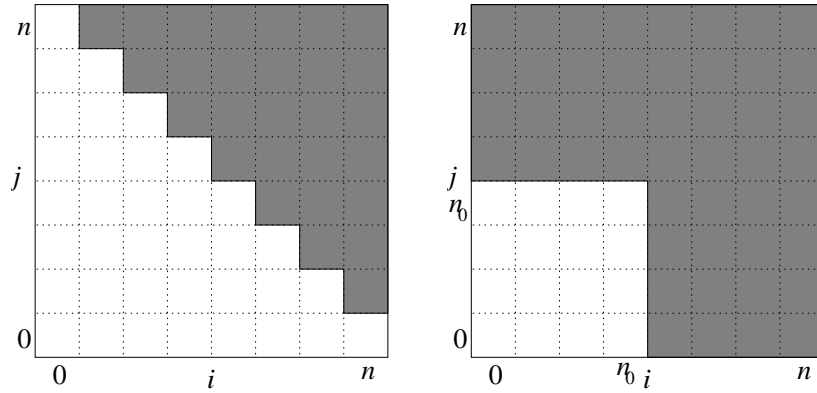


Abbildung 4.1: Indexpaare  $(i, j)$  in (4.3) (links) und (4.4) (rechts), jeweils grau gefärbt. Veranschaulichung für  $n = 7$  und  $n_0 = 3$

Vergleichen wir nun die Summationsindizes in der letzten Summe in (4.3) mit denen in der letzten Summe in (4.4) (diese sind in Abbildung 4.1 beispielhaft grafisch dargestellt), so sieht man, dass für  $n \geq 2n_0$  jedes Indexpaar aus (4.3) auch in (4.4) auftaucht, denn wenn  $i + j > n \geq 2n_0$  gilt muss  $i \geq n_0 + 1$  oder  $j \geq n_0 + 1$  gelten; ansonsten wäre  $i + j \leq 2n_0$ . Damit folgt

$$|d_n^* - d_n| = \left| \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>n}}^n a_i b_j \right| \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>n}}^n |a_i b_j| \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \geq n_0+1 \text{ oder } j \geq n_0+1}}^n |a_i b_j| = p_n - p_{n_0} < \varepsilon.$$

Dies zeigt die Konvergenz (4.2) mit  $N(\varepsilon) = 2n_0 = 2C(\varepsilon)$ .

Es bleibt noch die absolute Konvergenz zu zeigen. Wenn wir den ersten Teil des Beweises auf die Reihen  $\sum_{k=0}^n |a_k|$  und  $\sum_{k=0}^n |b_k|$  anwenden, so erhalten wir wegen der absoluten Konvergenz der ursprünglichen Reihen, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^n c'_k$  mit

$$c'_n := \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |b_k|$$

konvergiert. Wegen

$$|c_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |b_k| = c'_n$$

ist  $\sum_{k=0}^n c'_k$  eine konvergente Majorante, weswegen  $\sum_{k=0}^n c_k$  absolut konvergiert.  $\square$



# Kapitel 5

## Funktionen

Stand:  
2. August 2022

### 5.1 Definition und Beispiele

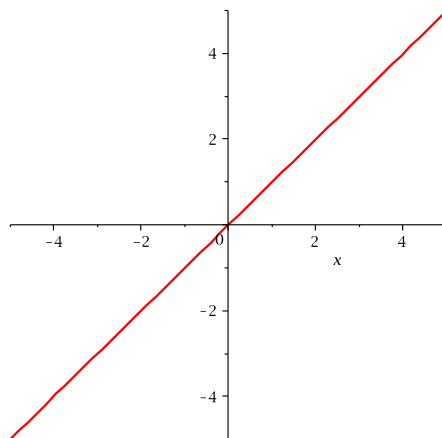
**Definition 5.1** Eine *reelle Funktion* ist eine Vorschrift  $f$ , die jeder Zahl  $x$  aus einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  eine Zahl  $f(x) \in \mathbb{R}$  zuordnet. Dabei heißt die Menge  $D$  *Definitionsmenge* und die Menge  $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$  *Wertemenge* von  $f$ . Schreibweise:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ; falls  $f(D) \subset A$  gilt für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$ , schreiben wir auch  $f : D \rightarrow A$ .  $\square$

Reelle Funktionen werden grafisch in einem Koordinatensystem dargestellt, indem man zu jedem  $x \in D$  auf der horizontalen Achse den Wert  $f(x)$  der Funktion auf der vertikalen Achse aufträgt. Die so entstehende Figur wird *Graph* der Funktion genannt.

Funktionen werden oft durch eine von  $x$  abhängige Formel definiert. Wir schreiben dann  $f : x \mapsto \dots$ , wobei an Stelle der Punkte die entsprechende Formel eingesetzt wird. Oft wird auch einfach kurz  $f(x) = \dots$  geschrieben.

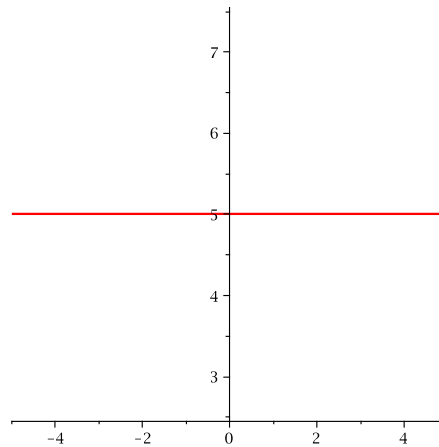
Hier einige Beispiele dafür.

**Beispiel 5.2** (a) (**identische Funktion oder Identität**)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f : x \mapsto x$



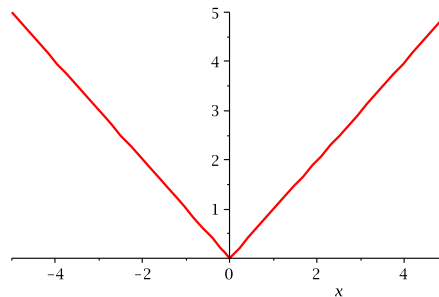
Graph der identischen Funktion  $f(x) = x$

- (b) **(konstante Funktion)**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f : x \mapsto c$  für ein festes  $c \in \mathbb{R}$ .



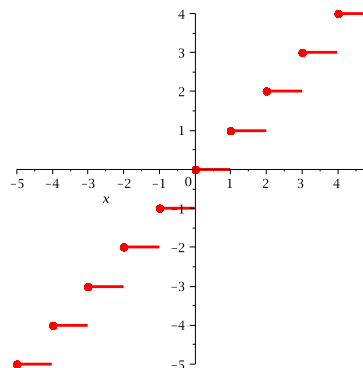
Graph der konstanten Funktion  $f(x) = c$ , hier für  $c = 5$

- (c) **(Absolutbetrag)**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f : x \mapsto |x|$



Graph der Absolutbetrag-Funktion  $f(x) = |x|$

- (d) **(Gaußklammer)** Wir definieren die sogenannte *Gaußklammer*  $[x]$  einer reellen Zahl  $x$  als die größte ganze Zahl  $k \leq x$ , oder formal:  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ . Die zugehörige Funktion lautet dann  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f : x \mapsto [x]$ .



Graph der Gaußklammer-Funktion  $f(x) = [x]$

Die Punkte im Graphen veranschaulichen dabei, wo der Wert an der Stelle liegt, an der der Graph “springt”.

**Beachte:** Die Definitionsmenge  $D$  ist eine Menge, die wir uns selbst aussuchen können. Wir können also z.B. die Funktion  $f : x \mapsto |x|$  nur für  $x$  zwischen 0 und 1 betrachten und dazu die Definitionsmenge als  $D = [0, 1]$  wählen. Wir könnten aber natürlich auch  $D = \mathbb{R}$  wählen. Falls allerdings der Ausdruck, der  $f(x)$  definiert, für manche  $x \in \mathbb{R}$  nicht definiert ist, so müssen wir diese  $x$  aus  $D$  herausnehmen, um eine sinnvoll definierte Funktion zu erhalten. Dies ist z.B. in dem folgenden Beispiel (e) der Fall. Die Menge aller  $x$ , auf denen der Ausdruck  $f(x)$  definiert ist, wird als *maximale* Definitionsmenge bezeichnet. Größer als die maximale Definitionsmenge können wir  $D$  also nicht wählen — kleiner hingegen schon.

- (e) **(Quadratwurzel)** Alle bisherigen Beispiele konnten auf  $D = \mathbb{R}$  definiert werden. Die Quadratwurzel ist in  $\mathbb{R}$  nur für Zahlen  $\geq 0$  definiert, weswegen wir die Definitionsmenge der Quadratwurzelfunktion einschränken müssen. Wir erweitern dazu die Definition 2.7 der Intervalle um die folgenden unbeschränkten Intervalle für  $a, b \in \mathbb{R}$ .

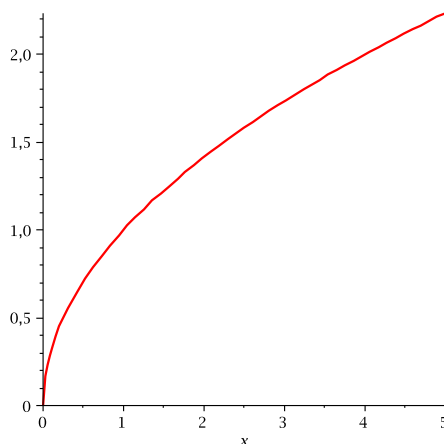
$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

wobei wir  $[a, \infty)$  und  $(-\infty, b]$  als abgeschlossen<sup>1</sup> und  $(a, \infty)$  und  $(-\infty, b)$  als offen bezeichnen. Die maximale Definitionsmenge der Quadratwurzelfunktion ist mit dieser Schreibweise gerade  $D = [0, \infty)$ , wir können diese also als  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  schreiben.



Graph der Quadratwurzel-Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$

Die Wertemengen  $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$  dieser Funktionen lassen sich aus den angegebenen Formeln jeweils leicht ermitteln. Es gilt

<sup>1</sup>Beachte, dass wir die kompakten Intervalle  $[a, b]$  in Definition 2.7 ebenfalls als abgeschlossen bezeichnet haben. Ein Intervall ist also genau dann kompakt, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist.

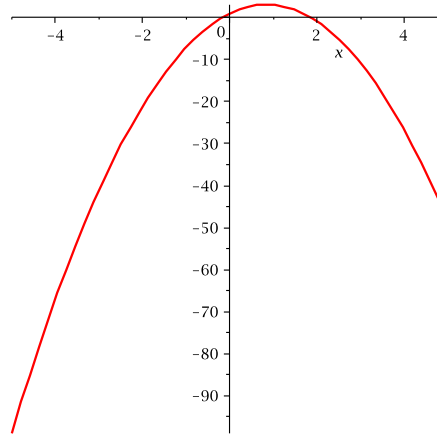
- (a)  $f(D) = \mathbb{R}$
- (b)  $f(D) = \{c\}$
- (c)  $f(D) = [0, \infty)$
- (d)  $f(D) = \mathbb{Z}$
- (e)  $f(D) = [0, \infty)$

Man sieht hier insbesondere, dass die Wertemenge im Allgemeinen nicht ganz  $\mathbb{R}$  ist.

Weitere Beispiele für Funktionen sind

- (f) (**Polynomfunktionen**)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  fest gewählte Werte sind, die sogenannten *Koeffizienten* des Polynoms. Als konkretes Beispiel erhalten wir z.B. mit  $n = 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 5$  und  $a_2 = -3$  die Funktion

$$f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 1.$$



Graph der Polynomfunktion  $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$

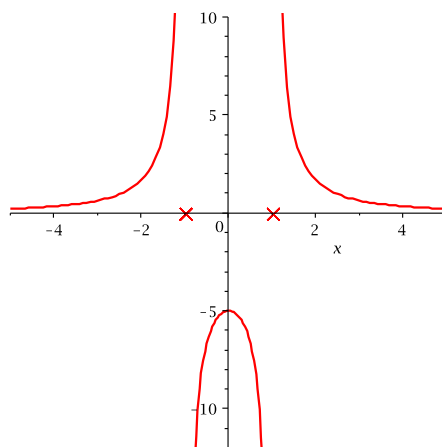
- (g) (**rationale Funktionen**) Für zwei Polynomfunktionen  $g$  und  $h$  definieren wir die Menge  $D := \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$ . Damit definieren wir die *rationale Funktion*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Konkrete Beispiele für rationale Funktionen sind

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

mit den maximalen Definitionsmengen  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  bzw.  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .



Graph der rationalen Funktion  $f(x) = \frac{5}{x^2-1}$ . Die Kreuze markieren die  $x \notin D$ .

Die Wertemengen für Polynomfunktionen und rationale Funktionen lassen sich nicht so einfach ermitteln wie für die vorhergehenden Beispiele. Aus den angegebenen Graphen lässt sich zwar erahnen, wie diese in etwa aussehen, die konkrete Berechnung ist aber i.A. recht aufwendig.

(h) Eine Funktion, deren Graph man nicht zeichnen kann, ist

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zu jeder Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kann man mittels  $f : n \mapsto a_n$  eine Funktion mit Definitionsmenge  $D = \mathbb{N}$  definieren. Umgekehrt kann man zu jeder Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n := f(n)$  definieren. Folgen und Funktionen mit Definitionsmenge  $D = \mathbb{N}$  sind also nur zwei unterschiedliche Schreibweisen für die gleichen mathematischen Objekte.

□

Funktionen sind allgegenwärtig in allen Anwendungen der Mathematik. Ob man in der Physik eine Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur, in der Elektrotechnik den Strom in Abhängigkeit von der Spannung oder in den Wirtschaftswissenschaften den Einkommensteuersatz in Abhängigkeit von der Höhe des Gehalts betrachtet: Immer wird dies mathematisch durch Funktionen ausgedrückt.

Aus gegebenen Funktionen kann man auf verschiedene Weise neue Funktionen zusammensetzen.

**Definition 5.3** Für gegebene Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} f + g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & f + g : x &\mapsto f(x) + g(x) \\ \lambda f : D &\rightarrow \mathbb{R}, & \lambda f : x &\mapsto \lambda f(x) \\ fg : D &\rightarrow \mathbb{R}, & fg : x &\mapsto f(x)g(x) \\ \frac{f}{g} : D' &\rightarrow \mathbb{R}, & \frac{f}{g} : x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$



wobei die Definitionsmenge  $D'$  im letzten Fall eingeschränkt werden muss auf

$$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}.$$

Für zwei Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$  definieren wir die *Komposition* (oder auch *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung*) von  $f$  und  $g$  als

$$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \circ f : x \mapsto g(f(x)).$$

□

Für  $f(x) = 2x$  und  $g(x) = x^2$  gilt z.B.  $(f + g)(x) = x^2 + 2x$  und  $(g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2$ .  
Für  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = \sqrt{x}$  ergibt sich  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ .

## 5.2 Grenzwerte bei Funktionen

Betrachtet man die Graphen der verschiedenen Funktionen aus dem letzten Abschnitt, so stellt man gewisse Unterschiede fest. Aus der Reihe fällt zum einen der Graph (g), weil er nicht überall definiert ist. Dies liegt an den Lücken in der maximalen Definitionsmenge, die sich direkt aus der Formel für  $f(x)$  ergeben.

Ebenfalls aus der Reihe fällt der Graph (d), weil er ‘‘Sprünge’’ hat. Wir wollen im nächsten Abschnitt die Eigenschaft ‘‘ein Graph hat keine Sprünge’’ mathematisch formal definieren. Dazu müssen wir zunächst das von den Folgen bekannte Konzept der Grenzwerte auf Funktionen verallgemeinern.

**Definition 5.4** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $a \in \mathbb{R}$  ein Punkt, für den eine konvergente reelle Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in D$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  existiert<sup>2</sup>.

Falls ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in D$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  die Folge  $f(x_n)$  konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c,$$

so sagen wir, dass der Grenzwert von  $f$  in  $a$  existiert, nennen  $c$  den *Grenzwert* oder *Limes* von  $f$  in  $a$  und definieren

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) := c.$$

Mit der Notation der uneigentlichen Konvergenz aus Definition 3.16 können wir auf die selbe Weise die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

definieren. □

<sup>2</sup>Dies gilt immer für  $a \in D$ , da man einfach  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wählen kann. Es kann aber auch für  $a \notin D$  gelten. Z.B. können wir im Fall  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  die Folge  $a_n = 1 + 1/n$ ,  $n \geq 1$ , wählen, die für alle  $n$  in  $D$  liegt aber gegen  $1 \notin D$  konvergiert.

**Beispiel 5.5** (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , denn für jede Folge  $x_n \rightarrow 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(b) Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  existiert der Limes  $\lim_{x \rightarrow k} [x]$  nicht, denn für die Folgen  $x_n := k + 1/n$  und  $x'_n := k - 1/n$  gilt für alle  $n \geq 2$

$$[x_n] = k \quad \text{und} \quad [x'_n] = k - 1$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n] = k \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [x'_n] = k - 1.$$

Die Bedingung, dass alle Folgen der Form  $[x_n]$  gegen ein und denselben Grenzwert  $c$  konvergieren, ist also verletzt.

(c) Für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

mit der maximalen Definitionsmenge  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , obwohl  $1 \notin D$ , denn: sei  $x_n$  eine beliebige Folge mit  $x_n \rightarrow 1$  und  $x_n \in D$ , also  $x_n \neq 1$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1 \rightarrow 2.$$

Es ergibt sich also immer der gleiche Grenzwert  $c = 2$ .

(d) Eine Beispiel für uneigentliche Grenzwerte ist das folgende: Für ein Polynom der Form  $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\infty, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zum Beweis der ersten Aussage müssen wir zeigen, dass für jede Folge  $x_n \rightarrow \infty$  und jedes  $K > 0$  ein  $M(K) \in \mathbb{N}$  existiert mit  $f(x_n) > K$  für alle  $n \geq M(K)$ . Dazu schreiben wir  $f$  für  $x \neq 0$  als  $f(x) = x^k g(x)$  mit

$$g(x) = 1 + \frac{a_{k-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^k}.$$

Aus  $x_n \rightarrow \infty$  folgt  $x_n^k \rightarrow \infty$  für alle  $k \geq 1$ . Damit folgt aus Satz 3.17, dass jeder der Brüche in  $g$  gegen Null konvergiert und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 1.$$

gilt. Für alle hinreichend großen  $n$  ist also  $g(x_n) \geq 1/2$  und damit  $f(x_n) \geq x_n^k/2$ . Wiederum wegen  $x_n \rightarrow \infty$  gilt dann  $f(x_n) > K$  für alle hinreichend großen  $n$ , woraus die Existenz von  $M(K)$  folgt.

Die zweite Aussage folgt für gerades  $k$  aus

$$f(-x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} \dots - a_1x + a_0 =: h(x)$$

und für ungerades  $k$  aus

$$f(-x) = - \left[ \underbrace{x^k - a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} \dots + a_1x - a_0}_{=:h(x)} \right].$$

Beachte, dass die Funktionen  $h(x)$  in den beiden Fällen nicht identisch sind, aber in beiden Fällen die Voraussetzungen für die erste Aussage erfüllen, weswegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$  gilt. Für  $x_n \rightarrow -\infty$  gilt nun  $(-x_n) \rightarrow \infty$  und damit  $h(-x_n) \rightarrow \infty$ . Daher folgt für gerades  $k$  mit  $x = -x_n$

$$f(x_n) = f(-(-x_n)) = h(-x_n) \rightarrow \infty$$

und für ungerades  $k$

$$f(x_n) = f(-(-x_n)) = -h(-x_n) \rightarrow -\infty.$$

□

### 5.3 Stetigkeit

Stetigkeit ist gerade die Eigenschaft einer Funktion, auf ihrer Definitionsmenge keine Sprünge im Graphen zu besitzen. Aus den Beispielen im vergangenen Abschnitt erfüllt offenbar genau die Gaußklammer diese Eigenschaft nicht, und zwar gerade in den Punkten  $k \in \mathbb{Z}$ . Die in Beispiel 5.5(b) gemachte Beobachtung, dass bei dieser Funktion der Grenzwert in  $k \in \mathbb{Z}$  nicht existiert, gibt uns eine Möglichkeit, das anschauliche Kriterium “keine Sprünge” in eine mathematisch rigorose Bedingung zu fassen.

**Definition 5.6** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig in einem Punkt*  $a \in D$ , wenn der Grenzwert für  $x \rightarrow a$  existiert und die Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

gilt. Die Funktion heißt *stetig*, wenn sie in allen Punkten  $a \in D$  stetig ist. □

**Beispiel 5.7** (a) Die Funktion  $f : x \mapsto x^2$  ist in  $x = 0$  stetig, wegen  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  (vgl. Beispiel 5.5(a)) und  $f(0) = 0^2 = 0$ . Tatsächlich ist die Funktion sogar in allen  $x \in D = \mathbb{R}$  stetig, was aus dem nachfolgenden Korollar 5.9 folgt.

(b) Die Gaußklammerfunktion  $f : x \mapsto [x]$  ist in den Punkten  $x = k$  für  $k \in \mathbb{Z}$  nicht stetig, da der Grenzwert hier nach Beispiel 5.5(b) nicht existiert.

(c) Der Begriff der Stetigkeit ist für die rationale Funktion aus Beispiel 5.5(c) in  $x = 1$  nicht anwendbar, weil  $1 \notin D$ .

(d) Die konstante Funktion  $f : x \mapsto c$  und die identische Funktion  $f : x \mapsto x$  sind stetig, denn: Für die konstante Funktion  $f(x) = c$  gilt  $f(x_n) = c$  für jede beliebige Folge  $x_n$ . Also gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$  und jede gegen  $a$  konvergente Folge  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c = f(a)$ .

Für die Identität gilt  $f(x_n) = x_n$ . Konvergiert also eine Folge  $x_n$  gegen  $a$ , so auch  $f(x_n)$  und es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a = f(a)$ .

(e) Die Betragsfunktion  $f : x \mapsto |x|$  ist stetig, denn: für jede konvergente Folge  $x_n \rightarrow a$  gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x_n) - f(a)| = ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

Wenn  $|x_n - a| \rightarrow 0$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  dann aus Satz 3.4.  $\square$

Stetigkeit mit Hilfe der Grenzwerte aus Definition 5.4 zu überprüfen ist ausgesprochen aufwendig, weswegen man dies nach Möglichkeit vermeidet. Statt dessen versucht man zumeist, die Stetigkeit von Funktionen aus der Stetigkeit bekannter Funktionen abzuleiten. Der folgende Satz zeigt, wie das geht.

**Satz 5.8** (a) Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die in einem Punkt  $a \in D$  stetig sind. Dann sind für  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch die Funktionen

$$f + g, \quad \lambda f, \quad \text{und} \quad fg$$

stetig in  $a$ . Falls zusätzlich  $a \in D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$  gilt, ist zudem die Funktion

$$\frac{f}{g}$$

stetig in  $a$ .

(b) Für zwei Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ , bei denen  $f$  in  $a \in D$  und  $g$  in  $f(a) \in E$  stetig ist, ist auch die Komposition  $g \circ f$  stetig in  $a$ .

**Beweis:** (a) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \in D$  (bzw.  $x \in D'$  im letzten Fall) und  $x_n \rightarrow a$ . Dann ist zu zeigen, dass die Funktionswerte  $f(x_n) + g(x_n)$  etc. konvergieren mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a)$  etc. Dies folgt wegen der vorausgesetzten Konvergenzen  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  und  $g(x_n) \rightarrow g(a)$  für  $n \rightarrow \infty$  für alle angegebenen Funktionen aber direkt aus ihrer Definition und den entsprechenden Sätzen für Summen, Produkte und Quotienten von Grenzwerten.

(b) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \in D$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert also gegen  $f(a)$ , woraus mit der Stetigkeit von  $g$  auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g \circ f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = g \circ f(a)$$

folgt. Also ist  $g \circ f$  stetig in  $a$ .  $\square$

**Korollar 5.9** Jede rationale Funktion ist stetig.

**Beweis:** Jede rationale Funktion ist von der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit  $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  und  $h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ . Sie lässt sich also schreiben als

$$f(x) = \frac{a_n p(x)^n + a_{n-1} p(x)^{n-1} + \dots + a_1 p(x) + q(x)}{b_m p(x)^m + b_{m-1} p(x)^{m-1} + \dots + b_1 p(x) + r(x)}$$

mit der Identität  $p(x) = x$  und den konstanten Funktionen  $q(x) = a_0$  und  $r(x) = b_0$ . Damit folgt die Stetigkeit in jedem  $a \in D$  durch wiederholte Anwendung von Satz 5.8(a) auf die einzelnen Komponenten von  $f$  aus der in Beispiel 5.7(d) nachgewiesenen Stetigkeit der identischen und der konstanten Funktion.  $\square$

Ein Beispiel für die Anwendung von Satz 5.8 ist die Funktion  $f : x \mapsto |x^3|$ , die sich als  $g \circ h$  mit  $g(x) = |x|$  und  $h(x) = x^3$  schreiben lässt. Da  $g$  und  $h$  stetig sind und jeweils  $D = \mathbb{R}$  gilt, ist  $f$  ebenfalls stetig.

## 5.4 Sätze über stetige Funktionen

Stetige Funktionen haben viele für die Analysis sehr nützliche Eigenschaften. In diesem Kapitel werden wir einige der wichtigsten davon formulieren und beweisen. Hierbei verwenden wir die bereits vor Beispiel 5.2(e) erwähnte Tatsache, dass wir die maximale Definitionsmenge beliebig einschränken können. Hier werden wir zumeist Funktionen der Form  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen  $[a, b]$  betrachten. Dies bedeutet nicht, dass  $D = [a, b]$  die maximal mögliche Definitionsmenge der Funktion  $f$  ist sondern vielmehr, dass die maximal mögliche Definitionsmenge das Intervall  $[a, b]$  enthält und wir im Folgenden nur die Werte  $f(x)$  für  $x \in [a, b]$  betrachten — was die Funktion außerhalb  $[a, b]$  macht, interessiert uns dabei nicht. Wenn wir also z.B. von *stetigen* Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sprechen, so bedeutet dies, dass die Funktion in allen  $x \in [a, b]$  stetig ist, aber nicht notwendigerweise in allen  $x$  aus der maximal möglichen Definitionsmenge.

**Satz 5.10 (Nullstellensatz)** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) \leq 0$  und  $f(b) \geq 0$  (bzw.  $f(a) \geq 0$  und  $f(b) \leq 0$ ). Dann existiert ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = 0$ . Dieses  $x$  wird *Nullstelle* genannt.

**Beweis:** Wir betrachten den Fall  $f(a) \leq 0$  und  $f(b) \geq 0$ . Der Fall mit umgekehrten Vorzeichen folgt, wenn wir den Beweis mit  $-f$  an Stelle von  $f$  führen.

Zum Beweis konstruieren wir zunächst eine Intervallschachtelung  $I_n = [a_n, b_n]$ , für deren Ränder stets  $f(a_n) \leq 0$  und  $f(b_n) \geq 0$  gilt. Dies erreichen wir, indem wir ganz analog zum Beweis von Satz 2.9 wie folgt vorgehen:

- (1) Setze  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$ ,  $n := 0$
- (2) Definiere  $c_n := (a_n + b_n)/2$  (dies ist gerade der Mittelpunkt des Intervalls  $I_n$ )
- (3) (i) Falls  $f(c_n) \geq 0$ , setze  $a_{n+1} := a_n$  und  $b_{n+1} := c_n$ ;  
(ii) sonst setze  $a_{n+1} := c_n$  und  $b_{n+1} := b_n$
- (4) Setze  $n := n + 1$  und gehe zu (2).

Aus der Konstruktion der  $a_n$  und  $b_n$  folgen sofort die gewünschten Ungleichungen  $f(a_n) \leq 0$  und  $f(b_n) \geq 0$  und die Konvergenz  $|I_n| \rightarrow 0$  folgt mit Satz 3.4 direkt aus der Ungleichung<sup>3</sup>

$$|I_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Nach Beispiel 3.1(f) konvergieren  $a_n$  und  $b_n$  gegen den gleichen Grenzwert  $x$  und aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x)$ . Nach Korollar 3.15 gilt dann

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

und folglich  $f(x) = 0$ . □

Eine direkte Folgerung aus Satz 5.10 gibt das folgende Korollar.

**Korollar 5.11 (Zwischenwertsatz)** Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) \leq c$  und  $f(b) \geq c$  (bzw.  $f(a) \geq c$  und  $f(b) \leq c$ ). Dann existiert ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = c$ .

**Beweis:** Die Funktion  $g : x \mapsto f(x) - c$  erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.10, folglich existiert ein  $x \in [a, b]$  mit  $g(x) = 0$ . Daraus folgt

$$f(x) - c = g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c.$$

□

Das folgende Beispiel gibt einige Anwendungen dieses Satzes und Korollars.

**Beispiel 5.12** (a) Für jedes  $y > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $x > 0$  mit  $x^k = y$ . Wir schreiben dafür auch  $x = \sqrt[k]{y}$ .

Diese Aussage folgt, indem wir den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion  $f(x) = x^k$  anwenden. Für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach Beispiel 5.5(d) dass  $f(x) \rightarrow \infty$ , also gibt es ein  $b$  mit  $f(b) > y$ . Andererseits gilt für  $a = 0$  gerade  $f(a) = 0^k = 0 < y$ . Folglich existiert nach Korollar 5.11 ein  $x$ , für das gerade  $y = f(x) = x^k$  gilt.

Beachte, dass der Satz für  $y < 0$  und  $k = 2$  nicht anwendbar ist, denn dann gilt  $f(x) = x^k - y \geq 0 - y = -y > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Es existiert also keine Nullstelle.

(b) Jedes Polynom der Form  $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$  mit ungeradem  $k$  besitzt (mindestens) eine Nullstelle. Dies folgt, weil  $f$  stetig ist und nach Beispiel 5.5(d)  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $f(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow -\infty$  gilt. Für hinreichend großes  $b$  gilt also  $f(b) > 0$  und für hinreichend kleines  $a$  gilt  $f(a) < 0$ . Damit ist Satz 5.10 anwendbar.

(c) Das Beispiel  $f(x) = [x]$  zeigt, dass die Stetigkeit wesentlich für die Gültigkeit von Korollar 5.11 ist. Für dieses  $f$  gilt nämlich  $f(1) = 1 > 1/2$  und  $f(0) = 0 < 1/2$ , trotzdem gibt es kein  $x \in [0, 1]$  mit  $f(x) = 1/2$ , weil die Funktion unstetig von 0 auf 1 springt, ohne die dazwischen liegenden Werte anzunehmen. □

<sup>3</sup>Beachte, dass wir jetzt viel kürzer als im Beweis von Satz 2.9 argumentieren können, weil wir bereits viel mehr Begriffe und Sätze zur Verfügung haben, die wir verwenden können.

**Definition 5.13** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *beschränkt*, falls die Menge  $f(D)$  beschränkt ist, d.h. wenn ein  $M \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in D.$$

□

Der folgende Satz gibt eine sowohl für viele theoretische Grundlagen als auch für viele Anwendungen der Mathematik wichtige Aussage.

**Satz 5.14** Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  ist beschränkt. Zudem nimmt sie ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren  $p, q \in [a, b]$  mit

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Die Argumente  $p$  und  $q$  heißen dann Maximal- und Minimalstelle.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz für das Maximum. Der Beweis für das Minimum verläuft analog und die Beschränktheit folgt dann aus der Existenz des Maximums und Minimums mit  $M = \max\{|f(p)|, |f(q)|\}$ .

Es sei

$$s := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

wobei wir  $s = \infty$  schreiben, falls die Menge nach oben unbeschränkt ist. Im Falle, dass  $s$  endlich ist, existiert dann zu jedem  $\varepsilon = 1/n$ ,  $n \geq 1$ , ein  $x_n \in [a, b]$  mit  $f(x_n) > s - \varepsilon$  und falls  $s = \infty$  ist, existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [a, b]$  mit  $f(x_n) > n$ . In beiden Fällen finden wir so eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s.$$

Da die Folge  $x_n \in [a, b]$  beschränkt ist, existiert nach Satz 3.31 (Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k}$ , für deren Grenzwert wegen Korollar 3.15 und der Abgeschlossenheit von  $[a, b]$  die Beziehung  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} =: p \in [a, b]$  gilt. Da die Teilfolge  $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen den gleichen Grenzwert wie die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = s$ . Da  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, folgt damit

$$f(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = s.$$

Daraus folgt  $s = f(p) \in \mathbb{R}$ , d.h. das Supremum ist endlich und  $f(p)$  ist wegen  $f(p) = s$  und  $f(p) \in \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  das gesuchte Maximum. □

Wir werden im Laufe der Analysis-Vorlesung verschiedene Anwendungen dieses Satzes kennen lernen. Er ist aber auch über die Analysis hinaus wichtig. Viele Anwendungen der Mathematik führen auf sogenannte Optimierungsprobleme, in denen man etwas maximieren (z.B. Gewinn, Produktionsertrag, Fahrkomfort, ...) oder minimieren (z.B. Verlust, Schadstoffausstoß, Abweichungen eines Werts von einem Sollwert, ...) möchte. Zwar sagt uns Satz 5.14 nicht, *wie* wir das machen — dazu benötigen wir noch eine Reihe weiterer mathematischer Hilfsmittel — er stellt aber sicher, dass es *sinnvoll* ist, nach einem Maximum oder Minimum zu suchen.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass keine der Voraussetzungen (Stetigkeit, abgeschlossenes Intervall, beschränktes Intervall) weggelassen werden kann.

**Beispiel 5.15** (a) Betrachte die unstetige Funktion  $f(x) = x - [x]$  auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon < 1$  gilt für diese Funktion

$$f(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon - [1 - \varepsilon] = 1 - \varepsilon - 0 = 1 - \varepsilon,$$

weswegen

$$\sup\{f(x) \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{1 - \varepsilon \mid \varepsilon \in (0, 1)\} = 1$$

gilt. Es gibt aber kein  $p \in [0, 1]$  mit  $f(p) = 1$ , denn für  $0 \leq p < 1$  gilt  $f(p) = p - [p] = p < 1$  und für  $p = 1$  gilt  $f(p) = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$ .

(b) Betrachte die Funktion  $f(x) = 1/x$ . Diese Funktion ist als rationale Funktion auf ihrer Definitionsmenge  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und damit insbesondere auf dem (nach links offenen) Intervall  $(0, 1]$  stetig. Sie ist aber auf diesem Intervall nicht beschränkt, da sie für  $x = 1/n \in (0, 1]$ ,  $n \geq 1$  die beliebig großen Werte  $f(x) = 1/(1/n) = n$  annimmt.

(c) Betrachte wiederum die Funktion  $f(x) = 1/x$ , nun auf dem unbeschränkten Intervall  $[1, \infty)$ . Diese Funktion ist durch  $M = 1$  beschränkt, nimmt aber kein Minimum an, denn: für  $x = n$ ,  $n \geq 1$ , liegt  $f(x) = 1/n$  beliebig nahe bei Null, weswegen

$$\inf\{f(x) \mid x \in [1, \infty)\} = 0$$

gilt. Es gibt aber kein  $q \in [1, \infty)$  mit  $f(q) = 1/q = 0$ . □

## 5.5 Das $\varepsilon$ - $\delta$ Kriterium für Stetigkeit

Das Kriterium für Stetigkeit in Definition 5.6 wird auch als *Folgenstetigkeit* bezeichnet. Die Folgenstetigkeit ist zum Nachprüfen der Stetigkeit in manchen Fällen recht unhandlich, weil alle möglichen konvergenten Folgen überprüft werden müssen. Es ist zudem unpraktisch, wenn man Informationen darüber haben möchte, wie sehr sich die Werte  $f(x_n)$  und  $f(a)$  unterscheiden (ein Beispiel für eine Eigenschaft, bei der dies eine Rolle spielt, werden wir in Definition 5.19 und den nachfolgenden Beispielen betrachten).

Wir werden daher zum Abschluss dieses Kapitels eine äquivalente Definition der Konvergenz einführen, die ohne die Betrachtung von Folgen und Grenzwerten auskommt.

**Satz 5.16 ( $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium der Stetigkeit)** Eine reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann in  $a \in D$  stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in D$  gilt

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Anschaulich ausgedrückt: wenn  $x$  sich von  $a$  nur wenig unterscheidet, unterscheiden sich auch die Funktionswerte  $f(x)$  und  $f(a)$  nur wenig.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass aus dem  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium die Folgendefinition 5.6 der Stetigkeit folgt. Sei dazu  $a \in D$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge mit  $x_n \rightarrow a$  und  $x_n \in D$ . Zu zeigen ist dann, dass  $f(x_n)$  konvergiert mit  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .



Sei dazu ein  $\varepsilon > 0$  gegeben und sei  $\delta > 0$  aus dem Kriterium. Wegen  $x_n \rightarrow a$  existiert ein  $N_x(\delta) \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - a| < \delta$  für alle  $n \geq N_x(\delta)$  und es folgt

$$d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Damit ist die Definition der Konvergenz erfüllt mit  $N(\varepsilon) = N_x(\delta)$ .

Nun zeigen wir umgekehrt, dass aus der Folgendefinition der Stetigkeit das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium folgt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass  $f$  in  $a \in D$  im üblichen Sinne stetig ist, das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium aber nicht gilt. Das bedeutet also:

Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  so dass zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x_\delta \in D$  mit  $d(x_\delta, a) < \delta$  und  $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$  existiert.

Setzen wir nun  $\delta = 1/n$  und wählen als  $x_n$  gerade dieses  $x_\delta$ , so folgt  $d(x_n, a) < 1/n$  und damit nach Satz 3.4 auch  $x_n \rightarrow a$ . Andererseits gilt aber

$$d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

und damit ebenfalls nach Satz 3.4  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ . Dies widerspricht aber der Stetigkeit in  $a$ . Also muss das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium gelten.  $\square$

Wir wenden dieses Kriterium an, um die Stetigkeit der Wurzelfunktion nachzuweisen.

**Beispiel 5.17** Betrachte die Funktion  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  mit Definitionsmenge  $D = [0, \infty)$ . Für  $a > 0$  und  $x \geq 0$  gilt

$$f(x) - f(a) = \sqrt{x} - \sqrt{a} = (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Wir betrachten nun die zwei Fälle  $a > 0$  und  $a = 0$  getrennt:

Im Fall  $a > 0$  gilt für alle  $x \geq 0$  mit  $|x - a| < \delta$  die Ungleichung

$$d(f(x), f(a)) = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}}.$$

Die gewünschte Ungleichung  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  folgt also, wenn wir  $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$  setzen.

Im Fall  $a = 0$  ist die Ungleichung  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für  $x = a = 0$  klarerweise für alle  $\varepsilon > 0$  erfüllt. Für alle  $x > 0$  mit  $|x - a| < \delta$  gilt die Ungleichung  $x < \delta$  und damit

$$d(f(x), f(a)) = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta}.$$

In diesem Fall folgt die gewünschte Ungleichung  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$  also mit  $\delta = \varepsilon^2$ .

Dies Beispiel zeigt auch, wie ein passendes  $\delta > 0$  üblicherweise gefunden wird: wir versuchen zunächst, eine von  $\delta$  (und ggf.  $a$ ) abhängige obere Schranke für den Ausdruck  $d(f(x), f(a))$  zu finden und bestimmen daraus ein geeignetes  $\delta$  abhängig von dem gegebenen  $\varepsilon$  und ggf.  $a$ .  $\square$

Das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium ist zum Beispiel nützlich, um den folgenden Satz zu beweisen<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Natürlich könnte man diesen auch mit der Folgendefinition der Stetigkeit beweisen, das wäre aber viel komplizierter und langwieriger.

**Satz 5.18** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die in einem Punkt  $a \in D$  stetig ist und  $f(a) \neq c$  erfüllt. Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(x) \neq c$  gilt für alle  $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$ .

**Beweis:** Wähle  $\varepsilon = d(f(a), c)$  und  $\delta > 0$  aus dem  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium. Dann gilt für alle  $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$  die Ungleichung  $d(x, a) < \delta$  und damit nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$d(f(x), c) \geq d(f(a), c) - \underbrace{d(f(a), f(x))}_{< \varepsilon} > d(f(a), c) - \varepsilon = 0,$$

also  $d(f(x), c) > 0$  und damit  $f(x) \neq c$ . □

Das in Beispiel 5.17 für die Wurzelfunktion hergeleitete  $\delta$  hängt nicht nur von  $\varepsilon$  sondern auch von  $a$  ab. Tatsächlich wird das dort berechnete  $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$  bei gleichbleibendem  $\varepsilon > 0$  immer kleiner, je näher  $a$  bei Null liegt. Vergleicht man dies mit dem Graphen der Wurzelfunktion aus Beispiel 5.2(e) so sieht man, dass dies offenbar mit der Steigung des Graphen zusammenhängt: Je steiler der Graph ist, desto kleiner muss man  $\delta$  bei gleichbleibendem  $\varepsilon$  wählen. Dies leuchtet sofort ein, wenn man sich den Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$  und  $\delta$  graphisch veranschaulicht.

Ein besonders schöner Fall der Stetigkeit liegt nun vor, wenn das  $\delta$  unabhängig von  $a$  gewählt werden kann. Diese Form der Stetigkeit ist in der folgenden Definition formal definiert.

**Definition 5.19** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in D$  gilt

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

□

Beachte den kleinen aber wesentlichen Unterschied zu der Bedingung aus Satz 5.16: In der gleichmäßigen Stetigkeit muss ein und dasselbe  $\delta$  die Ungleichung  $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$  für alle  $x' \in D$  sicher stellen, während das  $\delta$  in Satz 5.16 von  $a$  abhängen darf.

Da das  $\delta$  bei der Wurzelfunktion in Beispiel 5.17 tatsächlich von  $a$  abhängt und für kleiner werdende  $a$  immer kleiner wird, liegt nun der Schluss nahe, dass die Wurzelfunktion nicht gleichmäßig stetig ist. Das wäre aber voreilig geschlossen, denn woher wissen wir, ob wir in Beispiel 5.17 das bestmögliche  $\delta$  ausgerechnet haben? Könnte man nicht vielleicht mit einer geschickteren Rechnung ein von  $a$  unabhängiges  $\delta$  finden?

Tatsächlich geht das, aber statt dieses  $\delta$  umständlich auszurechnen, gehen wir eleganter vor und beweisen den folgenden Satz.

**Satz 5.20** Jede auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist dort auch gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Angenommen,  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig. Analog zum zweiten Teil des Beweises von Satz 5.16 bedeutet dies:

Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  so dass zu jedem  $\delta > 0$  Punkte  $x_\delta, x'_\delta \in D$  mit  $d(x_\delta, x'_\delta) < \delta$  und  $d(f(x_\delta), f(x'_\delta)) \geq \varepsilon$  existieren.

Wie im Beweis von Satz 5.16 setzen wir zu jedem  $n \geq 1$  nun  $\delta = 1/n$  und erhalten so zu jedem  $n$  zwei Folgeelemente  $x_n = x_\delta$  und  $x'_n = x'_\delta$  mit

$$d(x_n, x'_n) \leq 1/n \quad \text{und} \quad d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon.$$

Dies definiert zwei Folgen mit Elementen  $x_n, x'_n \in [a, b]$ , d.h. die Folgen sind beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt  $x_n$  damit eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert

$$p := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$$

und wegen

$$d(x'_{n_k}, p) \leq d(x'_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, p) \rightarrow 0$$

konvergiert auch die Teilfolge  $(x'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $p$ . Da  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, folgt damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(p) - f(p) = 0.$$

Daraus folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) = 0$ , was der für alle  $n$  geltenden Ungleichung  $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$  widerspricht. Also muss  $f$  gleichmäßig stetig sein.  $\square$

Der Satz zeigt, dass gleichmäßige Stetigkeit kein ‘‘Sonderfall’’ ist, sondern eine Eigenschaft, die jede stetige Funktion auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen besitzt. Lediglich auf (halb)offenen oder unbeschränkten Intervallen kann es sein, dass diese Eigenschaft nicht gilt.

Dies zeigt auch, dass die Wurzelfunktion auf jedem Intervall der Form  $[0, b]$  tatsächlich gleichmäßig stetig ist, da sie ja wie in Beispiel 5.17 gezeigt stetig ist. Das Problem mit den immer kleiner werdenden  $\delta$  für  $a$  nahe Null liegt also daran, dass wir in dem Beispiel nicht das bestmögliche  $\delta$  ausgerechnet haben.

Auch wenn wir das ‘‘bessere’’ (d.h. nicht von  $a$  abhängige)  $\delta$  nach dem vorhergehenden Satz nun gar nicht mehr ausrechnen müssen, um seine Existenz zu beweisen, ist es natürlich trotzdem interessant zu sehen, an welcher Stelle wir die Abschätzung in Beispiel 5.17 verbessern können. Tatsächlich kann man im Fall  $a > 0$  wie folgt vorgehen:

Im Fall  $a > x$  verwenden wir

$$d(f(x), f(a)) = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{a-x}{\sqrt{a}} \leq \frac{a-x}{\sqrt{a-x}} = \sqrt{a-x} < \sqrt{\delta}$$

und im Fall  $a < x$

$$d(f(x), f(a)) = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{x-a}{\sqrt{x}} \leq \frac{x-a}{\sqrt{x-a}} = \sqrt{x-a} < \sqrt{\delta}.$$

Jetzt sieht man, dass man auch im Fall  $a > 0$  den Wert  $\delta = \varepsilon^2$  verwenden kann, um die Ungleichung  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$  zu erhalten. Da dieses  $\delta$  unabhängig von  $a$  ist, kann es auch

für beliebige  $x$  und  $x'$  (an Stelle von  $x$  und  $a$ ) und damit in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit verwendet werden. Dies funktioniert sogar auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , weswegen die Wurzelfunktion tatsächlich sogar auf ihrem maximalen Definitionsbereich  $[0, \infty)$  gleichmäßig stetig ist.

Um zu illustrieren, dass stetige Funktionen auf unbeschränkten Intervallen im Allgemeinen nicht gleichmäßig stetig sind, betrachten wir ein abschließendes Beispiel.

**Beispiel 5.21** Betrachte die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$ . Angenommen, die Funktion wäre auf  $[0, \infty)$  gleichmäßig stetig. Dann können wir zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  finden, so dass für alle  $x, x' \in [0, \infty)$  mit  $d(x, x') < \delta$  die Ungleichung  $d(f(x'), f(x)) < \varepsilon$  gilt. Insbesondere muss diese Ungleichung dann für  $x' = x + \delta/2$  gelten und wir erhalten

$$\varepsilon > d(f(x + \delta/2), f(x)) = x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2 \geq \delta x$$

gilt, weswegen  $\delta < \varepsilon/x$  für alle  $x \in (0, \infty)$  gelten muss. Dies ist aber für kein  $\delta > 0$  möglich, weswegen wir einen Widerspruch erhalten.  $\square$



# Kapitel 6

## Exponentialfunktion und Logarithmus

Stand:  
2. August 2022

### 6.1 Definition der Exponentialfunktion

Alle Beispiele von Funktionen, die wir bisher betrachtet haben, waren durch einfache rationale Formeln oder andere elementare Operationen (wie z.B. der Absolutbetrag oder die Gaußklammer) definiert. In diesem Abschnitt betrachten wir nun eine für viele Bereiche der Analysis und ihrer Anwendungen wichtige Funktion, die mittels einer unendlichen Reihe definiert ist.

**Satz 6.1** Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die *Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

(mit den Konventionen<sup>1</sup>  $0^0 = 1$  und  $0! = 1$ ) absolut konvergent.

**Beweis:** Die Behauptung ist für  $x = 0$  sofort klar, da alle Summanden für  $k \geq 1$  gleich Null sind. Wegen der angegebenen Konventionen besitzt die Summe für  $x = 0$  den Wert 1. Für  $x \neq 0$  folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium in Satz 4.18 mit  $\theta = 1/2$ , denn es gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle  $k \geq 2|x|$ . □

Damit ist die Existenz des Grenzwerts  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  sicher gestellt und wir können die folgende Definition formulieren.

---

<sup>1</sup>Diese ergeben sich wegen  $x^n = \prod_{k=1}^n x$  und  $n! = \prod_{k=1}^n k$  aus der für alle  $y \in \mathbb{R}$  gemachten Definition  $\prod_{k=1}^n y = 1$  des leeren Produkts.

**Definition 6.2** Wir definieren die Exponentialfunktion<sup>2</sup>  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

□

Die besondere Bedeutung der Exponentialfunktion für die Analysis wird in diesem und den nachfolgenden Kapiteln an vielen Stellen deutlich werden. Die Funktion ist aber auch in vielen Anwendungen wichtig; wir geben dazu einige Beispiele. Dazu benötigen wir die folgende alternative Darstellung der Exponentialfunktion.

**Satz 6.3** Für die Exponentialfunktion gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich mit den bisher bekannten Techniken zwar führen, ist aber recht technisch und wenig anschaulich. Der Vollständigkeit halber ist er in Abschnitt 6.6 angegeben, wird aber an der Tafel nicht behandelt. Ein kurzer Beweis wird später in Kapitel 9 nach Beispiel 9.11 gegeben.

Mit Satz 6.3 können wir nun die bereits angekündigten Anwendungsbeispiele geben.

**Beispiel 6.4 (a) (Zinseszins)** Wenn eine Geldanlage von  $a \text{€}$  jährlich mit  $p\%$  verzinst wird, so hat diese bei jährlicher Verzinsung (am Jahresende) unter Berücksichtigung der Zinsen gerade den Wert  $a(1+r) \text{€}$  mit  $r = p/100$  (Zahlenbeispiel:  $a = 100 \text{€}$  bei  $p = 5\%$  Verzinsung  $\rightsquigarrow r = 0.05 \rightsquigarrow$  Betrag am Jahresende  $100(1+0.05) \text{€} = 100(1.05) \text{€} = 105 \text{€}$ ).

Bei zweimaliger Verzinsung (nach einem halben Jahr und nach dem ganzen Jahr) und unter Berücksichtigung der Zinseszinsen beträgt der Wert

$$a \left(1 + \frac{r}{2}\right) \left(1 + \frac{r}{2}\right) \text{€} = a \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \text{€}$$

(im Zahlenbeispiel:  $100(1.025)(1.025) \text{€} = 105.0625 \text{€}$ ).

Bei  $n = 12$  Verzinsungen (also nach jeweils nach einem Monat) ergibt sich analog

$$a \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} \text{€}$$

(im Beispiel:  $a \approx 105.1162 \text{€}$ ).

---

<sup>2</sup>Wir betrachten nach dem folgenden Beispiel, wie man diesen Wert näherungsweise berechnen kann. Jeder wissenschaftliche Taschenrechner, jede höhere Programmiersprache und jedes Mathematikprogramm hat die Exponentialfunktion aber fest eingebaut. Manchmal wird diese dabei mit “ $e^x$ ” bezeichnet; warum, sehen wir in Kürze.

Setzt man dies für größere  $n$  fort, verzinst also immer häufiger (wöchentlich, täglich, stündlich, ...), so erhält man nach Satz 6.3 den Betrag

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = a \exp(r) \text{€};$$

diese Art der Verzinsung wird *kontinuierliche Verzinsung* genannt. Im Zahlenbeispiel erhält man hier  $a \approx 105.1272 \text{€}$ , was zeigt, dass die Abweichung zur monatlichen Verzinsung nur noch sehr gering ist, nämlich nur noch ca. 0.01%. Da man mit der Exponentialfunktion viel einfacher rechnen kann als mit den Termen  $(1 + r/n)^n$ , wird in der Finanzmathematik meistens die kontinuierliche Verzinsung angenommen.

(b) **(Wassertank)** Wir hatten in Beispiel 3.2(b) auf Seite 43 die Formel  $a_m = a_0(1 - \alpha)^m$  für den Wasserstand nach  $m$  Sekunden hergeleitet. Wenn der Wasserstand nun nicht nur jede Sekunde sondern  $k$  mal pro Sekunde gemessen und das Ventil entsprechend nachgestellt wird, ergibt sich die Formel

$$a_m = a_0 \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^{mk},$$

wobei der Bruch  $\alpha/k$  in der Klammer daraus folgt, dass in dem Zeitraum  $1/k$  Sekunden natürlich nur  $1/k$  mal so viel Wasser zu- oder abfließt als in einer vollen Sekunde. Setzen wir nun  $n = mk$ , so erhalten wir

$$a_m = a_0 \left(1 - \frac{m\alpha}{n}\right)^n.$$

Für  $k \rightarrow \infty$ , d.h. für immer häufigeres Messen und Einstellen gilt dann auch  $n \rightarrow \infty$  und wir erhalten mit Satz 6.3

$$a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \left(1 + \frac{-\alpha m}{n}\right)^n = a_0 \exp(-\alpha m).$$

Wiederum wegen des bequemeren Rechnens mit der Exponentialfunktion wird in der Praxis bei Problemen dieser Art in der Mathematik und den Ingenieurwissenschaften zumeist dieses letzte Modell verwendet. Selbst in Fällen, in denen in der Praxis beliebig schnelles Messen und Einstellen nicht möglich ist, ist der dabei gemachte Fehler i.A. so klein, dass er für die praktische Anwendung der Formel keine Rolle spielt.

(c) **(Wachstumsprozesse)** Viele Wachstumsprozesse können ebenfalls durch die Exponentialfunktion beschrieben werden. Dies ist immer dann der Fall, wenn das Wachstum proportional zum aktuellen Bestand ist und es keine begrenzenden Faktoren gibt. Das gilt z.B. für Bakterienpopulationen in einer Laborumgebung zu, so lange genügend Nahrung und Platz vorhanden ist. Es trifft aber auch auf die Anzahl der Corona-Infizierten in einer Bevölkerung zu, so lange der Anteil der infizierbaren Bevölkerung nicht spürbar abnimmt. In beiden Fällen ist der Mechanismus ähnlich wie in den ersten beiden Beispielen: in einer kleinen Zeiteinheit  $\tau$  ist der Zuwachs  $\Delta P(t) = P(t + \tau) - P(t)$  der Population (ungefähr) proportional zu dem Zeitraum und zu der aktuellen Größe  $P(t)$  der Population, also  $\Delta P(t) = \alpha \tau P(t)$ . Ausgehend von einer Anfangsgröße  $P_0$  gilt also näherungsweise

$$P(t + \tau) = P(t) + \alpha \tau P(t) = (1 + \alpha \tau)P(t).$$

Per Induktion erhält man daraus die Formel

$$P(m\tau) = (1 + \alpha \tau)^m P(0).$$



Fixieren wir ein  $t > 0$  und setzen  $\tau = t/m$ , so folgt

$$P(T) = \left(1 + \frac{\alpha t}{m}\right)^m P(0).$$

Da sich die Population ständig vermehrt, wird diese Formel für immer kleinere  $\tau$  immer genauer. Im Grenzwert für  $\tau \rightarrow 0$  erhalten wir mit Satz 6.3 gerade

$$P(t) = P(0) \exp(\alpha t).$$

□

Wie berechnet man nun den Wert  $\exp(x)$  der Exponentialfunktion in der Praxis, bzw. wie macht der Taschenrechner oder der Computer das? Die naheliegende Idee dabei ist, den Wert durch

$$\exp(x) \approx \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$$

für ein hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$  anzunähern. Der folgende Satz zeigt, wie groß dieses  $N$  für eine gewünschte Genauigkeit der Approximation gewählt werden muss.

**Satz 6.5** Es gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + r_{N+1}(x)$$

mit

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} |r_{N+1}(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \\ &= \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x^{n-(N+1)} (N+1)!}{n!} \right| \\ &\leq \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x^{n-(N+1)}}{(N+2)^{n-(N+1)}} \right| = \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{N+2} \right|^{n-(N+1)}. \end{aligned}$$

Für  $|x| \leq 1 + N/2$  gilt dann

$$\frac{|x|}{N+2} \leq \frac{1 + N/2}{N+2} = \frac{(2+N)/2}{N+2} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{N+2} \right|^{n-(N+1)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-(N+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

nach dem Satz 4.3 für geometrische Reihen. Also gilt

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2 \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right|,$$

was gerade die Behauptung war.  $\square$

Wollen wir also z.B. den Wert  $\exp(2)$  mit einem Fehler von höchstens  $10^{-10}$  approximieren, so müssen wir  $N$  so groß wählen, dass die Ungleichungen

$$2 \frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-10} \quad \text{und} \quad 2 \leq 1 + \frac{N}{2}$$

erfüllt sind. Die zweite Ungleichung gilt für alle  $N \geq 2$  und die erste gilt für alle  $N \geq 17$ , wie man durch einfaches Ausprobieren mit dem Taschenrechner überprüft. Es müssen also die ersten 18 Summanden der Exponentialreihe berechnet und aufsummiert werden.

Wir werden in Kürze sehen, dass die Abschätzung des Terms  $r_{N+1}(x)$ , des sogenannten *Restglieds*, auch für andere Zwecke als nur für die Berechnung des Werts  $\exp(x)$  nützlich ist.

## 6.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt beweisen wir die wichtigsten Rechenregeln für die Exponentialfunktion.

**Satz 6.6 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y).$$

**Beweis:** Wir verwenden das Cauchy-Produkt von Reihen gemäß Satz 4.20. Dies ist wegen der in Satz 6.1 nachgewiesenen absoluten Konvergenz der Exponentialreihe anwendbar.

Nach Satz 4.20 gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

mit

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j.$$

Angewendet auf die Exponentialreihen mit

$$a_k := \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad b_k := \frac{y^k}{k!}$$

ist also

$$c_k = \sum_{j=0}^k \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} y^j,$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt daher

$$c_k = \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

und folglich

$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \exp(x) \exp(y).$$

□

Aus diesem Satz folgen sofort die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

**Satz 6.7** (a) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$ .

(b) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) > 0$ .

(c) Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $\exp(k) = e^k$ , wobei  $e$  die *Eulersche Zahl*

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,718\,281\,828\,459\dots$$

ist.

**Beweis:** (a) Nach Satz 6.6 gilt

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

da wir die Konvention  $0^0 = 1$  gemacht haben. Also folgt  $\exp(x) \neq 0$  und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(b) Für  $x \geq 0$  ist die Aussage wegen  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq x^0 = 1$  klar. Für  $x < 0$  ist somit  $\exp(-x) > 0$  und damit auch  $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$ .

(c) Wir zeigen die Aussage zunächst mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 0$  gilt  $\exp(0) = 1 = e^0$ .

Für  $n \rightarrow n + 1$  und  $n \geq 0$  gilt

$$\exp(n + 1) = \exp(n) \exp(1) = \exp(n)e = e^n e = e^{n+1}.$$

Damit ist die Aussage für  $k = n \geq 0$  gezeigt.

Für  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k < 0$  gilt mit  $n = -k$

$$\exp(k) = \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} = e^k.$$

Dies zeigt die Aussage für  $k < 0$ . □

Aussage (c) gibt bereits einen Anhaltspunkt, warum man oft  $e^x$  statt  $\exp(x)$  schreibt. Es gibt aber noch einen tieferen Grund, den wir etwas später in diesem Kapitel kennen lernen werden.

Mit den gerade bewiesenen Rechenregeln und den Abschätzungen aus Satz 6.5 können wir nun den folgenden Satz beweisen.

**Satz 6.8** Die Exponentialfunktion ist stetig.

**Beweis:** Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  und jede beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow a$  müssen wir beweisen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp(a)$  gilt. Sei  $x_n$  im Folgenden eine solche Folge.

Wir betrachten zunächst  $a = 0$ . Aus Satz 6.5 folgt mit  $N = 0$  für alle  $|x| \leq 1$

$$|\exp(x) - 1| = |r_1(x)| \leq 2|x|.$$

Für  $x_n \rightarrow 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n| \leq 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit folgt

$$|\exp(x_n) - 1| = |r_1(x_n)| \leq 2|x_n| \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  und damit  $\exp(x_n) \rightarrow 1 = \exp(0)$ .

Für  $a \neq 0$  gilt  $x_n - a \rightarrow 0$  und damit

$$\exp(x_n) = \exp(a) \exp(x_n - a) \rightarrow \exp(a) \exp(0) = \exp(a).$$

□

## 6.3 Umkehrfunktionen

Wir wollen im folgenden Abschnitt den Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion einführen. Dazu müssen wir aber zunächst klären, was wir unter einer Umkehrfunktion überhaupt verstehen.

**Definition 6.9** Eine reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *injektiv*, wenn für alle  $x, x' \in D$  mit  $x \neq x'$  die Ungleichung  $f(x) \neq f(x')$  gilt. □

Für eine injektive Funktion gibt es zu jedem  $y \in f(D)$  eine eindeutige Zahl  $x \in D$  mit  $f(x) = y$ , denn: dass es ein solches  $x$  gibt, folgt aus der Definition von  $f(D)$  und gäbe es ein weiteres  $x' \in D$  mit  $x' \neq x$  und  $f(x') = y$  so wäre  $f(x) = y = f(x')$ , was der Injektivität widerspräche.

Wenn eine Funktion injektiv ist, können wir eine neue Funktion wie folgt definieren.

**Definition 6.10** Für eine injektive Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $D' := f(D)$  definiere die Umkehrfunktion  $f^{-1} : D' \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $y \in D'$  mittels

$$f^{-1}(y) := x, \quad \text{wobei } x \in D \text{ die eindeutige Zahl mit } f(x) = y \text{ ist.}$$

□

Für die Umkehrfunktion gilt mit  $y = f(x)$  gerade

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{für alle } x \in D.$$

Ebenso gilt

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \text{für alle } y \in D'.$$

Tatsächlich ist die Umkehrfunktion eindeutig durch jede dieser beiden Beziehungen festgelegt.

**Vorsicht:** Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  wird leicht mit der Funktion  $x \mapsto f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$  verwechselt.

**Beispiel 6.11** Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist für  $D = \mathbb{R}$  nicht injektiv, denn für  $x > 0$  ist  $-x \neq x$  aber  $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$ . Für  $D = [0, \infty)$  ist sie injektiv, denn für  $x, x' \geq 0$  mit  $x \neq x'$  gilt entweder  $x' > x$  und damit  $f(x') > f(x)$  oder  $x' < x$  und damit  $f(x') < f(x)$ , in beiden Fällen also  $f(x) \neq f(x')$ . Ihre Umkehrfunktion kann man aus der Beziehung “ $f^{-1}(y)$  ist die eindeutige Zahl  $x \in [0, \infty)$  mit  $x^2 = y$ ”  $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$  berechnen. □

Beachte, dass sich für Umkehrfunktionen oft keine einfachen Formeln angeben lassen.

**Definition 6.12** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend oder streng monoton fallend), falls für alle  $x, x' \in D$  mit  $x < x'$  die Ungleichung

$$f(x) \leq f(x') \quad (\text{bzw. } f(x) < f(x'), \quad f(x) \geq f(x') \quad \text{oder} \quad f(x) > f(x'))$$

gilt. □

**Satz 6.13** Jede streng monotone wachsende (bzw. fallende) Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist injektiv. Sie besitzt damit eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  mit Definitionsmenge  $D' = f(D)$ . Diese ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend). Falls  $f$  darüberhinaus stetig und  $D = [a, b]$  ein kompaktes Intervall ist, so gilt  $D' = [f(a), f(b)]$  (bzw.  $D' = [f(b), f(a)]$ ) und  $f^{-1}$  ist ebenfalls stetig.

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung für streng monoton wachsende Funktionen.

Injektivität: Seien dazu  $x, x' \in D$  mit  $x \neq x'$  gegeben. Dann gilt entweder  $x' > x$  und damit  $f(x') > f(x)$  oder  $x' < x$  und damit  $f(x') < f(x)$ , in beiden Fällen also  $f(x) \neq f(x')$ .

Monotonie der Umkehrfunktion: Für  $y, y' \in D'$  mit  $y' > y$  und  $y = f(x)$ ,  $y' = f(x')$  gilt  $x' > x$ , da ansonsten wegen der strengen Monotonie  $y' = f(x') \leq f(x) = y$  gelten müsste. Also folgt

$$f^{-1}(y') = x' > x = f^{-1}(y)$$

und damit die strenge Monotonie von  $f^{-1}$ .

Stetigkeit der Umkehrfunktion: Aus der strengen Monotonie von  $f$  und  $D = [a, b]$  folgt, dass  $f(D) \subset [f(a), f(b)]$  ist. Wegen der Stetigkeit von  $f$  wird dabei nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert  $y \in [f(a), f(b)]$  angenommen, woraus  $D' = f(D) = [f(a), f(b)]$  folgt. Wegen  $D = [a, b]$  gilt zudem  $f^{-1}(y) \in [a, b]$  für alle  $y \in D'$ .

Zum Beweis der Stetigkeit sei nun  $y_n$  eine Folge in  $D'$  mit  $y_n \rightarrow y \in D'$ . Wir nehmen an, dass der Grenzwert von  $f^{-1}(y_n)$  entweder nicht existiert oder ungleich  $f^{-1}(y)$  ist. In beiden Fällen bedeutet dies, dass ein  $\varepsilon > 0$  und beliebig große  $n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $d(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) \geq \varepsilon$ , d.h. es gibt eine Teilfolge  $f(y_{n_k})$  mit

$$d(f^{-1}(y_{n_k}), f^{-1}(y)) \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Wegen  $f^{-1}(y_{n_k}) \in [a, b]$  ist die Folge  $f^{-1}(y_{n_k})$  beschränkt und es existiert eine konvergente Teilfolge, die wir wiederum mit  $f^{-1}(y_{n_k})$  bezeichnen (diese Vereinfachung dürfen wir machen, weil (6.1) bei dem Übergang zu einer weiteren Teilfolge sicherlich weiterhin gilt). Sei

$$x' := \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-1}(y_{n_k}),$$

dann folgt

$$y_{n_k} = f(f^{-1}(y_{n_k})) \rightarrow f(x') =: y'.$$

Da die  $y_{n_k}$  als Teilfolge der konvergenten Folge  $y_n$  gegen den gleichen Grenzwert konvergieren muss, folgt  $y' = y$  und damit

$$d(f^{-1}(y_{n_k}), f^{-1}(y)) = d(f^{-1}(y_{n_k}), f^{-1}(y')) = d(f^{-1}(y_{n_k}), x') \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ , was der Ungleichung (6.1) widerspricht.  $\square$

Es folgt, dass jede streng monotone Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

Der Vollständigkeit halber merken wir noch an, dass eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  für ein gegebenes  $W \subset \mathbb{R}$  surjektiv heißt, wenn  $f(D) = W$  gilt und bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Für eine bijektive Funktion  $f$  ist die Umkehrfunktion also auf  $D' = W$  definiert. Beachte, dass jede injektive Funktion auf ihrem Bild  $W = f(D)$  bijektiv ist.

## 6.4 Die Logarithmusfunktion

**Satz 6.14** Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend und es gilt  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Sie ist daher injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion mit Definitionsmenge  $D' = (0, \infty)$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $\exp$  streng monoton wachsend ist. Für  $x' > x \geq 0$  gilt

$$\exp(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x')^n}{n!} = 1 + x' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x')^n}{n!} \geq 1 + x' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Für  $x' > 0$  und  $x \leq 0$  folgt die Aussage wegen

$$\exp(x') > \exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp(0)} = 1$$

und für  $0 \geq x' > x$  gilt  $-x > -x' \geq 0$ , damit folgt aus dem ersten Fall  $\exp(-x) > \exp(-x')$  und folglich

$$\exp(x') = \frac{1}{\exp(-x')} > \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x).$$

Es bleibt  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$  zu zeigen. Wegen  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ . Wegen  $\exp(x) \geq x$  für  $x > 0$  nimmt  $\exp(x)$  beliebig große Werte an und wegen  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$  auch Werte beliebig nahe bei 0. Dass auch alle Werte dazwischen angenommen werden, folgt aus der Stetigkeit mit dem Zwischenwertsatz.  $\square$

**Definition 6.15** Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wird (natürlicher) Logarithmus genannt und mit

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet<sup>3</sup>.  $\square$

**Satz 6.16** Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.

**Beweis:** Wenn wir die Exponentialfunktion auf ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  einschränken, folgen beide Eigenschaften direkt aus Satz 6.13. Stetigkeit für beliebige  $y \in D' = (0, \infty)$  und Monotonie für beliebige  $y' > y \in D'$  folgen dann, indem wir  $a = y/2$  und  $b = 2y$  bzw.  $b = 2y'$  wählen.  $\square$

**Satz 6.17 (Funktionalgleichung des Logarithmus)** Für alle  $x, y \in (0, \infty)$  gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

**Beweis:** Wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Umkehrfunktions-eigenschaft des Logarithmus gilt

$$xy = \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y)).$$

Wenden wir nun auf beiden Seiten den Logarithmus an, so folgt

$$\ln(xy) = \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) = \ln(x) + \ln(y).$$

<sup>3</sup>Manchmal findet sich auch die Bezeichnung  $\log$ .

□

Aus dieser Gleichung folgt

$$\ln 1 = \ln(1 \cdot 1) = \ln 1 + \ln 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$$

und für  $x > 0$

$$\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(x/x) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln(1/x) = -\ln(x).$$

Zudem folgt aus der Funktionalgleichung und der Umkehrfunktionseigenschaft für alle reellen  $a > 0$

$$a^2 = aa = \exp(\ln(a) + \ln(a)) = \exp(2 \ln(a))$$

und daraus per Induktion für alle  $n \geq 1$  auch

$$a^n = \exp(n \ln(a)).$$

Ebenso gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\exp(n \ln(a))} = \exp(-n \ln(a)).$$

Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 6.18** Für  $a, x \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  definieren wir die *Potenz*  $a^x$  als

$$a^x := \exp(x \ln(a)).$$

Diese wird auch *Exponentialfunktion zur Basis a* genannt und

$$\exp_a(x) := \exp(x \ln a)$$

geschrieben. □

Die folgenden Rechenregeln lassen sich aus den bereits bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion und des Logarithmus herleiten (Übungsaufgabe):

$$a^x a^y = a^{(x+y)}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Für  $a = e = \exp(1)$  folgt wegen  $\ln(e) = 1$

$$e^x = \exp_e(x) = \exp(x \ln(e)) = \exp(x),$$

d.h. die übliche Exponentialfunktion ist gerade die Exponentialfunktion zur Basis  $e$ . Dies ist der eigentliche Grund, warum man statt  $\exp(x)$  auch  $e^x$  schreibt.

**Definition 6.19** Die Umkehrfunktion von  $\exp_a$  wird mit  $\log_a$  bezeichnet und Logarithmus zur Basis  $a$  genannt. □



Aus  $\exp = \exp_e$  folgt dann sofort  $\ln = \log_e$ .

Eine Folgerung aus der Gleichung  $\sqrt[n]{a} = \exp_a(1/n)$  ist das folgende Korollar.

**Korollar 6.20** Für alle  $a > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Beweis:** Wegen  $\sqrt[n]{a} = \exp_a(1/n)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  folgt wegen der Stetigkeit von  $\exp_a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(1/n) = \exp(0) = 1.$$

□

Man könnte sich nun fragen, ob man eine allgemeine Potenz  $a^x$  nicht auch auf andere Weise definieren könnte. Man kann aber nachrechnen (was wir hier aus Zeitgründen unterlassen), dass dies die einzige Möglichkeit der Definition ist, wenn die Gleichungen  $a^1 = a$  und  $a^{x+y} = a^x a^y$  erfüllt sein sollen. Ein Beweis dafür findet sich z.B. im Buch von Forster [6, §12, Satz 6].

## 6.5 Limesverhalten von exp und ln

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Aussagen über das Verhalten von exp und ln für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow 0$ .

Der erste Satz besagt, dass die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  schneller wächst als jede Potenz  $x^k$ . Formal drückt man dieses "schneller Wachsen" aus, indem man den Quotienten  $\exp(x)/x^k$  betrachtet. Dass exp schneller wächst, drückt sich dann wie folgt aus.

**Satz 6.21** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$ .

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass für jedes  $K > 0$  ein  $x_K > 0$  existiert mit

$$\frac{e^x}{x^k} > K \quad \text{für alle } x > x_K.$$

Wählen wir  $x_K = K(k+1)!$ , so folgt für alle  $x > x_K$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

und damit

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x^{k+1}}{x^k (k+1)!} = \frac{x}{(k+1)!} > \frac{K(k+1)!}{(k+1)!} = K.$$

□

Der nächste Satz zeigt, dass  $e^{-x}$  für  $x \rightarrow \infty$  so schnell gegen Null strebt, dass auch  $x^k e^{-x}$  für jedes  $k$  noch gegen Null konvergiert. Als zweites Resultat zeigt er, dass  $e^{1/x}$  für  $x \rightarrow 0$  so schnell gegen unendlich strebt, dass auch  $x^k e^{1/x}$  divergiert.

**Satz 6.22** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^k e^{1/x} = \infty.$$

Die zweite Schreibweise “ $\lim$ ” bedeutet dabei, dass wir beim Bilden des Grenzwerts gemäß Definition 5.4 nur Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n > 0$  betrachten.

**Beweis:** Mit Satz 6.21 und Satz 3.17 folgt

$$x^k e^{-x} = \left( \frac{e^x}{x^k} \right)^{-1} \rightarrow 0.$$

Ebenso gilt mit Satz 6.21 mit  $y = 1/x$

$$x^k e^{1/x} = \left( \frac{1}{y} \right)^k e^y = \frac{e^y}{y^k} \rightarrow \infty,$$

da  $y = 1/x \rightarrow \infty$  gilt für  $x \rightarrow 0$ . □

Wozu kann man diesen Satz brauchen? Um ein Beispiel für eine Anwendung zu geben, formulieren wir zunächst ein Korollar.

**Korollar 6.23** Für alle  $a \in \mathbb{R}$  mit  $|a| < 1$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k a^k = 0.$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst  $a > 0$  und setzen  $b := 1/a$ . Dann gilt (vgl. die Folgerungen nach Satz 6.17)  $\ln b = -\ln a > 0$  und damit

$$a^k = e^{k \ln a} = e^{-k \ln b}.$$

Setzen wir nun  $x = k \ln b$  so folgt

$$k a^k = k e^{-k \ln b} = \frac{x}{\ln b} e^{-x} = \frac{1}{\ln b} x e^{-x}$$

und weil für  $k \rightarrow \infty$  wegen  $\ln b > 0$  auch  $x \rightarrow \infty$  gilt, folgt die Behauptung mit Satz 6.22.

Für  $a = 0$  ist die Aussage sofort klar und für  $a < 0$  gilt  $k a^k = (-1)^k k |a|^k$ . Nach dem ersten Teil des Beweises gilt  $k |a|^k \rightarrow 0$  und damit auch  $k a^k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . □

**Beispiel 6.24** Als Anwendungsbeispiel betrachten wir nun noch einmal den Wassertank aus Beispiel 3.2(b) mit der auf Seite 43 betrachteten “Strategie”, in jedem Zeitintervall gerade die Wassermenge  $\alpha a_n$  einzufüllen oder abzulassen. Dies führt wie bereits gesehen auf die rekursive Gleichung

$$a_{n+1} = (1 - \alpha) a_n$$

für den Wasserstand. Wir betrachten nun den Fall, dass wir einen zweiten — völlig gleichen — Tank haben, dessen Wasserstand mit  $b_n$  bezeichnet wird und der mit genau der gleichen Strategie (und dem gleichen  $\alpha$ ) befüllt bzw. entleert wird. Für diesen gilt also die Gleichung

$$b_{n+1} = (1 - \alpha)b_n.$$

Das Wasser, das in den zweiten Tank gefüllt wird wird dabei jetzt aber aus dem ersten Tank entnommen und das Wasser, was aus dem zweiten Tank abgelassen wird, in den ersten Tank eingefüllt. Damit ändert sich die Gleichung für den ersten Tank auf

$$a_{n+1} = (1 - \alpha)a_n + \alpha b_n.$$

Die Frage ist nun: konvergiert der Wasserstand des ersten Tanks immer noch gegen Null?

Mit vollständiger Induktion kann man nun beweisen, dass die Gleichung für den ersten Tank in expliziter Form als

$$a_n = (1 - \alpha)^n a_0 + n\alpha(1 - \alpha)^{n-1} b_0$$

geschrieben werden kann. Für  $0 < \alpha < 2$  konvergiert der erste Summand (mit den gleichen Überlegungen wie auf Seite 43) gegen Null. Der zweite Term ist für  $\alpha = 1$  gerade gleich Null für alle  $n \geq 2$  und konvergiert damit gegen Null. Für  $0 < \alpha < 2$  und  $\alpha \neq 1$  erhalten wir

$$n\alpha(1 - \alpha)^{n-1} b_0 = \frac{\alpha b_0}{1 - \alpha} n(1 - \alpha)^n.$$

Weil nun aus  $0 < \alpha < 2$  aber gerade  $|1 - \alpha| < 1$  folgt, konvergiert der Term nach Korollar 6.23 ebenfalls gegen Null.

Wir erhalten also: die Wasserstände in den beiden verbundenen Tanks konvergieren unter genau den gleichen Bedingungen an  $\alpha$  gegen Null wie die Wasserstände in den unverbundenen Einzeltanks.  $\square$

Aus der Stetigkeit von  $\exp$  folgt sofort die Konvergenz  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$ . Der folgende Satz zeigt, was passiert, wenn man diese Differenz noch durch  $x$  teilt.

**Satz 6.25** Es gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Beweis:** Aus Satz 6.5 folgt mit  $N = 1$  und für  $|x| < 3/2$  die Ungleichung

$$|e^x - (1 + x)| = |r_2(x)| \leq |x|^2.$$

Damit ergibt sich

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{e^x - (1 + x)}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$$

für  $x \rightarrow 0$  und  $x \neq 0$ . Damit folgt die Behauptung.

Betrachten wir nun noch einige Limeseigenschaften des Logarithmus.

**Satz 6.26** Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

**Beweis:** Für die erste Behauptung müssen wir zeigen, dass für jedes  $K > 0$  ein  $x_K > 0$  existiert mit  $\ln x > K$  für alle  $x > x_K$ . Da der Logarithmus streng monoton wachsend ist, gilt für  $x > x_K := e^K$

$$\ln x > \ln x_K = \ln(e^K) = K.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten mit  $y = 1/x$  wegen

$$\ln x = \ln \frac{1}{y} = -\ln y \rightarrow -\infty,$$

weil  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$ . □

Diese Eigenschaft hat direkte Konsequenzen für die Potenz.

**Satz 6.27** Für jede reelle Zahl  $y > 0$  gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^y = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{-y} = \infty.$$

**Beweis:** Für die erste Behauptung betrachte eine Folge  $x_n \rightarrow 0$  mit  $x_n > 0$ . Dann gilt mit Satz 6.26

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y \ln x_n = -\infty.$$

Weil aus Satz 6.22 (mit  $k = 0$ ) insbesondere  $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$  folgt, erhalten wir

$$x_n^y = e^{y \ln x_n} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Die zweite Behauptung folgt dann aus der ersten mit Satz 3.17 wegen  $x^{-y} = 1/x^y$ . □

Beachte, dass für festes  $y > 0$  die Funktion  $x \mapsto x^y$  zunächst nur für  $x \in (0, \infty)$  definiert ist. Wir können diese Funktion aber auf dem abgeschlossenen Intervall definieren, wenn wir den Wert  $0^y$  festlegen. Dafür könnte man im Prinzip beliebige Werte verwenden, aus dem vorhergehenden Satz folgt aber, dass  $0^y = 0$  eine gute Wahl ist, da die Abbildung  $x \mapsto x^y$  damit für jedes  $y > 0$  stetig auf dem ganzen Definitionsbereich  $[0, \infty)$  wird. Man nennt eine solchermaßen erweiterte Funktion auch *stetige Fortsetzung*.

Wir haben diesen Abschnitt begonnen mit der Feststellung, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, könnte man nun vermuten, dass sich diese Eigenschaft beim Logarithmus gerade umkehrt. Dies ist tatsächlich der Fall: Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz, wie der folgende letzte Satz dieses Kapitels zeigt.

**Satz 6.28** Für alle  $y > 0$  gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^y} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^y \ln x = 0.$$

**Beweis:** Für die erste Behauptung sei  $x_n \rightarrow \infty$  mit  $x_n > 0$ . Aus Satz 6.26 folgt dann  $a_n := y \ln x_n \rightarrow \infty$ . Wegen  $x_n^y = e^{y \ln x_n} = e^{a_n}$  folgt dann  $e^{a_n}/a_n \rightarrow \infty$  und damit nach Satz 3.17

$$\frac{\ln x_n}{x_n^y} = \frac{1}{y} \frac{a_n}{e^{a_n}} \rightarrow 0.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten mit  $z = 1/x$  wegen

$$x^y \ln x = -\frac{\ln z}{z^y}$$

und  $z \rightarrow \infty$  falls  $x \rightarrow 0$ . □

## 6.6 Anhang: Elementarer Beweis von Satz 6.3

(wurde an der Tafel nicht behandelt und ist folglich auch nicht prüfungsrelevant)

**Beweis:** Wir beweisen den Satz zuerst für  $x \geq 0$  und schreiben dazu kurz

$$a_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad b_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} x^k.$$

Wegen

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{1}{1} \cdots \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq 1$$

folgt

$$b_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} x^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = a_n \leq \exp(x).$$

Die Folge  $b_n$  ist also nach oben durch  $\exp(x)$  beschränkt, woraus die Existenz des Limes Superior und die Ungleichung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \exp(x)$$

folgt. Andererseits gilt für jedes feste  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{1}{1} \cdots \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdots \frac{n}{n} \geq \left(\frac{n-k}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also gilt für jedes feste  $m \in \mathbb{N}$

$$a_m - b_n = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} - b_n \leq \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)}_{=: c_n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Da  $c_n$  monoton gegen Null konvergiert, folgt damit auch

$$\sup\{a_m - b_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{c_k \mid k \geq n\} = c_n \Rightarrow \inf\{b_k - a_m \mid k \geq n\} \geq -c_n$$

und somit mit Satz 3.14

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n - a_m = \liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_m) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (-c_n) = 0,$$

also  $a_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Nochmals mit Satz 3.14 folgt daraus

$$\exp(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Aus den damit bewiesenen Ungleichungen  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \exp(x)$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \exp(x)$  folgt nun die Behauptung mit Korollar 3.32(a).

Für  $x < 0$  definieren wir zunächst

$$d_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Wegen  $d_n \leq 1$  folgt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n \leq 1$ . Andererseits gilt nach dem Binomischen Lehrsatz für alle  $y > 0$

$$\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-y)^k}{n^k} \geq 1 - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{y^k}{n^k} = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{y^k}{n^k} - 1\right) = 2 - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Zu gegebenem  $x < 0$  wähle nun ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $y := x^2/n_0 < 1$ . Für  $n \geq n_0$  gilt dann  $x^2/n^2 \leq x^2/(n_0 n) = y/n$ , damit auch  $1 - x^2/n^2 \geq 1 - y/n$  und

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \geq 2 - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Also folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 2 - \exp(y) = 2 - \exp\left(\frac{x^2}{n_0}\right).$$

Da dies für alle hinreichend großen  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt, folgt wegen der Stetigkeit von  $\exp$   $\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n \geq 2 - 1 = 1$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$ .

Damit folgt für alle  $x < 0$  mit Satz 3.13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\exp(-x)},$$

da für  $-x > 0$  die bereits bewiesene Aussage gilt. Wegen  $1/\exp(-x) = \exp(x)$  folgt die Behauptung.  $\square$



# Kapitel 7

## Die komplexen Zahlen

Stand:  
2. August 2022

Wir hatten die Einführung der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  damit motiviert, dass in  $\mathbb{Q}$  die Zahl  $\sqrt{2}$  nicht enthalten ist, dass wir also keine Lösung der Gleichung  $x^2 = 2$  finden können.

Während die Definition von  $\mathbb{R}$  über das Vollständigkeitsaxiom dieses Problem löst, gibt es trotzdem quadratische Gleichungen, die in  $\mathbb{R}$  nicht erfüllt sind. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Für diese Gleichung kann es in  $\mathbb{R}$  keine Lösung geben: offensichtlich ist  $x = 0$  keine Lösung der Gleichung, für  $x \neq 0$  gilt mit Satz 2.1(3) und (6) aber  $-1 < 0$  und  $x^2 > 0$ , weswegen es keine Lösung geben kann.

Wir müssen also eine neue — größere — Menge von Zahlen einführen, die sogenannten komplexen Zahlen. Da diese bereits aus der Linearen Algebra bekannt sind, werden wir uns in diesem Kapitel relativ kurz fassen.

### 7.1 Definition und Rechenregeln

Die Idee der Definition der komplexen Zahlen liegt darin, das Symbol “ $i$ ” für die in  $\mathbb{R}$  nicht vorhandene Zahl  $\sqrt{-1}$  einzuführen. Jede komplexe Zahl  $z$  ist dann die Summe aus einem reellen Vielfachen der 1 und einem reellen Vielfachen von  $i$ . Formal also

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Für  $z = a + ib$  heißt die Zahl  $\operatorname{Re}(z) := a \in \mathbb{R}$  der *Realteil* von  $z$  und die Zahl  $\operatorname{Im}(z) := b \in \mathbb{R}$  der *Imaginärteil* von  $z$ . Die Zahl  $i$  wird als *Imaginäre Einheit* bezeichnet und eine komplexe Zahl  $z = a + ib$  mit  $a = \operatorname{Re}(z) = 0$  als (*rein*) *imaginäre Zahl*.

Die Rechenregeln für komplexe Zahlen ergeben sich direkt aus ihrer Definition. Für  $z_1 = a_1 + ib_1$  und  $z_2 = a_2 + ib_2$  gilt

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

und

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$



Zur Definition der Division betrachten wir zunächst das inverse Element  $z_2 = z_1^{-1}$ . Für dieses muss gelten

$$1 = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2),$$

also  $b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0$  und  $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 1$ . Man rechnet nach, dass dies gerade für

$$z_2 = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} (a_1 - i b_1)$$

erfüllt ist, d.h. für

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Definieren wir zu  $z = a + ib$  die *konjugiert komplexe Zahl*  $\bar{z}$  und den *Betrag*  $|z|$  als

$$\bar{z} := a - ib \quad \text{und} \quad |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so können wir kurz  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$  schreiben. Die Division ist mit diesen Schreibweisen durch

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

gegeben.

Mit diesen Operationen kann man nachrechnen, dass  $\mathbb{C}$  ein Körper ist. Zudem erfüllt  $\mathbb{C}$  das Vollständigkeitsaxiom, wobei jede Intervallschachtelung jetzt natürlich aus zwei Folgen von Intervallen für den Realteil  $a$  und den Imaginärteil  $b$  besteht. Dass das auf diese Art verallgemeinerte Vollständigkeitsaxiom erfüllt ist, folgt sofort aus der Tatsache, dass  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind.

Nicht erfüllt sind allerdings die Anordnungsaxiome, denn Satz 2.1 gilt nicht nur für  $\mathbb{R}$  sondern für jeden Körper, der die Anordnungsaxiome (A1) und (A2) erfüllt. Jeder Versuch, eine Ordnung auf  $\mathbb{C}$  zu definieren, würde also nach Teil (3) und (6) dieses Satzes für  $z = i$  auf den Widerspruch  $z^2 = -1 < 0$  und  $z^2 > 0$  führen. Diese Tatsache zusammen mit der etwas esoterisch anmutenden Bezeichnung “imaginäre Zahl” haben dazu geführt, dass die komplexen Zahlen anfangs sehr skeptisch betrachtet wurden. Tatsächlich sind sie aber nichts anderes als ein sehr nützliches Werkzeug, nicht nur innerhalb der Mathematik sondern auch in den Anwendungen. So vereinfacht sich z.B. die Analyse von elektrischen Wechselstromschaltkreisen deutlich, wenn man die dort auftretenden Größen geeignet mit komplexen Zahlen beschreibt.

Wir beweisen noch die folgenden Eigenschaften des Betrags einer komplexen Zahl.

**Satz 7.1** Für alle  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt

- (1)  $|z| \geq 0$       und       $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (2)  $|z_1| |z_2| = |z_1 z_2|$
- (3)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecksungleichung)

**Beweis:**

(1) Folgt sofort aus der Darstellung  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  für  $z = a + ib$ .

(2) Durch Nachrechnen folgt die Gleichheit  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ . Damit ergibt sich

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

(3) Zunächst gilt für  $z = a + ib$  die Ungleichung

$$\operatorname{Re}(z) = a \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

und damit mit (2)

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten.

□

Man kann komplexe Zahlen alternativ als Zahlenpaar  $z = (a, b)$  ohne Verwendung von  $i$  schreiben. Die obigen Rechenregeln sind dann komponentenweise anzuwenden, für  $z_1 = (a_1, b_1)$  und  $z_2 = (a_2, b_2)$  also z.B.

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2).$$

## 7.2 Veranschaulichung

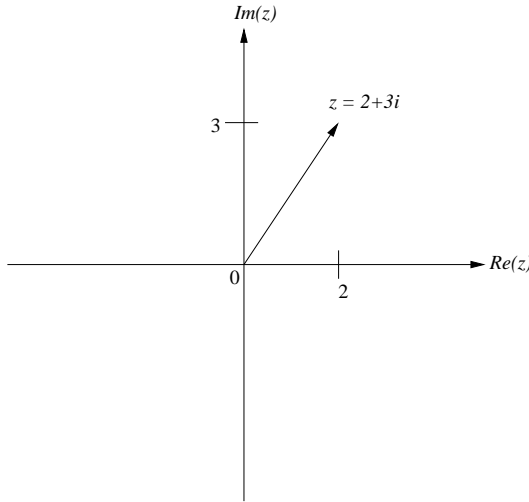
Da jede komplexe Zahl als ein Paar von reellen Zahlen aufgefasst werden kann, bietet es sich an, diese in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zu veranschaulichen. Dabei tragen wir den Realteil in der horizontalen Richtung und den Imaginärteil in der vertikalen Richtung auf, vgl. Abb. 7.1.

Die für diese Darstellung verwendete zweidimensionale Ebene wird *komplexe Ebene* genannt, die beiden Achsen im Koordinatensystem heißen *reelle* und *komplexe Achse*.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist in dieser Darstellung gerade die Länge des Vektors von 0 nach  $z$ , wie man leicht durch Anwendung des Satzes von Pythagoras sieht. Die konjugiert komplexe Zahl entsteht durch Spiegeln der Zahl an der reellen Achse.

Die Addition entspricht hier der bekannten Vektoraddition. Mit dieser grafischen Interpretation ergibt auch die Bezeichnung "Dreiecksungleichung" für die Ungleichung aus Satz 7.1(3) geometrisch einen Sinn (eine Zeichnung dazu gibt es in der Vorlesung).

Die Multiplikation ergibt einen neuen Vektor, bei dem die Längen der beiden Vektoren miteinander multipliziert werden und die Winkel zur reellen Achse addiert werden. Die Aussage über die Längen folgt dabei aus Satz 7.1(2), die Aussage über die Winkel werden wir in Abschnitt 8.5 beweisen.

Abbildung 7.1: Veranschaulichung der komplexen Zahl  $z = 2 + 3i$ 

### 7.3 Komplexe Folgen und Reihen

Genau wie in  $\mathbb{R}$  kann man auch in  $\mathbb{C}$  Folgen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren. Konvergenz wird ganz genau wie in  $\mathbb{R}$  über den Abstand  $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$  definiert.

**Definition 7.2** Eine komplexe Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent*, falls ein  $z \in \mathbb{C}$  existiert, so dass gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass die Ungleichung  $d(z_n, z) < \varepsilon$  gilt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ .  $\square$

Die Bezeichnung  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n := z$  wird dann wie in  $\mathbb{R}$  benutzt.

Der folgende Satz ist der Grund dafür, dass sich alle Sätze für reelle konvergente Folgen auf komplexe Folgen übertragen.

**Satz 7.3** Eine komplexe Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis:** Es sei  $z_n$  konvergent mit Grenzwert  $z = a + ib$ . Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Es gilt nun

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \geq \sqrt{(a_n - a)^2} = |a_n - a|;$$

analog beweist man  $|z_n - z| \geq |b_n - b|$ . Es folgt also

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon),$$

also konvergieren  $a_n$  und  $b_n$  gegen  $a$  und  $b$ .

Seien umgekehrt  $a_n$  und  $b_n$  konvergent mit Grenzwerten  $a$  und  $b$ . Seien  $N_a(\varepsilon)$  und  $N_b(\varepsilon)$  die zugehörigen Indizes aus Definition 3.3. Dann gilt für alle  $\varepsilon > 0$  und  $n \geq N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$  und  $z = a + ib$  die Ungleichung

$$|z_n - z|^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

und damit

$$|z_n - z| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon.$$

Also folgt die Konvergenz von  $z_n$  gegen  $z$ .  $\square$

Auf ähnliche Art beweist man, dass  $z_n$  genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn  $a_n$  und  $b_n$  Cauchy-Folgen sind.

Satz 7.3 ist die Grundlage dafür, dass alle Rechenregeln für reelle Grenzwerte auf komplexe Grenzwerte übertragen werden können. Für komplex konjugierte Folgen folgt aus dem Satz zudem sofort, dass  $z_n$  genau dann konvergiert, wenn  $\bar{z}_n$  konvergiert und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}. \quad (7.1)$$

Mittels der Konvergenz komplexer Folgen lässt sich ganz analog zum reellen Fall die Stetigkeit komplexer Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren.

Für komplexe Reihen  $\sum_{k=0}^n z_k$  können alle Definitionen aus  $\mathbb{R}$  wörtlich übertragen werden, insbesondere die Konvergenz und die absolute Konvergenz. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen gelten dann in  $\mathbb{C}$  genau wie in  $\mathbb{R}$ , wobei die Majorante im Majorantenkriterium nach wie vor eine reelle Reihe ist.

## 7.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Die eben genannten Übertragungen der Eigenschaften von reellen Reihen in die komplexen Zahlen erlauben es, die komplexe Exponentialfunktion genau wie ihr reelles Gegenstück zu definieren. Die (absolute) Konvergenz der Exponentialreihe folgt wie im Reellen aus dem Quotientenkriterium.

**Definition 7.4** Wir definieren die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  als

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$\square$

Ganz analog zu den Beweisen im Reellen beweist man

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} + r_{N+1}(z)$$

mit der Abschätzung

$$|r_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für } |z| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

und die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

Daraus folgt insbesondere

$$\exp(z) \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$$

und damit  $\exp(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zudem folgt

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) \exp(ib).$$

Wir können die komplexe Exponentialfunktion also berechnen, indem wir die Exponentialfunktion für reelle und für rein imaginäre Zahlen berechnen und dann multiplizieren.

Ebenso wie in  $\mathbb{R}$  lässt sich zudem beweisen, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Im Folgenden werden wir wie im Reellen auch für  $z \in \mathbb{C}$  wieder die Schreibweise  $e^z$  alternativ zu  $\exp(z)$  verwenden.

Eine wichtige Eigenschaft der komplexen Exponentialfunktion, zu der es kein reelles Gegenstück gibt, zeigt der folgende Satz.

**Satz 7.5** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .

**Beweis:** Beachte zunächst, dass für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  die Gleichung  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$  gilt. Per Induktion folgt daraus  $\bar{z}^k = \overline{z^k}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und alle  $k \geq 0$ . Schreiben wir abkürzend

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!},$$

so gilt

$$s_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \overline{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \overline{s_n(z)}.$$

Die Behauptung folgt dann aus

$$e^{\bar{z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{s_n(z)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)} = \overline{e^z},$$

wobei wir bei der vorletzten Gleichheit (7.1) benutzt haben. □

**Korollar 7.6** Für jede rein imaginäre Zahl  $z = ib$  mit  $b \in \mathbb{R}$  gilt  $|e^z| = 1$ .

**Beweis:** Es gilt

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^z e^{\bar{z}} = e^z e^{-z} = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung wegen  $\sqrt{1} = \pm 1$  und weil der Betrag einer komplexen Zahl stets nichtnegativ ist.  $\square$

In der komplexen Ebene dargestellt, liegen also alle komplexen Zahlen der Form  $e^{ib}$  auf dem Kreis mit Radius 1. Ein Beispiel ist in Abb. 7.2 dargestellt.

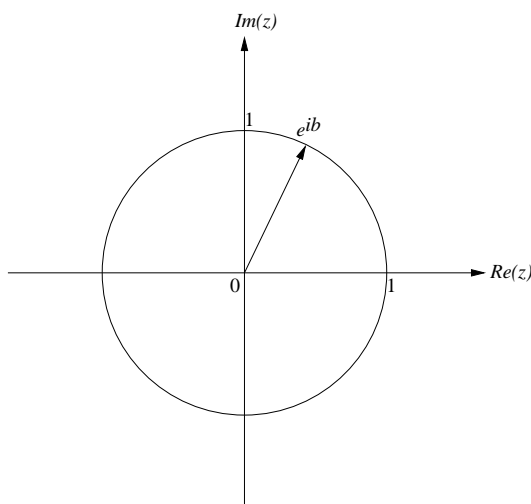


Abbildung 7.2: Veranschaulichung von  $e^{ib}$

Eine wichtige Frage ist hierbei, wie die Position von  $e^{ib}$  auf dem Kreis von der Zahl  $b \in \mathbb{R}$  abhängt. Die Zahl  $b$  ist gerade ein Maß für den Winkel zwischen der reellen Achse und dem Vektor  $e^{ib}$ , gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir werden im folgenden Kapitel die Zahl  $\pi$  definieren und beweisen, dass  $e^{i\pi/2} = i$ ,  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{i3\pi/2} = -i$  und  $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$  gilt. Für diese Werte ist  $b$  also gerade die Länge des Kreisbogens vom Punkt  $1 = 1 + i0$  zum Vektor  $e^{ib}$ , wiederum gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Folglich ist die Zahl  $b$  für  $0, \pi/2, \pi, \dots$  nichts anderes als der Winkel gemessen im Bogenmaß, welches wir im Folgenden zur Winkelmessung stets verwenden werden. Im aus der Schule bekannten Gradmaß gelten dann die Entsprechungen  $\pi/2 = 90^\circ$ ,  $\pi = 180^\circ$ ,  $3/2\pi = 270^\circ$  und  $2\pi = 360^\circ$ . Tatsächlich gilt die Beziehung zwischen  $b$  und der Bogenlänge nicht nur für diese Werte sondern für alle  $b \in [0, 2\pi)$ , was wir in dieser Vorlesung aber nicht beweisen werden. In der Analysis 2 werden wir beweisen, dass wir mit der Zahl  $\pi$  den Flächeninhalt eines Kreises berechnen können.



# Kapitel 8

## Die trigonometrischen Funktionen

Stand:  
2. August 2022

Aus der Schule sind die trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ , ... bereits bekannt. Hier führen wir sie von Grund auf ein und ermitteln ihre wichtigsten Eigenschaften.

### 8.1 Definition

Aus der Schule ist bekannt, dass der Sinus gerade das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck ist und der Cosinus gerade das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse angibt. Im speziellen Fall, dass die Hypotenuse die Länge 1 besitzt, ist der Sinus also gerade die Länge der Gegenkathete und der Cosinus die Länge der Ankathete.

Betrachten wir nun Abbildung 7.2 noch einmal, so können wir hier ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen, dessen Hypotenuse gerade der Vektor  $e^{ib}$  ist. Dies ist in Abb. 8.1 gemacht, in der wir die reelle Zahl  $b$  nun mit  $x$  bezeichnen. Da  $e^{ix}$  für zunehmendes  $x$  auf dem Kreis in eindeutiger Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) rotiert, werden wir  $x$  im Weiteren als Maß für den Winkel zwischen  $e^{ix}$  und der reellen Achse verwenden.

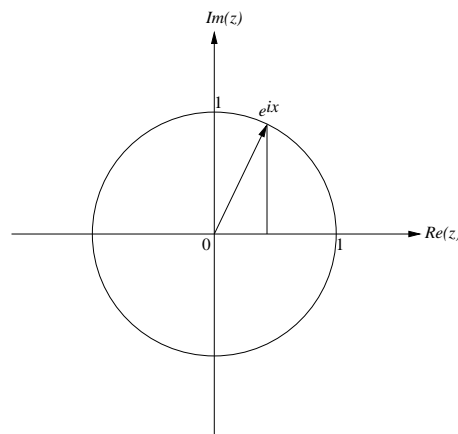


Abbildung 8.1: Rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $e^{ix}$



Offensichtlich ist die Länge der Hypotenuse hier gerade gleich  $\exp(ix) = 1$ , weswegen Sinus und Cosinus hier gerade durch die Längen der entsprechenden Katheten gegeben sind, vgl. Abb. 8.2.

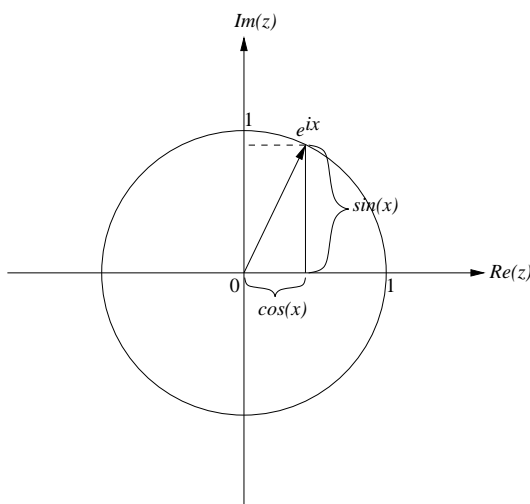


Abbildung 8.2: Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck aus Abb. 8.1

Die Werte für Sinus und Cosinus sind also nichts anderes als die Koordinaten des Vektors  $\exp(ix)$ . Diese wiederum sind gerade der Realteil und der Imaginärteil dieser Funktion. Diese Beobachtung führt dies auf die folgende Definition.

**Definition 8.1** Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\sin x := \operatorname{Im}(e^{ix}) \quad \text{und} \quad \cos x := \operatorname{Re}(e^{ix}).$$

□

Eine sofortige Konsequenz aus dieser Definition ist die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Diese ist benannt nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), der den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und Sinus und Cosinus systematisch untersucht hat.

## 8.2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Aus Definition 8.1 lassen sich die wichtigsten Eigenschaften von Sinus und Cosinus direkt ableiten.

**Satz 8.2** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Beachte: man schreibt  $\sin^2 x$  und  $\cos^2 x$  statt  $(\sin x)^2$  und  $(\cos x)^2$ .

$$(1) \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$(2) \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$(3) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

**Beweis:** (1) Für jede komplexe Zahl gilt  $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$  und  $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$ . Damit folgt die Behauptung wegen  $e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = e^{i\bar{x}}$ .

(2) Mit (1) gilt

$$\cos(-x) = \frac{1}{2}(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

und

$$\sin(-x) = \frac{1}{2i}(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2i}(e^{-ix} - e^{ix}) = -\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin x.$$

(3) Es gilt

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \operatorname{Re}(e^{ix})^2 + \operatorname{Im}(e^{ix})^2 = |e^{ix}|^2 = 1.$$

□

**Satz 8.3** Die Funktionen  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.

**Beweis:** Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_n$  eine reelle Folge mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann gilt mit Satz 7.3 (angewendet mit  $a_n = 0$  und  $b_n = x_n$ ) die Konvergenz  $ix_n \rightarrow ix$  und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt  $e^{ix_n} \rightarrow e^{ix}$ . Wiederum mit Satz 7.3 folgt dann

$$\cos x_n = \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin x_n = \operatorname{Im}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin x.$$

Dies zeigt die Stetigkeit für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

□

**Satz 8.4 (Additionstheoreme)** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

**Beweis:** Aus der Funktionalgleichung  $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$  folgt mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + i \sin(x + y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, indem wir den Realteil bzw. den Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung bilden. □

**Satz 8.5 (Reihendarstellung von Sinus und Cosinus)** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren absolut.

**Beweis:** Für die Potenzen von  $i$  gilt

$$(i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, \dots) = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots).$$

Damit gilt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Durch Bilden des Real- und des Imaginärteils folgen die behaupteten Reihendarstellungen. Die absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe.  $\square$

Mit der gleichen Abschätzung wie im Beweis von Satz 6.5 folgen die Darstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x) \quad (8.1)$$

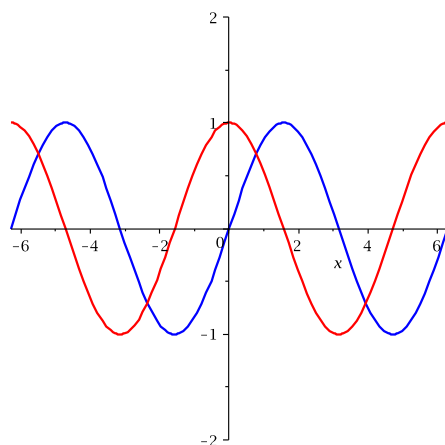
$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x), \quad (8.2)$$

in denen für die *Restglieder* die Abschätzung

$$|r_N(x)| \leq 2 \frac{|x|^N}{N!} \quad \text{für } |x| \leq 1 + \frac{N-1}{2}$$

gilt. Diese Abschätzung folgt, weil wir die fehlenden Glieder in der Reihendarstellung von  $\cos$  und  $\sin$  wie im Beweis von Satz 6.5 durch die Glieder der Exponentialreihe abschätzen können. Mit anderen Techniken, die wir später kennen lernen werden, kann man beweisen, dass diese Abschätzungen sogar für alle  $x \in \mathbb{R}$  und mit kleineren oberen Schranken gelten. Siehe dazu Beispiel 10.16(i).

Mit Hilfe dieser Reihendarstellung kann man die Werte  $\sin x$  und  $\cos x$  nun näherungsweise berechnen und damit insbesondere die Graphen dieser Funktionen zeichnen.

Graphen von  $\sin$  (blau) und  $\cos$  (rot)

Aus (8.2) folgt die folgende Aussage.

**Satz 8.6** Es gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Beweis:** Betrachte eine beliebige Folge  $x_n \rightarrow 0$  mit  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für alle hinreichend großen  $n$  gilt dann  $|x_n| < 2$ . Aus (8.2) folgt für diese  $n$

$$\sin x_n = x_n + r_3(x_n) \quad \text{mit} \quad |r_3(x_n)| \leq 2 \frac{|x_n|^3}{3!} < |x_n|^3$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_3(x_n)}{x_n}.$$

Wegen  $|\frac{r_3(x_n)}{x_n}| \leq |x_n|^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_3(x_n)}{x_n} = 0$  und damit die Behauptung.  $\square$

### 8.3 Die Zahl $\pi$

Wir haben die Zahl  $\pi$  bereits an einigen Stellen verwendet und dabei die Kenntnis dieser Zahl aus der Schule vorausgesetzt. In diesem Abschnitt werden wir sie formal definieren. Dazu verwenden wir die folgende Aussage.

**Satz 8.7** Die Funktion  $\cos$  hat im Intervall  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle.

Bevor wir Satz 8.7 beweisen können, benötigen wir drei Lemmas.

**Lemma 8.8** Es gilt  $\cos 2 \leq -43/105$ .

**Beweis:** Nach (8.1) mit  $n = 3$  gilt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + r_8(x) \quad \text{mit } |r_8(x)| \leq 2 \frac{|x|^8}{8!} \text{ für } |x| \leq 4,5.$$

Also folgt für  $x = 2$

$$\cos x \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{720} + 2 \frac{2^8}{40320} = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{45} + \frac{4}{315} = -\frac{43}{105}.$$

□

**Lemma 8.9** Für alle  $x \in (0, 2]$  gilt  $\sin x > 0$ .

**Beweis:** Für  $x \in (0, 3]$  gilt mit (8.2) mit  $n = 1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r_5(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{r_5(x)}{x}\right) x \quad \text{mit} \quad \left|\frac{r_5(x)}{x}\right| \leq 2 \frac{|x|^4}{5!}.$$

Für  $x \in (0, 2]$  folgt daraus

$$\sin x \geq \left(1 - \frac{2^2}{3!} - 2 \frac{2^4}{5!}\right) x = \left(1 - \frac{4}{6} - \frac{32}{120}\right) x = \frac{1}{15} x > 0.$$

□

**Lemma 8.10** Die Funktion  $\cos$  ist im Intervall  $[0, 2]$  streng monoton fallend.

**Beweis:** Sei  $0 \leq x < x' \leq 2$ . Wir müssen beweisen, dass  $\cos x' < \cos x$  ist.

Mit  $u := (x' + x)/2$  und  $v = (x' - x)/2$  folgt  $x = u - v$  und  $x' = u + v$ . Mit Satz 8.4 und Satz 8.2(2) gilt dann

$$\begin{aligned} \cos x' - \cos x &= \cos(u + v) - \cos(u - v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v - (\cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v)) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ &= -2 \sin u \sin v \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $u$  und  $v$  und den Ungleichungen für  $x$  und  $x'$  folgt nun  $0 < u < 2$  und  $0 < v \leq 1$ . Also folgt aus Lemma 8.9

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin u \sin v < 0,$$

woraus die gewünschte Ungleichung direkt folgt. □

**Beweis von Satz 8.7:** Da  $\cos 0 = \operatorname{Re}(e^0) = \operatorname{Re}(1) = 1$  und  $\cos 2 \leq -1/3$  (nach Lemma 8.8) und der Cosinus stetig ist, besitzt die Funktion nach dem Zwischenwertsatz (Satz 5.10) eine Nullstelle  $x^*$  im Intervall  $[0, 2]$ . Aus der strengen Monotonie (Lemma 8.10) folgt dann für alle  $x \in [0, x^*)$  die Ungleichung  $\cos x > \cos x^* = 0$  und für alle  $x \in (x^*, 2]$  die Ungleichung  $\cos x < \cos x^* = 0$ . Folglich ist  $x^*$  die einzige Nullstelle im Intervall  $[0, 2]$ . □

**Definition 8.11** Sei  $x^*$  die eindeutige Nullstelle von  $\cos$  im Intervall  $[0, 2]$ . Dann definieren wir

$$\pi := 2x^*,$$

d.h.  $\pi/2$  ist die eindeutige Nullstelle von  $\cos$  im Intervall  $[0, 2]$ . □

Mit dieser Definition kann  $\pi/2$  (und damit natürlich auch  $\pi$  selbst) näherungsweise berechnet werden, beispielsweise durch die Intervallschachtelung wie im Beweis des Zwischenwertsatzes beginnend mit  $a_0 = 0$  und  $b_0 = 2$ . Dabei muss man für die Intervall-Mittelpunkte  $c_n$  jeweils bestimmen, ob  $\cos c_n > 0$  oder  $\cos c_n < 0$  ist. Dazu verwendet man die Reihendarstellung (8.1) mit Restglied wie folgt:

Wir berechnen für ein  $p \in \mathbb{N}$  den Wert

$$d_{n,p} := \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{c_n^{2k}}{(2k)!}$$

Dann gilt  $\cos c_n = d_{n,p} + r_{2p+2}(c_n)$ . Falls nun

$$|d_{n,p}| > |r_{2p+2}(c_n)|$$

gilt, so folgt aus  $d_{n,p} > 0$  die Ungleichung  $d_{n,p} + r_{2p+2}(c_n) \geq d_{n,p} - |r_{2p+2}(c_n)| > 0$  und damit  $\cos c_n > 0$ . Analog folgt aus  $d_{n,p} < 0$  die Ungleichung  $d_{n,p} + r_{2p+2}(c_n) \leq d_{n,p} + |r_{2p+2}(c_n)| < 0$  und damit  $\cos c_n < 0$ . Wir müssen also prüfen, ob die Ungleichung  $|d_{n,p}| > |r_{2p+2}(c_n)|$  gilt, was man wegen  $|r_{2p+2}(c_n)| \leq |c_n|^{2p+2}/(2p+2)!$  mit Hilfe der Ungleichung

$$|d_{n,p}| > \frac{|c_n|^{2p+2}}{(2p+2)!} \tag{8.3}$$

sicher stellen kann. Falls (8.3) nicht erfüllt ist, erhöhen wir  $p$  um 1 und wiederholen den Test. Dies machen wir so lange mit immer größeren  $p$ , bis die Ungleichung (8.3) gilt. Da

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d_{n,p} = \cos c_n \quad \text{und} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|c_n|^{2p+2}}{(2p+2)!} = 0$$

gilt, ist (8.3) für hinreichend großes  $p$  stets erfüllt, falls  $\cos c_n \neq 0$  ist. Dies ist aber immer der Fall: Da die  $c_n$  nach Konstruktion alle in  $\mathbb{Q} \cap [0, 2]$  liegen, die einzige Nullstelle  $\pi/2$  des Cosinus in diesem Intervall aber nicht in  $\mathbb{Q}$  liegt<sup>2</sup>, kann der Fall  $\cos c_n = 0$  nicht eintreten.

Falls dann  $d_{n,p} > 0$  gilt, so folgt  $\cos c_n > 0$  und falls  $d_{n,p} < 0$  gilt, so folgt  $\cos c_n < 0$ . Damit können die neuen Randwerte der Intervallschachtelung berechnet werden. Dieses Vorgehen führt auf den bekannten Näherungswert  $\pi \approx 3,1415926 \dots$

Mit Hilfe von  $\pi$  kann man nun verschiedene Werte der komplexen Exponentialfunktion exakt (d.h. nicht nur näherungsweise über die bereits bekannte Reihendarstellung) berechnen.

**Satz 8.12** Es gilt

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}i\pi} = -i, \quad e^{2i\pi} = 1.$$

<sup>2</sup>Wofür es leider keinen einfachen Beweis gibt, den wir mit den bisher bekannten Methoden führen könnten; wir kommen später noch einmal darauf zurück.

**Beweis:** Wegen  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  und  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  folgt

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

und damit mit Lemma 8.9

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Also ist

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

Die weiteren Werte folgen dann mit  $n = 2, 3, 4$  aus der Gleichung

$$e^{n\frac{1}{2}i\pi} = \left(e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^n = i^n.$$

□

Aus der Schule ist bekannt, dass der Umfang des Einheitskreises gerade  $2\pi$  beträgt. Trägt man  $e^{ix}$  für  $x = \pi/2, \pi, 3\pi/2$  und  $2\pi$  in den Einheitskreis in der komplexen Ebene ein, so sieht man, dass das Argument  $x$  der Exponentialfunktion gerade die Länge des Kreisbogens ist, den man erhält wenn man vom Punkt  $1 + i0$  aus entgegen dem Uhrzeigersinn nach  $e^{ix}$  geht. Dies ist kein Zufall, sondern exakt der Grund dafür, dass wir  $\pi$  so definiert haben, wie wir es definiert haben. Tatsächlich stimmt dies nicht nur für die obigen Werte von  $x$  sondern für alle  $x \in [0, 2\pi)$ , was man durch Auswertung von  $e^{ix}$  stichprobenartig überprüfen kann, wir hier aber nicht beweisen werden.

Aus den Werten der Exponentialfunktion können wir die folgende Wertetabelle für  $\sin$  und  $\cos$  aufstellen.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Aus den Additionstheoremen (Satz 8.4) folgt damit

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \sin x \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} = \cos x \quad (8.4)$$

und mit analogen Rechnungen auch

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad (8.5)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \quad (8.6)$$

sowie

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \quad (8.7)$$

Die Gleichungen (8.4) und (8.5) zeigen, dass die Werte von  $\sin$  und  $\cos$  sich wiederholen, wenn  $x$  um  $2\pi$  zunimmt. Man sagt, dass Sinus und Cosinus *periodisch* mit *Periode*  $2\pi$  sind. Beachte, dass aus diesen Gleichungen per Induktion

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad (8.8)$$

folgt.

Das folgende Korollar gibt alle Nullstellen von  $\sin$  und  $\cos$  an.

**Korollar 8.13** Die Nullstellen des Sinus sind gegeben durch die Menge

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$$

und die Nullstellen des Cosinus durch die Menge

$$\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$

**Beweis:** Nach Definition von  $\pi/2$  und wegen  $\cos x = \cos(-x)$  folgt  $\cos x > 0$  für  $-\pi/2 < x < \pi/2$ . Aus (8.7) folgt damit

$$\sin x > 0 \quad \text{für } 0 < x < \pi$$

und aus (8.6) folgt daraus

$$\sin x < 0 \quad \text{für } \pi < x < 2\pi.$$

Folglich sind die in der obigen Wertetabelle angegebenen Nullstellen  $0$ ,  $\pi$  und  $2\pi$  die einzigen Nullstellen des Sinus im Intervall  $[0, 2\pi]$ . Die angegebene Nullstellenmenge folgt dann direkt aus der  $2\pi$ -Periodizität des Sinus gemäß (8.8).

Die Aussage für den Cosinus folgt dann aus (8.7). □

Eine sofortige Folgerung hieraus ist das folgende Korollar.

**Korollar 8.14** Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $e^{ix} = 1$  genau dann, wenn  $x = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  ist.

**Beweis:** Es gilt

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Sei nun  $e^{ix} = 1$ . Dann ist insbesondere  $e^{ix} \in \mathbb{R}$  und folglich muss  $\sin x = 0$  gelten, woraus  $x = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  folgt.

Sei umgekehrt  $x = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $\sin x = 0$  und aus der Wertetabelle und der  $2\pi$ -Periodizität (8.8) des Cosinus folgt  $\cos x = 1$ . Also folgt  $e^{ix} = 1$ . □

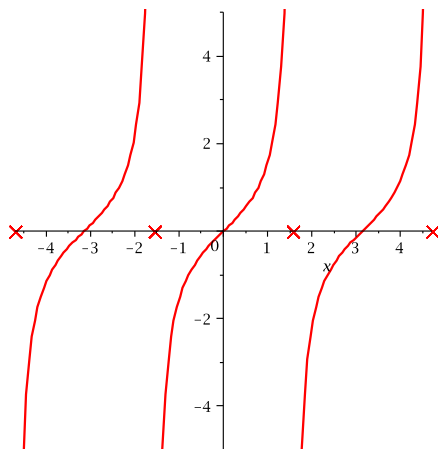
**Definition 8.15** Für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$  definieren wir den *Tangens* als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

□

Der Tangens ist also eine Funktion, die für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos x \neq 0$  definiert ist.





Graph von  $\tan x$ . Die Definitionslücken sind mit Kreuzen gekennzeichnet.

## 8.4 Umkehrfunktionen

**Satz 8.16** (a) Die Funktion  $\cos$  ist auf  $[0, \pi]$  streng monoton fallend mit  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ .

(b) Die Funktion  $\sin$  ist auf  $[-\pi/2, \pi/2]$  streng monoton wachsend mit  $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ .

(c) Die Funktion  $\tan$  ist auf  $(-\pi/2, \pi/2)$  streng monoton wachsend mit  $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$ .

Insbesondere besitzen die drei Funktionen damit nach Satz 6.13 Umkehrfunktionen

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

(gesprochen: Arcus-Cosinus, Arcus-Sinus und Arcus-Tangens).

**Beweis:** (a) Nach Lemma 8.10 ist der  $\cos$  auf  $[0, 2]$  und damit insbesondere auf  $[0, \pi/2]$  streng monoton fallend. Wegen  $\cos(x) = \cos(-x)$  ist er dann auf  $[-\pi/2, 0]$  streng monoton wachsend und damit wegen (8.6) auf  $[\pi/2, \pi]$  streng monoton fallend. Da der Cosinus stetig ist mit  $\cos 0 = 1$  und  $\cos \pi = -1$  folgt  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$  aus dem Zwischenwertsatz (Satz 5.10).

(b) Folgt aus (a) wegen  $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ .

(c) Die strenge Monotonie folgt aus der bereits bewiesenen strengen Monotonie von  $\sin$  und  $\cos$ . Um zu beweisen, dass  $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$  gilt, zeigen wir, dass die uneigentliche Konvergenz

$$(i) \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x = \infty \quad \text{und} \quad (ii) \lim_{\substack{x \rightarrow -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} \tan x = -\infty$$

gilt. Wegen der Stetigkeit des Tangens folgt dann aus dem Zwischenwertsatz, dass jedes  $y \in \mathbb{R}$  im Bild von  $\tan((-\pi/2, \pi/2))$  liegt.

(i) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow \pi/2$  und  $x_n < \pi/2$ . Dann gilt  $\sin x_n \rightarrow 1$  wegen der Stetigkeit des Sinus und  $\sin \pi/2 = 1$  und daher mit der Quotientenregel aus Satz 3.13

$$y_n := \frac{\cos x_n}{\sin x_n} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

Wählen wir nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $x_n > 1$  für alle  $n \geq n_0$  gilt, so folgt zudem  $\cos x_n > 0$  und  $\sin x_n > 0$  und damit auch  $y_n > 0$ . Folglich erhalten wir mit Satz 3.17(b) die gewünschte uneigentliche Konvergenz

$$\tan x_n = \frac{1}{y_n} \rightarrow \infty.$$

(ii) Wegen

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

folgt die Aussage aus (i). □

## 8.5 Polarkoordinaten

Wir kommen in diesem Abschnitt noch einmal auf die geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen aus Abschnitt 7.2 zurück. Jede komplexe Zahl  $z = a + ib$  kann demnach als Punkt in der komplexen Ebene mit den Koordinaten  $(a, b)$  aufgefasst werden. Der folgende Satz gibt eine alternative Darstellung für die komplexen Zahlen und damit auch für die Punkte in der zweidimensionalen Ebene an. Die geometrische Interpretation werden wir nach dem Beweis des Satzes geben.

**Satz 8.17 (Polarkoordinaten)** Jede komplexe Zahl  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  lässt sich schreiben als

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit  $r = |z| \in \mathbb{R}$  (beachte:  $r \geq 0$ ) und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Im Fall  $z \neq 0$  ist  $\varphi$  zudem eindeutig bestimmt. Das Paar  $(r, \varphi)$  nennt man die *Polarkoordinaten* von  $z$ .

**Beweis:** Für  $z = 0$  ist die Aussage für  $r = 0$  und beliebiges  $\varphi \in [0, 2\pi)$  sicherlich richtig.

Im Fall  $z \neq 0$  setzen wir  $r := |z|$  und  $\zeta := z/r$ . Dann gilt  $|\zeta| = 1$ . Schreiben wir  $\zeta = c + id$ , so gilt

$$c^2 + d^2 = |\zeta|^2 = 1,$$

woraus insbesondere  $c^2 \leq 1$  und damit auch  $|c| \leq 1$  folgt. Also ist  $\alpha := \arccos c$  definiert und aus  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  folgt

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - c^2} = \pm d.$$

Wir setzen nun  $\varphi := \alpha$ , falls  $\sin \alpha = d$  und  $\varphi := 2\pi - \alpha$  sonst. Weil die Werte von  $\arccos$  im Intervall  $[0, \pi]$  liegen, folgt damit  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Im Fall  $\varphi = \alpha$  folgt

$$e^{i\varphi} = \cos \alpha + i \sin \alpha = c + id = \zeta$$

und im Fall  $\varphi = 2\pi - \alpha$  erhalten wir wegen der Periodizität und Satz 8.2(2)

$$e^{i\varphi} = \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha = c + id = \zeta.$$

In beiden Fällen folgt also

$$re^{i\varphi} = r\zeta = z.$$

Die Eindeutigkeit von  $\varphi$  folgt, weil für  $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$  mit  $\varphi \neq \varphi'$  wegen der Monotonie von  $\sin$  und  $\cos$  mindestens eine der beiden Ungleichungen  $\cos \varphi \neq \cos \varphi'$  oder  $\sin \varphi \neq \sin \varphi'$  gilt. Daher kann es für  $r \neq 0$  keine zwei Winkel geben, die die gleiche Zahl  $z$  liefern.  $\square$

Tatsächlich sind die Polarkoordinaten für alle Winkel  $\varphi \in \mathbb{R}$ , also auch für solche mit  $\varphi \notin [0, 2\pi)$  definiert, denn natürlich ist  $re^{i\varphi}$  auch für solche Winkel eine komplexe Zahl. Die Aussage des Satzes ist aber, dass man für solche  $\varphi$  keine “neuen” Zahlen hinzugewinnt. Es reicht,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  zu wählen, um alle möglichen  $z \in \mathbb{C}$  in der Form  $z = re^{i\varphi}$  schreiben zu können.

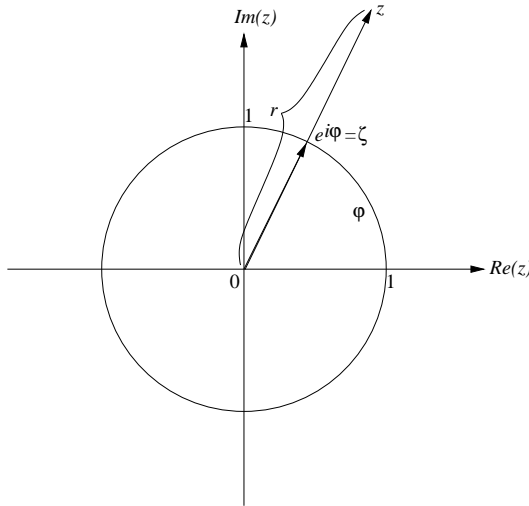


Abbildung 8.3: Veranschaulichung der Polarkoordinaten

Abbildung 8.3 veranschaulicht die Polarkoordinaten: stellen wir die Zahl  $z \in \mathbb{C}$  als Vektor in der komplexen Ebene dar, so ist  $r$  gerade die Länge dieses Vektors und  $\varphi$  der Winkel zwischen der reellen Achse und diesem Vektor. Winkel  $\varphi \notin [0, 2\pi)$  entsprechen dann entweder Drehrichtungen entgegen dem Uhrzeigersinn oder mehrfachen “Umdrehungen” von  $z$ . Dies erklärt auch geometrisch, warum man damit keine neuen komplexen Zahlen erhält.

Aus Satz 8.17 folgt sofort, dass sich jeder zweidimensionale Punkt mit den Koordinaten  $(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , in der Form

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

mit  $r \geq 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  schreiben lässt, da sich jeder solche Punkt eindeutig als komplexe Zahl  $z = x + iy$  ausdrücken lässt. Das Paar  $(r, \varphi)$  nennt man analog zum komplexen Fall die *Polarkoordinaten* von  $(x, y)$ .

In der Darstellung in Polarkordinaten können wir nun auch die bereits in Abschnitt 7.2 gegebene geometrische Veranschaulichung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen erklären: Für  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  gilt gerade

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Die Längen werden also multipliziert und die Winkel addiert.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aussage über spezielle Zahlen der Form  $e^{ix}$ .

**Satz 8.18 (*n*-te Einheitswurzeln)** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 2$ . Dann besitzt die Gleichung  $z^n = 1$  genau  $n$  komplexe Lösungen von der Form

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Diese werden *n*-te (komplexe) Einheitswurzeln genannt.

**Beweis:** Mit Korollar 8.14 folgt

$$(e^{i\frac{2k\pi}{n}})^n = e^{i\frac{2k\pi}{n}n} = e^{i2k\pi} = 1.$$

Also lösen die komplexen Einheitswurzeln die angegebene Gleichung.

Sei umgekehrt  $z \in \mathbb{C}$  eine beliebige Lösung der angegebenen Gleichung. Weil dann  $|z| = 1$  gelten muss (denn es gilt  $|z|^n = |z^n| = |1| = 1$ , was wegen  $|z| \in \mathbb{R}$  und  $|z| \geq 0$  nur die Lösung  $|z| = 1$  zulässt), gilt  $r = 1$  in der Polarkoordinatendarstellung von  $z$ , also

$$z = e^{i\varphi}.$$

Wegen  $1 = z^n = e^{i\varphi n}$  muss nach Korollar 8.14 die Gleichung  $\varphi n = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  gelten. Also folgt

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Wegen  $\varphi \in [0, 2\pi)$  muss  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  gelten, weswegen die Lösung eine *n*-te Einheitswurzel ist.  $\square$



# Kapitel 9

## Differentiation

Stand:  
2. August 2022

In diesem Kapitel führen wir das Konzept der Ableitung einer Funktion ein und besprechen die wichtigsten Rechenregeln.

### 9.1 Definition und Beispiele

Anschaulich ist die Ableitung einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  an einer Stelle  $x \in D$  eine reelle Zahl (bezeichnet mit  $f'(x) \in \mathbb{R}$ ), die die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt  $(x, f(x))$  angibt. Man kann die Definition der Ableitung direkt aus dieser Anschauung herleiten: Nehmen wir an, wir wollen die Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt bestimmen. Dann können wir diese näherungsweise berechnen, indem wir eine kleine reelle Zahl  $h \neq 0$  wählen und die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(x + h, f(x + h))$  betrachten (diese Gerade heißt *Sekante*). Je kleiner  $|h|$  ist, desto genauer stimmt die Steigung der Sekante dann mit der Steigung der Funktion im Punkt  $x$  überein, vgl. Abbildung 9.1.

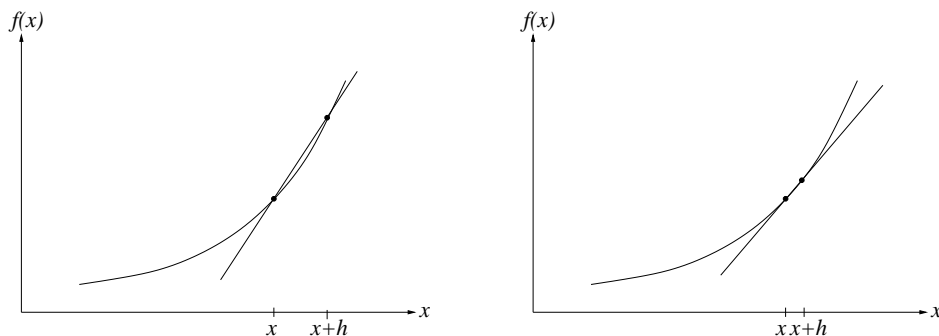


Abbildung 9.1: Veranschaulichung der Ableitung über die Steigung

Lässt man nun  $h \rightarrow 0$  streben, so wird die Steigung der Sekante gegen die Steigung des

Funktionsgraphen konvergieren. Da die Steigung der Sekante gerade durch den Quotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

den sogenannten *Differenzenquotienten*, gegeben ist, führt dies auf die folgende Definition.

**Definition 9.1** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar* in einem Punkt  $x \in D$ , wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0, x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Insbesondere setzen wir dabei voraus, dass mindestens eine Folge  $h_n \rightarrow 0$  mit  $h_n \neq 0$  und  $x + h_n \in D$  existiert.

Der Wert  $f'(x) \in \mathbb{R}$  heißt dann die *Ableitung* (oder auch das *Differential*) von  $f$  in  $x$ . □

Alternativ kann die Ableitung auch über den Grenzwert

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \neq x, y \in D}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

definiert werden, denn die beiden Definition lassen sich mit  $y = x + h$  bzw.  $h = y - x$  einfach ineinander umschreiben.

**Beispiel 9.2** Bei den folgenden Beispielen schreiben wir die Bedingungen  $h \neq 0, x+h \in D$  unter dem  $\lim$  nicht explizit hin, um die Schreibweise zu vereinfachen. Sie werden aber nach wie vor stets verlangt.

(a) konstante Funktion  $f(x) = c$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) affin lineare Funktion  $f(x) = a + bx$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a + b(x+h) - a - bx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} b = b$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Insbesondere gilt für die identische Funktion  $f(x) = x$  (also  $a = 0$  und  $b = 1$ ) gerade  $f'(x) = 1$ .

(c) Parabel  $f(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(d) Hyperbelfunktion  $f(x) = 1/x$  mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx^2 + h^2x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

für alle  $x \in D$ .

(e) Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei wir im letzten Schritt Satz 6.25 verwendet haben. Die Exponentialfunktion ist also gleich ihrer eigenen Ableitung.

(f) Cosinus  $f(x) = \cos x$ :

Im Beweis von Lemma 8.10 wurde die Gleichung

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin \left( \frac{x' + x}{2} \right) \sin \left( \frac{x' - x}{2} \right)$$

bewiesen. Setzen wir  $x' = x + h$ , so folgt

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2 \sin \left( \frac{2x+h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\sin \left( x + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Wegen der Stetigkeit des Sinus folgt nun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{h}{2} \right) = \sin x$$

und aus Satz 8.6 folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Also gilt nach der Produktregel für Grenzwerte

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{h}{2} \right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

(g) Sinus  $f(x) = \sin x$ :

Mit einer ähnlichen Rechnung wie für den Cosinus folgt

$$f'(x) = \cos x.$$

(h) Absolutbetrag  $f(x) = |x|$

Behauptung: diese Funktion ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar.

**Beweis:** Für Folgen  $h_n \rightarrow 0$ , mit  $h_n > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{h_n} = 1.$$



Für Folgen  $h_n \rightarrow 0$ , mit  $h_n < 0$  gilt hingegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-h_n}{h_n} = -1.$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h}$$

nicht. Betrachtet man den Graphen der Betragsfunktion, so sieht man, dass dieser in  $x = 0$  einen Knick aufweist. Anschaulich ist Differenzierbarkeit in einem Punkt  $x$  tatsächlich nichts anderes als die Eigenschaft, dass der Graph in  $x$  keinen Knick besitzt. Statt “differenzierbar” wird daher oft auch der Begriff “glatt” benutzt.

□

**Beispiel 9.3 (Ableitungen in Anwendungen)** Das Konzept der Ableitung hat vielfältige Interpretationen in verschiedenen Anwendungsbereichen der Mathematik. Wir geben hier zwei Beispiele.

- (a) Der *Grenzsteuersatz* gibt an, wie hoch der Einkommensteuersatz auf einen Gehaltszuwachs ist. Zahlt man z.B. bei 40.000€ Jahreseinkommen 8.000€ Steuern, und auf 40.002€ Einkommen 8.001€ Steuern, so zahlt man auf die zusätzlichen 2€ Einkommen tatsächlich 50% Steuern, denn es gilt

$$\frac{8.001\text{€} - 8000\text{€}}{2\text{€}} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%.$$

Bezeichnen wir Höhe der Steuer auf ein Einkommen von  $x\text{€}$  allgemein mit  $f(x)\text{€}$ , so ist der Steuersatz für zusätzliche  $h\text{€}$  gegeben durch

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot 100\%.$$

Der Grenzsteuersatz ist nun gerade der Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  dieses Ausdrucks, d.h. der Steuersatz auf ein “beliebig kleines” zusätzliches Einkommen, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot 100\% = f'(x) \cdot 100\%.$$

Der Grenzsteuersatz ist also gerade die Ableitung der Höhe der Steuer in Prozenten ausgedrückt.

- (b) Beim *radioaktiven Zerfall* ist die Abnahme der radioaktiven Teilchen in einem kleinen Zeitintervall ungefähr proportional zu der gerade vorhandenen Anzahl der Teilchen, wobei diese Beziehung immer genauer wird, je kleiner das betrachtete Zeitintervall ist. Formal bedeutet das das folgende: Bezeichnen wir die Masse der Teilchen zur Zeit  $x$  mit  $f(x)$  und bezeichnen wir mit  $\lambda > 0$  die Proportionalitätskonstante der Abnahme, so gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\lambda f(x) + r(h), \quad (9.1)$$

wobei der ‘‘Fehlerterm’’  $r(h)$  gegen Null konvergiert für  $h \rightarrow 0$ . Für  $h \rightarrow 0$  erhalten wir so

$$f'(x) = -\lambda f(x). \quad (9.2)$$

Wir werden später in Beispiel 9.14(b) sehen, welche Funktion diese Gleichung erfüllt.

□

Eine äquivalente Beschreibung der Differenzierbarkeit gibt der folgende Satz.

**Satz 9.4** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $x \in D$  ein Punkt, so dass mindestens eine Folge  $h_n \rightarrow 0$ ,  $h_n \neq 0$  mit  $x+h_n \in D$  existiert. Dann ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann in  $x$  differenzierbar, wenn ein  $a \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

existiert, so dass

$$f(y) = f(x) + a(y - x) + \varphi(y - x)$$

gilt für alle  $y \in D$ . In diesem Fall gilt  $f'(x) = a$ .

**Beweis:** Sei  $f$  in  $x$  differenzierbar. Setzen wir  $a := f'(x)$  und definieren  $\varphi(h) := f(x+h) - f(x) - ha$  für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $x+h \in D$  und  $\varphi(h) = 0$  sonst, so folgt mit  $h = y - x$  für alle  $y \in D$  gerade die gesuchte Gleichung

$$f(x) + a(y - x) + \varphi(y - x) = f(x) + ha + \varphi(h) = f(x + h) = f(y).$$

Zudem gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = f'(x) - f'(x) = 0,$$

also gerade die gewünschte Eigenschaft.

Gelte umgekehrt die Gleichung  $f(y) = f(x) + a(y - x) + \varphi(y - x)$  mit  $\varphi$  wie im Satz angegeben. Dann folgt mit  $y = x + h$ , also  $h = y - x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah + \varphi(h)}{h} = a + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = a.$$

Also ist  $f$  differenzierbar in  $x$  mit  $f'(x) = a$ .

□

**Bemerkung 9.5** (i) Die Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

schreibt man kurz auch als

$$\varphi(h) = o(h).$$

Der Term  $o(h)$  wird dabei *Landau-Symbol* genannt. Anschaulich bedeutet diese Bedingung, dass  $\varphi(h)$  für  $h \rightarrow 0$  so viel schneller gegen Null konvergiert als  $h$  selbst, dass der Quotient immer noch gegen Null konvergiert. Beispiele für solche Funktionen sind z.B.  $\varphi(h) = h^2$  (wegen  $\varphi(h)/h = h \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ ) oder  $\varphi(h) = h\sqrt{h}$  (wegen  $\varphi(h)/h = \sqrt{h} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ ).

(ii) In informeller Schreibweise kann man die Aussage von Satz 9.4 als

$$f(y) \approx f(x) + f'(x)(y - x)$$

schreiben. Das Zeichen “ $\approx$ ” (gesprochen: ungefähr gleich) bedeutet hier, dass die zur Gleichheit fehlenden Terme im Betrag deutlich kleiner als  $|x - y|$  sind, falls  $|x - y|$  hinreichend klein ist. Da die fehlenden Terme gerade  $\varphi(y - x)$  sind, folgt dies gerade aus der Konvergenzeigenschaft von  $\varphi$ .

(iii) Die approximierende Funktion  $g(y) := f(x) + f'(x)(y - x)$  aus (ii) ist geometrisch nichts anderes als die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x, f(x))$ . Die Funktion  $\varphi$  beschreibt also den Abstand zwischen der Tangente und der Funktion selbst. Die Bedingung  $\varphi(h)/h \rightarrow 0$  sagt geometrisch daher gerade aus, dass sich die Tangente an den Graphen “anschmiegt”, dass also der Winkel zwischen Tangente und Graph gleich Null ist.  $\square$

**Beispiel 9.6** (a) Für die Parabel  $f(x) = x^2$  gilt  $a = f'(x) = 2x$  und damit

$$\varphi(h) = f(x + h) - f(x) - ha = (x + h)^2 - x^2 - 2hx = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 - 2hx = h^2.$$

Diese Funktion erfüllt nach Bemerkung 9.5(i) gerade  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)/h = 0$ .

Die Tangente im Punkt  $(x, f(x))$  ist dann gegeben durch  $g(y) = x^2 + 2x(y - x) = -x^2 + 2xy$ .

(b) Sei  $f$  eine Funktion, die das radioaktive Zerfallsgesetz  $f'(x) = -\lambda f(x)$  für ein  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt (und die dann natürlich differenzierbar in  $x$  ist). Dann gilt mit  $y = x + h$

$$f(x + h) = f(x) - \lambda f(x)h + \varphi(h)$$

bzw. nach Division durch  $h$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -\lambda f(x) + \frac{\varphi(h)}{h}.$$

Das bedeutet, dass die Funktion die Gleichung (9.2) mit  $r(h) = \varphi(h)/h$  erfüllt, für die dann  $r(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Wir können also nicht nur wie in Beispiel 9.3(b) die Gleichung (9.2) aus der Gleichung (9.1) folgern, sondern mit Satz 9.4 auch umgekehrt die Gleichung (9.1) aus der Gleichung (9.2).  $\square$

## 9.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Differentiation

**Satz 9.7** Wenn eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x \in D$  differenzierbar ist, so ist  $f$  auch stetig in  $x$ .

**Beweis:** Zu beweisen ist  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ . Mit den Bezeichnungen aus Satz 9.4 gilt  $\lim_{y \rightarrow x} a(y - x) = 0$  und

$$\lim_{y \rightarrow x} \varphi(y - x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y - x)}{y - x} (y - x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y - x)}{y - x} \lim_{y \rightarrow x} (y - x) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also folgt die Behauptung wegen

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{y \rightarrow x} f(x) + a(y - x) + \varphi(y - x) = f(x) + \lim_{y \rightarrow x} a(y - x) + \lim_{y \rightarrow x} \varphi(y - x) = f(x).$$

□

**Satz 9.8** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in D$  differenzierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen  $f + g$ ,  $\lambda f$  und  $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{Produktregel}). \end{aligned}$$

Ist  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in D$ , so ist auch  $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

**Beweis:** Die ersten beiden Aussagen folgen aus den Gleichheiten

$$\frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

und

$$\frac{(\lambda f)(x + h) - (\lambda f)(x)}{h} = \lambda \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

und den Rechenregeln für Grenzwerte.

Die Produktregel folgt aus

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( f(x + h)(g(x + h) - g(x)) + (f(x + h) - f(x))g(x) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} g(x) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit von  $f$  in  $x$  verwendet haben.

Die Quotientenregel beweisen wir zunächst für die konstante Funktion  $f(x) := 1$  für alle  $x \in D$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit von  $g$  in  $x$  und  $g(x+h) \neq 0$  verwendet haben (beachte, dass wir hier bei der Bildung des Grenzwerts stets  $x+h \in D$  voraussetzen, auch wenn wir das nicht explizit hinschreiben).

Der allgemeine Fall folgt nun aus der Produktregel mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 9.9** (a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Behauptung:  $f'(x) = nx^{n-1}$

**Beweis** per Induktion über  $n$ : Für  $n = 0$  folgt die Behauptung aus Beispiel 9.2(a). Für  $n \rightarrow n+1$  gilt für  $f(x) = x^{n+1} = x^n x$  mit der Produktregel, der Induktionsannahme und Beispiel 9.2(b) (mit  $a = 0$  und  $b = 1$ )

$$f'(x) = (x^n x)' = \underbrace{(x^n)'}_{=nx^{n-1}} x + x^n \underbrace{(x)'}_{=1} = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

□

(b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Setzen wir  $g(x) := 1/f(x) = x^n$ , so gilt mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Fassen wir (a) und (b) zusammen, so erhalten wir für alle  $k \in \mathbb{Z}$  für  $f(x) = x^k$  (mit  $x \neq 0$  falls  $k < 0$ ) die Gleichung  $f'(x) = kx^{k-1}$ . Im Fall  $k \geq 0$  folgt dies sofort aus (a) mit  $n = k$  und im Fall  $k < 0$  können wir (b) mit  $n = -k$  anwenden und erhalten  $f'(x) = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}$ .

(c) Für  $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$  folgt mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- (d) Für  $f(x) = a \exp(x)$  gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $f'(x) = a \exp'(x) = a \exp(x)$  nach Beispiel 9.2(e) und Satz 9.8 mit  $\lambda = a$ . Also gilt auch für die Funktion  $f(x) = a \exp(x)$ , dass die Ableitung gleich der Funktion selbst ist.

□

**Satz 9.10 (Ableitung der Umkehrfunktion)** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und streng monotone Funktion und  $f^{-1} : D' \rightarrow \mathbb{R}$  ihre auf  $D' = f(D)$  definierte (und nach Satz 6.13 existierende und stetige) Umkehrfunktion. Dann gilt:

Ist  $f$  in einem Punkt  $y \in D$  differenzierbar mit  $f'(y) \neq 0$ , dann ist  $f^{-1}$  im Punkt  $x = f(y)$  differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

**Beweis:** Sei  $h_n$  eine beliebige Folge mit  $h_n \rightarrow 0$ , so dass für  $x_n := x + h_n$  die Bedingungen  $x_n \in D'$  und  $x_n \neq x$  gelten. Setzen wir  $y_n := f^{-1}(x_n)$  so folgt aus der Stetigkeit von  $f^{-1}$  die Konvergenz  $y_n = f^{-1}(x_n) \rightarrow f^{-1}(x) = y$ . Wegen  $f^{-1}(D') = D$  folgt  $y_n \in D$  und weil  $f^{-1}$  streng monoton und damit injektiv ist, folgt aus  $x_n \neq x$  auch  $y_n \neq y$ . Also können wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x + h_n) - f^{-1}(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x)}{x_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y}{f(y_n) - f(y)} = \frac{1}{f'(y)},$$

wobei wir im letzten Schritt die Quotientenregel aus Satz 3.13 benutzt haben, den wir wegen  $f'(y) \neq 0$  anwenden dürfen. □

**Beispiel 9.11** Für  $\ln(x) = \exp^{-1}(x)$  gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

Damit können wir nun den **Beweis von Satz 6.3** führen, d.h. den Beweis der Gleichung

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Für  $x = 0$  folgt die Behauptung sofort wegen  $\exp(0) = 1$ . Für  $x \neq 0$  gilt wegen  $\ln(1) = 0$

$$n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}}$$

und damit wegen  $\ln'(1) = 1/1 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}} = x \ln'(1) = x.$$

Wegen  $a^b = \exp(b \ln(a))$  folgt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

und folglich wegen der Stetigkeit von  $\exp$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x).$$

□

Weitere Beispiele für die Anwendung von Satz 9.10 sind die folgenden Funktionen.

**Beispiel 9.12** (a)  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $x \in (-1, 1)$  ist  $y = \arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$  und damit  $\sin' y = \cos y \neq 0$ . Also folgt aus Satz 9.10 für  $x \in (-1, 1)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Verwenden wir zudem die Gleichung  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$  so können wir den Ausdruck noch vereinfachen zu

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b)  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wegen  $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt (vgl. Beispiel 9.9(c))  $\tan'(\arctan x) = 1/\cos^2(\arctan x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Damit ist Satz 9.10 anwendbar für alle  $x \in \mathbb{R}$  und es folgt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x).$$

Mit  $y = \arctan x$  gilt zudem

$$x^2 = \tan^2(y) = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

und folglich

$$\cos^2(\arctan x) = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Damit lässt sich die Formel für  $\arctan'$  vereinfachen zu

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

**Satz 9.13 (Kettenregel)** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(D) \subset E$ . Sei  $f$  in  $x \in D$  differenzierbar und  $g$  in  $y := f(x) \in E$  differenzierbar. Dann ist die Komposition  $g \circ f$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

**Beweis:** Nach Satz 9.4 (angewendet mit  $y = x + h$  und  $x = x$  bzw.  $y = y + \tilde{h}$  und  $x = y$ ) gilt

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \varphi_f(h)$$

und

$$g(y + \tilde{h}) = g(y) + g'(y)\tilde{h} + \varphi_g(\tilde{h})$$

mit  $\varphi_f(h)/h \rightarrow 0$  und  $\varphi_g(h)/h \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Aus der zweiten Gleichung folgt dabei  $\varphi_g(\tilde{h}) = 0$  für  $\tilde{h} = 0$  und aus der Konvergenz  $\varphi_f(h)/h \rightarrow 0$  folgt  $\varphi_f(h) = h(\varphi_f(h)/h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Aus diesen Gleichungen folgt (mit  $\tilde{h} = f'(x)h + \varphi_f(h)$ )

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g(f(x + h)) = g(f(x) + f'(x)h + \varphi_f(h)) \\ &= g \circ f(x) + g'(y) (f'(x)h + \varphi_f(h)) + \varphi_g(f'(x)h + \varphi_f(h)) \\ &= g(y) + g'(y)f'(x)h + \underbrace{g'(y)\varphi_f(h) + \varphi_g(\tilde{h})}_{=:\varphi(h)}. \end{aligned}$$

Für diese Definition von  $\varphi(h)$  folgt

$$\frac{\varphi(h)}{h} = g'(y) \frac{\varphi_f(h)}{h} + \frac{\varphi_g(\tilde{h})}{h}.$$

Für die Terme auf der rechten Seite gilt nun

$$g'(y) \frac{\varphi_f(h)}{h} \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$  und

$$\frac{\varphi_g(\tilde{h})}{h} = \begin{cases} \frac{\varphi_g(\tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot \frac{\tilde{h}}{h}, & \text{falls } \tilde{h} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \tilde{h} = 0 \end{cases}$$

Für  $h \rightarrow 0$  gilt wegen  $\varphi_f(h) \rightarrow 0$  auch  $\tilde{h} \rightarrow 0$  und damit

$$\frac{\varphi_g(\tilde{h})}{\tilde{h}} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\tilde{h}}{h} = \frac{f'(x)h + \varphi_f(h)}{h} \rightarrow f'(x).$$

Also konvergiert  $\varphi(h)/h$  gegen 0 für  $h \rightarrow 0$ . Es gilt also

$$g \circ f(x + h) = g(y) + g'(y)f'(x)h + \varphi(h) = g \circ f(x) + g'(f(x))f'(x)h + \varphi(h)$$

mit  $\varphi(h)/h \rightarrow 0$ , woraus die Behauptung wiederum mit Satz 9.4 (angewendet mit  $y = x + h$ ) folgt.  $\square$

**Beispiel 9.14** (a)  $h(x) = x^\alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wegen  $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$  kann  $h(x)$  als  $g \circ f$  mit  $f(x) = \alpha \ln x$  und  $g(x) = \exp(x)$  geschrieben werden. Damit folgt aus der Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \exp(\alpha \ln x) \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Die bereits in Beispiel 9.9(a) und (b) hergeleitete Formel gilt also nicht nur für ganzzahlige sondern auch für reelle Exponenten.



- (b)  $h(x) = a \exp(bx)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nach der Kettenregel mit  $f(x) = bx$  und  $g(x) = a \exp(x)$  und Beispiel 9.9(d) gilt dann

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = a \exp(bx)b = ba \exp(bx),$$

was wir auch als  $h'(x) = bh(x)$  schreiben können. Insbesondere erfüllt die Funktion  $h(x) = a \exp(-\lambda x)$  also das radioaktive Zerfallsgesetz aus Beispiel 9.3(b).

□

### 9.3 Einseitige Ableitungen

Als Erweiterung des Ableitungsbegriffs kann man die *rechtsseitige und linksseitige Ableitung*

$$f'_+(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0, x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad f'_-(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0, x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definieren, wobei wir wiederum voraussetzen, dass Folgen  $h_n \rightarrow 0$  mit den angegebenen Bedingungen existieren (ansonsten existieren die angegebenen Ableitungen nicht). Diese einseitigen Ableitungen existieren für den Absolutbetrag  $f(x) = |x|$  und es gilt  $f'_+(x) = 1$  und  $f'_-(x) = -1$ . Allgemein gilt der folgende Satz.

**Satz 9.15** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x \in D$  ein Punkt, in dem die rechts- und linksseitigen Ableitungen  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$  existieren. Dann ist die Funktion genau dann in  $x$  differenzierbar, wenn  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$  übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

**Beweis:** Sei  $f$  in  $x$  differenzierbar. Dann gilt nach der Definition der Ableitung und des Grenzwerts für Funktionen für jede Folge  $h_n \rightarrow 0$  mit  $h_n \neq 0$  und  $x + h_n \in D$

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x).$$

Insbesondere gilt diese Konvergenz also für alle Folgen mit  $h_n > 0$  und  $x + h_n \in D$ , woraus  $f'_+(x) = f'(x)$  folgt und für alle Folgen mit  $h_n < 0$  und  $x + h_n \in D$ , woraus  $f'_-(x) = f'(x)$  folgt. Also folgt  $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$ .

Nehmen wir umgekehrt an, dass  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$  existieren und übereinstimmen und sei  $h_n \rightarrow 0$  eine Folge mit  $x + h_n \in D$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann können wir  $h_n$  in die Teilfolgen  $h_{i_k} \geq 0$  und  $h_{j_k} < 0$  zerlegen. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_{i_k}) - f(x)}{h_{i_k}} = f'_+(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_{j_k}) - f(x)}{h_{j_k}} = f'_-(x)$$

Aus  $f'_+(x) = f'_-(x)$  folgt, dass beide Teilfolgen gegen den gleichen Wert konvergieren. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n},$$

woraus die Differenzierbarkeit folgt.

□

**Bemerkung 9.16** Wenn wir eine differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten, deren Definitionsmenge ein abgeschlossenes Intervall  $D = [a, b]$  oder  $D = (-\infty, b]$  oder  $D = [a, \infty)$  ist, so erhalten wir bei Verwendung der Ableitungsdefinition 9.1 für  $x = a$  stets den rechtsseitigen Grenzwert und für  $x = b$  stets den linksseitigen Grenzwert. Der Grund ist, dass für  $x = a$  und  $h \neq 0$  in  $D$  nur Werte der Form  $x + h$  mit  $h > 0$  enthalten sind und für  $x = b$  nur Werte der Form  $x + h$  mit  $h < 0$ . Das Gleiche gilt bei halboffenen Intervallen an den Randpunkten, die zu dem Intervall dazugehören.

Eine Folgerung aus dieser Tatsache ist, dass eine Funktion, die in einem Punkt  $a \in D$  nicht differenzierbar ist, differenzierbar werden kann, wenn wir die Definitionsmenge einschränken.

Als **Beispiel** dafür dient die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ . Als Funktion auf  $D = \mathbb{R}$  ist diese wie bereits gesehen in  $x = 0$  nicht differenzierbar. Betrachten wir die Funktion aber auf der Definitionsmenge  $D = [0, \infty)$ , so gilt  $f(x) = |x| = x$ . Die Funktion ist also für alle  $x \in D$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = 1$ .

Diese Tatsache kann zu dem falschen Schluss verleiten, dass die Betragsfunktion auch auf  $D = \mathbb{R}$  in  $x = 0$  differenzierbar ist, was sie aber natürlich nicht ist. Der Grund dafür ist, dass wir durch die Einschränkung auf  $[0, \infty)$  in  $x = 0$  nur die rechtsseitige Ableitung berechnet haben.

Bei offenen Definitionsbereichen der Form  $D = (a, b)$  (oder auch  $D = (a, \infty)$ ,  $D = (-\infty, b)$  oder  $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ ) fällt dieses Problem weg, da  $D$  dann keine Randpunkte enthält, d.h. für jedes  $x \in D$  existieren sowohl Folgen  $h_n \rightarrow 0$  mit  $h_n > 0$  und  $x + h_n \in D$  als auch Folgen  $h_n \rightarrow 0$  mit  $h_n < 0$  und  $x + h_n \in D$ . Aus diesem Grunde bevorzugt man bei der Berechnung von Ableitungen oft offene Intervalle als Definitionsbereich.

Als **Beispiel** betrachten wir noch einmal die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ . Auf der Definitionsmenge  $D = (0, \infty)$  gilt wie oben  $f'(x) = 1$  für alle  $x \in D$ . Da das Intervall offen ist, ist dies nun auch tatsächlich für alle  $x \in D$  die richtige Ableitung.  $\square$

## 9.4 Die Ableitung als Funktion

Bisher haben wir Ableitungen immer nur in einem festen Punkt  $x \in D$  betrachtet. Die Schreibweise  $f'(x)$  für die Ableitung legt aber nun nahe, dass die Ableitung selbst wieder als Funktion aufgefasst werden kann. Das ist tatsächlich so, wenn wir die folgende Definition verwenden.

**Definition 9.17** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar (auf  $D$ ), wenn sie für alle  $x \in D$  differenzierbar ist. Die Ableitung kann dann als Funktion

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f' : x \mapsto f'(x)$$

aufgefasst werden.  $\square$

Wenn die Ableitung  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$  nun selbst wieder eine Funktion, so kann man diese natürlich auch selbst wieder ableiten, falls sie differenzierbar ist. Wir können also  $f^{(2)}(x) := (f')'(x)$  und gegebenenfalls auch  $f^{(3)}(x) := ((f')')'(x)$  usw. definieren.

Dies ist gerade der Inhalt der folgenden induktiven Definition.

**Definition 9.18** (i) Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die *höheren Ableitungen*  $f^{(k)} : D \rightarrow \mathbb{R}$

- für  $k = 0$  als  $f^{(0)}(x) := f(x)$  für alle  $x \in D$
- für  $k = 1, 2, 3, \dots$  induktiv als

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

sofern  $f^{(k-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist.

Beachte, dass  $f^{(k)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  damit gerade für solche  $k \geq 1$  definiert ist, für die  $f^{(l)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $l \in \{0, \dots, k-1\}$  definiert und differenzierbar ist.

(ii) Falls die Bedingung “ $f^{(k-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar” für alle  $k = 1, \dots, n$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist (und die Definition aus (i) damit für  $k = 1, \dots, n$  anwendbar ist), so heißt  $f$  *n-mal differenzierbar*. Falls die Bedingung für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt ist, so heißt  $f$  *unendlich oft differenzierbar*.

(iii) Falls die Funktion  $f$  *n-mal differenzierbar* ist und  $f^{(n)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so heißt  $f$  *n-mal stetig differenzierbar*. Die Menge aller *n-mal stetig differenzierbaren Funktionen* wird mit  $C^n(D, \mathbb{R})$  bezeichnet (oder auch kurz mit  $C^n$ , falls  $D$  aus dem Kontext klar ist).  $\square$

Die “nullte” Ableitung  $f^{(0)}$  gemäß dieser Definition ist nichts anderes als die Funktion selbst und  $f^{(1)}$  ist gerade  $f'$ . Statt  $f^{(2)}(x)$  schreibt man auch  $f''(x)$  und statt  $f^{(3)}(x)$  manchmal auch  $f'''(x)$ . Alternativ schreibt man  $f^{(n)}(x)$  auch als

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

**Beispiel 9.19** (a) Für  $f(x) = \sin x$  gilt

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \sin' x = \cos x, & f^{(2)}(x) &= \cos' x = -\sin x, \\ f^{(3)}(x) &= -\sin' x = -\cos x, & f^{(4)}(x) &= -\cos' x = \sin x, \dots \end{aligned}$$

Da  $f^{(4)} = f^{(0)}$  gilt, wiederholt sich diese Abfolge beliebig oft, damit ist  $\sin x$  unendlich oft differenzierbar.

(b) Für  $f(x) = x|x|$  mit  $D = \mathbb{R}$  gilt für  $x \in [0, \infty)$ , dass  $f(x) = x^2$  ist, also folgt  $f'(x) = 2x$  für  $x > 0$  und  $f'_+(0) = 0$ . Für  $x \in (-\infty, 0]$  gilt  $f(x) = -x^2$  und damit  $f'(x) = -2x$  für  $x < 0$  und  $f'_-(0) = 0$ . Damit ist die Funktion für alle  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar, denn für  $x \neq 0$  haben wir die Ableitung explizit ausgerechnet und in  $x = 0$  stimmen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert überein. Insgesamt gilt damit

$$f'(x) = 2|x|.$$

Diese Funktion wiederum ist zwar stetig, in  $x = 0$  aber nicht mehr differenzierbar und damit nicht differenzierbar auf  $D = \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f(x) = x|x|$  ist auf  $D = \mathbb{R}$  folglich einmal stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.  $\square$

**Bemerkung 9.20 (Geometrische Interpretation der zweiten Ableitung)** Geometrisch ist der Wert der ersten Ableitung  $f'(x)$  einer Funktion in einem Punkt  $x \in D$  gerade die Steigung der Funktion. Auch die zweite Ableitung kann man geometrisch interpretieren: Zunächst einmal ist die zweite Ableitung  $f''$  natürlich gemäß der induktiven Definition nichts anderes als die Steigung der ersten Ableitung  $f'$ . Was bedeutet dies aber für die Funktion  $f$  selbst? Betrachten wir dazu alle  $x$  aus einem offenen Intervall  $(a, b)$ .

Wenn  $f''(x) > 0$  gilt für alle  $x \in (a, b)$ , so steigt  $f'(x)$  in diesem Intervall an<sup>1</sup>. Da  $f'(x)$  nun wiederum die Steigung von  $f$  in  $x$  angibt, bedeutet das, dass die Steigung der Funktion  $f$  im Intervall  $(a, b)$  zunimmt. Für den Graphen bedeutet das, dass dieser “nach oben” gekrümmt ist. Umgekehrt nimmt die Steigung von  $f$  im Intervall  $(a, b)$  ab, falls  $f''(x) < 0$  ist für alle  $x \in (a, b)$ . Die Funktion ist also “nach unten” gekrümmt. Im Fall  $f''(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$  nimmt die Steigung weder zu noch ab, sie ist also konstant und die Funktion  $f$  ist im Intervall  $(a, b)$  überhaupt nicht gekrümmt — ihr Graph ist in diesem Intervall also eine Gerade. Zusammengefasst gibt  $f''(x)$  geometrisch also gerade die Krümmung der Funktion  $f$  im Punkt  $x$  an.  $\square$

Wir hatten die Einführung der höheren Ableitungen damit begründet, dass die Ableitung selbst wieder eine Funktion von  $D$  nach  $\mathbb{R}$  ist, wenn die Funktion  $f$  in allen  $x \in D$  differenzierbar ist. Daraus ergibt sich die Frage, ob man höhere Ableitungen auch definieren kann, wenn  $f$  nur in einem einzelnen Punkt  $x \in D$  differenzierbar ist.

Tatsächlich geht das nicht, denn dann wäre  $f'$  nur für dieses  $x$  definiert, man benötigt aber z.B. schon zur Berechnung der zweiten Ableitung, dass der Definitionsbereich von  $f'$  eine Folge mit  $x_n = x + h_n \rightarrow x$  und  $x_n \neq x$  enthält. Eine solche Folge kann es aber nicht geben, wenn  $f'$  nur in  $x$  aber nicht in einer Umgebung von  $x$  definiert ist.

Trotzdem kann man die Idee der Differenzierbarkeit in nur einem Punkt auf höhere Ableitungen übertragen. Hinreichend dafür ist z.B., dass  $f'$  (bzw. allgemein  $f^{(k-1)}$ ) auf einem offenen Intervall der Form  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$  definiert und in allen Punkten aus diesem Intervall differenzierbar ist. Das  $\varepsilon$  darf dabei beliebig klein sein, muss aber positiv sein. Dies führt auf die folgende Definition.

**Definition 9.21** Für  $n \geq 2$  heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x \in D$   $n$ -mal differenzierbar, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass die Funktion auf dem eingeschränkten Definitionsbereich  $\hat{D} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$   $n$ -mal differenzierbar ist.  $\square$

Beachte, dass diese Definition voraussetzt, dass der ursprüngliche Definitionsbereich für das gegebene  $x$  ein Intervall der Form  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  enthält. Dies ist z.B. immer dann für alle  $x \in D$  erfüllt, wenn  $D$  ein offenes Intervall ist. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass man bei der Berechnung von Ableitungen offene Intervalle als Definitionsbereiche bevorzugt.

<sup>1</sup>Dies ist anschaulich einsichtig, formal werden wir dies in Satz 10.6 beweisen.



# Kapitel 10

## Anwendungen der Differentialrechnung

In diesem Kapitel besprechen wir verschiedene Anwendungen der Differentialrechnung.

Stand:  
2. August 2022

### 10.1 Extremwerte und der Mittelwertsatz

Extremwerte sind Minima und Maxima einer Funktion. Speziell betrachten wir hier *lokale* Minima und Maxima gemäß der folgenden Definition.

**Definition 10.1** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir sagen, dass  $f$  in einem  $x \in D$  ein *lokales Minimum* besitzt, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass gilt

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{für alle } y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap D.$$

Das Minimum heißt *strikt*, falls die obige Ungleichung mit  $<$  erfüllt ist für  $y \neq x$ . Der Punkt  $x$  heißt (*strikte*) *Minimalstelle* von  $f$ . Analog definieren wir das (*strikte*) lokale Maximum mit  $\geq$  bzw.  $>$ .  $\square$

Wir hatten in Abschnitt 5.4 das Infimum und Supremum der Menge

$$\{f(y) \mid y \in D\}$$

betrachtet. Insbesondere hatten wir in Satz 5.14 bewiesen, dass diese Menge ein Minimum  $f(q)$  und ein Maximum  $f(p)$  besitzt, wenn  $D = [a, b]$  ist (also ein abgeschlossenes Intervall) und  $f$  stetig ist. Es gilt also

$$f(q) \leq f(y) \quad \text{und} \quad f(p) \geq f(y) \quad \text{für alle } y \in D.$$

Daher werden  $f(q)$  und  $f(p)$  *globales* Minimum bzw. Maximum genannt. Man sieht leicht, dass jedes globale Minimum (bzw. Maximum) auch ein lokales Minimum (bzw. Maximum) ist. Umgekehrt muss das aber natürlich nicht gelten.

Für differenzierbare Funktionen kann man lokale Minima und Maxima an der Ableitung erkennen, falls die Definitionsmenge ein offenes Intervall ist.

**Satz 10.2** Sei  $D$  ein (nicht notwendigerweise beschränktes) offenes Intervall. Dann gilt für jedes  $x \in D$ , in dem  $f$  differenzierbar ist, die Folgerung

$$f \text{ besitzt in } x \text{ ein lokales Minimum oder Maximum} \Rightarrow f'(x) = 0.$$

**Beweis:** Wir beweisen den Fall des Minimums. Wir wählen  $\varepsilon > 0$  so klein, dass die Ungleichung aus der Definition des Minimums auf  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  gilt und dass  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D$  gilt (beachte, dass die zweite Bedingung im Falle von ein- oder beidseitig beschränkten Intervallen  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  oder  $(-\infty, b)$  für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon \leq x - a$  bzw.  $\varepsilon \leq b - x$  erfüllt ist).

Da die Funktion nach Annahme in  $x$  differenzierbar ist, existieren nach Satz 9.15 die einseitigen Ableitungen und es gilt  $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$ . Für jede Folge  $h_n \rightarrow 0$  gilt nun  $x + h_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  für alle hinreichend großen  $n$ . Für  $h_n > 0$  folgt aus der Minimumseigenschaft für diese  $n$  die Ungleichung

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \geq 0$$

und damit  $f'_+(x) \geq 0$ . Für  $h_n < 0$  folgt

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \leq 0$$

und damit  $f'_-(x) \leq 0$ . Aus  $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$  folgt also  $f'(x) \geq 0$  und  $f'(x) \leq 0$ , was nur für  $f'(x) = 0$  erfüllt sein kann.  $\square$

**Beispiel 10.3** (i) Für  $f(x) = x^2$  mit  $D = \mathbb{R}$  besitzt  $f$  in  $x = 0$  wegen  $0^2 = 0$  und  $x^2 > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  offenbar ein (sogar striktes) lokales Minimum. Wegen  $f'(x) = 2x$  gilt wie erwartet  $f'(0) = 0$ .

(ii) Für die konstante Funktion  $f(x) = c$  mit beliebigem  $c \in \mathbb{R}$  besitzt  $f$  in jedem  $x$  ein lokales Minimum (und auch Maximum, beides aber natürlich nicht strikt). Wegen  $f'(x) = 0$  ist die Ableitung tatsächlich auch überall gleich 0.

(iii) Für abgeschlossene Intervalle gilt Satz 10.2 nicht, falls sich die Extremstellen am Rand des Intervalls befinden. So besitzt z.B. die Funktion  $f(x) = x$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[-1, 1]$  ein lokales (und auch globales) Minimum in  $x = -1$  und ein lokales (und ebenfalls auch globales) Maximum in  $x = 1$ . Es gilt aber  $f'(x) = 1$  für alle  $x$ , die Ableitung ist also nicht gleich 0.

(iv) Die Bedingung aus Satz 10.2 ist nur eine hinreichende Bedingung, d.h. aus  $f'(x) = 0$  lässt sich im Allgemeinen nicht folgern, dass  $x$  ein Minimum oder Maximum ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion  $f(x) = x^3$ . Offensichtlich besitzt  $f$  in  $x = 0$  weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, denn für  $x > 0$  gilt  $f(x) > 0$  und für  $x < 0$  gilt  $f(x) < 0$ . Trotzdem gilt wegen  $f'(x) = 3x^2$  die Gleichung  $f'(0) = 0$ .  $\square$

Wie kann man nun sicherstellen, dass in einem Punkt  $x \in D$  mit  $f'(x) = 0$  tatsächlich ein lokales Maximum oder Minimum existiert und wie kann man Maxima und Minima unterscheiden? Hierfür benötigen wir als Hilfsmittel den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Dieser stellt eine Beziehung zwischen den Funktionswerten von  $f$  und den Werten der Ableitung dar. Der folgende Satz von Rolle gibt zunächst eine vereinfachte Version dieses Satzes, aus der wir den eigentlichen Satz danach leicht folgern können.

**Satz 10.4 (Satz von Rolle)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) = f(b)$ , die auf  $(a, b)$  differenzierbar ist. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

**Beweis:** Falls  $f$  konstant auf  $[a, b]$  ist, ist die Ableitung auf ganz  $(a, b)$  gleich Null und die Aussage folgt sofort für jedes  $\xi \in (a, b)$ .

Andernfalls gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) < f(a)$  oder  $f(x_0) > f(a)$ . Da  $f$  stetig ist, existieren nach Satz 5.14 Punkte  $p, q \in [a, b]$  mit

$$f(p) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(q) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Im Fall  $f(x_0) < f(a) = f(b)$  muss  $p \in (a, b)$  gelten und im Fall  $f(x_0) > f(a) = f(b)$  muss  $q \in (a, b)$  gelten. Da globale Minima/Maxima auch lokale Minima/Maxima sind, muss nach Satz 10.2 also  $f'(p) = 0$  oder  $f'(q) = 0$  gelten. Die Behauptung folgt im ersten Fall mit  $\xi = p$  und im zweiten Fall mit  $\xi = q$ .  $\square$

**Satz 10.5 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die auf  $(a, b)$  differenzierbar ist. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Beweis:** Wir definieren die Funktion

$$g(x) = f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a).$$

Für diese gilt

$$g(a) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(a - a) = f(a), \quad g(b) = f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Da  $g$  als Summe stetiger und differenzierbarer Funktionen auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt. Es existiert also ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $g'(\xi) = 0$ . Wegen

$$g'(x) = f'(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

folgt

$$f'(\xi) = g'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$



Um einen Bezug zu den Extremwerten herzustellen, betrachten wir die folgende Folgerung aus dem Mittelwertsatz.

**Satz 10.6** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die auf  $(a, b)$  differenzierbar ist. Wenn für alle  $x \in (a, b)$  die Ungleichung

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0)$$

gilt, so ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

**Beweis:** Wir beweisen den Fall  $f'(x) > 0$ , die anderen Fälle werden analog bewiesen. Angenommen,  $f$  sei nicht streng monoton wachsend. Dann gibt es  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$  und  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein  $\xi \in (x_1, x_2)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0,$$

was der Annahme  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$  widerspricht.  $\square$

Betrachten wir nun wieder die Extremwerte. Eine Möglichkeit zu entscheiden, ob im Falle von  $f'(x) = 0$  tatsächlich ein Minimum oder Maximum vorliegt, geht über die Betrachtung der zweiten Ableitung.

**Satz 10.7** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die auf  $(a, b)$  zwei mal differenzierbar ist. Sei  $x \in (a, b)$  mit  $f'(x) = 0$  gegeben. Dann gelten die Folgerungen

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ besitzt in } x \text{ ein striktes lokales Minimum}$$

und

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ besitzt in } x \text{ ein striktes lokales Maximum.}$$

**Beweis:** Wir beweisen den Fall  $f''(x) > 0$ . Aus

$$0 < f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

folgt die Existenz von  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} > 0$$

gilt für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| < \varepsilon$ : Wäre das nicht der Fall, so gäbe es betragsmäßig beliebig kleine  $h$  mit

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \leq 0,$$

woraus für  $h \rightarrow 0$  auch  $f''(x) \leq 0$  folgen würde.

Für  $h \in (0, \varepsilon)$  folgt daraus

$$f'(x+h) > f'(x) = 0,$$

weswegen  $f$  auf  $[x, x+\varepsilon]$  nach Satz 10.6 streng monoton wachsend ist. Es gilt also  $f(x) < f(y)$  für alle  $y \in (x, x+\varepsilon]$ . Analog sieht man, dass  $f$  auf  $[x-\varepsilon, x]$  streng monoton fallend ist, woraus  $f(x) < f(y)$  für alle  $y \in [x-\varepsilon, x)$  folgt. Also besitzt  $f$  in  $x$  ein striktes lokales Minimum.  $\square$

**Beispiel 10.8** (i) Für  $f(x) = x^2$  gilt  $f'(x) = 2x$  und  $f''(x) = 2$ . Also ist  $f'(0) = 0$  und  $f''(0) = 2$ . Folglich existiert in  $x = 0$  ein lokales Minimum.

(ii) Für  $f(x) = x^3$  besitzt  $f$  in  $x = 0$  weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum,  $f''(0)$  kann also weder positiv noch negativ sein, muss also gleich 0 sein. Aus  $f'(x) = 3x^2$  folgt  $f''(x) = 6x$ , also gilt tatsächlich  $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$ .

(iii) Die Bedingungen aus Satz 10.7 sind nur hinreichend aber nicht notwendig, d.h. auch im Falle  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) = 0$  kann  $f$  in  $x$  ein striktes lokales Minimum oder Maximum besitzen. Ein Beispiel dafür ist die Funktion  $f(x) = x^4$  in  $x = 0$ . Hier existiert in  $x = 0$  wegen  $x^4 > 0$  für  $x \neq 0$  ein striktes lokales Minimum. Trotzdem gilt wegen  $f''(x) = 12x^2$ , dass  $f''(0) = 0$  ist.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch überlegen, ob wir unter geeigneten Bedingungen aus  $f'(x) = 0$  auch die Existenz eines globalen Minimums oder Maximums folgern können. Tatsächlich geht das, wenn man Funktionen mit passenden Eigenschaften betrachtet.

**Definition 10.9** Sei  $D$  ein (nicht unbedingt beschränktes) Intervall. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, wenn für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 \neq x_2$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  die Ungleichung

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

gilt. Sie heißt *strikt konvex*, wenn die Ungleichung mit  $<$  statt  $\leq$  erfüllt ist. Die Funktion heißt *konkav* (bzw. *strikt konkav*), wenn die obige Ungleichung mit  $\geq$  (bzw.  $>$ ) erfüllt ist.  $\square$

Beachte, dass  $f$  genau dann (strikt) konvex ist, wenn  $-f$  (strikt) konkav ist.

Konvexität und Konkavität kann man wiederum mit der zweiten Ableitung überprüfen. Wir formulieren den entsprechenden Satz für konvexe Funktionen.

**Satz 10.10** Sei  $D$  ein offenes (nicht unbedingt beschränktes) Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei mal differenzierbar. Dann gilt: Falls  $f''(x) \geq 0$  gilt für alle  $x \in D$  so ist  $f$  konvex und falls  $f''(x) > 0$  gilt für alle  $x \in D$  so ist  $f$  strikt konvex.

**Beweis:** Wir beweisen den strikt konvexen Fall. Aus  $f''(x) > 0$  folgt mit Satz 10.6, dass  $f'$  streng monoton wachsend ist.

Seien nun  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 \neq x_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$  gegeben. O.B.d.A. sei  $x_1 < x_2$ . Setzen wir  $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  so folgt  $x \in (x_1, x_2)$  und nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Dabei haben wir für die mittlere Ungleichung ausgenutzt, dass  $\xi_1 \in (x_1, x)$  und  $\xi_2 \in (x, x_2)$  gilt, woraus  $\xi_1 < \xi_2$  und daraus mit der Monotonie von  $f'$  die verwendete Ungleichung folgt.

Aus der Definition von  $x$  folgt nun  $x - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1)$  und  $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ . Damit erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} < \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Multiplikation der Gleichung mit  $\lambda$  und  $1 - \lambda$  liefert dann

$$\lambda(f(x) - f(x_1)) < (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x)),$$

woraus die gesuchte Ungleichung aus der Definition der strikten Konvexität folgt.  $\square$

**Beispiel 10.11** (i) Mit Hilfe der zweiten Ableitungen überprüft man, dass z.B. die Funktionen  $f(x) = \exp(x)$  und  $f(x) = x^2$  strikt konvex sind.

(ii) Jede lineare Funktion  $f(x) = ax$  ist sowohl konvex als auch konkav, beides aber nicht strikt.

(iii) Man kann (mit einem längeren Beweis, vgl. z.B. Forster [6, §16]) beweisen, dass aus Konvexität umgekehrt  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in D$  folgt. Aus strikter Konvexität folgt aber *nicht*  $f''(x) > 0$  für alle  $x \in D$ . Ein Beispiel hierfür ist die strikt konvexe Funktion  $f(x) = x^4$ , für die aber  $f''(0) = 0$  gilt.  $\square$

Den Zusammenhang zwischen Konvexität und der Existenz von Minima ist nun durch den folgenden Satz gegeben.

**Satz 10.12** Sei  $D$  ein offenes (nicht unbedingt beschränktes) Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion. Sei  $x \in D$  mit  $f'(x) = 0$  gegeben. Dann ist  $x$  ein globales Minimum. Falls  $f$  strikt konvex ist, ist  $x$  ein striktes globales Minimum, d.h. es gilt  $f(x) < f(y)$  für alle  $y \in D$  mit  $y \neq x$ .

**Beweis:** Wir beweisen zunächst die globale Minimumseigenschaft. Für  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 < x_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1} &= \frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \\ &\leq \frac{\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{(1 - \lambda)(f(x_2) - f(x_1))}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Beachte, dass wir für die Ungleichung benötigen, dass der Nenner positiv ist, was wegen  $x_1 < x_2$  und  $\lambda < 1$  aber der Fall ist.

Weil für  $\lambda \rightarrow 1$  die Konvergenz  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \rightarrow x_1$  folgt, gilt also

$$f'(x_1) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Mit einer analogen Rechnung beweist man die Ungleichung

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Daraus folgt, dass  $f'$  monoton wachsend ist. Aus  $f'(x) = 0$  folgen also für alle  $y \in D$  die Ungleichungen  $f'(y) \geq 0$  falls  $y \geq x$  und  $f'(y) \leq 0$  für  $y \leq x$ . Nach Satz 10.6 ist  $f$  also monoton fallend auf allen Intervallen der Form  $[a, x] \subset D$  und monoton wachsend auf allen Intervallen der Form  $[x, b] \subset D$ . Damit folgt  $f(a) \geq f(x)$  für alle  $a \in D$  mit  $a \leq x$  und  $f(x) \leq f(b)$  für alle  $b \in D$  mit  $x \leq b$ . Folglich ist  $f(x)$  ein globales Minimum.

Sei  $f$  nun strikt konvex. Wir nehmen an, dass  $f(x)$  kein striktes Minimum ist, d.h. dass  $y \neq x$  existiert mit  $f(x) = f(y)$ . Aus der strikten Konvexität, folgt dann für jedes  $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = f(x),$$

was der Tatsache widerspricht, dass  $f(x)$  ein globales Minimum ist. Also muss  $f(x)$  auch ein striktes Minimum sein.  $\square$

## 10.2 Die Taylor-Entwicklung

Für viele Anwendungen — z.B. wenn man komplizierte Funktionen mit dem Computer bearbeiten möchte — ist es sinnvoll, diese näherungsweise durch einfachere Funktionen darzustellen. Besonders schöne “einfache Funktionen” sind die Polynome, also Funktionen der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  der Grad und die Parameter  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  die Koeffizienten des Polynoms sind. Polynome sind deswegen schön, weil zum Speichern eines Polynoms vom Grad  $n$  nur die  $n + 1$  Koeffizienten, also nur  $n + 1$  reelle Zahlen im Computer gespeichert werden müssen.

Es stellt sich nun die Frage, wie man zu einer gegebenen Funktion  $f$  ein Polynom  $P$  mit vorgegebenem Grad  $n \in \mathbb{N}$  findet, das in der Nähe eines gegebenen Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gut mit der Funktion übereinstimmt, d.h. dessen Werte  $P(x)$  für  $x$  nahe  $x_0$  nur wenig von den Funktionswerten  $f(x)$  abweichen.

Die anschauliche Idee der Taylorentwicklung liegt nun darin, das Polynom gerade so zu bestimmen, dass sein Funktionswert und die ersten  $n$  Ableitungen in  $x_0$  mit denen von  $f$  übereinstimmen. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass  $f$  in  $x_0$  hinreichend oft differenzierbar ist. Um die Rechnung zu vereinfachen, empfiehlt es sich, das Polynom in der Form

$$P(x) = a_n (x - x_0)^n + a_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1 (x - x_0) + a_0$$

zu schreiben. Durch Ausmultiplizieren sieht man leicht, dass dies tatsächlich wieder ein Polynom der obigen Form (allerdings mit anderen Koeffizienten) ist. Durch sukzessives Ausrechnen der Ableitungen erhält man die Formel

$$P^{(k)}(x_0) = k!a_k, \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

Wenn wir also wollen, dass die Gleichung  $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für  $k = 0, \dots, n$  gilt, so müssen wir  $a_k = f^{(k)}/k!$  setzen, d.h. wir müssen  $P$  definieren als

$$P(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (10.1)$$

Dieses Polynom wird *Taylorpolynom* (vom Grad  $n$ ) von  $f$  in  $x_0$  genannt.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Differenz zwischen  $f(x)$  und  $P(x)$ .

**Satz 10.13** Es sei  $D$  ein offenes Intervall,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n + 1$ -mal differenzierbar und  $P$  aus (10.1). Dann existiert für jedes  $x \in D$  mit  $x > x_0$  ein  $\xi \in (x_0, x)$  mit

$$f(x) = P(x) + R_n \quad \text{mit } R_n := \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Die gleiche Aussage gilt für  $x < x_0$  mit  $\xi \in (x, x_0)$ . Der Ausdruck  $R_n$  wird *Lagrangesches Restglied* genannt.

Zum Beweis von Satz 10.13 benötigen wir die folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Beachte, dass wir die bisherige Form aus Satz 10.5 aus dieser Verallgemeinerung erhalten, indem wir  $g(x) = x$  wählen.

**Satz 10.14 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, die auf  $(a, b)$  differenzierbar sind mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann ist  $g(b) - g(a) \neq 0$  und es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Beweis:** Aus dem Satz von Rolle folgt zunächst, dass tatsächlich  $g(b) - g(a) \neq 0$  gilt, denn ansonsten wäre  $g(a) = g(b)$  und es müsste  $g'(x) = 0$  gelten für ein  $x \in (a, b)$ .

Definiere nun die Funktion

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Für diese gilt

$$h(b) - h(a) = (g(b) - g(a))f(b) - (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(a) + (f(b) - f(a))g(a) = 0,$$

also  $h(b) = h(a)$ . Folglich existiert nach dem Satz von Rolle ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$0 = h'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi),$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Beweis von Satz 10.13:** Definiere die Funktion

$$g(x) := f(x) - P(x).$$

Wegen  $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)$  erfüllt diese Funktion

- (i)  $g$  ist  $n + 1$  mal differenzierbar auf  $D$
- (ii)  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$

Wir beweisen, dass für jede Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit (i) und (ii) und jedes  $x \geq x_0$  ein  $\xi \in (x_0, x)$  existiert mit

$$g(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} g^{(n+1)}(\xi). \quad (10.2)$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes, denn da  $P$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, folgt  $P^{(n+1)}(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und damit  $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .

Den Beweis von (10.2) führen wir per Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  folgt wegen  $g(x_0) = 0$  aus dem üblichen Mittelwertsatz

$$\frac{g(x)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(\xi)$$

und damit (10.2) für  $n = 0$ .

Für  $n \rightarrow n + 1$  betrachten wir eine Funktion, die (i) und (ii) für  $n + 1$  (an Stelle von  $n$ ) erfüllt. Wir müssen beweisen, dass für diese Funktion (10.2) mit  $n + 1$  an Stelle von  $n$  gilt.

Wenn  $g$  (i) und (ii) mit  $n + 1$  erfüllt, so erfüllt die Funktion  $g'$  die Bedingungen (i) und (ii) für  $n$  und nach Induktionsannahme können wir schließen, dass (10.2) für  $g'$  und  $n$  gilt. Wählen wir also ein beliebiges  $\tilde{\xi} \in D$  mit  $\tilde{\xi} > x_0$  und wenden (10.2) mit  $x = \tilde{\xi}$  und  $g = g'$  an, so existiert ein  $\xi \in (x_0, \tilde{\xi})$  mit

$$g'(\tilde{\xi}) = \frac{(\tilde{\xi} - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} g^{(n+2)}(\xi), \quad (10.3)$$

wobei wir  $g^{(n+1)} = g^{(n+2)}$  verwendet haben.

Wir wenden nun den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf die Funktion  $g$  (an Stelle von  $f$ ) und  $h(x) = (x - x_0)^{n+2}$  (an Stelle von  $g$ ) auf  $[x_0, x]$  an. Damit existiert ein  $\tilde{\xi} \in (x_0, x)$ , so dass

$$\frac{g'(\tilde{\xi})}{h'(\tilde{\xi})} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

gilt, woraus mit der speziellen Wahl von  $g$  und  $h$  die Gleichung

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+2}} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(\tilde{\xi})}{h'(\tilde{\xi})} = \frac{g'(\tilde{\xi})}{(n + 2)(\tilde{\xi} - x_0)^{n+1}}$$

folgt. Setzen wir nun den Ausdruck für  $g'(\tilde{\xi})$  aus (10.3) hier ein, so erhalten wir

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{g^{(n+2)}(\tilde{\xi})}{(n+2)(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+2)}(\tilde{\xi})}{(n+2)!},$$

was gerade die zu beweisende Gleichung (10.2) ist.  $\square$

**Bemerkung 10.15** Ähnlich wie das “kleine” Landau-Symbol  $o(\cdot)$ , das wir in Bemerkung 9.5(i) eingeführt haben, definiert man das große Landau-Symbol  $O(\cdot)$  wie folgt: Für eine Funktion  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die es Konstanten  $\varepsilon, C > 0$  und ein  $p \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Ungleichung

$$\frac{|r(h)|}{h^p} \leq C$$

gilt für alle  $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  mit  $h \neq 0$ , schreiben wir kurz

$$r(h) = O(h^p).$$

Falls die Ableitung  $f^{(n+1)}$  auf  $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$  im Betrag durch ein  $C$  beschränkt ist für ein  $\varepsilon > 0$  (was immer der Fall ist wenn  $f^{(n+1)}$  stetig ist), so gilt für das Taylorpolynom  $P$  mit dieser Schreibweise unter den Voraussetzungen von Satz 10.13

$$f(x) - P(x) = O((x-x_0)^{n+1}).$$

In dieses Form findet man die Taylorentwicklung oft angegeben.  $\square$

**Beispiel 10.16** (i) Sei  $f(x) = \sin x$  und  $x_0 = 0$ . Dann gilt

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1, \quad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \dots$$

und damit (für ungerade  $n$ )

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \pm \frac{x^n}{n!}$$

Wir erhalten also gerade die Terme bis zur Ordnung  $n$  aus der Reihendarstellung des Sinus aus Satz 8.5. Für  $n = 15$  sind  $f$  und  $P$  in Abbildung 10.1 grafisch dargestellt.

Da für  $f(x) = \sin x$  die Ungleichung  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (denn jede Ableitung ist von der Form  $\pm \sin x$  oder  $\pm \cos x$ ), folgt aus Satz 10.13 die Abschätzung

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Daraus folgt, dass die Einschränkung  $|x| \leq 1 + (N-1)/2$  für die Abschätzung des Restglieds  $r_N$  in (8.2) gar nicht nötig ist und dass die dort angegebene Schranke für  $r_N$  um den Faktor  $1/2$  verringert werden kann. Ähnlich beweist man dies mit der Taylorentwicklung für das Restglied der Exponentialfunktion in Satz 6.5 und für den Cosinus.

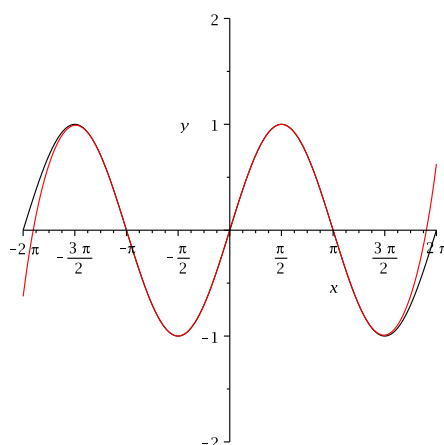


Abbildung 10.1:  $\sin x$  (schwarz) und Taylor-Polynom für  $n = 15$  und  $x_0 = 0$  (rot)

(ii) Die sogenannte *Runge-Funktion* ist gegeben durch  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ . Mit (etwas länglicher) Rechnung erhält man

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k/2} k!$$

für gerade  $k$  und  $f^{(k)}(0) = 0$  für ungerade  $k$ . Damit folgt (für gerade  $n$ )

$$P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots \pm x^n.$$

Wiederum für  $n = 15$  sind  $f$  und  $P$  in [Abbildung 10.2](#) grafisch dargestellt. □

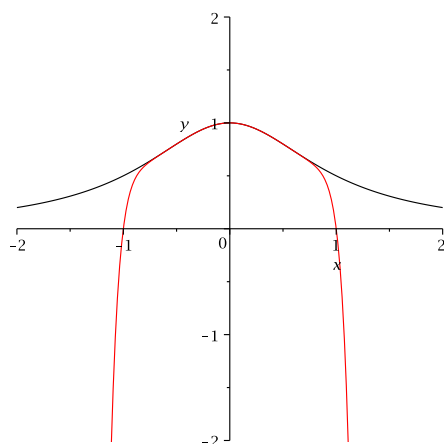


Abbildung 10.2:  $1/(1 + x^2)$  (schwarz) und Taylor-Polynom für  $n = 15$  und  $x_0 = 0$  (rot)

Betrachtet man die Beispiele [10.16](#) (i) und (ii) für wachsende Grade  $n$  des Taylorpolynoms, so fällt auf, dass das Polynom  $P$  im Falle des Sinus auf dem gesamten Intervall gegen den



Sinus konvergiert, sogar auf beliebig großen Intervallen. Im Gegensatz dazu erhält man für die Runge-Funktion an den Rändern und außerhalb des Intervalls  $[-1, 1]$  keine Konvergenz. Die Polynomwerte  $P(x)$  bilden hier also tatsächlich nur in einer Umgebung von  $x_0$  eine gute Näherung für die Funktionswerte  $f(x)$ .

Falls  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar ist und die über die Taylorpolynome entstehende unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert, so nennt man diese Reihe die *Taylorreihe* von  $f$  in  $x_0$ . Die Taylorreihe ist ein Spezialfall einer *Potenzreihe*, die allgemein von der Form

$$\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

für Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{R}$  ist.

Betrachtet man die Herleitung der Taylorreihe, so könnte man bei einem ersten Blick vermuten, dass die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (10.4)$$

gilt. Dies ist aber im Allgemeinen *nicht richtig*. Genauer können zwei Probleme auftreten:

(1) Es kann sein, dass der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für gewisse  $x \in D$  überhaupt nicht existiert.

(2) Auch wenn der Grenzwert existiert, kann es sein, dass die Gleichung (10.4) für manche (oder sogar sehr viele)  $x \in D$  nicht gilt.

Im Rest dieses Abschnittes untersuchen wir diese beiden Fälle genauer und beginnen mit (1).

**Beispiel 10.17** Für die Runge-Funktion lautet die Taylor-Reihe (nach passender Umstellung der Indizes)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}.$$

Beachte, dass hier  $x_0 = 0$  gilt. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \geq 1$  gilt dann  $|(-1)^k x^{2k}| \geq 1$ , die Summanden der Taylorreihe konvergieren also nicht gegen 0 und die Reihe konvergiert daher nach Satz 4.5 nicht. Für  $|x| < 1$  hingegen folgt die (sogar absolute) Konvergenz aus dem Quotientenkriterium. Insgesamt konvergiert die Taylorreihe also für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ .

Dass sie für diese Werte tatsächlich gegen  $f(x)$  konvergiert, kann man beweisen, indem man zeigt, dass der Betrag des Restglied  $R_n$  für alle  $|x| \leq a$  und  $|\xi| \leq a$  für  $a < 1$  durch

einen Ausdruck  $b_n$  beschränkt ist, der für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Genauer wird dies im folgenden Satz 10.19 formuliert. Aus Zeitgründen verzichten wir auf das explizite Ausrechnen der Schranken  $b_n$  für dieses Beispiel.  $\square$

Zur Beschreibung der Konvergenzeigenschaften einer Potenzreihe macht man die folgende Definition.

**Definition 10.18** Der *Konvergenzradius* einer Potenzreihe ist die größte Zahl  $r \geq 0$ , so dass die Reihe für alle  $x \in D$  mit  $|x_0 - x| < r$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.  $\square$

Wir werden in der Analysis II in Abschnitt 14.3 beweisen, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden dürfen, dass also für  $|x_0 - x| < r$  für die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

die Formel

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x - x_0)^{k-1}$$

gilt. Hier beschränken wir uns zunächst darauf, den Konvergenzradius von Taylorreihen abzuschätzen.

Für die Taylorreihe der Runge-Funktion in  $x_0 = 0$  gilt nach dem vorhergehenden Beispiel also  $r = 1$ . Tatsächlich gibt es auch Taylorreihen, deren Konvergenzradius 0 ist; die zugehörigen Funktionen sind aber recht kompliziert darzustellen. Eine Skizze für die Konstruktion einer solchen Funktion werden wir in der Analysis II in Abschnitt 14.5 behandeln.

Im Fall einer Taylorreihe gilt dann der folgende Satz, der die im letzten Abschnitt des vorhergehenden Beispiels verwendete Begründung formalisiert.

**Satz 10.19** Betrachte die Taylorreihe einer Funktion  $f$  im Punkt  $x_0 \in D$ . Für ein  $a > 0$  und eine Nullfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte für das Lagrangesche Restglied die Ungleichung

$$|R_n| \leq b_n \quad \text{für alle } x, \xi \in D \text{ mit } |x - x_0| \leq a, |\xi - x_0| \leq a.$$

Dann gilt für den Konvergenzradius der Taylorreihe  $r \geq a$  und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < a$ .

**Beweis:** Aus der Annahme folgt mit Satz 10.13 die Ungleichung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = |R_n| \leq b_n \rightarrow 0$$

für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| \leq a$ . Damit folgt mit Satz 3.4 die Konvergenz der Reihe gegen  $f(x)$  und damit insbesondere die Konvergenz.  $\square$

Dieser Satz stellt sowohl Konvergenz der Taylorreihe als auch Konvergenz gegen  $f(x)$  sicher. Einige klassische Taylorreihen, für die man mit Hilfe dieses Satzes Konvergenz beweisen kann, sind

$$\begin{aligned} \exp x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, & x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, & x \in \mathbb{R} \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, & x \in (-1, 1] \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, & x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

mit

$$\binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha - j + 1}{j}.$$

Betrachten wir nun den oben in Punkt (2) genannten Fall, dass die Taylorreihe konvergiert, aber nicht gegen  $f(x)$ . Das folgende Beispiel gibt eine Funktion an, für die dies passiert.

**Beispiel 10.20** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mittels Induktion beweisen wir, dass die Ableitungen dieser Funktion von der Form

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

sind, wobei  $P_n$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist.

Für  $n = 0$  ist die Aussage klar mit  $P_0(x) = 0$ . Für  $n \rightarrow n + 1$  gilt für  $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left( P_n(1/x) e^{-1/x^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (P_n(1/x)) e^{-1/x^2} + P_n(1/x) \frac{d}{dx} e^{-1/x^2} \\ &= -P'_n(1/x) \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} + P_n(1/x) e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} \\ &= P_{n+1}(1/x) e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

mit  $P_{n+1}(1/x) = -P'_n(1/x) \frac{1}{x^2} + P_n(1/x) \frac{2}{x^3}$ .

Für  $x = 0$  gilt

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 6.22 mit  $x = 1/h$  sowie die Ungleichung  $e^{-1/h^2} \leq e^{-1/|h|}$  für  $|h| < 1$  auf die einzelnen Summanden des Polynoms angewendet haben. Damit folgt, dass die Ableitungen tatsächlich von der angegebenen Form sind.

Die Taylorreihe in  $x_0 = 0$  lautet also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$$

und stimmt daher für kein  $x \neq 0$  mit  $f(x) > 0$  überein.  $\square$

Es muss also bei jeder Taylorentwicklung separat an Hand des Restglieds untersucht werden, ob die Taylorreihe tatsächlich gegen  $f(x)$  konvergiert und für welche  $x$  dies gilt.

Wenn eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $x \in D$  durch eine Potenzreihe (also z.B. die Taylorreihe) dargestellt werden kann, so nennt man  $f$  *analytisch* auf  $D$ .

## 10.3 Die Regeln von L'Hospital

Eine weitere Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes bilden die Regeln von L'Hospital. Mit diesen kann man Grenzwerte der Form  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  berechnen, falls  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  gilt und die übliche Quotientenregel daher nicht anwendbar ist.

**Satz 10.21** Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $g(x) \neq 0$  sowie  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Es gelte zudem eine der beiden Bedingungen

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert (ggf. uneigentlich) existiert. Hierbei wird bei allen Grenzwerten die Bedingung  $x \in (a, b)$  angenommen.

Die analoge Aussage gilt für  $x \rightarrow b$  und, im Falle dass  $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f, g : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen, auch für  $x \rightarrow \infty$  oder  $x \rightarrow -\infty$ .

**Beweis:** Im Fall (i) können wir  $f$  und  $g$  in  $x = a$  durch 0 stetig fortsetzen. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert dann für alle  $x \in (a, b)$  ein  $\xi \in (a, x]$  mit  $f'(\xi)g(x) = g'(\xi)f(x)$  und damit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Für  $x \rightarrow a$  gilt nun wegen  $\xi \in (a, x]$  auch  $\xi \rightarrow a$ , woraus die Behauptung folgt.

Im Fall (ii) ist die Rechnung etwas aufwändiger, weil wir die Funktionen nicht in  $x = a$  stetig fortsetzen können. Für  $a < y < x < b$  liefert der verallgemeinerte Mittelwertsatz zunächst  $\xi \in [y, x]$  mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}. \quad (10.5)$$

Weil  $f(y), g(y) \rightarrow \pm\infty$  für  $y \rightarrow a$  sind beide Funktionen  $\neq 0$  für  $y$  hinreichend nahe an  $a$ . Es folgt

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \frac{1 - g(x)/g(y)}{1 - f(x)/f(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - g(x)/g(y)}{1 - f(x)/f(y)}$$

Wegen  $f(x) \rightarrow \infty$  und  $g(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow a$  gibt es nun Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n, y_n \in (a, b)$  und  $x_n, y_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $f(x_n)/f(y_n) \rightarrow 0$ ,  $g(x_n)/g(y_n) \rightarrow 0$  (wähle zuerst die Folge  $(x_n)$  und dann  $y_n$  so nahe an  $a$ , dass  $f(y_n) > nf(x_n)$  und  $g(y_n) > ng(x_n)$  gilt). Sei  $\xi_n$  das zu  $x = x_n$  und  $y = y_n$  gehörige  $\xi$  aus (10.5). Damit gilt

$$\lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \underbrace{\frac{1 - g(x_n)/g(y_n)}{1 - f(x_n)/f(y_n)}}_{\rightarrow 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

# Kapitel 11

## Das Riemann-Integral

Stand:  
2. August 2022

Neben der Differentialrechnung ist die Integralrechnung das zweite wesentliche Konzept der Analysis. Anschauliche Motivation der Integralrechnung in  $\mathbb{R}$  ist das Berechnen von Flächeninhalten, speziell von Flächen unter dem Graphen einer Funktion, wobei Flächen oberhalb der  $x$ -Achse einen positiven und Flächen unterhalb der  $x$ -Achse einen negativen Wert erhalten.

Aus der Schule kommend mag es zunächst verwundern, dass es mehrere verschiedene Möglichkeiten gibt, ein Integral zu definieren. Wir werden in diesem und im nachfolgenden Kapitel das aus der Schule bekannte *Riemann-Integral* von Grund auf einführen und Eigenschaften und Rechenregeln für dieses Integral beweisen. Danach werden wir dann eine andere Definition des Integrals betrachten, das sogenannte *Lebesgue-Integral*.

### 11.1 Integrale für Treppenfunktionen

Wie bereits gesagt wollen wir einen mathematischen Begriff — eben das Integral — definieren, der einer gegebenen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Größe der Fläche unter dem Funktionsgraphen zuordnet. Das Integral ist also eine Abbildung von der Menge der Funktionen in die reellen Zahlen; eine solche Abbildung wird *Funktional* genannt.

Für die folgende Klasse von Funktionen ist die Berechnung des Flächeninhalts sehr einfach.

**Definition 11.1** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion*, wenn es Punkte  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

gibt, so dass  $f$  auf jedem offenen Intervall  $(x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  konstant gleich  $c_k$  für ein  $c_k \in \mathbb{R}$  ist. Die Menge aller Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  bezeichnen wir mit  $T(a, b)$ . Die Punktmenge  $\{x_0, \dots, x_n\}$  nennen wir *Unterteilung* von  $[a, b]$ .  $\square$

**Bemerkung 11.2** (i) Beachte, dass die Unterteilung  $\{x_0, \dots, x_n\}$  in Definition 11.1 nicht eindeutig ist. Z.B. ist die geforderte Konstantheitsbedingung stets weiterhin erfüllt, wenn wir beliebige weitere Punkte aus  $[a, b]$  zu der Unterteilung hinzufügen.

(ii) Auf Grund von (i) können wir für zwei verschiedene Treppenfunktionen  $f, g \in T(a, b)$  stets o.B.d.A. annehmen, dass diese die Bedingung aus Definition 11.1 auf der gleichen Unterteilung erfüllen, denn: Erfüllt  $f$  die Bedingung mit der Unterteilung  $\{x_0, \dots, x_n\}$  und  $g$  auf der Unterteilung  $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\}$  so erfüllen beide Funktionen die Bedingung auf der Unterteilung  $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\}$ .

(iii) Für eine konstante Funktion  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c$  für alle  $x \in E$  schreiben wir kurz  $f \equiv c$ . Die Einschränkung einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf eine Teilmenge  $D' \subset D$  wird mit  $f|_{D'}$  bezeichnet. Die Funktion  $f|_{D'}$  liefert also genau die gleichen Funktionswerte wie  $f$ , lediglich die Definitionsmenge ändert sich. Mit diesen beiden Schreibweisen können wir die Treppenfunktionseigenschaft kurz als  $f|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c_k$  schreiben.  $\square$

Die Berechnung des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Treppenfunktion ist deswegen so einfach, weil die Fläche ja nur aus Rechtecken der Höhe  $c_k$  und der Breite  $x_{k+1} - x_k$  besteht<sup>1</sup>. Definieren wir den Flächeninhalt eines solchen Rechtecks als  $(x_{k+1} - x_k)c_k$ , so erhalten wir automatisch — wie gewünscht — positive Werte für Flächen oberhalb der  $x$ -Achse und negative Werte für Flächen unterhalb der  $x$ -Achse. Das Integral für die gesamte Treppenfunktion auf einem Intervall  $[a, b]$  lässt sich nun leicht durch Addieren der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke ermitteln.

**Definition 11.3** Für eine Treppenfunktion  $f \in T(a, b)$  und eine Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  mit  $f|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c_k$  definieren wir das Integral als

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)c_k.$$

$\square$

Auch wenn diese Definition sehr anschaulich ist, müssen wir uns doch mathematisch davon überzeugen, dass sie einen eindeutigen Wert liefert — man sagt dann, dass der definierte Wert *wohldefiniert* ist. Der Grund dafür ist die bereits erwähnte Tatsache, dass eine Treppenfunktion mit Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja auch eine Treppenfunktion zu einer anderen Unterteilung  $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{n'} = b$  sein kann. Da die Definition des Integrals explizit von der Unterteilung abhängt, müssen wir uns davon überzeugen, dass sich der Wert des Integrals nicht ändert, wenn wir die Unterteilung ändern.

Betrachten wir dazu eine Treppenfunktion  $f \in T(a, b)$  und zwei Unterteilungen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und  $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{n'} = b$ , so dass  $f|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c_k$  für  $k = 0, \dots, n-1$  und  $f|_{(x'_k, x'_{k+1})} \equiv c'_k$  für  $k = 0, \dots, n'-1$  gilt. Schreiben wir kurz

$$I := \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)c_k \quad \text{und} \quad I' := \sum_{k=0}^{n'-1} (x'_{k+1} - x'_k)c'_k,$$

<sup>1</sup>Beachte, dass wir keine Annahme über die Werte der Treppenfunktion an den Stellen  $x_k$  selbst gemacht haben. Das ist für die Flächenberechnung aber auch nicht nötig, weil die Flächen an den Stellen  $x_k$  die Breite 0 und damit auch den Flächeninhalt 0 haben, egal welchen Wert  $f(x_k)$  annimmt. Aus dem gleichen Grund hat das Rechteck  $(x_k, x_{k+1}) \times [0, c_k]$  ohne rechten und linken Rand auch den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck  $[x_k, x_{k+1}] \times [0, c_k]$  mit Rändern.

so müssen wir also zeigen, dass  $I = I'$  gilt. Wir betrachten dazu zwei Fälle.

**Fall 1:**  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\}$

In diesem Fall existiert für jedes  $k$  ein  $k'_k$  mit

$$x_k = x'_{k'_k} < x'_{k'_k+1} < \dots < x'_{k'_{k+1}-1} = x_{k+1}$$

und es folgt  $c_k = c'_{k'_k} = c'_{k'_k+1} = \dots = c'_{k'_{k+1}-1}$ . Damit ergibt sich

$$I' = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=k'_k}^{k'_{k+1}-1} (x'_{k'+1} - x'_{k'}) c'_k = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k'=k'_k}^{k'_{k+1}-1} (x'_{k'+1} - x'_{k'})}_{=x_{k+1}-x_k} c_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k = I.$$

**Fall 2:** Seien  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  und  $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\}$  beliebig. Dann bilden nach Bemerkung 11.2(i) auch die Punkte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\}$  eine Unterteilung, auf der  $f$  die Bedingung aus Definition 11.1 erfüllt. Bezeichnen wir das Integral zu dieser Unterteilung mit  $I^*$ , so folgt aus Fall 1  $I = I^*$  und  $I' = I^*$ . Damit folgt  $I = I'$ .  $\square$

Der folgende Satz gibt eine wichtige Eigenschaft von Integralen für Treppenfunktionen an.

**Satz 11.4** Seien  $f, g \in T(a, b)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f + g \in T(a, b)$  und  $\lambda f \in T(a, b)$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Definieren wir zudem die Ungleichung

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b], \quad (11.1)$$

so gilt die Folgerung

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Beweis:** Dass  $\lambda f$  eine Treppenfunktion ist, ist sofort klar. Da wir nach Bemerkung 11.2(ii) annehmen können, dass die zwei Treppenfunktionen  $f$  und  $g$  die Treppenfunktionseigenschaft zu ein und derselben Unterteilung erfüllen, ist auch die Summe der beiden Funktionen ebenfalls wieder eine Treppenfunktion. Zudem können wir die Integrale über die beiden Funktionen auf Basis der gleichen Unterteilung berechnen.

Alle Aussagen folgen dann direkt aus der Tatsache, dass die gesuchten (Un-)gleichungen für jeden Summanden in der Definition von  $\int_a^b$  und damit auch für das gesamte Integral gelten.  $\square$



**Bemerkung 11.5** Beachte, dass im Allgemeinen

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left( \int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left( \int_a^b g(x)dx \right)$$

ist. Der Grund ist, dass im Allgemeinen

$$\sum_{j=0}^n a_k b_k \neq \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^n b_k \right)$$

gilt (vgl. auch die Ausführungen am Ende von Abschnitt 4.1) und sich diese Ungleichheit über die definierenden Summen auf die Integrale überträgt.  $\square$

## 11.2 Das Riemann-Integral

Die Idee des Riemann-Integrals ist nun, die Fläche unter einer beliebigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Fläche unter Treppenfunktionen anzunähern. Dazu definieren wir — unter Verwendung der in (11.1) definierten Ungleichung für Funktionen — die folgenden Ober- und Unterintegrale.

**Definition 11.6** Für eine beliebige beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir das *Oberintegral*

$$\int_a^{*b} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in T(a, b), \varphi \geq f \right\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_{*a}^b f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in T(a, b), \varphi \leq f \right\},$$

wobei die Integrale über  $\varphi$  im Sinne von Definition 11.3 zu verstehen sind.  $\square$

Beachte, dass die Annahme der Beschränktheit wesentlich für die Existenz von Treppenfunktionen  $\geq f$  und  $\leq f$  ist.

Aus Satz 11.4 (in Verbindung mit Satz 2.18) folgt sofort die Ungleichung

$$\int_a^{*b} f(x)dx \geq \int_{*a}^b f(x)dx.$$

Eine Funktion ist nun gerade dann Riemann-integrierbar, wenn diese Ungleichung eine Gleichung ist, oder anders gesagt, wenn das Infimum über die Approximationen von oben den gleichen Wert liefert wie das Supremum über die Approximationen von unten.

**Definition 11.7** Wir nennen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *Riemann-integrierbar* (auf dem Intervall  $[a, b]$ ), falls

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von  $f$  als

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{*b} f(x)dx.$$

□

**Beispiel 11.8** (i) Jede Treppenfunktion  $f \in T(a, b)$  ist Riemann-integrierbar, denn mit  $\varphi = f$  gilt

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \inf \left\{ \int_a^{*b} \varphi(x)dx \mid \varphi \in T(a, b), \varphi \geq f \right\} \leq \int_a^b f(x)dx$$

und

$$\int_a^b f(x)dx = \sup \left\{ \int_a^{*b} \varphi(x)dx \mid \varphi \in T(a, b), \varphi \leq f \right\} \geq \int_a^{*b} f(x)dx,$$

wobei die Integrale über  $f$  im Sinne von Definition 11.3 zu verstehen sind. Daraus folgt

$$\int_a^{*b} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

und damit die Gleichheit folgt (weil die umgekehrte Ungleichung ja stets gilt). Aus diesem Grunde unterscheiden wir in der Notation auch nicht zwischen dem Riemann-Integral aus Definition 11.7 und dem Integral über Treppenfunktionen aus Definition 11.3.

(ii) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

vgl. Beispiel 5.2(h), auf  $D = [0, 1]$ . Da diese Funktion in jedem Intervall  $(x_k, x_{k+1})$  mit  $x_{k+1} > x_k$  sowohl den Wert 1 als auch den Wert 0 annimmt (denn in jedem reellen Intervall liegen ja auch rationale Zahlen), gilt für jede Treppenfunktion  $\varphi \geq f$  die Ungleichung  $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \geq 1$ . Die kleinste Treppenfunktion  $\varphi \geq f$  erfüllt folglich die Gleichung  $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} = 1$ . Analog gilt für die größte Treppenfunktion  $\varphi \leq f$  die Gleichung  $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} = 0$ . Damit folgt

$$\int_{*0}^1 f(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{*1} f(x)dx = 1,$$

weswegen diese Funktion nicht Riemann-integrierbar ist.

(iii) Mit Hilfe der Treppenfunktionen kann man für viele elementare Funktionen das Riemann-Integral im Prinzip ausrechnen. Da dies aber ausgesprochen mühsam ist, werden wir dies hier nicht durchführen. Stattdessen werden wir im nachfolgenden Kapitel Rechenregeln herleiten, mit denen dies viel einfacher geht. □

Der folgende Satz gibt ein alternatives Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit an, das sofort aus der Definition des Riemann-Integrals folgt.

**Satz 11.9** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  existieren mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

**Beweis:** Folgt sofort aus der Definition von Ober- und Unterintegral und von Supremum und Infimum.  $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun beweisen, dass jede stetige Funktion Riemann-integrierbar ist.

**Satz 11.10** Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.

**Beweis:** Wir zeigen, dass die Voraussetzung von Satz 11.9 erfüllt ist. Sei dazu  $\varepsilon' > 0$  beliebig. Nach Satz 5.20 ist  $f$  gleichmäßig stetig. Setze  $\varepsilon := \varepsilon'/(b-a)$  und wähle  $\delta > 0$  wie in der Definition 5.19 der gleichmäßigen Stetigkeit. Sei  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  eine Unterteilung mit  $x_{k+1} - x_k < \delta$  und sei  $c_k = \min\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$  und  $c'_k = \max\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ . Da für je zwei Punkte  $x, y \in [x_k, x_{k+1}]$  die Ungleichung  $|x-y| < \delta$  gilt, folgt  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  und damit auch  $c'_k - c_k < \varepsilon$ .

Betrachten wir nun Treppenfunktionen mit

$$\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c_k \quad \text{und} \quad \psi|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c'_k$$

und  $\varphi(x_k) = \psi(x_k) = f(x_k)$ , so gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Zudem gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(c'_k - c_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\varepsilon = (b-a)\varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit Satz 11.9.  $\square$

### 11.3 Riemann-Summen

Die Konstruktion im Beweis von Satz 11.10 liefert eine Möglichkeit, das Riemann-Integral für stetige Funktionen näherungsweise zu berechnen. Wir betrachten dazu ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  sowie eine Unterteilung  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  mit  $x_{k+1} - x_k < \delta$  für das  $\delta$  aus dem Beweis von Satz 11.10 mit  $\varepsilon' = \varepsilon$ . Wählen wir nun beliebige Punkte  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  sowie eine Treppenfunktion  $\vartheta \in T(a, b)$  mit

$$\vartheta|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv f(\xi_k),$$

so gilt nach der Definition des Integrals für Treppenfunktionen

$$\int_a^b \vartheta(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k);$$

diese Summe wird *Riemann-Summe* genannt.

Nach Konstruktion der Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  im Beweis von Satz 11.10 folgt dann die Ungleichung  $\varphi(x) \leq \vartheta(x) \leq \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Aus der Definition des Integrals für Treppenfunktionen folgt damit

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \vartheta(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx + \varepsilon.$$

Da ebenfalls

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$$

gilt, folgt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) \right| \leq \varepsilon. \quad (11.2)$$

Wir können das Integral also durch die Riemann-Summe  $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$  näherungsweise berechnen.<sup>2</sup> Da  $\varepsilon > 0$  in (11.2) beliebig ist, folgt insbesondere, dass der Wert der Riemann-Summe für  $\delta \rightarrow 0$  gegen den Wert des Integrals konvergiert.

**Beispiel 11.11** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x$  auf dem Intervall  $[0, y]$  für ein  $y > 0$ . Wir setzen  $\delta = y/n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und wählen die Unterteilung  $x_k = k\delta$ ; damit folgt  $x_{k+1} - x_k = \delta$ . Wählen wir nun  $\xi_k = x_k$ , so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\delta) \delta k = \delta^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \delta^2 \frac{n(n-1)}{2} = \delta^2 \frac{n^2}{2} - \delta^2 \frac{n}{2} = \frac{y^2}{2} - \delta \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert dieser Ausdruck gegen  $y^2/2$  und wir erhalten daher

$$\int_0^y x dx = \frac{y^2}{2}.$$

□

<sup>2</sup>Mit einem aufwendigeren Beweis (für den wir z.B. auf Forster [6, §18] verweisen) kann man zeigen, dass diese Näherung für alle Riemann-integrierbaren Funktionen funktioniert, also nicht nur für die stetigen Funktionen.

## 11.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ähnlich wie bei der Differentialrechnung gibt es auch bei der Integralrechnung einen Mittelwertsatz. Mit diesem werden wir dieses Kapitel beschließen.

**Satz 11.12** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $g \geq 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Im Spezialfall  $g \equiv 1$  gilt

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

**Beweis:** Für

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

gilt  $mg \leq fg \leq Mg$  und damit

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Daher existiert  $\mu \in [m, M]$  mit

$$\mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert nun ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \mu$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

# Kapitel 12

## Differential- und Integralrechnung

Stand:  
2. August 2022

Wir haben im letzten Kapitel sehr wenige Beispiele gerechnet, was daran liegt, dass die anschauliche Definition des Riemann-Integrals über Unter- und Obersummen für rechnerische Zwecke sehr umständlich ist. In diesem Kapitel werden wir zunächst zeigen, dass die Integration gerade die Umkehrung der Differentiation ist. Dies gibt uns dann die Möglichkeit, das Integral für viele elementare Funktionen anzugeben und Rechenregeln zur Bestimmung komplizierterer Integrale herzuleiten.

Um den Zusammenhang zwischen der Differential- und Integralrechnung herzustellen, müssen wir zunächst den Zusammenhang von Integralen auf unterschiedlichen Intervallen klären. Dies macht der folgende Satz.

**Satz 12.1** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für beliebiges  $c \in (a, b)$  die Funktionen  $f|_{[a,c]}$  und  $f|_{[c,b]}$  Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (12.1)$$

**Beweis:** Offenbar kann — indem wir gegebenenfalls den Punkt  $c$  zur Unterteilung hinzufügen — jede Treppenfunktion in  $T(a, b)$  in zwei Treppenfunktionen in  $T(a, c)$  und  $T(c, b)$  aufgeteilt werden. Umgekehrt können je zwei Treppenfunktionen in  $T(a, c)$  und  $T(c, b)$  zu einer Treppenfunktion in  $T(a, b)$  zusammengesetzt werden. Daher gilt die Aussage für die Integrale über die Treppenfunktionen, damit auch für das Ober- und Unterintegral und somit für das Riemann-Integral.  $\square$

Die Einschränkung  $a < c < b$  können wir vermeiden, wenn wir festlegen, was der Wert eines Integrals sein soll, bei dem die obere Integrationsgrenze kleiner oder gleich der unteren ist.

**Definition 12.2** Für eine Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebige Punkte  $c, d \in [a, b]$  mit  $c > d$  definieren wir

$$\int_c^d f(x)dx := - \int_d^c f(x)dx.$$

Zudem definieren wir für alle  $c \in [a, b]$

$$\int_c^c f(x)dx := 0.$$

□

Mit diesen Definitionen gilt die Formel

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \quad (12.2)$$

dann für alle Riemann-integrierbaren Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und für beliebige Punkte  $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ . Dies beweist man durch Fallunterscheidung für die verschiedenen Möglichkeiten der  $<$  bzw.  $\leq$ -Beziehungen zwischen  $x_1, x_2$  und  $x_3$ . Als Beispiel betrachten wir hier nur den Fall  $x_1 < x_3 < x_2$ . In diesem Fall gilt nach (12.1) mit  $a = x_1, b = x_2$  und  $c = x_3$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)dx$$

und damit

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_3}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx.$$

Eine sofortige Folgerung aus diesen Formeln ist die Stetigkeit der Abbildungen

$$a \mapsto \int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad b \mapsto \int_a^b f(x)dx,$$

denn z.B. für  $a_n \rightarrow a$  gilt

$$\int_{a_n}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_{a_n}^a f(x)dx.$$

Da jede Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist folgt

$$\left| \int_{a_n}^a f(x)dx \right| \leq \left| \int_{a_n}^a |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_{a_n}^a M dx \right| = |a_n - a|M \rightarrow 0$$

für  $a_n \rightarrow a$ .

## 12.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Im Folgenden sei  $I \subset \mathbb{R}$  stets ein beliebiges Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

**Satz 12.3** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $a \in I$ . Für  $x \in I$  definiere

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy.$$

Dann ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $F' = f$ .

**Beweis:** Für  $h \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(y) dy - \int_a^x f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_a^x f(y) dy + \int_x^{x+h} f(y) dy - \int_a^x f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) dy. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (mit  $g \equiv 1$ ) folgt daraus die Existenz von  $\xi \in [x, x+h]$  falls  $h > 0$  bzw.  $\xi \in [x+h, x]$  falls  $h < 0$  mit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) dy = \frac{1}{h} (hf(\xi)) = f(\xi).$$

Für  $h \rightarrow 0$  folgt  $\xi \rightarrow x$  und aus der Stetigkeit von  $f$  somit  $f(\xi) \rightarrow f(x)$ . Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 12.4** Wir haben in Beispiel 11.11 bereits gesehen, dass für die Funktion  $f(x) = x$  die Gleichung

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = \frac{x^2}{2}$$

gilt. Wegen

$$F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$$

bestätigt dies die Aussage von Satz 12.3.  $\square$

Satz 12.3 motiviert die folgende Definition.

**Definition 12.5** Eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion einer integrierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , falls  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$  gilt.  $\square$

**Beispiel 12.6** (i) Für  $f(x) = \sin x$  ist  $F(x) = -\cos x$  eine Stammfunktion, denn es gilt  $F'(x) = -(-\sin x) = \sin x$ . Ebenso sieht man, dass  $F(x) = \sin x$  eine Stammfunktion von  $f(x) = \cos x$  ist.

(ii) Für jedes Polynom  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ist

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + a_0 x$$

eine Stammfunktion, wie man durch Ableiten leicht überprüft.

Einige weitere Stammfunktionen werden in Beispiel 12.9 angegeben.  $\square$

**Bemerkung 12.7** Satz 12.3 zeigt, dass eine Stammfunktion für stetiges  $f$  immer existiert. Zudem ist die Stammfunktion einer Funktion  $f$  eindeutig bis auf eine additive Konstante: Wenn  $F_1$  und  $F_2$  zwei Stammfunktionen sind, so gilt  $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$  für alle  $x \in I$ . Folglich ist  $(F_1 - F_2)' \equiv 0$ , weswegen  $F_1 - F_2$  nach Satz 10.6 eine konstante Funktion ist. Es existiert also ein  $C \in \mathbb{R}$  mit  $F_2(x) = F_1(x) + C$  für alle  $x \in I$ .  $\square$



Satz 12.3 zeigt, wie man Integrale nach der oberen Integrationsgrenze ableitet. Der folgende Satz, der sogenannte Haupt- oder Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, gibt nun eine allgemeine Formel für das Integral mit Hilfe der Stammfunktion.

**Satz 12.8 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt für alle  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

was wir kurz als

$$F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

schreiben.

**Beweis:** Für beliebiges  $x \in I$  ist

$$F_1(x) := \int_a^x f(y) dy$$

nach Satz 12.3 eine Stammfunktion von  $f$  mit

$$F_1(a) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(b) = \int_a^b f(y) dy.$$

Für  $F = F_1$  gilt daher die Behauptung. Für jede weitere Stammfunktion  $F$  existiert nach Bemerkung 12.7 ein  $C \in \mathbb{R}$  mit  $F(x) = F_1(x) + C$ . Also gilt

$$F(b) - F(a) = F_1(b) + C - F_1(a) - C = F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(y) dy$$

und damit die Behauptung. □

**Beispiel 12.9** (i) Für  $f(x) = \sin x$  gilt (vgl. Bsp. 12.6(i))

$$\int_0^\pi \sin x = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

(ii) Für die Funktion  $f(x) = x^3$  gilt (vgl. Bsp. 12.6(i))

$$\int_a^b f(x) = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$$

(iii) Es gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b \quad \text{für } a, b > 0,$$

da  $\ln' x = 1/x$  für  $x > 0$ . Analog gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(-x) \Big|_a^b \quad \text{für } a, b < 0.$$

weil  $(\ln(-x))' = 1/x$  für  $x < 0$ . Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_a^b \quad \text{für } a < b \text{ und } 0 \notin [a, b].$$

(iv) Es gilt

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b.$$

Für  $a = 0$  und  $b = 1$  gilt also z.B.

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - 1 \approx 1,71828182846$$

□

## 12.2 Rechenregeln

Aus den Rechenregeln der Differentialrechnung kann man nun unter Ausnutzung der Beziehung zwischen Differential- und Integralrechnung korrespondierende Rechenregeln für Integrale ableiten. Wir beginnen mit der Kettenregel der Differentialrechnung, deren Gegenstück in der Integralrechnung die folgende Substitutionsregel ist.

**Satz 12.10 (Substitutionsregel)** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\varphi([a, b]) \subset I$ . Dann gilt<sup>1</sup>

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

**Beweis:** Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt mit der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Also ist  $F \circ \varphi$  eine Stammfunktion von  $x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)$  und es folgt

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F \circ \varphi(x) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(y) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□

Beachte, dass die Umbenennung der Integrationsvariablen von  $x$  zu  $y$  im zweiten Integral nicht nötig ist, um eine mathematisch korrekte Aussage zu erhalten. Sie vermeidet aber Verwechslungen bei der Anwendung der Substitution. Als Merkregel kann man die Gleichungen  $y = \varphi(x)$  und  $dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$  verwenden.

<sup>1</sup>Mit der symbolischen Kurzschreibweise  $d\varphi(x) := \varphi'(x)dx$  kann man dieses kürzer und leichter merkbar schreiben als

$$\int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

**Beispiel 12.11** (i) Satz 12.10 mit  $\varphi(x) = x + c$  ( $\Rightarrow \varphi'(x) = 1$ ) liefert

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)dy.$$

(ii) Satz 12.10 mit  $\varphi(x) = cx$ ,  $c \neq 0$ , ( $\Rightarrow \varphi'(x) = c$ ) ergibt

$$c \int_a^b f(cx)dx = \int_{ca}^{cb} f(y)dy.$$

(iii) Mit  $\varphi(x) = x^2$  und  $\varphi'(x) = 2x$  erhalten wir

$$2 \int_a^b x f(x^2)dx = \int_{a^2}^{b^2} f(y)dy.$$

(iv) Mit  $f(x) = 1/x$  und beliebigem  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\varphi(x) \neq 0$  für  $x \in [a, b]$  erhalten wir

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \ln |y| \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln |\varphi(x)| \Big|_a^b.$$

Mit  $\varphi(x) = \cos x$  und  $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$  kann man so z.B. berechnen

$$\int_a^b \tan x dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| \Big|_a^b.$$

(v) (**Berechnung der Kreisfläche**) Der Rand des Kreises mit Radius 1 um den Punkt  $x = 0$ ,  $y = 0$  ist gegeben durch die Punkte  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 + y^2 = 1$ . Betrachten wir nur die Punkte mit  $y \geq 0$  (also den "oberen" Halbkreis), so können wir diese als Paare  $(x, \sqrt{1-x^2})$  bzw.  $(x, f(x))$  mit der Funktion  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  darstellen. Durch Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

können wir also die Halbkreisfläche (und durch Verdopplung des erhaltenen Werts dann auch die gesamte Kreisfläche) berechnen.

Wir wenden die Substitutionsformel mit  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\varphi(x) = \sin x$  und zunächst beliebigen Integrationsgrenzen  $a < b$  an. Diese ergibt

$$\int_a^b \sqrt{1-\sin^2 x} \sin' x dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_{\sin a}^{\sin b} \sqrt{1-y^2} dy.$$

Mit der Wahl  $a := \arcsin(-1) = -\pi/2$ ,  $b := \arcsin(1) = \pi/2$  erhalten wir  $\sin a = -1$  und  $\sin b = 1$  und damit

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_a^b \sqrt{1-\sin^2 x} \sin' x dx = \int_a^b \cos^2 x dx.$$

Wegen

$$\cos^2 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_a^b \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_a^b + \frac{1}{2} x \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin(-\pi)) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wegen  $\sin \pi = \sin(-\pi) = 0$ . Der Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 beträgt also — nicht gänzlich unerwartet — gerade  $\pi/2$ .  $\square$

Kommen wir nun zu der zweiten wichtigen Rechenregel für Ableitungen, der Produktregel. Diese ist Grundlage für die Regel der partiellen Integration.

**Satz 12.12 (partielle Integration)** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt<sup>2</sup>

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b g(x)f'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b.$$

**Beweis:** Für  $F := fg$  gilt mit der Produktregel

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Mit Satz 12.8 folgt also

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b g(x)f'(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(x) \Big|_a^b = f(x)g(x) \Big|_a^b$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 12.13** (i) Mit  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x$  und  $b > a > 0$  folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln x dx &= \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \\ &= x \ln x \Big|_a^b - \int_a^b 1 dx \\ &= x \ln x \Big|_a^b - x \Big|_a^b = x(\ln x - 1) \Big|_a^b \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Mit der in Satz 12.10 eingeführten Kurzschreibweise kann man dies auch schreiben als

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b.$$

(ii) Mit  $f(x) = \arctan x$ ,  $g(x) = x$  ergibt sich

$$\int_a^b \arctan x dx = x \arctan x \Big|_a^b - \int_a^b x \arctan'(x) dx.$$

Mit  $\arctan' x = 1/(1+x^2)$  erhalten wir

$$\int_a^b x \arctan'(x) dx = \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Mit  $\varphi(x) = x^2 + 1$  ( $\Rightarrow \varphi'(x) = 2x$ ) und Beispiel 12.11(iv) folgt dann

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |\varphi(x)| \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_a^b.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_a^b \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_a^b.$$

□

Eine Anwendung der partiellen Integration gibt der folgende Satz.

**Satz 12.14 (Trapezregel)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$ , so dass die Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

gilt.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst den Fall  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Wir setzen  $g(x) = x(1-x)/2$ . Daraus folgt  $g'(x) = 1/2 - x$  und  $g''(x) = -1$  und damit

$$\int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 g''(x) f(x) dx.$$

Wenden wir die partielle Integration auf dieses Integral an, so folgt

$$- \int_0^1 g''(x) f(x) dx = -g'(x) f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 g'(x) f'(x) dx.$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ergibt sich nun zu

$$-g'(x) f(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (f(0) + f(1))$$

und für den zweiten erhalten wir mit nochmaliger partieller Integration

$$\int_0^1 g'(x) f'(x) dx = g(x) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 g(x) f''(x) dx.$$

Hierbei ist der erste Term auf der rechten Seite gleich Null und für den zweiten Term erhalten wir mit dem Mittelwertsatz

$$\int_0^1 g(x)f''(x)dx = f''(\xi) \int_0^1 g(x)dx = \frac{f''(\xi)}{12}.$$

Zusammen ergibt dies

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{f''(\xi)}{12}$$

und damit die Behauptung.

Für beliebige  $a, b$  führen wir eine Substitution mit  $\varphi(x) = a + x(b - a)$  ( $\varphi'(x) = b - a$ ) durch. Damit gilt nach dem ersten Teil

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y)dy &= \int_0^1 f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \frac{1}{2}(f(\varphi(0))\varphi'(0) + f(\varphi(1))\varphi'(1)) - ((f \circ \varphi)\varphi')''(\xi) \frac{1}{12} \\ &= \frac{b-a}{2}(f(0) + f(1)) - ((f \circ \varphi)\varphi')''(\xi) \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Aus den üblichen Ableitungsregeln folgt

$$((f \circ \varphi)\varphi')''(\xi) = (b-a)^3 f''(\varphi(\xi))$$

und damit die Behauptung, wenn wir  $\xi$  durch  $\varphi(\xi)$  ersetzen.  $\square$

Die Trapezregel kann dazu verwendet werden, Integrale näherungsweise zu berechnen, indem man das Integrationsintervall  $[a, b]$  in  $(b-a)/h$  Teilintervalle der Länge  $h$  aufspaltet und die Formel dann jeweils auf den Intervallen  $[a + kh, a + (k+1)h]$  anwendet. Sei  $C \geq 0$  dafür eine Schranke für  $|f''|$  auf  $[a, b]$ . Auf jedem Teilintervall beträgt der Fehler dann  $Ch^3/12$ , auf dem gesamten Intervall mit  $(b-a)/h$  Teilintervallen also

$$C \frac{b-a}{h} \frac{h^3}{12} = C \frac{b-a}{12} h^2.$$

Je kleiner wir die Länge  $h$  der Teilintervalle also wählen, desto genauer wird die Näherungslösung. Dabei sagt uns der Term  $h^2$ , dass der Fehler sich bei Halbierung von  $h$  um den Faktor  $1/4$  verringert.



# Kapitel 13

## Eigenschaften und Erweiterungen des Riemann-Integrals

Stand:  
2. August 2022

### 13.1 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Wir werden im Folgenden einige Eigenschaften des Riemann-Integrals aus entsprechenden Eigenschaften des Ober- und Unterintegrals ableiten. Das folgende Lemma sorgt dabei dafür, dass wir zur Untersuchung von Eigenschaften des Ober- und Unterintegrals nur jeweils eins der beiden betrachten müssen.

**Lemma 13.1** Es gilt

$$\int_{*a}^b f(x)dx = - \int_a^{*b} (-f(x))dx.$$

**Beweis:** Dies folgt aus der Äquivalenz

$$\varphi \leq f \quad \Leftrightarrow \quad -\varphi \geq -f$$

und den Identitäten

$$\int_a^b \varphi(x)dx = - \int_a^b (-\varphi(x))dx$$

sowie — für beliebige Mengen  $A \subset \mathbb{R}$  —

$$\inf\{a \mid a \in A\} = - \sup\{-a \mid a \in A\}.$$

□

**Satz 13.2** Für beschränkte Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda > 0$  gilt für das Oberintegral

$$\int_a^{*b} (f + g)(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx + \int_a^{*b} g(x)dx$$

sowie

$$\int_a^{*b} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{*b} f(x)dx.$$



**Beweis:** Für die erste Aussage genügt zu zeigen, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung

$$\int_a^{*b} (f+g)(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx + \int_a^{*b} g(x)dx + \varepsilon$$

gilt. Nach Definition des Oberintegrals und aus der Definition des Infimums folgt, dass Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  existieren mit  $\varphi \geq f$ ,  $\psi \geq g$  sowie

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^{*b} g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da aus  $\varphi \geq f$  und  $\psi \geq g$  die Ungleichung  $\varphi + \psi \geq f + g$  folgt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^{*b} (f+g)(x)dx &\leq \int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx \\ &\leq \int_a^{*b} f(x)dx + \int_a^{*b} g(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Für die zweite Aussage reicht es zu zeigen, dass für alle  $\varepsilon > 0$  die Ungleichungen

$$\lambda \int_a^{*b} f(x)dx - \varepsilon \leq \int_a^{*b} (\lambda f)(x)dx \leq \lambda \int_a^{*b} f(x)dx + \varepsilon$$

gelten. Sei dazu  $\varphi \in T(a, b)$  mit  $\varphi \geq f$  und

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Dann gilt  $\lambda\varphi \geq \lambda f$  und folglich

$$\int_a^{*b} (\lambda f)(x)dx \leq \int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx \leq \lambda \int_a^{*b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Sei analog  $\psi \in T(a, b)$  mit  $\psi \geq \lambda f$  und

$$\int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^{*b} (\lambda f)(x)dx + \varepsilon.$$

Dann gilt  $\psi/\lambda \geq f$  und es folgt

$$\int_a^{*b} (\lambda f)(x)dx \geq \int_a^b \psi(x)dx - \varepsilon = \lambda \int_a^b (\psi/\lambda)(x)dx - \varepsilon \geq \lambda \int_a^{*b} f(x)dx - \varepsilon.$$

□

**Satz 13.3** Für Riemann-integrierbare Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  sind auch  $f + g$  und  $\lambda f$  Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

sowie

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Falls zudem  $f \leq g$  gilt, so folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**Beweis:** Für  $f + g$  folgt aus Satz 13.2

$$\int_a^{*b} (f + g)(x) dx \leq \int_a^{*b} f(x) dx + \int_a^{*b} g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Mit Lemma 13.1 und Satz 13.2 folgt zudem

$$\begin{aligned} \int_{*a}^b (f + g)(x) dx &= - \int_a^{*b} (-f - g)(x) dx \geq - \int_a^{*b} (-f)(x) dx - \int_a^{*b} (-g)(x) dx \\ &= \int_{*a}^b f(x) dx + \int_{*a}^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{*a}^b (f + g)(x) dx \leq \int_a^{*b} (f + g)(x) \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_{*a}^b (f + g)(x) dx,$$

woraus Gleichheit und damit Riemann-Integrierbarkeit und die behauptete Gleichheit folgt.

Für  $\lambda f$  folgt die Aussage im Falle  $\lambda > 0$  sofort aus Satz 13.2, wegen

$$\int_a^{*b} (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^{*b} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\int_{*a}^b (\lambda f)(x) dx = - \int_a^{*b} (\lambda(-f))(x) dx = -\lambda \int_a^{*b} (-f)(x) dx = \lambda \int_{*a}^b f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Für  $\lambda = 0$  ist die Aussage klar (weil  $0 \cdot f$  eine Treppenfunktion ist) und für  $\lambda < 0$  folgt die Aussage wegen

$$\int_{*a}^b (\lambda f)(x) dx = - \int_a^{*b} ((-\lambda)f)(x) dx = \lambda \int_a^{*b} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\int_a^{*b} (\lambda f)(x) dx = - \int_{*a}^b ((-\lambda)f)(x) dx = \lambda \int_{*a}^b f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Die angegebene Ungleichung folgt, da wegen  $f - g \leq 0$  die Funktion  $\varphi \equiv 0$  eine Treppenfunktion mit  $\varphi \geq f - g$  ist. Damit ergibt sich

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^{*b} (f - g)(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx = 0$$

und folglich die Behauptung.  $\square$

Die ersten beiden in Satz 13.3 nachgewiesene Eigenschaften sagen aus, dass das Integral eine lineare Abbildung von der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen nach  $\mathbb{R}$  ist: Summen und reelle Vielfache von Funktionen werden wieder auf Summen und reelle Vielfache ihrer Integralwerte abgebildet. Man nennt das Riemann-Integral aus diesem Grunde ein *lineares Funktional*. Wegen der dritten Eigenschaft ist das Integral zudem ein *monotones Funktional*.

## 13.2 Weitere Riemann-integrierbare Funktionen

Wir haben in Kapitel 11 bereits gesehen, dass Treppenfunktionen und stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind, die Funktion  $f(x) = 1, x \in \mathbb{Q}$  und  $f(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  aber nicht. Wir wollen in diesem Abschnitt weitere Klassen von Funktionen betrachten, die Riemann-integrierbar sind.

**Satz 13.4** Jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage für monoton wachsende Funktionen, der Beweis für monoton fallende Funktionen verläuft analog.

Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Unterteilung

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Definieren wir dann  $c_k := f(x_k)$ ,  $c'_k := f(x_{k+1})$  und zugehörige Treppenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  wie im Beweis von Satz 11.10, so folgen aus der Monotonie von  $f$  die Ungleichungen  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Zudem gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(c'_k - c_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Wählen wir zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  nun  $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ , so folgt

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon$$

und die Behauptung folgt mit Satz 11.9.  $\square$

**Definition 13.5** Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir Funktionen

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Aus dieser Definition folgen sofort die Gleichungen

$$f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

**Satz 13.6** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gilt

- (i) Die Funktionen  $f^+$  und  $f^-$  sind Riemann-integrierbar.
- (ii) Für jedes  $p \in [1, \infty)$  ist  $|f|^p$  Riemann-integrierbar. Zudem gilt die Ungleichung (Dreiecksungleichung für Integrale)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- (iii) Die Funktion  $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar. Dabei gilt im Allgemeinen

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

**Beweis:** (i) Nach Satz 11.9 existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Offensichtlich sind dann auch  $\varphi^+$  und  $\psi^+$  Treppenfunktionen mit  $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$

$$\int_a^b \psi^+(x) - \varphi^+(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Folglich ist  $f^+$  integrierbar. Analog beweist man die Integrierbarkeit von  $f^-$ .

(ii) Nach (i) und Satz 13.3 ist  $|f| = f^+ + f^-$  integrierbar, die Aussage gilt also für  $p = 1$ . Für  $p > 1$  genügt es, Funktionen  $f$  mit  $0 \leq |f| \leq 1$  zu betrachten, denn da  $|f|$  beschränkt ist, können wir dies stets durch Multiplikation von  $|f|$  mit einem hinreichend kleinen  $\lambda > 0$  erreichen und die skalierte Funktion ist nach Satz 13.3 genau dann integrierbar, wenn die nicht skalierte Funktion integrierbar ist.

Da  $|f|$  integrierbar ist, existieren nach Satz 11.9 zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  mit  $\varphi \leq |f| \leq \psi$  und

$$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Wegen  $0 \leq |f| \leq 1$  kann dabei  $\varphi \geq 0$  und  $\psi \leq 1$  gewählt werden. Dann sind  $\varphi^p, \psi^p$  Treppenfunktionen mit  $\varphi^p \leq |f|^p \leq \psi^p$ . Für die Funktion  $g(x) = x^p$  gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für  $0 \leq x < y \leq 1$

$$y^p - x^p = g(y) - g(x) = g'(\xi)(y - x) = p\xi^{p-1}(y - x) \leq p(y - x),$$

denn aus  $\xi \in (x, y) \subset [0, 1]$  folgt  $\xi^{p-1} \in [0, 1]$ .

Damit folgt

$$\psi^p - \varphi^p \leq p(\psi - \varphi)$$

und somit

$$\int_a^b \psi^p(x) - \varphi^p(x) dx \leq p \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Also ist  $|f|^p$  nach Satz 11.9 Riemann-integrierbar.

Die angegebene Ungleichung für  $p = 1$  folgt direkt aus der Monotonie und Linearität des Integrals sowie den Ungleichungen  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$ .

(iii) Die Behauptung folgt aus (ii) wegen

$$fg = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2) = \frac{1}{4} (|f+g|^2 - |f-g|^2).$$

□

### 13.3 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen entweder das Integrationsintervall unbeschränkt ist oder der Integrand an einem (oder beiden) Randpunkte des Integrationsintervalls nicht definiert. Mit dem Konzept der Grenzwerte lassen sich beide Situationen leicht behandeln.

**Definition 13.7** (i) Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem Intervall  $[a, b]$ ,  $b > a$ , Riemann-integrierbar ist. Dann nennen wir die Funktion *Riemann-integrierbar auf  $[a, \infty)$*  bzw. sagen wir, dass *das Riemann-Integral auf  $[a, \infty)$  existiert*, falls der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert. Analog definieren wir Riemann-Integrierbarkeit auf  $(-\infty, b]$  mittels

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

und auf  $(-\infty, \infty)$  mittels

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx,$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

(ii) Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem Intervall  $[c, b]$ ,  $c \in (a, b)$ , Riemann-integrierbar ist. Dann nennen wir die Funktion *Riemann-integrierbar auf  $(a, b]$*  falls der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c > a}} \int_c^b f(x) dx$$

existiert. Analog dazu bzw. zu (i) definieren wir Riemann-Integrierbarkeit auf  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  und auf  $(-\infty, b)$ . □

**Beispiel 13.8** (i) Das Riemann-Integral  $\int_1^\infty 1/x^s dx$  existiert für alle  $s > 1$ . Es gilt nämlich

$$\int_1^b \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^b = \frac{1}{s-1} \left( 1 - \frac{1}{b^{s-1}} \right) \rightarrow \frac{1}{s-1}$$

für  $b \rightarrow \infty$ .

(ii) Das Riemann-Integral  $\int_1^\infty 1/x^s dx$  existiert für kein  $s \leq 1$ . Für  $s < 1$  ergibt die gleiche Rechnung wie oben

$$\int_1^b \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \left( 1 - \frac{1}{b^{s-1}} \right) = \frac{1}{s-1} (1 - b^{1-s}) \rightarrow \infty$$

für  $b \rightarrow \infty$  und für  $s = 1$  gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^s} dx = \ln x \Big|_1^b = \ln b \rightarrow \infty$$

für  $b \rightarrow \infty$ .

(iii) Das Riemann-Integral  $\int_0^1 1/x^s dx$  existiert für alle  $s < 1$ . Für  $c \in (0, 1)$  gilt nämlich

$$\int_c^1 \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-s} (1 - c^{1-s}) \rightarrow \frac{1}{1-s}$$

für  $c \rightarrow 0$ .

(iv) Mit ähnlichen Rechnungen wie in (i)–(iii) weist man nach, dass das Riemann-Integral  $\int_0^1 1/x^s dx$  für kein  $s \geq 1$  existiert.

(v) Aus (i)–(iv) folgt, dass das Riemann-Integral  $\int_0^\infty 1/x^s dx$  für kein  $s \in \mathbb{R}$  existiert.

(vi) Das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

existiert, denn<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow -1 \\ a > -1}} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\substack{b \rightarrow 1 \\ b < 1}} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= - \lim_{\substack{a \rightarrow -1 \\ a > -1}} \arcsin(a) + \lim_{\substack{b \rightarrow 1 \\ b < 1}} \arcsin(b) \\ &= - \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Nach Satz 9.10 ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Definition des Integrals  $\int_0^\infty f(x)dx$  über den Grenzwert erinnert ein wenig an die Definition des Grenzwerts einer unendlichen Reihe. Tatsächlich ist eine Reihe nichts anderes als ein Integral über eine Treppenfunktion. Aber auch für manche Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind, kann man einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Reihen und Integralen herstellen.

**Satz 13.9** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton fallende Funktion mit  $f \geq 0$ . Dann existiert der Grenzwert  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  genau dann, wenn das Integral  $\int_1^\infty f(x)dx$  existiert.

**Beweis:** Aus der Monotonie folgt

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq f(k-1).$$

Summieren über  $k$  ergibt dann

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Falls  $\int_1^\infty f(x)dx$  existiert, so ist  $\sum_{k=1}^n f(k)$  (als Folge in  $n$ ) beschränkt. Da die Reihe wegen  $f(k) \geq 0$  auch monoton ist, ist sie also konvergent. Existiert umgekehrt der Grenzwert  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ , so ist  $\int_1^a f(x)dx$  beschränkt und monoton in  $a$ , also ebenfalls konvergent.  $\square$

# Kapitel 14

## Funktionsfolgen

Stand:  
2. August 2022

Folgen kann man nicht nur für reelle und komplexe Zahlen definieren, sondern auch für Funktionen. In diesem Kapitel betrachten wir die wesentlichen Eigenschaften solcher Funktionenfolgen.

### 14.1 Definitionen

**Definition 14.1** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Funktionsfolge*. □

Wir geben einige einfache Beispiele für Funktionenfolgen.

**Beispiel 14.2** (i)  $f_n(x) = x^n$ ,  $D = \mathbb{R}$  oder  $D = [0, 1]$

(ii)  $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$

(iii)  $f_n(x) = (1 + 1/n)x^2$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$

(iv) Funktionenfolgen, die aus Reihen entstehen:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

mit  $g_k : D \rightarrow \mathbb{R}$

(v) Potenzreihen:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$$

mit  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $D \subset \mathbb{R}$ . Beachte, dass dies ein Spezialfall von (iv) ist. □

Die folgende Definition gibt einen Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen an.



**Definition 14.3** Wir sagen, dass eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *punktweise* gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  *konvergiert*, falls

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

gilt für alle  $x \in D$ . Die Funktion  $f$  wird dann als *Grenzfunktion* bezeichnet.  $\square$

**Beispiel 14.4** Wir betrachten die punktweise Konvergenz der Funktionenfolgen aus Beispiel 14.2 für  $n \rightarrow \infty$ .

(i)  $f_n(x) = x^n$ : Für  $|x| > 1$  konvergiert diese Funktionenfolge wegen  $|x^n| = |x|^n \rightarrow \infty$  offenbar nicht. Sie konvergiert aber z.B. für  $x \in [0, 1]$ , und zwar mit

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(ii)  $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$ : Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f_n(x) = |x|^{1+1/n} \rightarrow |x|^1 = |x| =: f(x).$$

(iii)  $f_n(x) = (1 + 1/n)x^2$ : Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f_n(x) = (1 + 1/n)x^2 = x^2 + x^2/n \rightarrow x^2 =: f(x).$$

(iv) und (v) Die durch die Reihen definierten Funktionen konvergieren punktweise gegen die entsprechenden Grenzwerte der Reihen, sofern diese existieren. Bei der Potenzreihe ist dies in jedem Fall für die eingeschränkte Definitionsmenge  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$  der Fall, wobei  $r$  der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.  $\square$

## 14.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir zwei wichtige Fragen untersuchen: Wenn alle Funktionen  $f_n$  einer Funktionenfolge stetig bzw. differenzierbar sind, und die Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert, ist dann auch  $f$  stetig bzw. differenzierbar?

Wir beginnen mit der Stetigkeit und betrachten Beispiel 14.2(i), d.h.  $f_n(x) = x^n$ , auf  $D = [0, 1]$ . Da jedes  $f_n$  ein Polynom ist, ist es auf  $\mathbb{R}$  und damit insbesondere auf  $D$  stetig. Nach Beispiel 14.4(ii) konvergiert die Funktionenfolge  $f_n(x)$  allerdings punktweise gegen die Grenzfunktion  $f(x) = 0$  für  $x \in [0, 1)$  und  $f(x) = 1$  für  $x = 1$ , welche offensichtlich unstetig in  $x = 1$  ist.

Die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen ist also nicht "automatisch" selbst wieder stetig. Um dies schließen zu können, brauchen wir den folgenden stärkeren Konvergenzbegriff.

**Definition 14.5** Eine Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig konvergent* gegen eine Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , falls die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| = 0$$

gilt.  $\square$

Beachte, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz wegen

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \rightarrow 0$$

für alle  $x \in D$  die punktweise Konvergenz folgt. Umgekehrt gilt dies allerdings nicht, wie Beispiel 14.2(i) zeigt:

Da  $f_n(x) = x^n$  stetig ist und  $f_n(1) = 1$  gilt, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $x_{n,\varepsilon} < 1$  mit  $f_n(x_{n,\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$ . Für die Grenzfunktion  $f$  aus Beispiel 14.4(ii) gilt also

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \geq |f_n(x_{n,\varepsilon}) - f(x_{n,\varepsilon})| > |1 - \varepsilon - 0| = 1 - \varepsilon$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und damit

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \not\rightarrow 0.$$

In Beispiel 14.2(ii) hingegen gilt gleichmäßige Konvergenz, wenn wir die Definitionsmenge  $D = [-d, d]$  für beliebiges  $d > 0$  betrachten. Für alle  $y \in \mathbb{R}$  gilt zunächst

$$|f_n(y) - f(y)| = \left| |y|^{1+1/n} - |y| \right| = |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right|.$$

Um zu beweisen, dass das Supremum über alle  $y \in [-d, d]$  für diesen Ausdruck tatsächlich gegen 0 konvergiert, wählen wir ein beliebiges  $\varepsilon \in (0, 1)$  und zeigen, dass für alle hinreichend großen  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\sup_{y \in [-d, d]} |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt. Dazu betrachten wir drei Fälle:

**Fall 1:**  $|y| < \varepsilon$ . In diesem Fall gilt  $\left| |y|^{1/n} - 1 \right| \leq 1$  und es folgt

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| \leq |y| < \varepsilon.$$

**Fall 2:**  $|y| \in [\varepsilon, 1]$ . In diesem Fall gilt  $|y| \leq 1$ ,  $|y|^{1/n} \leq 1$  und  $|y|^{1/n} \geq \varepsilon^{1/n}$ . Damit folgt

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| = |y|(1 - |y|^{1/n}) \leq 1 - |y|^{1/n} \leq 1 - \varepsilon^{1/n} < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen  $n$ , da  $\varepsilon^{1/n}$  für  $n \rightarrow \infty$  wegen Korollar 6.20 gegen 1 konvergiert und damit für alle hinreichend großen  $n$  größer als  $1 - \varepsilon$  ist.

**Fall 3:**  $|y| \in [1, d]$ . In diesem Fall gilt  $|y|^{1/n} \geq 1$  und damit

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| = |y|(|y|^{1/n} - 1) \leq d(d^{1/n} - 1) < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen  $n$ , da  $d^{1/n}$  für  $n \rightarrow \infty$  wegen Korollar 6.20 gegen 1 konvergiert und damit für alle hinreichend großen  $n$  kleiner als  $1 + \varepsilon/d$  ist.

Aus den drei Fällen folgt für alle hinreichend großen  $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{y \in [-d, d]} |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| \leq \max\{\varepsilon, 1 - \varepsilon^{1/n}, d(d^{1/n} - 1)\} < \varepsilon$$

und damit die Konvergenz gegen 0 und folglich die gleichmäßige Konvergenz.

**Satz 14.6** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  ebenfalls stetig.

**Beweis:** Sei  $x \in D$ . Wir verwenden das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit. Zu zeigen ist dafür, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass die Folgerung

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle  $y \in D$  gilt. Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3,$$

d.h. für alle  $y \in D$  gilt die Ungleichung  $|f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3$ . Da  $f_n$  stetig ist, existiert zudem ein  $\delta > 0$ , so dass die Folgerung

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$$

gilt. Für  $|x - y| < \delta$  folgt dann

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon,$$

also die gesuchte Eigenschaft.  $\square$

Da die gleichmäßige Konvergenz also offenbar eine sehr nützliche Eigenschaft ist, führen wir nun eine Notation ein, mit der wir diese kompakter schreiben können.

**Definition 14.7** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die  $\infty$ -Norm als

$$\|f\|_\infty := \sup_{y \in D} |f(y)|.$$

$\square$

Wir werden in Abschnitt 17.1 definieren, was eine “Norm” ist und dann in Beispiel 17.15 sehen, dass  $\|\cdot\|_\infty$  tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum aller Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|f\|_\infty < \infty$  ist.

Die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz kann man dann mit dieser Norm kurz schreiben als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Für Funktionenfolgen, die gemäß Beispiel 14.2(iv) über eine Reihe definiert sind, kann man das folgende Kriterium für gleichmäßige Konvergenz angeben.

**Satz 14.8 (Konvergenzkriterium von Weierstraß)** Es seien  $g_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , Funktionen, für die der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_\infty$$

existiert. Dann konvergiert die Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

absolut<sup>1</sup> und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass die  $f_n$  punktweise gegen ein  $f$  konvergieren. Sei dazu  $x \in D$ . Wegen  $|g_k(x)| \leq \|g_k\|_\infty$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^n g_k(x)$  nach dem Majorantenkriterium absolut. Setzen wir

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

so konvergieren die  $f_n$  punktweise gegen dieses  $f$ .

Zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir müssen zeigen, dass ein  $N(\varepsilon) > 0$  existiert mit  $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Aus der Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_\infty$  folgt aus Satz 4.4, dass ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leq \varepsilon/2$$

für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Daraus folgt für alle  $y \in D$

$$|f_n(y) - f(y)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(y) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leq \varepsilon/2$$

und damit auch  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ . □

Betrachten wir nun wieder allgemeine Funktionenfolgen. Wir untersuchen die Frage, ob aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen  $f_n$  auch die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion  $f$  folgt.

Beispiel 14.2(ii) zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Wegen

$$f_n(x) = |x|^{1+1/n} = \exp((1 + 1/n) \ln |x|)$$

folgt für  $x > 0$  mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \exp'((1 + 1/n) \ln x) (1 + 1/n) \ln' x \\ &= \exp((1 + 1/n) \ln x) (1 + 1/n) \frac{1}{x} = x^{1+1/n} (1 + 1/n) \frac{1}{x} = (1 + 1/n) x^{1/n} \\ &= (1 + 1/n) |x|^{1/n}. \end{aligned}$$

Für  $x < 0$  folgt mit einer analogen Rechnung

$$f'_n(x) = \exp((1 + 1/n) \ln(-x)) (1 + 1/n) \ln'(-x) (-1) = (1 + 1/n) (-x)^{1/n} = (1 + 1/n) |x|^{1/n}.$$

<sup>1</sup>Analog zu den reellen Reihen sagen wir, dass eine Reihe von Funktionen absolut konvergiert, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^n |g_k(x)|$  punktweise konvergiert.

Für  $x = 0$  sind die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung gleich Null und stimmen daher überein. Folglich ist die Funktion  $f_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  differenzierbar. Die Grenzfunktion  $f(x) = |x|$  ist in  $x = 0$  aber nicht differenzierbar, obwohl die  $f_n$  auf  $D = [-d, d]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren.

Gleichmäßige Konvergenz der Funktion reicht also nicht aus, um Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu garantieren. Der folgende Satz zeigt, unter welcher zusätzlichen Bedingung man Differenzierbarkeit erhält.

**Satz 14.9** Sei  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen, so dass  $f_n$  und  $f'_n$  gleichmäßig gegen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f^* : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren. Dann ist  $f$  stetig differenzierbar mit  $f' = f^*$ .

**Beweis:** Sei  $x \in D$ . Für ein gegebenes  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$  und  $x + h \in D$  wähle  $n(|h|)$  so groß, dass die Ungleichungen

$$\|f_n - f\|_\infty < h^2 \quad \text{und} \quad \|f'_n - f^*\|_\infty < |h|$$

für  $n = n(|h|)$  gelten. Dann folgt für  $n = n(|h|)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + R_1(h)$$

mit

$$R_1(h) = \frac{f(x+h) - f_n(x+h)}{h} + \frac{f_n(x) - f(x)}{h}.$$

Für  $R_1(h)$  gilt

$$|R_1(h)| \leq \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{h} \right| < \frac{h^2}{|h|} + \frac{h^2}{|h|} = 2|h|,$$

woraus  $R_1(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  folgt. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_n(\xi) + R_1(h) = f^*(\xi) + R_1(h) + R_2(h)$$

mit  $\xi \in [x - |h|, x + |h|]$  und  $\xi \in D$  sowie

$$|R_2(h)| = |f'_n(\xi) - f^*(\xi)| < |h|.$$

Daraus folgt  $R_2(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Da die  $f'_n$  gleichmäßig konvergieren, ist  $f^*$  nach Satz 14.6 stetig und weil  $\xi \rightarrow x$  gilt für  $h \rightarrow 0$ , folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( f^*(\xi) + R_1(h) + R_2(h) \right) = f^*(x).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

## 14.3 Potenzreihen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Potenzreihen gemäß Beispiel 14.2(v). Diese sind uns bereits bei der Betrachtung der Taylorentwicklung in Abschnitt 10.2 begegnet. Auf Grund der besonderen Struktur der Summanden können wir hier ein besonders schönes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz angeben. Der folgende Satz gilt tatsächlich auch für komplexe Potenzreihen (bei der also alle angegebenen Zahlen aus  $\mathbb{C}$  sind), wir formulieren und beweisen hier aus Zeitgründen aber die reelle Version.

**Satz 14.10** Gegeben sei eine Potenzreihe

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x - x_0)^k$$

mit  $c_k, x_0 \in \mathbb{R}$ , die für ein  $x = x_1 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 \neq x_0$  konvergiert.

Dann konvergiert die Potenzreihe für jedes  $\rho > 0$  mit  $\rho < |x_1 - x_0|$  absolut und gleichmäßig auf  $D = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ . Insbesondere gilt für den Konvergenzradius  $r$  der Reihe die Ungleichung  $r \geq |x_1 - x_0|$ . Zudem konvergiert auch die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^n k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

ebenfalls absolut und gleichmäßig auf  $D$ .

**Beweis:** Setze  $g_k(x) := c_k(x - x_0)^k$ . Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^n g_k(x_1)$ , also folgt aus Satz 4.5  $|g_k(x_1)| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , woraus mit Satz 3.7 folgt, dass ein  $M \in \mathbb{R}$  existiert mit  $|g_k(x_1)| \leq M$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt für alle  $x \in D$

$$|g_k(x)| = |c_k(x - x_0)^k| = |c_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq M \theta^k$$

mit

$$\theta = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \leq \frac{\rho}{|x_1 - x_0|} < 1.$$

Da diese Ungleichung für alle  $x \in D$  gilt, folgt auch  $\|g_k\|_\infty \leq M \theta^k$ . Wegen  $\theta \in [0, 1)$  konvergiert die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^n M \theta^k$ , also konvergiert  $\sum_{k=0}^n \|g_k\|_\infty$  nach dem Majorantenkriterium und die absolute und gleichmäßige Konvergenz der  $f_n$  folgt aus Satz 14.8.

Für die Reihe

$$\sum_{k=1}^n k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

beweist man für  $g_k(x) = k c_k (x - x_0)^{k-1}$  analog zum ersten Teil des Beweises die Ungleichung  $\|g_k\|_\infty \leq k M \theta^{k-1}$ . Weil

$$\frac{(k+1)M\theta^k}{kM\theta^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\theta \rightarrow \theta < 1$$

gilt, konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^n kM\theta^{k-1}$  nach dem Quotientenkriterium, vgl. Beispiel 4.19(i). Wiederum wie im ersten Teil des Beweises folgt die Aussage nun mit dem Majorantenkriterium.  $\square$

**Korollar 14.11** Unter den Voraussetzungen von Satz 14.10 gilt für die dort definierte Menge  $D$ :

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

ist stetig differenzierbar (also insbesondere selbst stetig) mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(x-x_0)^{k-1}.$$

**Beweis:** Nach Satz 14.10 konvergieren die Funktionen

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n c_k(x-x_0)^k \quad \text{und} \quad \tilde{f}_n(x) := \sum_{k=1}^n k c_k(x-x_0)^{k-1}$$

gleichmäßig gegen  $f$  bzw. eine Grenzfunktion  $f^* : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Als Polynome sind  $f_n$  und  $\tilde{f}_n$  stetig und differenzierbar und aus Beispiel 9.9(a) und der Kettenregel folgt  $f'_n = \tilde{f}_n$ , da jeder Summand in der Reihe für  $\tilde{f}_n$  gerade die Ableitung des entsprechenden Summanden in der Reihe für  $f_n$  ist. Die Behauptung folgt daher mit Satz 14.9.  $\square$

Mit anderen Worten besagt dieses Korollar also, dass wir Potenzreihen auf dem in Satz 14.10 angegebenen Definitionsbereich  $D$  gliedweise differenzieren dürfen, um ihre Ableitung zu bestimmen.

**Beispiel 14.12** Für den Cosinus gilt

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dies ist gerade die Potenzreihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit  $c_k = (-1)^{k/2}/k!$  für gerades  $k$  und  $c_k = 0$  für ungerades  $k$ .

Da diese Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, gilt die Aussage von Korollar 14.11 auf jeder Menge der Form  $D = [-\rho, \rho]$  für alle  $\rho > 0$ , also auf ganz  $\mathbb{R}$ . Die Ableitung des Cosinus ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \cos' x &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \\ &= 0 + 2c_2 x + 0 + 4c_4 x^3 + 0 + 6c_6 x^5 + \dots \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \pm \dots \end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist dies genau die Reihe der Funktion  $-\sin x$ .  $\square$

## 14.4 Das Riemann-Integral für Funktionenfolgen

Wir haben eben gesehen, dass sich die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von Funktionenfolgen  $f_n$  dann auf die Grenzfunktion überträgt, wenn die Konvergenz von  $f_n$  — und im Falle der Differenzierbarkeit auch von  $f'_n$  — gleichmäßig ist. Wir wollen nun abschließend untersuchen, wie die Situation beim Riemann-Integral aussieht. Hier gilt der folgende Satz.

**Satz 14.13** Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen mit Grenzfunktion  $f$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Integration und die Grenzwertbildung darf für gleichmäßig konvergente stetige Funktionen also vertauscht werden.

**Beweis:** Nach Satz 14.6 ist  $f$  wieder stetig und damit integrierbar. Zudem gilt für alle  $x \in [a, b]$  die Ungleichung  $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty$ . Damit erhalten wir

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\|_\infty dx = (b - a) \|f - f_n\|_\infty,$$

woraus wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$  die Behauptung folgt.  $\square$

**Beispiel 14.14** Die Exponentialreihe  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k/k!$  konvergiert auf jedem beschränkten Intervalle  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $e^x$  (dies folgt aus Satz 14.10 und der Tatsache, dass die Exponentialreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert). Also gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^k}{k!} dx, \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt Satz 14.13 und im vierten Schritt Satz 13.3 angewendet haben.

Wir können die Exponentialfunktion also integrieren, indem wir die Summanden der unendlichen Reihe einzeln integrieren und dann die unendliche Summe bilden. Allgemein kann man auf die gleiche Art beweisen, dass man jede Potenzreihen auf dem in Satz 14.10 angegebenen Intervall in diesem Sinne gliedweise integrieren darf.  $\square$

Es gibt viele Beispiele von Funktionenfolgen, die nur punktweise aber nicht gleichmäßig konvergieren, für die aber trotzdem die Aussage von Satz 14.13 gilt.



Ein Beispiel ist die Funktionenfolge aus Beispiel 14.2(i). Als weiteres Beispiel betrachte die Folge  $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx, & x \in (1/n, 2/n] \\ 0, & x > 2/n \end{cases}$$

Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion  $f \equiv 0$ , denn für  $x = 0$  gilt immer  $f_n(x) = 0$  und für  $x > 0$  gilt  $f(x) = 0$  für alle  $n > 2/x$ . Sie konvergiert aber nicht gleichmäßig, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(1/n) - f(1/n)| = |1 - 0| = 1 \not\rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Der Graph jeder dieser Funktionen  $f_n$  bildet gemeinsam mit der  $x$ -Achse gerade das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1/n, 1)$  und  $(2/n, 0)$ . Der Flächeninhalt und damit das Integral über diese Funktion beträgt folglich  $1/n$  ("Grundlinie  $2/n$  mal Höhe 1 durch 2"). Also gilt

$$\int_0^2 f_n(x) dx \rightarrow 0 = \int_0^2 f(x) dx$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Die Aussage von Satz 14.13 gilt also, obwohl nur punktweise und keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Dies wirft die Frage auf, ob man die Voraussetzungen von Satz 14.13 abschwächen kann. Tatsächlich geht dies und dies wird eines der Hauptresultate der nachfolgenden Kapitel sein.

## 14.5 Anhang: Eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 0

Mit den Techniken, die wir in diesem Kapitel kennen gelernt haben, können wir eine Funktion konstruieren, deren Taylorreihe den Konvergenzradius 0 besitzt (vielen Dank an Herrn Prof. Kriecherbauer für dieses Beispiel).

Wir verwenden dazu eine Funktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \chi(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$
- $\chi(x) = 1$  für alle  $x \in [-1/2, 1/2]$
- $\chi(x) = 0$  für alle  $x \notin [-1, 1]$
- $\chi$  ist auf  $\mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar

Eine solche Funktion kann durch Zusammensetzen von konstanten Funktionen und Exponentialfunktionen (ähnlich wie die aus Beispiel 10.20) explizit konstruiert werden, was beweist, dass eine solche Funktion existiert. Da die spezielle Form von  $\chi$  aber im Weiteren keine Rolle spielt, brauchen wir gar keine explizite Konstruktion.

Da  $\chi$  außerhalb von  $[-1, 1]$  konstant gleich Null ist, gilt dies auch für alle höheren Ableitungen  $\chi^{(m)}$  von  $\chi$  und es folgt

$$\|\chi^{(m)}\|_\infty = \sup\{|\chi^{(m)}(x)| : x \in [-1, 1]\} = \chi^{(m)}(p)$$

für ein  $p \in [-1, 1]$ , weswegen  $\|\chi^{(m)}\|_\infty < \infty$  ist. Die Definition

$$C_m := \max\{\|\chi^{(n)}\|_\infty \mid n = 0, \dots, m\}$$

liefert also einen endlichen Wert.

Wir definieren nun für  $k \in \mathbb{N}$  die Funktionen

$$g_k(x) := (kx)^k \chi(k^2 x).$$

Per Induktion und unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel sowie des binomischen Lehrsatzes beweist man, dass die höheren Ableitungen dieser  $g_k$  gegeben sind durch

$$g_k^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} k^k \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} \chi^{(m-j)}(k^2 x) k^{2(m-j)}.$$

Mit dem oben definierten  $C_m$  folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{k-j} \chi^{(m-j)}(k^2 x)| \leq C_m \left(\frac{1}{k^2}\right)^{k-j} = C_m k^{2(j-k)},$$

weil  $\chi^{(m-j)}(k^2 x)$  ja nur für  $k^2 x \in [-1, 1]$ , also für  $x \in [-1/k^2, 1/k^2]$  Werte  $\neq 0$  annimmt. Es folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|g_k^{(m)}\|_\infty &\leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} k^k \underbrace{\frac{k!}{(k-j)!}}_{\leq k^j \leq k^m} C_m \underbrace{k^{2(j-k)} k^{2(m-j)}}_{=k^{2(m-k)}} \\ &\leq k^{k+m} k^{2(m-k)} \underbrace{\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}}_{=2^m} \\ &= C k^{3m-k} 2^m. \end{aligned}$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^n C k^{3m-k} 2^m$  konvergiert und aus dem Majorantenkriterium folgt damit, dass der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k^{(m)}\|_\infty$$

für jedes  $m \in \mathbb{N}$  existiert. Aus dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 14.8) folgt damit die gleichmäßige Konvergenz von

$$f_n^{(m)}(x) := \sum_{k=0}^n g_k^{(m)}(x)$$

gegen Grenzfunktionen  $f^{(m)}$  und mit Satz 14.9 folgt die Differenzierbarkeit aller  $f^{(m)}$  mit  $(f^{(m)})' = f^{(m+1)}$ . Folglich ist  $f = f^{(0)}$  auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar und wir können die Taylorreihe in  $x_0 = 0$  bilden. Da  $\chi$  auf  $[-1/2, 1/2]$  konstant gleich 1 ist, folgt  $\chi(0) = 1$  und  $\chi^{(m)}(1) = 0$  für alle  $m \geq 1$ . Einsetzen in die Formeln für  $g_k^{(m)}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , liefert dann  $g_k^{(m)}(0) = 0$  für  $m \neq k$  und  $g_k^{(m)}(0) = k!k^k$  für  $m = k$ . Daraus folgt

$$f^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(m)}(0) = m!m^m.$$

Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0 = 0$  ist also von der Form

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{k!k^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n k^k x^k.$$

Für jedes  $x \neq 0$  gilt für  $k \geq |2/x|$  daher für die Summanden der Reihe die Ungleichung  $|k^k x^k| = |kx|^k \geq 2^k$ . Diese konvergieren also nicht gegen Null, weswegen auch die Reihe nicht konvergieren kann. Folglich konvergiert die Taylorreihe für kein  $x \neq 0$  und der Konvergenzradius ist gleich 0.

# Kapitel 15

## Das Lebesgue-Integral

Stand:  
2. August 2022

Ausgangspunkt dieses Abschnitts ist die bereits am Ende des letzten Kapitels diskutierte Frage, wann für eine punktweise konvergente Funktionenfolge  $f_n \rightarrow f$  die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

gilt.

Dabei wollen wir neben der punktweisen Konvergenz möglichst wenig Voraussetzungen an die Funktionen  $f_n$  und  $f$  stellen; insbesondere wollen wir keinerlei Stetigkeit voraussetzen<sup>1</sup>. Die Motivation dafür ist mitnichten nur mathematischer Ehrgeiz, möglichst allgemeine Aussagen zu machen. Die Tatsache, dass man den obigen Grenzübergang unter möglichst geringen Voraussetzungen durchführen kann, ist wesentlich für viele Techniken der Analysis, die Sie in höheren Semestern — z.B. im Zusammenhang mit Differentialgleichungen oder im Gebiet der Stochastik — kennen lernen werden. Wir kommen am Ende dieses Kapitels noch einmal auf diesen Aspekt zurück.

Wenn man mit wenig Voraussetzungen arbeiten möchte, stellt sich schnell heraus, dass viele punktweise Grenzfunktionen Riemann-integrierbarer Funktionen  $f_n$  überhaupt nicht mehr Riemann-integrierbar sind. Als Beispiel betrachte die Funktionen  $f_n$  definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{k/m \mid m = 1, \dots, n, k = 0, \dots, m\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jedes  $f_n$  ist Riemann-integrierbar: eine Treppenfunktion  $\varphi \leq f_n$  ist  $\varphi \equiv 0$  und es folgt

$$\int_{a^*}^b f(x) dx = 0.$$

Eine Treppenfunktion  $\psi \geq f_n$  erhalten wir, indem wir zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $\psi$  betrachten, die auf den Intervallen  $[k/m - \varepsilon/2, k/m + \varepsilon/2] \cap [0, 1]$  (mit  $k/m$  aus der Menge aus der Definition von  $f_n$ ) gleich 1 und sonst gleich 0 ist. Da die Anzahl der Intervalle, auf denen  $\varphi(x) = 1$  gilt, kleiner oder gleich  $n(n+1)$  ist und jedes Intervall die Länge  $\varepsilon$

<sup>1</sup>Wir werden in Abschnitt 16.2 sehen, dass es zum Beweis der Konvergenz z.B. genügt, dass die  $f_n$  auf eine geeignete Weise beschränkt sind.

besitzt, ist die summierte Länge dieser Intervalle  $\leq \varepsilon n(n+1)$ . Außerhalb dieser Intervalle ist  $\psi(x) = 0$ . Folglich gilt

$$\int_a^{*b} f(x)dx \leq \int_0^1 \psi(x)dx \leq \varepsilon n(n+1)$$

und weil  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\int_a^{*b} f(x)dx = 0$ . Jedes  $f_n$  ist also Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Andererseits konvergiert  $f_n$  aber auf  $[0, 1]$  punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (15.1)$$

denn jedes  $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  liegt für hinreichend großes  $n$  in der Menge  $\{k/m \mid m = 1, \dots, n, k = 0, \dots, m\}$ . Diese Grenzfunktion ist aber, wie in Beispiel 11.8(ii) bereits besprochen, *nicht Riemann-integrierbar*.

Diese Beispiel zeigt, dass wir eine neue Definition des Integrals benötigen, wenn wir sicher stellen wollen, dass Grenzfunktionen integrierbarer Funktionen wieder integrierbar sind. Dabei soll das “neue” Integral für alle Riemann-integrierbare Funktionen genau den gleichen Integralwert ergeben, wie das bekannte Riemann-Integral (alles andere würde ja zu einer fürchterlichen Verwirrung führen). Das neue besteht also vor allem darin, dass wir eine größere Klasse von Funktionen integrieren können. Das Lebesgue-Integral, das wir in diesem Kapitel einführen, leistet genau dies.

## 15.1 Lebesgue-Nullmengen

Ähnlich wie beim Riemann-Integral werden wir das Lebesgue-Integral über die bereits bekannten Treppenfunktionen definieren. Statt der Approximation durch Ober- und Unterintegrale werden wir das Integral nun aber als Grenzwert

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \quad (15.2)$$

der Integrale von Treppenfunktionen definieren, die die Ungleichung  $\varphi_n \leq f$  (oder  $\varphi_n \geq f$ ) und die Konvergenz  $\varphi_n \rightarrow f$  in geeigneter Weise erfüllen. Diese “geeignete Weise” soll dabei zum einen so definiert sein, dass auch z.B. die Funktion (15.1) integriert werden kann und zum anderen so, dass für jede mögliche Wahl dieser Folge von Treppenfunktionen der gleiche Grenzwert herauskommt (denn ansonsten würden wir ja keine eindeutige Definition des Integrals über  $f$  erhalten).

Um dies zu erreichen, müssen wir sowohl den Begriff der punktweisen Konvergenz als auch die Bedeutung der Ungleichungen  $\varphi_n \leq f$  (bzw.  $\varphi_n \geq f$ ) neu definieren, denn mit der üblichen Definition erhalten wir für die Funktion (15.1) stets einen Integralwert  $\geq 1$ , wenn wir Treppenfunktionen  $\psi \geq f$  und einen Integralwert  $\leq 0$ , wenn wir Treppenfunktionen  $\varphi \leq f$  betrachten. Die Idee dabei ist, dass wir sowohl die punktweise Konvergenz  $\varphi_n(x) \rightarrow$

$f(x)$  als auch die punktweise Ungleichung  $\varphi_n(x) \leq f(x)$  (bzw.  $\varphi_n(x) \geq f(x)$ ) nicht für alle  $x$  aus dem Integrationsintervall  $I$  verlangen, sondern nur für eine Teilmenge  $I \setminus N$ , wobei die Menge  $N$  der Ausnahmepunkte so klein ist, dass sie für den Integralwert keine Rolle spielt. Die Mengen, welche diese Eigenschaft erfüllen, werden *Lebesgue-Nullmenge* genannt.

Um zu veranschaulichen, wann eine Menge  $N$  für das Berechnen des Integrals keine Rolle spielt, betrachten wir noch einmal die Funktion (15.1) auf  $D = [0, 1]$ . Die Überlegungen aus dem letzten Abschnitt zeigen, dass man das Integral über  $f$  mittels des Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$  als  $\int_0^1 f(x) dx := 0$  definieren könnte. Eine Approximation des Integrals durch Treppenfunktionen mit  $\psi(x) \geq f(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  führt aber immer auf einen Integralwert  $\geq 1$ . Wie bereits gesagt, wollen wir dieses Problem lösen, indem wir diese Ungleichung für eine gewisse Teilmenge  $N \subset [0, 1]$  nicht mehr verlangen.

Um die richtige Bedingung an solch eine Menge  $N$  herauszufinden, versuchen wir jetzt einmal, das Integral über  $f$  durch eine Treppenfunktion  $\psi \geq f$  (für alle  $x \in [0, 1]$ ) anzunähern, die im Gegensatz zu den üblichen Treppenfunktionen *unendlich* vielen Treppenstufen besitzt. Die eigentliche Definition des Lebesgue-Integrals wird später wieder über Treppenfunktionen mit endlich vielen Stufen erfolgen, die vorübergehende Betrachtung unendlich vieler Stufen ermöglicht uns aber, die passende Bedingung an  $N$  herauszufinden.

Wir konstruieren dieses  $\psi \geq f$  wie folgt: Da  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, können wir  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  in der Form  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  darstellen. Wir wählen nun ein  $\varepsilon > 0$  und definieren für  $k \in \mathbb{N}$  die (unendlich vielen) Intervalle

$$I_k := \left( x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right).$$

Wir setzen

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da  $\psi$  außerhalb der Intervalle  $I_k$  den Wert 0 besitzt und auf den  $I_k$  den Wert 1, lässt sich die Fläche  $A$  unter dem Graphen<sup>2</sup> von  $\psi$  dann abschätzen als

$$A \leq \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \varepsilon \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k}_{= \frac{1}{1-1/2} = 2} = \varepsilon.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert die Fläche also gegen 0, d.h. der Beitrag der Werte von  $\psi$  auf der Menge  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_j$  geht gegen 0 — obwohl diese Menge für jedes  $\varepsilon > 0$  stets die Menge  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  enthält, die ja dicht in  $[0, 1]$  liegt.

Offenbar tragen die Werte der Funktion  $f$  auf einer Menge, die sich mit Intervallen mit beliebig kleiner Gesamtlänge überdecken lässt, also nichts zum Wert des Fläche unter der “unendlichen” Treppenfunktion  $\psi \geq f$  bei. Diese Beobachtung ist genau die Idee der Definition der Lebesgue-Nullmenge.

<sup>2</sup>Zwar haben wir kein Integral für Treppenfunktionen mit unendlich vielen Stufen definiert, die Fläche unter dem Graphen können wir aber nach wie vor als Summe der Flächen der — jetzt unendliche vielen — Rechtecke unter den Stufen des Graphen berechnen.

**Definition 15.1** Eine Menge  $N \subset \mathbb{R}$  heißt *Lebesgue-Nullmenge* (im Folgenden kurz *Nullmenge* genannt), falls für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abzählbare Menge von offenen Intervallen  $I_0, I_1, I_2, \dots$  existiert mit

$$N \subset \bigcup_{k=0, \dots, \infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| \leq \varepsilon.$$

□

Der folgende Satz gibt einige Aussagen über Nullmengen.

**Satz 15.2** (i) Jede endliche und jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge.

(ii) Die Vereinigung  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$  von abzählbar vielen Nullmengen  $N_0, N_1, N_2, \dots \subset \mathbb{R}$  ist wieder eine Nullmenge.

(iii) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(iv) Eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}$  kann kein offenes Intervall  $I = (a, b)$  enthalten.

**Beweis:** (i) Folgt mit der gleichen Konstruktion der Intervalle  $I_k$  und der gleichen Rechnung wie im obigen Beispiel.

(ii) Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  seien  $I_{n,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , überdeckende offene Intervalle für die Nullmenge  $N_n$  mit summierter Länge  $\leq \varepsilon/2^{n+1}$ . Dann ist die Menge aller Intervalle  $I_{n,k}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$  wieder abzählbar (mit dem gleichen Argument, mit dem auch  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist) und überdeckt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ . Da ihre Gesamtlänge kleiner oder gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |I_{n,k}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon$$

ist, zeigt das die Behauptung.

(iii) Folgt sofort aus der Definition.

(iv) Die Aussage ist anschaulich klar, da aus  $(a, b) \subset N$  folgt, dass jede Überdeckung  $I_0, I_1, \dots$  auch das Intervall  $(a, b)$  überdecken muss und daher eine summierte Länge  $\geq b - a$  haben muss. Der formale Beweis ist allerdings etwas schwieriger und wird nach dem Beweis von Satz 15.10 nachgeliefert. □

**Definition 15.3** Für eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  und eine Aussage  $A(x)$  sagen wir, dass die Aussage  $A$  für *fast alle*  $x \in D$  oder *fast überall auf*  $D$  gilt, falls eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}$  existiert, so dass die Aussage  $A(x)$  für alle  $x \in D \setminus N$  wahr ist. □

**Beispiel 15.4** (i) Die Funktion  $f$  aus (15.1) ist für fast alle  $x \in [0, 1]$  gleich Null. Insbesondere gilt für die (konstante) Funktionenfolge  $\varphi_n(x) \equiv 0$ , dass diese fast überall die Ungleichungen  $\varphi_n \leq f \leq \varphi_n$  erfüllt und für fast alle  $x \in [0, 1]$  punktweise<sup>3</sup> gegen  $f$  konvergiert.

<sup>3</sup>Den Zusatz “punktweise” werden wir im Folgenden weglassen. Der Begriff “Konvergenz fast überall” ist im weiteren Verlauf der Vorlesung immer punktweise zu verstehen.

(ii) Die Funktionenfolge  $f_n(x) = x^n$  konvergiert für fast alle  $x \in [0, 1]$  gegen 0.

(iii) Aus der Tatsache, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, ergibt sich die folgende Eigenschaft: Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Funktionen, die fast überall gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und für die für alle  $n \in \mathbb{N}$  fast überall die Ungleichung  $f_n \leq \bar{f}$  für eine Funktion  $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt. Dann folgt fast überall die Ungleichung  $f \leq \bar{f}$ .

**Beweis:** Sei  $N_n$  die Nullmenge so dass die Ungleichung  $f_n(x) \leq \bar{f}(x)$  gilt für alle  $x \in [a, b] \setminus N_n$  und sei  $M$  die Nullmenge, so dass die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b] \setminus M$  gilt. Definieren wir dann die Menge

$$N := M \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n,$$

so ist dies als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge. Für alle  $x \in [a, b] \setminus N$  gilt zudem

$$f_n(x) \leq \bar{f}(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Also folgt  $f(x) \leq \bar{f}(x)$  für alle  $x \in [a, b] \setminus N$ , also fast überall.  $\square$

Beispiel (i) zeigt also, dass es mit dem neuen Konvergenzbegriff “punktweise fast überall” tatsächlich Treppenfunktionen (im üblichen Sinne mit endlich vielen Stufen) gibt, die von oben und unten gegen  $f$  aus (15.1) konvergieren und gegen den gleichen Integralwert konvergieren. Beispiel (iii) zeigt, dass “fast überall” Eigenschaften beim Grenzübergang erhalten bleiben.

## 15.2 Monotone Konvergenz von Treppenfunktionen

Das Konzept “punktweise Konvergenz fast überall” erlaubt es uns, auch sehr irreguläre Funktionen durch Treppenfunktionen zu approximieren. Wir müssen aber noch den zweiten eingangs genannten Punkt beachten, dass wir nämlich bei der Wahl der Folge der Treppenfunktionen  $\varphi_n$  in (15.2) sicher stellen, dass jede mögliche Wahl dieser Folge auf den gleichen Grenzwert führt. Dazu dient die folgende Definition.

**Definition 15.5** Eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_n \in T(a, b)$ , heißt fast überall monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$  (bzw.  $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$ ) fast überall auf  $[a, b]$  gilt.  $\square$

Aus dem folgenden Satz ergibt sich, dass die Folge der Integrale über fast überall monotone Treppenfunktionen ebenfalls monoton ist.

**Satz 15.6** Für zwei Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  mit  $\varphi \leq \psi$  fast überall (bzw.  $\varphi \geq \psi$  fast überall) gilt

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx \quad (\text{bzw.} \quad \int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_a^b \psi(x) dx).$$



**Beweis:** Wir beweisen Fall  $\leq$ . Nach Bemerkung 11.2(ii) können wir annehmen, dass  $\varphi$  und  $\psi$  auf der gleichen Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  definiert sind. Wir bezeichnen die Werte der Funktionen auf den Teilintervallen  $(x_k, x_{k+1})$  der Unterteilung mit  $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv c_k$  und  $\psi|_{(x_k, x_{k+1})} \equiv d_k$ .

Sei  $N$  nun die Nullmenge, auf der die Ungleichung  $\varphi \leq \psi$  nicht gilt. Nach Satz 15.2(iv) kann  $(x_k, x_{k+1}) \subset N$  nicht gelten, daher gibt es einen Punkt  $x \in (x_k, x_{k+1}) \setminus N$ , auf dem also  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  gilt und es folgt

$$c_k = \varphi(x) \leq \psi(x) = d_k.$$

Da dies für alle  $k = 0, \dots, m - 1$  gilt, folgt die behauptete Ungleichung aus Definition 11.3.  $\square$

**Definition 15.7** Für eine Folge von Treppenfunktionen  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nennen wir die Folge

$$\left( \int_a^b \varphi_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

die *Integralfolge* von  $\varphi_n$ . Beachte, dass die Integralfolge eine reelle Folge ist.  $\square$

Als Konsequenz aus Satz 15.6 ist die Integralfolge für fast überall monotone Treppenfunktionen ebenfalls monoton. Nach den Sätzen 3.7 und 3.21 ist sie damit genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

**Definition 15.8** Wenn eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_n \in T(a, b)$  fast überall monoton wachsend ist und für  $n \rightarrow \infty$  fast überall gegen eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert<sup>4</sup>, so schreiben wir  $\varphi_n \nearrow f$ . Analog schreiben wir  $\varphi_n \searrow f$  im Falle einer monoton fallenden Folge.  $\square$

**Bemerkung 15.9** Aus  $\varphi_n \nearrow f$  folgt für alle  $n$  die Ungleichung  $\varphi_n \leq f$  fast überall, denn würde  $\varphi_n(x) > f(x)$  außerhalb einer Nullmenge gelten, so würde wegen der Monotonie auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) > f(x)$  außerhalb einer Nullmenge gelten, was der Konvergenz fast überall widerspricht.

Analog folgt aus  $\varphi_n \searrow f$  die Ungleichung  $\varphi_n \geq f$  fast überall.  $\square$

Der folgende Satz liefert nun die gewünschte Eindeutigkeitsaussage.

**Satz 15.10** Für Funktionen  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq g$  fast überall auf  $[a, b]$  seien  $\varphi_n, \psi_n \in T(a, b)$  zwei Folgen von Treppenfunktionen mit  $\varphi_n \nearrow f$  und  $\psi_n \nearrow g$  (bzw.  $\varphi_n \searrow f$  und  $\psi_n \searrow g$ ) und beschränkten (und damit wegen der Monotonie auch konvergenten) Integralfolgen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

<sup>4</sup>Beachte, dass  $f$  an den Randpunkten  $a$  und  $b$  des Intervalls nicht definiert sein muss, da wir diese stets zu der Nullmenge in der "fast überall" Definition hinzufügen können.

Im Fall, dass fast überall  $f = g$  gilt, gilt insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

Zum Beweis von Satz 15.10 benötigen wir die folgenden zwei weiteren Sätze. Der erste ist ein Spezialfall des *Überdeckungssatzes von Heine-Borel*.

**Satz 15.11** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und sei  $\{I_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ , eine unendliche Menge von offenen Intervallen, für die

$$I \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} I_\alpha$$

gilt. Die Menge  $\{I_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$  heißt dann *offene Überdeckung* von  $I$ . Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  mit

$$I \subset \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathcal{I}}} I_\alpha$$

Die Menge  $\{I_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\mathcal{I}}\}$  heißt dann *endliche Teilüberdeckung*.

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage per Widerspruch und nehmen an, dass es ein Intervall  $I$  und eine offene Überdeckung gibt, in der keine endliche Teilüberdeckung existiert. Dann können wir das Intervall  $I$  in zwei gleich große abgeschlossene Teilintervalle  $I_1$  und  $I'_1$  aufteilen, von denen es für mindestens eines der beiden (o.B.d.A. für  $I_1$ ) ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung geben kann (ansonsten würden die beiden endlichen Teilüberdeckungen von  $I_1$  und  $I'_1$  zusammen eine endliche Teilüberdeckung von  $I$  ergeben). Mit diesem Teilintervall fahren wir iterativ fort und zerlegen dieses wieder.

Auf diese Weise erhalten wir eine Intervallschachtelung  $I_k$  von Intervallen mit  $|I_k| \leq (1/2)^k |I|$ , für die jeweils keine endliche Teilüberdeckung existiert. Auf Grund des Vollständigkeitsaxioms gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_k \subset I$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und da die  $I_\alpha$  eine Überdeckung von  $I$  bilden, muss ein (offenes) Intervall  $I_\alpha = (c, d)$  mit  $x \in I_\alpha$  existieren. Folglich ist  $x > c$  und  $x < d$  und für  $\varepsilon := \min\{x - c, d - x\} > 0$  gilt  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I_\alpha$ . Wählen wir nun  $k$  so groß, dass  $(1/2)^k |I| < \varepsilon$  ist, so folgt aus  $x \in I_k$ , dass  $I_k \subset I_\alpha$  gilt. Also ist  $\{I_\alpha\}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $I_k$ , was der Folgerung widerspricht, dass keines der Intervalle  $I_k$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.  $\square$

Der zweite Satz, den wir benötigen, macht eine Aussage über fast überall monoton gegen 0 konvergente Treppenfunktionen.

**Satz 15.12** Es sei  $\vartheta_n \in T(a, b)$  eine Folge von Treppenfunktionen mit  $\vartheta_n \searrow f \equiv 0$ , d.h. die Folge der Treppenfunktionen konvergiert fast überall monoton gegen 0. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \vartheta_n(x) dx = 0.$$

**Beweis:** Mit Bemerkung 15.9 folgt  $\vartheta_n \geq 0$  fast überall und damit mit Satz 15.6 die Ungleichung  $\int_a^b \vartheta_n(x) dx \geq 0$ . Folglich genügt es zum Beweis der Konvergenz zu zeigen, dass für jedes  $\varepsilon' > 0$  ein  $K_{\varepsilon'} > 0$  existiert mit

$$\int_a^b \vartheta_n(x) dx < \varepsilon'$$

für alle  $n \geq K_{\varepsilon'}$ .

Es sei  $N \subset [a, b]$  nun die Menge aller Punkte, für die  $\vartheta_n(x)$  nicht monoton gegen 0 konvergiert (nach Annahme eine Nullmenge), vereinigt mit der Menge aller Unterteilungspunkte für alle  $\vartheta_n$  (eine abzählbare Menge). Dann ist  $N$  eine Nullmenge. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  sei  $I'_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Menge von offenen Intervallen mit summierter Länge  $< \varepsilon$ , deren Vereinigung  $N$  enthält.

Für jeden Punkt  $x \in [a, b] \setminus N$  existiert ein  $n_x > 0$ , so dass  $\vartheta_{n_x}(x) < \varepsilon$  ist. Da  $x$  kein Unterteilungspunkt ist, ist  $\vartheta_{n_x}$  konstant in einem offenen Intervall  $I_x \ni x$  und damit auch  $< \varepsilon$  auf  $I_x$ . Da  $\vartheta_n$  für wachsendes  $n$  monoton fällt, ist damit auch  $\vartheta_n(x) < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_x$  und alle  $x \in I_x$ .

Offenbar bilden die offenen Intervalle

$$I'_n, n \in \mathbb{N} \text{ und } I_x, x \in [a, b] \setminus N$$

nun eine offene Überdeckung von  $[a, b]$ , also gibt es nach Satz 15.11 eine endliche Teilüberdeckung

$$I'_{n_1}, \dots, I'_{n_l}, I_{x_1}, \dots, I_{x_m}.$$

Wir setzen jetzt  $N_\varepsilon := \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$ , wählen ein beliebiges  $n \geq N_\varepsilon$  und bezeichnen die Werte der Treppenfunktion  $\vartheta_n$  auf den Teilintervallen seiner Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$  wie üblich mit  $c_k, k = 0, \dots, p-1$ . Mit der Bezeichnung  $J_k := (x_k, x_{k+1})$  gilt dann

$$\int_a^b \vartheta_n(x) dx = \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) c_k = \sum_{k=0}^{p-1} |J_k| c_k.$$

Wegen der Monotonie gilt dann

$$c_k \leq \max_{x \in [a, b]} \vartheta_0(x) =: M$$

(beachte, dass jede Treppenfunktion und damit auch  $\vartheta_0$  nur endlich viele Werte annimmt, weswegen das Maximum existiert). Falls das Intervall  $J_k$  eines der Intervalle  $I_{x_j}$  schneidet, so gilt zudem  $c_k < \varepsilon$ . Die Indizes dieser Intervalle fassen wir in der Menge  $\mathcal{J}$  zusammen und es gilt

$$\sum_{k \in \mathcal{J}} |J_k| \leq b - a.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k \in \mathcal{J}} |J_k| c_k < (b - a) \varepsilon.$$

Die verbleibenden Intervalle  $J_k$  mit  $k \notin \mathcal{J}$  müssen nun in der Vereinigung  $I'_{n_1} \cup \dots \cup I'_{n_l}$  liegen. Also gilt

$$\sum_{k \notin \mathcal{J}} |J_k| \leq \sum_{j=1}^l |I'_{n_j}| < \varepsilon$$

und damit

$$\sum_{k \notin \mathcal{J}} |J_k| c_k < M\varepsilon.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\int_a^b \vartheta_n(x) dx = \sum_{k=0}^{p-1} |J_k| c_k = \sum_{k \in \mathcal{J}} |J_k| c_k + \sum_{k \notin \mathcal{J}} |J_k| c_k < \varepsilon(M + b - a).$$

Damit folgt die gesuchte Eigenschaft, wenn wir  $\varepsilon = \varepsilon'/(M + b - a)$  und  $K_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$  setzen.  $\square$

**Beweis von Satz 15.10:** Wir beweisen den Fall  $\nearrow$ , der Beweis für  $\searrow$  verläuft analog.

Für jedes feste  $m$  gilt  $\varphi_m - \psi_n \searrow \varphi_m - g$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da ebenfalls fast überall  $\varphi_m - g \leq \varphi_m - f \leq 0$  gilt, konvergiert  $\varphi_m - \psi_n$  also fast überall monoton fallend gegen einen Wert  $\leq 0$ . Folglich konvergiert die Treppenfunktion  $\vartheta_n := (\varphi_m - \psi_n)^+$  ebenfalls fast überall monoton fallend gegen 0. Aus Satz 15.12 folgt damit

$$\int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+(x) dx \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen folgt

$$\int_a^b \varphi_m(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \int_a^b \varphi_m(x) - \psi_n(x) dx \leq \int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+(x) dx \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  und damit

$$\int_a^b \varphi_m(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx \leq 0.$$

Da dies für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt, folgt auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_m(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx \leq 0$$

und damit die erste Behauptung.

Falls fast überall  $f = g$  gilt, können wir die analoge Rechnung für  $\psi_m - \varphi_n$  durchführen und erhalten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_m(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq 0,$$

woraus folgt, dass die beiden Grenzwerte übereinstimmen müssen.  $\square$

Wir reichen nun noch den **Beweis von Satz 15.2(iv)** nach: Sei  $N \subset \mathbb{R}$  eine Menge mit  $(a, b) \subset N$ . Wir zeigen, dass  $N$  keine Nullmenge sein kann.

Sei  $I_0, I_1, \dots$  dazu eine beliebige Überdeckung von  $N$  durch offene Intervalle mit beschränkter Längensumme und  $\delta > 0$  beliebig mit  $\delta < (b - a)/2$ . Wegen  $(a, b) \subset N$  überdecken die  $I_k$  insbesondere das Intervall  $[a + \delta, b - \delta]$  und da die  $I_k$  offen sind, existiert nach Satz 15.11 eine endliche Teilüberdeckung  $I_{k_0}, \dots, I_{k_m}$ . Indem wir ggf. Intervalle entfernen können wir annehmen, dass diese Teilüberdeckung aus einer minimalen Anzahl von Intervallen besteht, d.h. dass in jedem  $I_{k_j}$  mindestens ein  $x$  liegt, das in keinem der anderen Intervalle liegt und dass jedes  $I_{k_j}$  das Intervall  $[a + \delta, b - \delta]$  schneidet.

Wir bezeichnen diese Intervalle nun als  $J_0 = (c_0, d_0), \dots, J_m = (c_m, d_m)$  und wählen die Nummerierung so, so dass sie aufsteigend nach ihrer unteren Intervallgrenze  $c_k$  sortiert sind. Da sich kein "überflüssiges" Intervall unter den  $J_k$  befindet, muss damit auch die obere Intervallgrenze  $d_k$  aufsteigend sein, Weil die  $J_k$  das Intervall  $[a + \delta, b - \delta]$  komplett überdecken, muss  $c_0 \leq a + \delta$ ,  $d_m \geq b - \delta$  und  $d_k \geq c_{k+1}$  gelten (ansosten wären die Punkte  $a + \delta$ ,  $b - \delta$  oder das Intervall  $(d_k, c_{k+1})$  nicht abgedeckt). Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^m |J_k| \geq \sum_{k=0}^m (d_k - c_k) = d_m - c_0 + \sum_{k=0}^{m-1} (d_k - c_{k+1}) \geq b - \delta - a - \delta = (b - a) - 2\delta.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| \geq \sum_{k=0}^m |J_k| \geq b - a - 2\delta$$

und weil  $\delta > 0$  beliebig war, folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| \geq b - a.$$

Jede Überdeckung von  $N$  durch abzählbar viele Intervalle besitzt also eine Längensumme von mindestens  $b - a > 0$ , weswegen  $N$  keine Nullmenge sein kann.  $\square$

### 15.3 Definition des Lebesgue-Integrals

Satz 15.10 stellt sicher, dass die Integrale von Treppenfunktionen  $\varphi_n \nearrow f$  bzw.  $\varphi_n \searrow f$  gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergieren. Folglich können wir nun die folgenden Mengen und Integrale definieren.

**Definition 15.13** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Mit  $L^+(a, b)$  (bzw.  $L^-(a, b)$ ) definieren wir die Menge der Funktionen  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , für die eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_n \in T(a, b)$  mit beschränkter Integralfolge existiert mit  $\varphi_n \nearrow f$  (bzw.  $\varphi_n \searrow f$ ) für  $n \rightarrow \infty$ .

Das *Lebesgue-Integral* für  $f \in L^+(a, b)$  bzw.  $f \in L^-(a, b)$  definieren wir dann als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

$\square$

Aus der Definition folgt sofort, dass  $f \in L^+(a, b) \Leftrightarrow -f \in L^-(a, b)$  gilt. Falls  $f$  sowohl in  $L^+(a, b)$  als auch in  $L^-(a, b)$  liegt mit Treppenfunktionen  $\varphi_n$  und  $\psi_n$ , so folgt aus Satz 15.12, dass  $\int_a^b \varphi_n(x) - \psi_n(x) dx$  gegen 0 konvergiert, weswegen die beiden Integrale übereinstimmen.

Es stellt sich nun die Frage, ob es monotone Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge geben kann, die nicht gegen Elemente aus  $L^+$  oder  $L^-$  konvergieren. Der folgende Satz zeigt, dass dies nicht passieren kann.

**Satz 15.14** Jede fast überall monoton wachsende (bzw. fallende) Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_n \in T(a, b)$  mit beschränkter Integralfolge konvergiert fast überall punktweise gegen eine Funktion  $f \in L^+(a, b)$  (bzw.  $f \in L^-(a, b)$ ).

**Beweis: (Wurde im Sommersemester 2022 nicht behandelt.)** Wir beweisen den Fall monoton wachsender Funktionen und zeigen zunächst, dass  $\varphi_n(x)$  für fast alle  $x \in [a, b]$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Wir nehmen dabei an, dass  $\varphi_n \geq 0$  fast überall gilt, ansonsten können wir (wegen der Beschränktheit von  $\varphi_0$ ) eine geeignete konstante Funktion zu allen  $\varphi_n$  addieren. Zudem können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Unterteilungsstellen von jedem  $\varphi_n$  auch Unterteilungsstellen von  $\varphi_{n+1}$  sind.

Wegen der Beschränktheit der Integralfolge existiert ein  $K > 0$  mit

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq K$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $N_1$  bezeichnen wir die (Null)Menge der Unterteilungsstellen aller  $\varphi_n$ . Da die Punkte in dieser Menge weder für die Integrale noch für die Konvergenz fast überall eine Rolle spielen, können wir o.B.d.A.  $\varphi_n(x) = 0$  annehmen für alle  $x \in N_1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir wählen jetzt ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  und definieren

$$M_{n,\varepsilon} := \{x \in [a, b] \mid \varphi_n(x) \geq K/\varepsilon\}.$$

Falls diese Menge nichtleer ist, besteht sie aus endlich vielen offenen und disjunkten<sup>5</sup> Intervallen  $\mathcal{J}_{n,\varepsilon} := \{I_{\varepsilon,0}, \dots, I_{\varepsilon,m_n}\}$ . Aus  $\varphi_n \geq 0$  folgt

$$\frac{K}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{m_n} |I_{\varepsilon,j}| \leq \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq K \quad \Rightarrow \quad |M_{n,\varepsilon}| := \sum_{j=0}^{m_n} |I_{\varepsilon,j}| \leq \varepsilon.$$

Da die  $\varphi_n$  fast überall monoton wachsen und die Funktionen konstant auf den offenen Unterteilungsintervallen sind, müssen die Werte auf den Intervallen der Unterteilungen monoton wachsen. Da die Unterteilungsstellen von  $\varphi_n$  auch Unterteilungsstellen von  $\varphi_{n+1}$  sind, besteht die Menge  $\mathcal{J}_{n,\varepsilon}$  für  $n \geq 1$  also aus einer Menge von disjunkten offenen Intervallen  $\mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{alt}$ , deren Vereinigung bis auf die Unterteilungsstellen von  $\varphi_n$  gerade gleich  $M_{n-1,\varepsilon}$  ist und einer Menge von disjunkten offenen Intervallen  $\mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu}$ , die "neu" hinzukommen, d.h. disjunkt zu den Intervallen aus  $\mathcal{J}_{n-1,\varepsilon}$  sind. Es gilt dann

$$\sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{alt}} |I| = \sum_{I \in \mathcal{J}_{n-1,\varepsilon}} |I| = |M_{n-1,\varepsilon}|$$

<sup>5</sup>Disjunkt bedeutet, dass für alle Intervalle  $I_1, I_2$  aus der Menge mit  $I_1 \neq I_2$  gilt, dass  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ .

und daher

$$|M_{n-1,\varepsilon}| + \sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu}} |I| = \sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{alt}} |I| + \sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu}} |I| = \sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}} |I| = |M_{n,\varepsilon}|,$$

also

$$\sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu}} |I| = |M_{n,\varepsilon}| - |M_{n-1,\varepsilon}|.$$

Definieren wir nun die Menge von Intervallen

$$\mathcal{J}_\varepsilon := \mathcal{J}_{0,\varepsilon} \cup \bigcup_{n=1,\dots,\infty} \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu},$$

so folgt (weil alle Intervalle disjunkt sind)

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{J}_\varepsilon} |I| &= |M_{0,\varepsilon}| + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{J}_{n,\varepsilon}^{neu}} |I|}_{=|M_{n,\varepsilon}| - |M_{n-1,\varepsilon}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} |M_{m,\varepsilon}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(der letzte Grenzwert existiert und ist  $\leq \varepsilon$ , weil  $|M_{m,\varepsilon}|$  monoton wächst und durch  $\varepsilon$  nach oben beschränkt ist).

Aus der Konstruktion folgt, dass die Intervalle  $I \in \mathcal{J}_\varepsilon$  eine Überdeckung der Menge

$$M_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{n,\varepsilon}$$

bilden. Damit bilden sie für jedes  $\varepsilon > 0$  auch eine Überdeckung der Menge

$$M = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon$$

und folglich ist  $M$  eine Nullmenge.

Sei nun  $N$  die Nullmenge, außerhalb derer  $\varphi_n$  monoton wächst. Für alle  $x \in [a, b] \setminus N$  wächst die reelle Folge  $\varphi_n(x)$  dann monoton und konvergiert folglich genau dann, wenn sie beschränkt ist. Falls  $x \in [a, b] \setminus N$  ein Punkt ist, in dem  $\varphi_n(x)$  unbeschränkt wächst, so muss für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $\varphi_n(x) \geq K/\varepsilon$ . Der Punkt  $x$  liegt damit für jedes  $\varepsilon > 0$  in der Menge  $M_\varepsilon$ , also in der Nullmenge  $M$ . Also konvergiert  $\varphi_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  für alle  $x \in [a, b]$ , die nicht in  $N \cup M$  liegen. Da dies als Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, konvergiert  $\varphi_n$  also fast überall auf  $[a, b]$ .

Definieren wir nun für alle  $x \in [a, b] \setminus (N \cup M)$

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

und setzen  $f(x) := 0$  für  $x \in N \cup M$ , so gilt per Definition  $f \in L^+(a, b)$ .  $\square$

Dieser Satz zeigt, dass die Mengen  $L^+$  und  $L^-$  genau zum Konzept der monotonen Konvergenz fast überall passen.

Ebenso folgt aus den Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen und Satz 15.10 die Eigenschaft, dass für  $f, g \in L^+(a, b)$  auch  $f + g \in L^+(a, b)$  liegt und für  $\lambda \geq 0$  auch  $\lambda f \in L^+(a, b)$  liegen. Analog gilt dies für  $L^-(a, b)$  und in beiden Fällen gelten die Gleichungen

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad (15.3)$$

Im Falle  $\lambda < 0$  gilt  $f \in L^+(a, b) \Rightarrow \lambda f \in L^-(a, b)$  (und umgekehrt) und die Integralformel mit  $\lambda$  gilt ebenfalls.

Desweiteren zeigt der folgende Satz, dass jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L^+(a, b)$  und in  $L^-(a, b)$  enthalten ist.

**Satz 15.15** Jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liegt in  $L^+(a, b)$  und in  $L^-(a, b)$  und ihr Riemann-Integral und ihr Lebesgue-Integral stimmen überein.

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage für  $L^+(a, b)$ . Nach Satz 11.9 existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(a, b)$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon.$$

Wir wählen nun eine Folge  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  und die zugehörigen Treppenfunktionen  $\varphi_n, \psi_n$ . Dann folgt für das Riemann-Integral von  $f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Definieren wir nun Treppenfunktionen mittels

$$\tilde{\varphi}_n := \max\{\varphi_k \mid k = 0, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}_n := \min\{\psi_k \mid k = 0, \dots, n\}$$

so sind diese Folgen per Definition monoton wachsend bzw. fallend und es gilt

$$\varphi_n \leq \tilde{\varphi}_n \leq f \leq \tilde{\psi}_n \leq \psi_n$$

fast überall. Folglich gilt für das Riemann-Integral von  $f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tilde{\psi}_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Um zu beweisen, dass  $f$  in  $L^+(a, b)$  liegt, müssen wir noch beweisen, dass  $\tilde{\varphi}_n$  fast überall punktweise gegen  $f$  konvergiert. Wegen der fast überall gültigen Ungleichungen

$$0 \leq f - \tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n$$

genügt es dafür zu beweisen, dass  $\vartheta_n := \tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n$  fast überall gegen 0 konvergiert. Da  $\vartheta_n$  monoton fallend ist und eine konvergente und damit beschränkte Integralfolge besitzt, konvergiert diese Folge nach Satz 15.14 gegen eine Grenzfunktion  $g \in L^-(a, b)$ ; zu zeigen



ist also, dass  $g = 0$  fast überall gilt. Wegen  $\vartheta_n \geq 0$  folgt  $g \geq 0$  fast überall, d.h.  $g = |g|$  fast überall und folglich  $\theta_n \rightarrow |g|$  fast überall und  $g \in L^-(a, b)$ . Damit gilt

$$\int_a^b |g(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \vartheta_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) - \varphi_n(x) dx = 0.$$

Mit Satz 16.7 (den wir im folgenden Kapitel beweisen werden)<sup>6</sup>, folgt daraus  $g = 0$  fast überall.  $\square$

**Bemerkung 15.16** Der Beweis zeigt tatsächlich die folgende allgemeine Aussage über Treppenfunktionen: Eine fast überall monoton fallende Folge von Treppenfunktionen  $\vartheta_n \in T(a, b)$  mit  $\vartheta_n \geq 0$  fast überall und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \vartheta_n(x) dx = 0$$

konvergiert fast überall gegen 0.  $\square$

Eine naheliegende Idee zur Definition der Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen wäre nun, diese als  $L^+(a, b) \cup L^-(a, b)$  zu wählen. Allerdings würden wir damit nicht alle Funktionen abdecken, für die man sinnvollerweise ein Integral definieren könnte, wie die zweite Funktion in dem folgenden Beispiel illustriert.

**Beispiel 15.17** Einer der Vorteile des Lebesgue-Integrals ist, dass wir auch unbeschränkte Funktionen integrieren können, was mit dem Riemann-Integral nur mittels der uneigentlichen Integration möglich ist und nur dann, wenn der Integrand nur am Rand (aber nicht im Inneren) des Integrationsintervalls unbeschränkt ist. Im Gegensatz dazu kann man mit dem Lebesgue-Integral z.B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

auf  $[-1, 1]$  integrieren. Betrachten wir hier z.B. die Unterteilungen  $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} = 1$  mit  $x_k = -1 + k/2^n$  und die Treppenfunktionen mit den Werten  $c_{n,k} = \min\{f(x_k), f(x_{k+1})\}$ , so konvergieren diese fast überall (genauer: überall mit Ausnahme von  $x = 0$ ) monoton wachsend gegen  $f$ . Sie haben zudem beschränkte Integralfolge, da die Fläche unter dem Graphen beschränkt ist, was man sieht, indem man die uneigentlichen Riemann-Integrale auf  $[-1, 0]$  und  $[0, 1]$  separat berechnet, vgl. Beispiel 13.8(iii). Die Funktion liegt also in  $L^+(-1, 1)$  und ist damit Lebesgue-integrierbar.

Betrachten wir im Gegensatz dazu die nur leicht abgeänderte Funktion Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-x}}, & x < 0, \end{cases}$$

<sup>6</sup>Wir könnten die Aussage auch direkt mit Hilfe geeignet definierter Nullmengen beweisen, der Vorgriff auf Satz 16.7 kürzt den Beweis aber beträchtlich ab.

so würde man sinnvollerweise verlangen, dass diese auch Lebesgue-integrierbar sein sollte — der Vorzeichenwechsel für  $x < 0$  sollte hierfür nicht entscheidend sein. Sie liegt aber weder in  $L^+(-1, 1)$  noch in  $L^-(-1, 1)$ , denn: Jede Treppenfunktion  $\varphi$  ist beschränkt, also im Betrag  $\leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$ . Daher verletzt sie die Bedingung  $\varphi \geq f$  auf dem Intervall  $(0, 1/M^2)$  und die Bedingung  $\varphi \leq f$  auf dem Intervall  $(-1/M^2, 0)$ , also außerhalb einer Nullmenge. Wir können also nicht einmal einzelne Treppenfunktionen mit  $\varphi \geq f$  bzw.  $\varphi \leq f$  fast überall finden, geschweige denn ganze konvergente Folgen davon.  $\square$

Zur Abhilfe für dieses Problem verwenden wir die folgende Konstruktion, die die endgültige Definition des Lebesgue-Integrals liefert.

**Definition 15.18** Wir definieren die Menge  $L(a, b)$  der *Lebesgue-integrierbaren Funktionen* als die Menge aller Funktionen  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich als Summe  $f = g + h$  mit  $g \in L^+(a, b)$  und  $h \in L^-(a, b)$  schreiben lässt.

Das *Lebesgue-Integral* für ein  $f \in L(a, b)$  ist dann gegeben durch

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx,$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite die Integrale aus Definition 15.13 sind.  $\square$

Um sicher zu stellen, dass dies eine sinnvolle Definition ist, müssen wir noch überprüfen, dass der Integralwert eindeutig ist, wenn wir zwei unterschiedliche Darstellungen

$$f = g + h = \tilde{g} + \tilde{h}$$

mit  $g, \tilde{g} \in L^+(a, b)$  und  $h, \tilde{h} \in L^-(a, b)$  verwenden. Dies ist aber glücklicherweise der Fall, denn aus der obigen Gleichung folgt  $g - \tilde{h} = \tilde{g} - h$  und wegen  $-h, -\tilde{h} \in L^+(a, b)$  gilt auch  $g - \tilde{h} \in L^+(a, b)$  und  $\tilde{g} - h \in L^+(a, b)$ . Mit (15.3) folgt daher

$$\int_a^b g(x)dx + \int_a^b -\tilde{h}(x)dx = \int_a^b \tilde{g}(x)dx + \int_a^b -h(x)dx$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx &= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b -h(x)dx \\ &= \int_a^b \tilde{g}(x)dx - \int_a^b -\tilde{h}(x)dx = \int_a^b \tilde{g}(x)dx + \int_a^b \tilde{h}(x)dx. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass wir bei der Aufteilung  $f = g + h$  das  $h$  stets fast überall negativ und mit betragsmäßig beliebig kleinem Integral wählen können.

**Lemma 15.19** Sei  $f \in L(a, b)$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $f = g + h$  mit  $g \in L^+(a, b)$ ,  $h \in L^-(a, b)$ , so dass  $h \leq 0$  fast überall und

$$\int_a^b h(x)dx > -\varepsilon.$$

**Beweis:** Sei  $f = \tilde{g} + \tilde{h}$  eine per Definition von  $L(a, b)$  existierende Zerlegung mit  $\psi_n \searrow \tilde{h}$ . Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \int_a^b \tilde{h}(x) dx$$

gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\int_a^b \tilde{h}(x) - \psi_m(x) dx > -\varepsilon.$$

Setzen wir nun  $h := \tilde{h} - \psi_m$  und  $g := \tilde{g} + \psi_m$  so erfüllt  $h$  wegen  $\psi_m \geq \tilde{h}$  und der gerade gezeigten Integralungleichung die gewünschten Ungleichungen. Zudem gilt  $h \in L^-(a, b)$  und  $g \in L^+(a, b)$  (weil  $\psi_m$  als Treppenfunktion sowohl in  $L^+(a, b)$  als auch in  $L^-(a, b)$  liegt) und  $g + h = \tilde{g} + \psi_m + \tilde{h} - \psi_m = \tilde{g} + \tilde{h} = f$ .  $\square$

**Definition 15.20** Eine Funktion, für die eine Folge von Treppenfunktionen existiert mit  $\vartheta_n \rightarrow f$  fast überall, heißt *messbar* und die Menge aller messbaren Funktionen auf  $[a, b]$  wird mit  $M(a, b)$  bezeichnet.  $\square$

Betrachten wir eine Funktion  $f \in L(a, b)$  mit den Komponenten  $g, h$  und den zugehörigen Treppenfunktionen  $\varphi_n, \psi_n$ , so folgt sofort, dass die Treppenfunktionen  $\vartheta_n := \varphi_n + \psi_n$  fast überall gegen  $f$  konvergieren. Also liegt jede Funktion aus  $L(a, b)$  auch in  $M(a, b)$ .

Man könnte nun vermuten, dass die Rückrichtung auch gilt, dass also jede Funktion  $f \in M(a, b)$  auch in  $L(a, b)$  liegt. Dies ist aber nicht der Fall.

Ein Beispiel ist die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin(1/x)/x$  für  $x > 0$  und  $f(0) = 0$ . Weil die Funktion auf  $(0, 1]$  stetig ist, lässt sich eine fast überall konvergente Folge von Treppenfunktionen konstruieren. Allerdings kann man ausrechnen, dass die Fläche unter dem Graphen von  $f^+$  ebenso wie die Fläche unter dem Graphen von  $f^-$  unendlich groß ist. Daher kann keine Zerlegung der Form  $f = g + h$  mit  $g \in L^+(a, b)$  und  $h \in L^-(a, b)$  existieren, denn die Integralfolgen der zugehörigen Treppenfunktionen können nicht endlich sein. Folglich liegt  $f$  nicht in  $L(a, b)$ . Tatsächlich kann man hier wegen der unendlichen Integrale von  $f^+$  und  $f^-$  für jede reelle Zahl  $y$  eine Treppenfunktionsfolge  $\vartheta_n$  mit  $\vartheta_n \rightarrow f$  fast überall und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \vartheta_n(x) dx = y$$

finden. Dies bedeutet, dass der Versuch, ein Integral durch eine *nicht monotone* Folge von konvergierenden Treppenfunktionen zu definieren nicht auf einen eindeutigen Integralwert führt. Dies ist genau der Grund für die komplizierte Konstruktion von  $L(a, b)$ .

Allerdings sind viele Funktionen aus  $M(a, b)$  integrierbar. Wir werden in Bemerkung 16.12 ein einfaches Kriterium kennenlernen, mit der man für eine Funktion  $f \in M(a, b)$  entscheiden kann, ob sie in  $L(a, b)$  liegt.

## 15.4 Uneigentliche Lebesgue-Integrale

Wir beenden den Abschnitt mit einer kurzen Betrachtung uneigentlicher Lebesgue-Integrale. Aufgrund der Tatsache, dass das Lebesgue-Integral auf dem Konzept der Konvergenz fast

überall beruht, ist es nicht nötig, dass die zu integrierende Funktion an den Randpunkten des Integrationsintervalls definiert ist. Uneigentliche Integrale der Form  $\int_a^b f(x)dx$  für  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sind in der Definition des Lebesgue-Integrals also bereits enthalten und können daher ohne Verwendung von Grenzwerten dargestellt werden.

Mit einer leichten Verallgemeinerung der Definition der Treppenfunktionen können wir auch Integrale  $\int_a^b f(x)dx$  bei denen  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  ist, ohne Grenzwerte definieren.

**Definition 15.21** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein (nicht notwendigerweise beschränktes) Intervall. Eine Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion*, falls ein Intervall  $[a, b] \subset I$  existiert, so dass die Einschränkung  $\varphi|_{[a,b]}$  eine Treppenfunktion im üblichen Sinne von Definition 11.1 ist und  $\varphi(x) = 0$  ist für alle  $x \in I \setminus [a, b]$  gilt. Die Menge dieser Treppenfunktionen wird mit  $T(I)$  bezeichnet.  $\square$

Die Definition 11.3 des Integrals über Treppenfunktionen kann dann in der offensichtlichen Weise verallgemeinert werden, indem man die Definition nämlich auf die Einschränkung  $\varphi|_{[a,b]}$  anwendet.

Damit können wir alle Definitionen dieses Kapitels auf möglicherweise unbeschränkte Intervalle  $I$  an Stelle von  $[a, b]$  verallgemeinern. Beachte, dass für Folgen von Treppenfunktionen  $\varphi_n \in T(I)$  das Intervall  $[a, b]$  aus Definition 15.21 von  $n$  abhängen kann. Auf diese Weise kann Konvergenz fast überall auch auf unbeschränkten Intervallen erzielt werden.

Ein Blick auf die Beweise dieses Abschnitts zeigt, dass sich — mit Ausnahme von Satz 15.15<sup>7</sup> — alle Aussagen auf die größere Klasse von Treppenfunktionen aus Definition 15.21 übertragen lassen. Tatsächlich wird die Endlichkeit der Integralgrenzen nur im Beweis von Satz 15.12 explizit ausgenutzt. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt aber sofort, dass sich für alle dort verwendeten Treppenfunktionen ein gemeinsames Intervall  $[a, b]$  finden lässt, außerhalb derer alle Treppenfunktionen den Wert 0 annehmen.

Auf diese Weise können wir das Lebesgue-Integral ohne Verwendung von Grenzwerten direkt auf unbeschränkten Integrationsintervallen definieren. Wir schreiben dann  $L(I)$  für die Menge der auf einem möglicherweise unbeschränkten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbaren Funktionen, ebenso verwenden wir die Bezeichnungen  $L^+(I)$  und  $L^-(I)$ . Für das Integral behalten wir die Schreibweise  $\int_a^b$  bei, wobei jetzt aber  $a = -\infty$  und  $b = \infty$  zulässig sind. Diese Erweiterung werden wir im folgenden Kapitel stets zu Grunde legen.

---

<sup>7</sup>Dies liegt daran, dass das Riemann-Integral nur indirekt über die Grenzwertkonstruktion in Definition 13.7(i) auf einem unendlichen Integrationsintervall definiert werden kann. Tatsächlich kann es passieren, dass das so definierte Riemann-Integral auf unendlichem Integrationsintervall existiert, das Lebesgue-Integral auf dem gleichen Intervall aber nicht. Ein Beispiel dafür gibt es in den Übungen.



# Kapitel 16

## Eigenschaften des Lebesgue-Integral

Stand:  
2. August 2022

### 16.1 Elementare Eigenschaften

**Satz 16.1** Sei  $f \in L(I)$  und  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, für die  $f = \tilde{f}$  fast überall auf  $I$  gilt. Dann gilt auch  $\tilde{f} \in L(I)$  und die Lebesgue-Integrale über  $f$  und  $\tilde{f}$  stimmen überein.

**Beweis:** Für  $f \in L^+(I)$  oder  $f \in L^-(I)$  folgt die Aussage direkt aus Definition 15.13 und Satz 15.10, denn für jede Folge  $\varphi_n \nearrow f$  bzw.  $\varphi_n \searrow f$  gilt auch  $\varphi_n \nearrow \tilde{f}$  bzw.  $\varphi_n \searrow \tilde{f}$ .

Im allgemeinen Fall sei  $f = g + h$  mit  $g \in L^+(I)$  und  $h \in L^-(I)$ . Dann stimmt  $\tilde{h} := h - (f - \tilde{f})$  fast überall mit  $h$  überein, liegt damit auch in  $L^-(I)$  und besitzt den gleichen Integralwert. Mit diesem  $\tilde{h}$  können wir  $\tilde{f}$  schreiben als

$$\tilde{f} = f - (f - \tilde{f}) = g + h - (f - \tilde{f}) = g + \tilde{h}.$$

Damit ist  $\tilde{f} \in L(I)$  und es gilt

$$\int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b \tilde{h}(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**Satz 16.2** Für  $f, g \in L(I)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist auch  $f + g \in L(I)$  und  $\lambda f \in L(I)$  und es gelten die Gleichungen (15.3). Zudem gilt die Folgerung

$$f \geq g \text{ fast überall} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

**Beweis:** Die ersten Aussagen und die Gleichungen (15.3) folgen sofort aus der Definition von  $L(I)$  und der Gültigkeit von (15.3) für  $L^+(I)$  und  $L^-(I)$ .

Zum Beweis der Ungleichung zeigen wir, dass  $f \geq 0$  fast überall die Ungleichung  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  impliziert. Daraus folgt die Behauptung, indem wir diese Ungleichung auf  $f - g$  anwenden. Zum Beweis des Falls  $f \geq 0$  sei  $f = \tilde{g} + \tilde{h} \geq 0$ ,  $\tilde{g} \in L^+(I)$ ,  $\tilde{h} \in L^-(I)$ . Dann gilt  $\tilde{g} \geq -\tilde{h}$  und  $\tilde{g}, -\tilde{h} \in L^+(I)$  und aus Satz 15.10 folgt

$$\int_a^b \tilde{g}(x)dx \geq \int_a^b -\tilde{h}(x)dx = - \int_a^b \tilde{h}(x)dx$$

und damit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{g}(x)dx + \int_a^b \tilde{h}(x)dx \geq 0.$$

□

**Satz 16.3** Für  $f, g \in L(I)$  liegen auch  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f^+$ ,  $f^-$  und  $|f|$  in  $L(I)$ . Zudem gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Beweis: (Im Sommersemester 2022 ausgelassen)** Wir beweisen zunächst die Aussage für  $|f|$ . Es sei  $f = \tilde{g} + \tilde{h}$  mit  $\tilde{g} \in L^+(I)$ ,  $\tilde{h} \in L^-(I)$  und zugehörigen Treppenfunktionen  $\varphi_n \nearrow \tilde{g}$ ,  $\psi_n \searrow \tilde{h}$ . Wegen

$$|f| = \max\{f, -f\} = \max\{\tilde{g} + \tilde{h}, -\tilde{g} - \tilde{h}\} = \max\{\tilde{g}, -\tilde{h}\} + \max\{-\tilde{g}, \tilde{h}\}$$

(es empfiehlt sich, diese Gleichung nachzuprüfen) genügt es, die Aussage  $\max\{\tilde{g}, -\tilde{h}\} \in L^+(I)$  und  $\max\{-\tilde{g}, \tilde{h}\} \in L^-(I)$  zu nachzuweisen. Monotone Treppenfunktionen erhält man wegen der leicht zu überprüfenden Konvergenzen

$$\max\{\varphi_n, -\psi_n\} \nearrow \max\{\tilde{g}, -\tilde{h}\} \quad \text{und} \quad \max\{-\varphi_n, \psi_n\} \searrow \max\{-\tilde{g}, \tilde{h}\}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Funktionenfolgen beschränkte Integralfolgen besitzen. Gilt  $\varphi_n \geq 0$  und  $\psi_n \leq 0$  für alle  $n$ , so folgt dies aus

$$0 \leq \int_a^b \max\{\varphi_n(x), -\psi_n(x)\}dx \leq \int_a^b \varphi_n(x) - \psi_n(x)dx \leq \int_a^b \tilde{g}(x) - \tilde{h}(x)dx$$

und

$$0 \geq \int_a^b \max\{-\varphi_n(x), \psi_n(x)\}dx \geq \int_a^b \psi_n(x) - \varphi_n(x)dx \geq \int_a^b \tilde{h}(x) - \tilde{g}(x)dx.$$

Gilt  $\varphi_n \geq 0$  und  $\psi_n \leq 0$  nicht für alle  $n$ , so definieren wir  $\theta := \max\{-\varphi_0, \psi_0\}$  und führen eine analoge Abschätzung durch mit  $\tilde{\varphi}_n := \varphi_n + \theta \geq 0$  und  $\tilde{\psi}_n := \psi_n - \theta \leq 0$ .

Die Aussagen für die anderen angegebenen Funktionen folgen nun aus den Darstellungen

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}, \quad f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Die Dreiecksungleichung folgt wie beim Riemann-Integral direkt aus der Monotonie und Linearität des Integrals sowie den Ungleichungen  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$ . □

Satz 12.1 und Definition 12.2 können direkt vom Riemann- auf das Lebesgue-Integral übertragen werden.

## 16.2 Konvergenzsätze

Wir hatten die Einführung des Lebesgue-Integrals damit begründet, dass wir für das Riemann-Integral nur unter der recht einschränkenden Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz von  $f_n$  gegen  $f$  die Integralkonvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

garantieren können. In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, welche Bedingungen an  $f_n$  wir im Falle des Lebesgue-Integrals stellen müssen. Wir beginnen mit einer Hilfsaussage für Funktionen in  $L^+$ .

**Lemma 16.4** Jede fast überall monoton wachsende Folge von Funktionen  $f_n \in L^+(I)$  mit beschränkter Integralfolge konvergiert fast überall gegen eine Funktion  $f \in L^+(I)$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Beweis:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\int_a^b f_n(x) dx \leq M$  und  $\varphi_{n,k} \nearrow f_n$  für  $k \rightarrow \infty$ . Setzen wir

$$\vartheta_m := \max\{\varphi_{n,k} \mid n, k = 1, \dots, m\}$$

so ist diese Folge von Treppenfunktionen per Definition fast überall monoton wachsend. Für alle  $n \leq k$  gilt zudem  $\varphi_{n,k} \leq f_n \leq f_k$  und es folgt

$$\vartheta_n \leq f_n \quad \text{fast überall.}$$

Aus Satz 15.14 folgt nun die Existenz einer Funktion  $f \in L^+(I)$  mit  $\vartheta_n \nearrow f$  und per Definition folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \vartheta_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (16.1)$$

Wir zeigen als nächstes  $f_n \rightarrow f$  fast überall.

Für alle  $m \geq n$  folgt aus der Definition der  $\vartheta_m$  fast überall die Ungleichung  $\vartheta_m \geq \varphi_{n,m}$  und daher, ebenfalls fast überall, auch  $f = \lim_{m \rightarrow \infty} \vartheta_m \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{n,m} = f_n$ . Zusammen mit der bereits bewiesenen Ungleichung  $\vartheta_n \leq f_n$  folgt also fast überall die Ungleichung

$$\vartheta_n \leq f_n \leq f \quad (16.2)$$

(vgl. dazu auch Beispiel 15.4(iii)). Da aber fast überall  $\vartheta_n \rightarrow f$  gilt, muss auch  $f_n \rightarrow f$  fast überall gelten.

Aus Ungleichung (16.2) folgt zudem

$$\int_a^b \vartheta_n(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

und damit wegen (16.1) die behauptete Integralkonvergenz.  $\square$

Wir haben nun die Voraussetzungen, um den fundamentalen Konvergenzsatz für Lebesgue-Integrale zu beweisen. Alle nachfolgenden Konvergenzsätze werden sich aus diesem ableiten lassen.



**Satz 16.5 (Konvergenzsatz von Beppo Levi)** Jede fast überall monotone Folge von Funktionen  $f_n \in L(I)$  mit beschränkter Integralfolge konvergiert fast überall gegen eine Funktion  $f \in L(I)$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Beweis:** Wir betrachten den Fall, dass die  $f_n$  monoton wachsen. Zudem können wir annehmen, dass  $f_n \geq 0$  ist, ansonsten betrachten wir die Funktionen  $f_n - f_0$ . Setzen wir  $f_{-1} := 0$ , so können wir die Folge schreiben als Reihe

$$f_n = \sum_{k=0}^n (f_k - f_{k-1})$$

mit fast überall nicht negativen Summanden  $f_k - f_{k-1} \in L(I)$ . Nach Lemma 15.19 können wir diese Summanden schreiben als

$$f_k - f_{k-1} = g_k + h_k \quad \text{mit } h_k \leq 0 \text{ fast überall} \quad \text{und} \quad \int_a^b h_k(x) dx \geq -\frac{1}{2^k}.$$

Aus  $h_k \leq 0$  folgt  $g_k = f_k - f_{k-1} - h_k \geq 0$  fast überall. Definieren wir nun die Funktionenfolgen

$$s_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad \text{und} \quad t_n := \sum_{k=0}^n h_k,$$

so sind diese monoton wachsend bzw. fallend mit  $s_n \in L^+(I)$ ,  $t_n \in L^-(I)$  und  $f_n = s_n + t_n$ . Die Integralfolge über die  $t_n$  ist wegen

$$0 \geq \int_a^b t_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b h_k(x) dx \geq \sum_{k=0}^n -\frac{1}{2^k} \geq -2$$

beschränkt, und weil die Integralfolge über die  $f_n$  nach Voraussetzung beschränkt ist, ist auch die Integralfolge über die  $s_n$  wegen

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b t_n(x) dx$$

beschränkt. Folglich existieren nach Lemma 16.4 Funktionen  $s \in L^+(I)$ ,  $t \in L^-(I)$  mit  $s_n \nearrow s$  und  $t_n \searrow t$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n(x) dx = \int_a^b t(x) dx.$$

Setzen wir nun  $f := s + t \in L(I)$ , so folgt aus  $f_n = s_n + t_n$  für  $n \rightarrow \infty$

$$f_n \rightarrow f \quad \text{fast überall} \quad \text{und} \quad \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Die folgenden drei Sätze ergeben sich sofort aus dem Satz von Beppo Levi.

**Satz 16.6** Konvergiert für  $f_n \in L(I)$  die Reihe

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b |f_k(x)| dx$$

für  $n \rightarrow \infty$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^n f_k$  fast überall gegen eine Funktion  $f \in L(I)$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

**Beweis:** Setzen wir

$$s_n := \sum_{k=0}^n f_k^+ \quad \text{und} \quad t_n := \sum_{k=0}^n f_k^-,$$

so definiert dies monoton wachsende Funktionen aus  $L(I)$ , deren Integralfolgen wegen  $f_n^+ \leq |f_n|$  und  $f_n^- \leq |f_n|$  beschränkt sind. Nach dem Satz von Beppo Levi konvergieren sie fast überall punktweise gegen Funktionen  $s, t \in L(I)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n(x) dx = \int_a^b t(x) dx.$$

Daraus folgt die Konvergenz  $\sum_{k=0}^n f_k = s_n - t_n$  gegen  $f = s - t$  fast überall sowie

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \int_a^b s_n(x) - t_n(x) dx \rightarrow \int_a^b s(x) - t(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

für  $n \rightarrow \infty$  □

**Satz 16.7** Eine Funktion  $f \in L(I)$  ist genau dann fast überall gleich Null, wenn  $\int_a^b |f(x)| dx = 0$  ist.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $f$  fast überall gleich Null, dann ist auch  $|f|$  fast überall gleich Null und die Behauptung folgt aus Satz 16.1 wegen  $\int_a^b 0 dx = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Ist  $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ , so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b |f_k(x)| dx$$

mit  $f_k := f$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 16.6 konvergiert dann für fast alle  $x \in I$  die Summe  $\sum_{k=0}^n f_k(x) = (n+1)f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ , was nur für solche  $x$  der Fall sein kann, für die  $f(x) = 0$  gilt. Also ist  $f$  fast überall gleich Null ist. □

**Satz 16.8** Seien  $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \dots$  Intervalle und

$$I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Wir bezeichnen mit  $a$  und  $b$  bzw.  $a_n$  und  $b_n$  die Randpunkte von  $I$  bzw.  $I_n$ . Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem der Intervalle  $I_n$  Lebesgue-integrierbar ist und für die die Integralfolge  $\int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx$  beschränkt ist. Dann ist  $f \in L(I)$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx.$$

**Beweis:** Aus der Verschachtelung der  $I_n$  und der Definition von  $I$  folgt  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ , wobei  $a = -\infty$  und  $b = \infty$  möglich ist.

Wir betrachten nun zunächst den Fall  $f \geq 0$  (d.h.  $f = |f|$ ) und definieren die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese sind nach Annahme Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

und konvergieren nach Konstruktion wegen  $f \geq 0$  punktweise monoton gegen  $f$ . Also folgt die Behauptung aus dem Satz von Beppo Levi. Falls  $f \geq 0$  nicht gilt, führen wir den gleichen Beweis mit  $f^+$  und  $f^-$  durch.  $\square$

Wir formulieren nun zwei weitere Konvergenzsätze, die aus dem Satz von Beppo Levi folgen, die aber andere Bedingungen an die Funktionenfolge  $f_n$  stellen. Eine Übersicht über die einzelnen Bedingungen wird am Ende des Abschnitts in einem Diagramm gegeben.

**Satz 16.9 (Konvergenzsatz von Lebesgue)** Betrachte eine Folge von Funktionen  $f_n \in L(I)$ , die fast überall gegen ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und für die eine Funktion  $g \in L(I)$  existiert mit  $|f_n| \leq g$  fast überall für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $f \in L(I)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Beweis:** Sei  $N$  die Nullmenge, auf der  $f_n \rightarrow f$  nicht gilt. Für  $x \in I \setminus N$  definieren wir

$$g_n(x) := \inf\{f_k(x) \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad h_n(x) := \sup\{f_k(x) \mid k \geq n\}$$

und für  $x \in N$  setzen wir  $g_n(x) := 0$  und  $h_n(x) := 0$ .

Aus der Definition folgt für alle  $x \in I \setminus N$  (also für fast alle  $x \in I$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

wobei die jeweils letzten Gleichungen aus der Identität  $\lim = \limsup$  bzw.  $\lim = \liminf$  im Falle der Konvergenz folgen. Per Definition sind die Folgen  $g_n$  und  $h_n$  zudem monoton wachsend bzw. fallend auf  $I \setminus N$ , konvergieren also fast überall monoton gegen  $f$ .

**(Die Details des folgenden Abschnitts wurden im Sommersemester 2022 nicht behandelt.)** Aus Satz 16.3 folgt, dass die Funktion  $\tilde{g}_{n,m} := \min\{f_k \mid k = n, \dots, m\}$  für  $m \geq n$  in  $L(I)$  liegt. Zudem ist  $\tilde{g}_{n,m}$  monoton fallend in  $m$  und weil  $f_n(x)$  für  $x \in I \setminus N$  konvergiert, konvergiert auch  $\tilde{g}_{n,m}(x)$  gegen  $g_n(x)$  für  $m \rightarrow \infty$ . Aus  $-g \leq f_n \leq g$  folgt darüberhinaus  $-g \leq \tilde{g}_{n,m} \leq g$  und damit

$$-\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b \tilde{g}_{n,m}(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Die  $\tilde{g}_{n,m}$  besitzen also eine beschränkte Integralfolge, weswegen nach dem Satz von Beppo Levi  $g_n \in L(I)$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Durch Grenzübergang in der obigen Integralungleichung folgt zudem, dass auch die  $g_n$  eine beschränkte Integralfolge besitzen. Analog beweist man, dass  $h_n \in L(I)$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und dass auch die  $h_n$  eine beschränkte Integralfolge besitzen.

Also können wir den Satz von Beppo Levi auf  $g_n$  und auf  $h_n$  anwenden und erhalten  $f \in L(I)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx$  folgt damit aus der Ungleichung

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx \leq \int_a^b h_n(x)dx.$$

□

Eine sofortige Folgerung aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist der “kleine” Satz von Lebesgue.

**Satz 16.10 (“Kleiner” Satz von Lebesgue)** Sei  $I$  ein beschränktes Intervall. Betrachte eine Folge von Funktionen  $f_n \in L(I)$ , die fast überall gegen ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und die für alle  $n \in \mathbb{N}$  gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es existiert ein  $M \in \mathbb{R}$  mit  $|f_n| \leq M$  fast überall für alle  $n$ . Dann gilt  $f \in L(I)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 16.9 mit der der Tatsache, dass jede konstante Funktion auf einem beschränkten Intervall Lebesgue-integrierbar ist. □

Die folgende Tabelle stellt die Kriterien der drei behandelten Konvergenzsätze schematisch dar.

Hinreichende Bedingungen für $f \in L(I)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ für fast überall konvergente Funktionenfolgen $f_n \rightarrow f$ mit $f_n \in L(I)$		
Bedingung	Satz	Anmerkung
monotone Konvergenz fast überall und beschränkte Integralfolge	16.5 (Beppo Levi)	Existenz von $f$ folgt aus den Voraussetzungen
$ f_n  \leq g$ fast überall für ein $g \in L(I)$	16.9 (Lebesgue)	
$ f_n  \leq M$ fast überall für ein $M \in \mathbb{R}$	16.10 ("kleiner" Lebesgue)	gilt nur für beschränkte Intervalle $I$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Satz, der ein weiteres Kriterium für  $f \in L(I)$  angibt, allerdings keine Konvergenz der Integralfolge garantiert.

**Satz 16.11** Betrachte eine Folge von Funktionen  $f_n \in L(I)$ , die fast überall gegen ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Zudem existiere ein  $g \in L(I)$  mit  $|f| \leq g$  fast überall. Dann gilt  $f \in L(I)$ .

**Beweis:** Wir definieren

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x), & \text{falls } f_n(x) \in [-g(x), g(x)] \\ -g(x), & \text{falls } f_n(x) < -g(x). \end{cases}$$

Sicherlich gilt dann für alle  $n$  die Ungleichung  $|g_n| \leq g$ .

Kurz können wir diese Funktion auch als  $g_n = \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}$  schreiben, woraus mit Satz 16.3 folgt, dass  $g_n$  in  $L(I)$  liegt. Zudem sieht man mit dieser Darstellung, dass fast überall

$$g_n \rightarrow \max\{-g, \min\{f, g\}\} = f$$

gilt. Die Aussage folgt nun aus dem Satz von Lebesgue.  $\square$

**Bemerkung 16.12** Indem wir Satz 16.11 auf  $f_n = \vartheta_n$  anwenden mit den Treppenfunktionen  $\vartheta_n$  aus der Definition der messbaren Funktionen, folgt sofort die folgende Aussage für messbare Funktionen (vgl. Bemerkung 15.3):

Gegeben sei eine messbare Funktion  $f \in M(I)$ , für die ein  $g \in L(I)$  existiert mit  $|f| \leq g$  fast überall. Dann gilt  $f \in L(I)$ .  $\square$

## Kapitel 17

# Funktionen im $\mathbb{R}^n$ und topologische Grundlagen

Stand:  
2. August 2022

Wir wollen in diesem und den folgenden Kapiteln das Konzept der Funktionen, das wir bisher in  $\mathbb{R}$  betrachtet haben, auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Um höherdimensionale Mengen im allgemeinen zu definieren, verwenden wir das kartesische Produkt.

**Definition 17.1** Für zwei Mengen  $A_1, A_2$  definieren wir das *kartesische Produkt* als die Menge aller Paare

$$A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}.$$

Für  $n \geq 3$  Mengen  $A_1, \dots, A_n$  definieren wir das *kartesische Produkt* analog als Menge aller  $n$ -Tupel

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

□

Mit dieser Definition definieren wir

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Dabei schreiben wir die Elemente des  $\mathbb{R}^n$  oft nicht als Paare, sondern als Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

mit reellen Einträgen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  — wir identifizieren also die Punkte im  $\mathbb{R}^n$  mit den zugehörigen Vektoren. Damit dies eindeutig möglich ist, müssen wir eine Basis wählen.

Soweit nicht explizit etwas anderes vereinbart wird, verwenden wir dabei stets die Standardbasis aus den Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

also  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$  für  $x$  aus (17.1). Mit einem hochgestellten “ $T$ ” bezeichnen wir transponierte Vektoren, d.h.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Genau wie eine reelle Funktion jeder reellen Zahl  $x$  aus einer Definitionsmenge  $D \subset \mathbb{R}$  eine Zahl  $f(x) \in \mathbb{R}$  zuordnet, ordnet eine “höherdimensionale” Funktion jedem Vektor  $x$  aus einer gegebenen Definitionsmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  einen Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^m$  zu. Dabei müssen  $n$  und  $m$  nicht übereinstimmen, d.h. die Vektoren aus der Wertemenge  $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$  können eine andere Dimension als die Vektoren aus der Definitionsmenge besitzen. Da wir die reellen Zahlen auch als  $\mathbb{R}^1$  schreiben können (denn jeder eindimensionale Vektor  $x = (x_1)$  entspricht ja genau einer reellen Zahl  $x_1$ ), bilden unsere bisherigen reellen Funktionen einen Spezialfall dieser allgemeineren Funktionenklasse.

Formal schreibt man eine vektorwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  als einen  $m$ -dimensionalen Vektor

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

von Funktionen  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Beispiel 17.2** (i)  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Eine solche Funktion ordnet jedem Vektor  $x \in D \subset \mathbb{R}^2$  eine reelle Zahl  $f(x) \in \mathbb{R}$  zu. Ein Beispiel dafür mit  $D = \mathbb{R}^2$  ist die Funktion  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ . Für jeden Vektor (z.B.  $x = (x_1, x_2)^T = (2, 1)^T$ ) erhalten wir nach Einsetzen der Komponenten in die Funktion eine reelle Zahl (im Zahlenbeispiel gerade  $f((2, 1)^T) = 2^2 + 2 \cdot 1^2 = 4 + 2 = 6$ ). Der Graph einer Funktion mit  $n = 2$  und  $m = 1$  kann man als Fläche über der  $(x_1, x_2)$ -Ebene grafisch darstellen:

(ii)  $n = 1$ ,  $m = 2$ . In diesem Fall wird jedem  $x \in D \subset \mathbb{R}$  ein Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^2$  zugeordnet. Ein Beispiel dafür mit  $D = \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

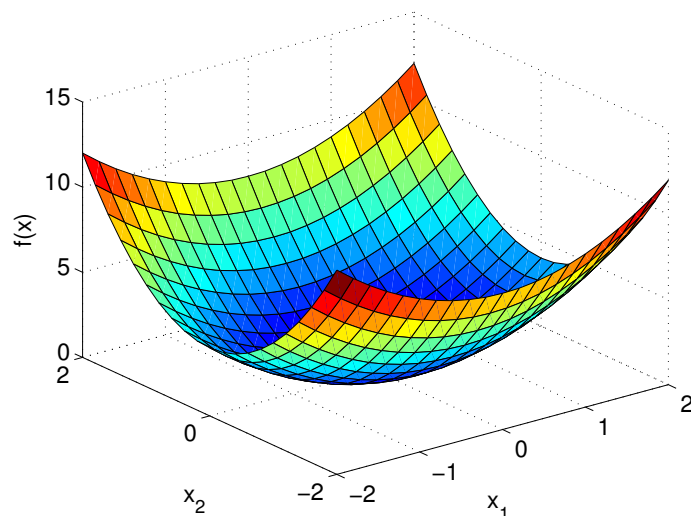


Abbildung 17.1: Darstellung der Funktion  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$

die Komponentenfunktionen lauten also  $f_1(x) = \sin x$  und  $f_2(x) = \cos x$ . Auch solch eine Funktion kann man grafisch darstellen. Abbildung 17.2 zeigt zwei verschiedene Möglichkeiten dafür (eine dritte Möglichkeit werden wir später kennenlernen).

Die rechte der beiden Abbildungen, in denen jede der reellen Komponentenfunktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  separat als “normale” reelle Funktion dargestellt wird, kann man auch allgemein für  $n = 1$  und beliebiges  $m \geq 2$  verwenden, wobei man dann natürlich  $m$  Graphen in einer Grafik erhält, was bei großem  $m$  recht unübersichtlich werden kann.

(iii) Für  $n \geq 2$  und  $m \geq 2$  lässt sich i.A. keine sinnvolle grafische Darstellung der gesamten Funktion mehr erzeugen. Man kann mit solchen Funktionen aber immer noch sinnvoll rechnen. Dies wird das Hauptthema der folgenden Kapitel sein, wobei wir zur Veranschaulichung allerdings zumeist einen der beiden Spezialfälle aus (i) und (ii) heranziehen werden.

(iv) Es gibt vielfältige Anwendungen für Funktionen im  $\mathbb{R}^n$ , selbst wenn man nur sehr elementare Mathematik verwendet. Beispielsweise ist die Oberfläche eines Quaders mit den Kantenlängen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  gegeben durch  $f_1(x) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$  (wie üblich verwenden wir die Vektorschreibweise  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ). Dies ist bereits eine Funktion von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$ . Das Volumen des gleichen Quaders ist gegeben durch  $f_2(x) = x_1x_2x_3$ , wieder eine Funktion von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$ . Wollen wir beide Größen in einer Funktion darstellen, so können wir definieren

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist dann eine Funktion von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^2$ , die uns zu jedem Kantenlängenvektor aus dem  $\mathbb{R}^3$  einen Vektor aus dem  $\mathbb{R}^2$  liefert, dessen Einträge gerade die Oberfläche und das Volumen des Quaders darstellen.  $\square$



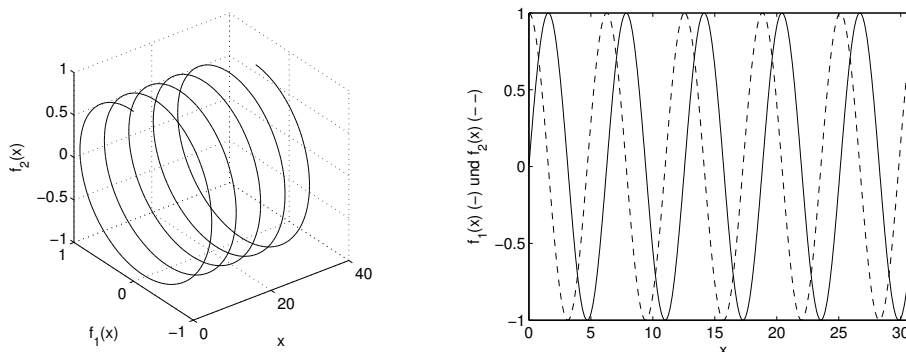


Abbildung 17.2: Darstellung der Funktion  $f(x) = (\sin x, \cos x)^T$ , links als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^2$ , rechts durch Darstellung der beiden Komponentenfunktionen als Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$

## 17.1 Metrik und Norm

Wenn wir im Folgenden mit Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  rechnen wollen, müssen wir zunächst einige grundlegende Objekte im  $\mathbb{R}^n$  selbst definieren. Wir müssen uns überlegen, wie man Abstände und Längen im  $\mathbb{R}^n$  misst (was wir z.B. benötigen, um Konvergenz definieren zu können) oder wie man das Konzept offener und abgeschlossener Intervalle auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert (was z.B. für die Differenzierbarkeit wichtig ist, da man dabei falls möglich das Auftreten von einseitigen Ableitungen vermeiden möchte). Das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit diesen Themen beschäftigt, ist die Topologie. Tatsächlich kann man Topologie nicht nur im  $\mathbb{R}^n$  sondern in allgemeinen Mengen oder Vektorräumen betreiben und wir werden dies im Folgenden auch so allgemein machen. Dabei werden wir  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  als wichtigste Sonderfälle allerdings stets separat betrachten.

Den ersten Begriff, den wir dazu definieren, ist der Abstand zweier Punkte in einer beliebigen Menge  $X$ . Mathematisch wird dieser durch den Begriff der Metrik formalisiert, vgl. die Ausführungen nach Definition 2.6.

**Definition 17.3** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Metrik* auf  $X$ , ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto d(x, y)$ , mit den folgenden Eigenschaften für alle  $x, y \in X$ .

- (i)  $d(x, y) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = y$  gilt
- (ii) Für alle  $x, y \in X$  gilt  $d(x, y) = d(y, x)$  “Symmetrie”
- (iii) Für alle  $x, y, z \in X$  gilt  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  “Dreiecksungleichung”

Das Paar  $(X, d)$  heißt dann *metrischer Raum*. □

Die Interpretation der Abbildung  $d$  ist, dass sie für je zwei Punkte  $x, y \in X$  den Abstand  $d(x, y)$  zwischen  $x$  und  $y$  misst. Beachte, dass für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und

jede Teilmenge  $A \subset X$  das Paar  $(A, d_A)$  wieder ein metrischer Raum ist, wobei  $d_A$  die Einschränkung von  $d$  auf  $A \times A$  bezeichnet.

Aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie folgt für zwei beliebige Punkte  $x, y$

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(y, x)) \geq \frac{1}{2}d(x, x) = 0.$$

Folglich liefert die Metrik immer einen Wert  $\geq 0$ , was im Sinne der Interpretation als Abstand ja auch sinnvoll ist. Ebenso folgt aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|. \quad (17.3)$$

Wie wir aus Definition 2.6 bereits wissen, ist auf den reellen Zahlen  $X = \mathbb{R}$  eine Metrik z.B. durch  $d(x, y) = |x - y|$  gegeben. "Z.B." deswegen, weil dies zwar die natürliche, aber bei weitem nicht die einzige Möglichkeit ist. Man kann (auf jeder Menge  $X$ ) z.B. auch eine Metrik mittels

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \quad (17.4)$$

definieren. Diese ist für eine sinnvolle Abstandsmessung zwar ziemlich nutzlos, erfüllt aber alle Bedingungen der obigen Definition.

Man kann also recht abstrakte Metriken konstruieren, in der Praxis wünscht man sich aber Metriken, die eine anschauliche geometrische Interpretation als Abstand besitzen. Solche Metriken werden zumeist aus sogenannten Normen abgeleitet, die wie folgt definiert sind.

**Definition 17.4** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum<sup>1</sup>. Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$ , mit den folgenden Eigenschaften für alle  $x, y \in V$ .

- (i)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ("Dreiecksungleichung").

Das Paar  $(V, \|\cdot\|)$  heißt dann *normierter Vektorraum*. □

Auch für jede Norm lässt sich aus der Dreiecksungleichung leicht die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \quad (17.5)$$

folgern.

Der Beweis des folgenden Satzes folgt sofort aus den Normeigenschaften.

---

<sup>1</sup>D.h. wir können Elemente aus  $V$  addieren und mit reellen Zahlen skalar multiplizieren und erhalten stets wieder Elemente aus  $V$ .

**Satz 17.5** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf  $V$ . Jeder normierte Vektorraum ist also auch ein metrischer Raum.

Anschaulich kann man sich eine Norm  $\|x\|$  als ein Maß für die Länge des Vektors  $x$  vorstellen. Die gerade definierte Metrik definiert den Abstand zwischen zwei Punkten also als die Länge des Vektors  $x - y$ , der — geeignet verschoben — als Vektor mit “Spitze”  $x$  und “Fußpunkt”  $y$  aufgefasst werden kann.

Wie kann eine Norm im  $\mathbb{R}^n$  nun konkret aussehen? Die folgende Definition gibt eine ganze Familie solcher Normen an.

**Definition 17.6** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(i) Für jedes  $p \in [1, \infty)$  definieren wir

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Für  $p = \infty$  definieren wir

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

□

Für den Fall  $p = 2$  wird die Norm aus (i) *Euklidische Norm* genannt. Zur geometrischen Interpretation einiger dieser Normen siehe Beispiel 17.13.

Dass Definition 17.6 tatsächlich Normen definiert, die alle Eigenschaften aus Definition 17.4 erfüllen, ist nicht offensichtlich. Die Eigenschaften (i) und (ii) sind zwar leicht nachzuprüfen (was wir hier nicht ausführlich machen werden). Für die Dreiecksungleichung (iii) müssen wir noch etwas arbeiten. Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall  $p = \infty$ .

**Satz 17.7** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

**Beweis:** Seien  $z = x + y$  und seien  $x_{i^*}$ ,  $y_{j^*}$  und  $z_{k^*}$  die betragsmäßig größten Einträge von  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Dann gilt

$$\|x + y\|_\infty = \|z\|_\infty = |z_{k^*}| = |x_{k^*} + y_{k^*}| \leq |x_{k^*}| + |y_{k^*}| \leq |x_{i^*}| + |y_{j^*}| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

□

Für  $p < \infty$  benötigen wir zum Nachweis der Dreiecksungleichung zunächst ein Lemma und einen darauf aufbauenden Satz.

**Lemma 17.8** Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für alle  $a, b \geq 0$  die Ungleichung

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

**Beweis:** Falls  $a = 0$  oder  $b = 0$  gilt, ist die Aussage klar. Für  $a, b > 0$  verwenden wir, dass der Logarithmus wegen  $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$  konkav ist (vgl. Satz 10.10). Wenden wir die Definition der Konkavität mit  $\lambda = 1/p$  und  $1 - \lambda = 1/q$  an, so folgt

$$\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b.$$

Die Behauptung folgt dann durch Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten.  $\square$

**Satz 17.9 (Höldersche Ungleichung)** Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

**Beweis:** Falls  $x = 0$  oder  $y = 0$  ist, ist die Aussage klar. Andernfalls setzen wir

$$v_i := \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} \quad \text{und} \quad w_i := \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Es folgt

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Wenden wir Lemma 17.8 mit  $a = v_i$  und  $b = w_i$  an, so folgt

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} = v_i^{1/p} w_i^{1/q} \leq \frac{v_i}{p} + \frac{w_i}{q}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Aufsummieren über  $i$  liefert

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt.  $\square$

**Bemerkung 17.10** Im Spezialfall  $p = q = 2$  erhält man für das mittels

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definierte *Euklidische Skalarprodukt* die Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

welche auch unter dem Namen *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* bekannt ist.  $\square$

Eine Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist das folgende Lemma. Wenn wir das Integral über eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit integrierbaren Komponentenfunktionen  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  komponentenweise als

$$\int_a^b f(x) dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(x) dx \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

definieren, so stellt sich die Frage, ob die Dreiecksungleichung für Integrale auch für Normen gilt. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, für die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  ist dies aber zumindest für stetige Funktionen erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 17.11** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\|_2 \leq \int_a^b \|f(x)\|_2 dx.$$

**Beweis:** Sei  $u := \int_a^b f(x) dx$  und  $K := \|u\|_2$ . Falls  $K = 0$  ist, folgt die Behauptung sofort. Andernfalls gilt wegen der Linearität des Integrals und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} K^2 &= \langle u, u \rangle = \left\langle \int_a^b f(x) dx, u \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle f(x), u \rangle dx \leq \int_a^b \|f(x)\| \|u\| dx = K \int_a^b \|f(x)\| dx. \end{aligned}$$

Division durch  $K$  liefert nun die Behauptung.  $\square$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung können wir nun die Dreiecksungleichung für die  $\|\cdot\|_p$ -Normen für  $p \in [1, \infty)$  beweisen, welche auch als *Minkowskische Ungleichung* bekannt ist.

**Satz 17.12 (Minkowskische Ungleichung)** Für alle  $p \in [1, \infty)$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ .

**Beweis:** Für  $p = 1$  folgt der Satz sofort aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag. Für  $p > 1$  ist die Aussage klar, falls  $x = 0$  oder  $y = 0$  oder  $x + y = 0$  gilt. Andernfalls sei  $q := p/(p-1)$ , woraus  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  folgt. Wir definieren den Vektor  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$  als

$$z_i := |x_i + y_i|^{p-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt  $z_i^q = |x_i + y_i|^{q(p-1)} = |x_i + y_i|^p$  und damit

$$\|z\|_q = \|x + y\|_p^{p/q}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag und der Hölderschen Ungleichung folgt dann

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| |z_i| \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|z\|_q,$$

woraus nach Definition von  $z$  folgt

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p/q}.$$

Wegen  $p - p/q = 1$  folgt daraus die Behauptung, indem wir beide Seiten durch  $\|x + y\|_p^{p/q}$  teilen.  $\square$

Wir haben also nachgewiesen, dass alle Normen aus Definition 17.6 tatsächlich Normen im Sinne der Definition 17.4 sind. Im folgenden Beispiel betrachten wir drei Spezialfälle und die dazugehörigen Metriken.

**Beispiel 17.13** (i) Für  $p = 2$  erhalten wir die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Die dadurch definierte Metrik ist gegeben durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dies ist gerade die Euklidische Länge des Vektors mit Spitze  $x$  und Fuß  $y$  und entspricht daher dem aus der Schule bekannten Abstandsbegriff im  $\mathbb{R}^n$  (in der Schule natürlich für  $n = 2$  und  $n = 3$ ). Für  $n = 1$  ist  $\|x\|_2$  übrigens gerade der Absolutbetrag.

(ii) Für  $p = 1$  erhalten wir die Norm

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

mit zugehöriger Metrik

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Der Abstand zweier Punkte ist hier also die Summe der Koordinatenabstände. Auch dieser Abstand kann in der Praxis sinnvoll sein. Betrachten man z.B. eine Stadt mit rechtwinkligem Straßennetz (so wie das z.B. in den USA aber auch in manchen deutschen Städten zumindest in einigen Stadtteilen der Fall ist), so gibt diese Norm gerade die Länge an, die man auf der Fahrt von Punkt  $x$  zu Punkt  $y$  zurücklegen muss.

(iii) Für  $p = \infty$  erhalten wir die Norm

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

mit der Metrik

$$d(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

$\square$

Der folgende Satz klärt die Beziehungen zwischen diesen Normen und damit auch zwischen den zugehörigen Metriken.

**Satz 17.14** Für die Normen aus Definition 17.6 gelten für alle  $p \in (1, \infty)$  die Ungleichungen

- (i)  $\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$
- (ii)  $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ .
- (iii)  $\|x\|_1 \leq n^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p$
- (iv)  $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

**Beweis:** (i) Die erste Ungleichung folgt, indem wir den Vektor  $x$  als Summe der Vektoren

$$y^{(1)} := x_1 e_1, \quad y^{(2)} := x_2 e_2, \quad \dots, \quad y^{(n)} := x_n e_n$$

mit den Standardbasisvektoren  $e_i$  aus (17.2) schreiben. Aus den Definitionen folgt dann

$$x = \sum_{i=1}^n y^{(i)}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|y^{(i)}\|_1 \quad \text{und} \quad \|y^{(i)}\|_1 = |x_i| = (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|y^{(i)}\|_p.$$

Die Dreiecksungleichung für die  $p$ -Norm ergibt damit

$$\|x\|_p \leq \|y^{(1)}\|_p + \|y^{(2)}\|_p + \dots + \|y^{(n)}\|_p = \|y^{(1)}\|_1 + \|y^{(2)}\|_1 + \dots + \|y^{(n)}\|_1 = \|x\|_1.$$

Die zweite Ungleichung folgt, wenn wir den betragsmäßig maximalen Eintrag in  $x$  mit  $x_{i^*}$  bezeichnen, aus

$$\|x\|_\infty = |x_{i^*}| = (|x_{i^*}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

(ii) Mit  $x_{i^*}$  wie in (i) folgt

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_{i^*}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (n |x_{i^*}|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

(iii) Wir setzen  $y = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Damit folgt aus der Hölderschen-Ungleichung für  $q = p/(p-1)$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p n^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) Folgt durch Kombination von (ii) und (iii).  $\square$

Wir beenden den Abschnitt mit einem Beispiel für eine Norm in einem Vektorraum, der nicht der  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Beispiel 17.15** Mit  $C([a, b], \mathbb{R})$  bezeichnen wir die Menge der stetigen reellen Funktionen auf einem Intervall  $[a, b]$ . Diese Menge ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , denn für je zwei Funktionen  $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist auch  $f + g$  und  $\lambda f$  wieder eine stetige Funktion und liegt daher wieder in  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Auf diesem Raum definieren wir eine Norm mittels

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Die Eigenschaften (i) und (ii) der Norm sind sofort klar, die Dreiecksungleichung beweist man genau wie für die  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm für Vektoren, vgl. den Beweis von Satz 17.7, wobei an Stelle der Indizes  $i^*$  etc. hier die Maximalstellen der jeweiligen Funktionen verwendet werden.  $\square$

## 17.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Nachdem wir nun geklärt haben, wie man im  $\mathbb{R}^n$  (und auch in allgemeineren Räumen) Längen und Abstände messen kann, widmen wir uns nun der Frage, wie man das Konzept der offenen und abgeschlossenen Intervalle in den  $\mathbb{R}^n$  übertragen kann. Dazu benötigen wir als Hilfsmittel zunächst die folgenden Begriffe des *Balls* und der *Umgebung*, der sich für allgemeine metrische Räume definieren lässt.

**Definition 17.16** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$ .

(i) Für  $\varepsilon > 0$  nennen wir die Menge

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$$

den (*offenen*) *Ball um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$*  (oder kurz  $\varepsilon$ -*Ball um  $x$* ).

(ii) Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *Umgebung* von  $x$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset U$ .  $\square$

Anschaulich wird der Begriff “Ball” klar, wenn man  $X = \mathbb{R}^3$  und  $d$  als die Euklidische Metrik wählt. Dann ist  $B_\varepsilon(x)$  nämlich tatsächlich ein Ball mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $\varepsilon > 0$  im umgangssprachlichen Sinn (wobei der Rand des Balls per Definition nicht zum Ball dazugehört). Im  $\mathbb{R}^2$  mit der Euklidischen Metrik ist  $B_\varepsilon(x)$  eine Kreisscheibe (ohne Rand) und in  $\mathbb{R}$  mit der durch den Absolutbetrag definierten Metrik ist  $B_\varepsilon(x)$  nichts anderes als das offene Intervall  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

Wie ein Ball geometrisch genau aussieht, hängt von der verwendeten Metrik ab. Interessant ist es z.B., sich im  $\mathbb{R}^2$  (den man an der Tafel oder auf einem Blatt Papier leichter veranschaulichen kann als den  $\mathbb{R}^3$ ) die Bälle für die Metriken zu den Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  einmal aufzuzeichnen (Übungsaufgabe).

Der folgende Satz zeigt eine Eigenschaft von Umgebungen zweier Punkte  $x, y \in X$ .

**Satz 17.17 (Hausdorffsches Trennungsaxiom)** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Dann gibt es Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $x$  und  $y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

**Beweis:** Aus der Definition der Umgebung folgt, dass jeder Ball  $B_\varepsilon(x)$  mit beliebigem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung von  $x$  ist. Wählen wir nun  $\varepsilon = d(x, y)/2$  und setzen  $U := B_\varepsilon(x)$  und  $V := B_\varepsilon(y)$ , so sind dies Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Dass ihr Schnitt leer ist, beweisen wir per Widerspruch: Angenommen, es existiert ein  $z \in U \cap V$ . Dann gilt per Definition  $d(x, z) < \varepsilon$  und  $d(y, z) < \varepsilon$  und aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie der Metrik folgt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x, y),$$



also  $d(x, y) < d(x, y)$ , was offensichtlich unmöglich ist und daher den Widerspruch liefert.  $\square$

Die folgende Definition verallgemeinert nun den Begriff des offenen Intervalls.

**Definition 17.18** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines metrischen Raums  $(X, d)$  heißt *offen*, wenn zu jedem  $x \in A$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset A$ .  $\square$

Anders gesagt ist eine Menge  $A$  genau dann offen, wenn sie eine Umgebung für jeden ihrer Punkte ist.

**Beispiel 17.19** (i) In  $\mathbb{R}$  mit der Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  ist jedes offene Intervall der Form  $(a, b)$ ,  $(-\infty, b)$  oder  $(a, \infty)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  eine offene Menge im Sinne von Definition 17.18. Zum **Beweis** sei  $x \in (a, b)$  beliebig. Dann ist  $x > a$  und  $x < b$  und damit ist  $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\} > 0$  (falls eine der Intervallgrenzen nicht endlich ist, lassen wir den zugehörigen Term in diesem Minimum weg). Nach Konstruktion von  $\varepsilon$  ist dann jedes  $y \in B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  größer als  $a$  und kleiner als  $b$  und damit in  $(a, b)$  enthalten. Also folgt  $B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ .

(ii) In  $\mathbb{R}$  mit der Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  sind auch Vereinigungen und Schnitte endlich vieler offener Intervalle wieder offene Mengen. Dies folgt, weil jede solche Menge aus endlich vielen disjunkten offenen Intervallen besteht, auf die die Argumentation aus (i) angewendet werden kann.

(iii) Intervalle der Form  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  oder  $[a, b]$  (wobei die Intervallgrenzen an den Rändern mit “ $[$ ” oder “ $]$ ” jetzt endlich sind) sind hingegen nicht offen. Z.B. für  $(a, b]$  und  $x = b$  ragt jedes Intervall der Form  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  über den rechten Intervallrand von  $(a, b]$  hinaus und ist daher nicht in  $(a, b]$  enthalten.

(iv) In einem metrischen Raum ist für jedes  $r > 0$  und jedes  $y \in X$  der offene Ball  $B_r(y)$  eine offene Menge. Zum **Beweis** sei  $x \in B_r(y)$ , woraus nach Definition des Balls  $d(x, y) < r$  folgt. Setzen wir nun  $\varepsilon := r - d(x, y) > 0$ , so gilt für jedes  $z \in B_\varepsilon(x)$  die Ungleichung  $d(z, x) < r - d(x, y)$  und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < r - d(x, y) + d(x, y) = r.$$

Also liegt jedes  $z \in B_\varepsilon(x)$  in  $B_r(y)$  und es folgt  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(y)$ .

(v) Mit einem analogen Beweis wie in (iv) unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung (17.3) folgt, dass für jedes  $r > 0$  und  $y \in X$  auch die Menge

$$\{x \in X \mid d(x, y) > r\}$$

offen ist.  $\square$

**Bemerkung 17.20** Für  $X = \mathbb{R}^n$  gilt: Obwohl die Form des Balls  $B_\varepsilon(x)$  von der gewählten Metrik bzw. der zu Grunde liegenden Norm abhängt (also z.B. für  $\|\cdot\|_1$  anders aussieht als für  $\|\cdot\|_\infty$ ), führt die Definition der offenen Mengen für jede Norm  $\|\cdot\|_p$  aus Definition 17.6 auf die gleichen Mengen. Um dies zu **beweisen**, bezeichnen wir die Bälle zu den  $p$ -Normen mit  $B_{p,\varepsilon}(x)$ . Wegen Satz 17.14 lässt sich zu je zwei Normen  $\|\cdot\|_p$  und  $\|\cdot\|_q$  aus Definition

17.6 und jedem Ball  $B_{p,\varepsilon}(x)$  ein  $\varepsilon' > 0$  finden mit  $B_{q,\varepsilon'}(x) \subset B_{p,\varepsilon}(x)$  (für  $p = 1$  und  $q = \infty$  geht dies z.B. mit  $\varepsilon' = \varepsilon/n$ ). Existiert also für eine Menge  $A$  zu jedem Punkt  $x \in A$  ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_{p,\varepsilon}(x) \subset A$  finden, so existiert auch ein  $\varepsilon' > 0$  mit  $B_{q,\varepsilon'}(x) \subset A$ .

Folglich können wir im  $\mathbb{R}^n$  von offenen Mengen sprechen, ohne dass wir jedesmal erwähnen müssen, welche Norm aus Definition 17.6 wir gerade verwenden. Im Fall des  $\mathbb{R}^n$  werden wir daher die Norm im Folgenden einfach mit  $\|\cdot\|$  bezeichnen und diese nur dann genauer spezifizieren, wenn dies — z.B. für eine konkrete Rechnung — nötig ist.

In anderen metrischen Räumen als dem  $\mathbb{R}^n$  oder für Metriken, die nicht durch Normen definiert sind, ist das allerdings nicht unbedingt der Fall (man überlege sich z.B. einmal, wie die Bälle und die offenen Mengen in  $\mathbb{R}$  zu der “seltsamen” Metrik (17.4) aussehen).  $\square$

Beispiel 17.19(iii) zeigt, dass bei Intervallen der Form  $(a, b]$  in  $\mathbb{R}$  der Randpunkt  $b \in (a, b]$  offenbar verhindert, dass das Intervall offen ist. Dies gilt tatsächlich allgemein, wenn man formal definiert, was ein Randpunkt einer Menge eigentlich ist.

**Definition 17.21** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt *Randpunkt* von  $A$ , wenn in jeder Umgebung  $U$  von  $x$  sowohl Punkte aus  $A$  als auch Punkte aus  $X \setminus A$  liegen, d.h. wenn für jede Umgebung  $U$  von  $x$  sowohl  $U \cap A \neq \emptyset$  als auch  $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$  gilt.

Die Menge aller Randpunkte von  $A$  wird *Rand* von  $A$  genannt und mit  $\partial A$  bezeichnet.  $\square$

**Bemerkung 17.22** (i) Beachte, dass die Randpunkte gemäß dieser Definition nicht in  $A$  enthalten sein müssen.

(ii) Aus der Definition folgt, dass die Randpunkte der Menge  $A$  mit den Randpunkten der Menge  $X \setminus A$  übereinstimmen.  $\square$

**Satz 17.23** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $A \subset X$  ist genau dann offen, wenn sie keinen Randpunkt von  $A$  enthält.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $A$  offen und  $x \in A$  ein beliebiger Punkt. Dann gibt es einen Ball  $B_\varepsilon(x) \subset A$ . Folglich ist  $U = B_\varepsilon(x)$  eine Umgebung, die keine Punkte  $y \in X \setminus A$  enthält. Also ist  $x$  kein Randpunkt.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $A$  eine Menge, die keine Randpunkte von sich selbst enthält. Sei  $x \in A$  beliebig. Da  $A$  keine Randpunkte enthält, ist auch  $x$  kein Randpunkt. Folglich existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$ , für die entweder  $U \subset A$  oder  $U \subset X \setminus A$  gilt. Wegen  $x \in U$  und  $x \in A$  ist  $U \cap A \neq \emptyset$ , also ist der Fall  $U \subset X \setminus A$  nicht möglich. Da  $U$  per Definition einen Ball  $B_\varepsilon(x)$  für ein  $\varepsilon > 0$  enthält, folgt  $B_\varepsilon(x) \subset U \subset A$ . Folglich ist  $A$  offen.  $\square$

Der folgende Satz gibt verschiedene Eigenschaften offener Mengen an.

**Satz 17.24** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  gilt:

(i)  $\emptyset$  und  $X$  sind offene Mengen.

(ii) Für endlich viele offene Mengen  $A_1, \dots, A_m$  ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1, \dots, m} A_i$$

offen.

(iii) Für beliebig viele<sup>2</sup> offene Mengen  $A_\alpha$ ,  $\alpha \in B$ , ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha$$

offen.

**Beweis:** (i) Für die leere Menge ist nichts zu zeigen, weil sie keine Punkte enthält und der gesamte Raum  $X$  enthält jeden beliebigen  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(x)$  um jeden beliebigen Punkt  $x \in X$ .

(ii) Sei  $x \in \bigcap_{i=1, \dots, m} A_i$ . Dann liegt  $x$  in jeder der Mengen  $A_i$  und weil die Mengen offen sind existieren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  mit  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$ . Für  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, m\}$  folgt daher  $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und damit auch  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1, \dots, m} A_i$ . Folglich ist der Durchschnitt eine offene Menge.

(iii) Sei  $x \in \bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha$ . Dann liegt  $x$  in einer der Mengen  $A_\alpha$  und weil diese Menge offen ist existiert ein  $\varepsilon$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha$ . Also gilt auch  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha$  weswegen die Vereinigung eine offene Menge ist.  $\square$

**Beispiel 17.25** Die Aussage (ii) gilt im Allgemeinen nicht für unendlich viele offene Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . Ein Beispiel hierfür in  $X = \mathbb{R}$  sind die Intervalle  $A_k = (-1/k, 1/k)$ . Jedes der Intervalle ist offen, ihr Schnitt ist aber gleich  $\bigcap_{i=1, \dots, \infty} A_i = \{0\}$  und diese Menge ist nicht offen, da sie keinen Ball  $B_\varepsilon(0)$  enthält.  $\square$

Nachdem wir mit den offenen Mengen eine Verallgemeinerung der offenen Intervalle erhalten haben, definieren wir nun die entsprechende Verallgemeinerung der abgeschlossenen Mengen.

**Definition 17.26** Eine Menge  $A$  heißt *abgeschlossen*, falls die Menge  $X \setminus A$  offen ist.  $\square$

**Beispiel 17.27** (i) In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  ist die Menge

$$\overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen, da das Komplement

$$X \setminus \overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) > \varepsilon\}$$

nach Beispiel 17.19(v) offen ist. Die Menge  $\overline{B}_\varepsilon(x)$  wird *abgeschlossener Ball* genannt.

(ii) In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  sind  $\emptyset$  und  $X$  abgeschlossen, da ihre Komplemente  $X$  und  $\emptyset$  offen sind.  $\square$

<sup>2</sup>auch überabzählbar viele

Aus Bemerkung 17.22(ii) und Satz 17.23 folgt sofort der folgende Satz.

**Satz 17.28** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn sie jeden Randpunkt von  $A$  enthält.

**Beweis:** Aus Bemerkung 17.22(ii) folgt, dass  $A$  genau dann jeden Randpunkt von  $A$  enthält, wenn  $X \setminus A$  keinen Randpunkt von  $X \setminus A$  enthält. Dies wiederum ist nach Satz 17.23 genau dann der Fall, wenn  $X \setminus A$  offen ist, also genau dann, wenn  $A$  abgeschlossen ist.  $\square$

**Beispiel 17.29** (i) Jedes abgeschlossene Intervall der Form  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  oder  $(-\infty, \infty)$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , da die Randpunkte  $a$  und/oder  $b$  jeweils enthalten sind (beachte, dass  $\pm\infty$  keine Randpunkte sind, da Randpunkte in  $\mathbb{R}$  per Definition in  $\mathbb{R}$  liegen müssen,  $\pm\infty$  aber keine reellen Zahlen sind).

(ii) Das Intervall  $(a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  ist weder offen noch abgeschlossen: Da der Randpunkt  $a$  nicht in  $(a, b]$  liegt, ist das Intervall nicht abgeschlossen und da der Randpunkt  $b$  in  $(a, b]$  liegt, ist das Intervall nicht offen.  $\square$

Aus den Sätzen 17.23 und 17.28 folgt sofort der folgende Satz.

**Satz 17.30** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ . Dann gilt

- (i) die Menge  $A \setminus \partial A$  ist offen
- (ii) die Menge  $A \cup \partial A$  ist abgeschlossen
- (iii) der Rand  $\partial A$  ist abgeschlossen.

**Beweis:** (i) Sei  $x \in A \setminus \partial A$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $U \subset A$ , folglich auch einen Ball  $B_\varepsilon(x) \subset U \subset A$ . Sei nun  $y \in B_\varepsilon(x)$ . Dann gibt es, da  $B_\varepsilon(x)$  offen ist, einen Ball  $B_{\varepsilon'}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset A$ . Damit ist  $y \notin \partial A$  und folglich  $B_\varepsilon(x) \subset A \setminus \partial A$ . Also ist  $A \setminus \partial A$  offen.

(ii) Folgt aus (i) da  $X \setminus (A \cup \partial A) = (X \setminus A) \setminus \partial A = (X \setminus A) \setminus \partial(X \setminus A)$  offen ist.

Zum Beweis von (iii) beachte, dass für jede Menge  $B \subset X$  die Gleichung  $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$  gilt, denn  $x \in B$  gilt genau dann, wenn  $x \in A \cup B$  und  $x \notin A \setminus B$  gilt. Für  $\partial A$  gilt also

$$\partial A = (A \cup \partial A) \setminus (A \setminus \partial A).$$

Desweiteren überlegt man sich, dass für zwei beliebige Mengen  $C, D \subset X$  die Gleichung  $X \setminus (C \setminus D) = (X \setminus C) \cup D$  gilt. Damit folgt

$$X \setminus \partial A = (X \setminus (A \cup \partial A)) \cup (A \setminus \partial A).$$

Nach (i) und (ii) sind die beiden Mengen in dieser Vereinigung offen, also ist auch  $X \setminus \partial A$  offen und folglich ist  $\partial A$  abgeschlossen.  $\square$

Dieser Satz motiviert die folgende Definition.

**Definition 17.31** Für eine Menge  $A \subset X$  definieren wir<sup>3</sup> das *Innere* von  $A$  als  $\text{int } A := A \setminus \partial A$  und den *Abschluss* von  $A$  als  $\bar{A} := A \cup \partial A$ .  $\square$

Nach Satz 17.30 ist  $\text{int } A$  immer eine offene Menge und  $\bar{A}$  immer eine abgeschlossene Menge.

Abschließend merken wir an, dass man offene Mengen auch ganz ohne Verwendung einer Metrik definieren kann. Für eine beliebige Menge  $X$  definiert man dazu eine Menge  $T$  von Teilmengen von  $X$  (die Elemente von  $T$  sind also selbst wieder Mengen) und bezeichnet jede Menge  $A \in T$  als “offen”. Dabei muss  $T$  so gewählt sein, dass die Eigenschaften aus Satz 17.24 gelten<sup>4</sup>. Das Paar  $(X, T)$  wird dann *topologischer Raum* genannt. Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist also ein Spezialfall eines topologischen Raums, bei dem die Mengen in  $T$  gemäß Definition 17.18 gewählt werden.

Da wir ohne Metrik keine Bälle zur Verfügung haben, muss man den Begriff der Umgebung dann wie folgt definieren: Eine Menge  $U \subset X$  heißt *Umgebung* eines Punktes  $x \in X$ , wenn es eine offene Menge  $V \in T$  gibt mit  $x \in V$  und  $V \subset U$ . Im Falle metrischer Räume ist dies äquivalent zu Definition 17.16(ii).

Das Hausdorffsche Trennungsaxiom aus Satz 17.17 gilt für allgemeine topologische Räume nicht unbedingt. Wenn es erfüllt ist, wird der Raum  $(X, T)$  *Hausdorff-Raum* genannt. Dies erklärt auch warum diese Trennungseigenschaft als “Axiom” bezeichnet wurde, denn für allgemeine topologische Räume ist sie eben nicht automatisch erfüllt sondern muss separat gefordert werden. Für metrische Räume ist das Hausdorffsche Trennungsaxiom aber — wie in Satz 17.17 bewiesen — immer erfüllt. Metrische Räume sind also immer Hausdorff-Räume.

---

<sup>3</sup>Für das Innere und den Abschluss werden manchmal auch andere Symbole verwendet.

<sup>4</sup>Dies ist völlig analog zum Anordnungsaxiom, wo wir ganz abstrakt eine Menge von Zahlen als “positiv” definiert haben und für diese gewisse Eigenschaften verlangt haben.

# Kapitel 18

## Grenzwerte und Stetigkeit

Stand:  
2. August 2022

Wir wollen in diesem Kapitel das Konzept konvergenter Folgen auf allgemeine metrische Räume und insbesondere auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern.

### 18.1 Grenzwerte

**Definition 18.1** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in  $X$ . Dann heißt die Folge konvergent gegen den Grenzwert  $a \in X$ , falls gilt:

$$\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_k, a) < \varepsilon \text{ für alle } k \geq N(\varepsilon). \quad (18.1)$$

In diesem Fall schreiben wir wie üblich  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  oder kurz  $x_k \rightarrow a$  für  $k \rightarrow \infty$ . □

**Bemerkung 18.2** Die Bedingung (18.1) in der Konvergenzdefinition kann auf verschiedene Weisen äquivalent ausgedrückt werden:

(i) Da stets  $d(x, y) \geq 0$  gilt, verlangt die Bedingung (18.1) gerade, dass die (reelle) Folge  $(d(x_k, a))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist. Sie ist also äquivalent zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = 0, \quad (18.2)$$

wobei (18.2), da  $d(x_k, a)$  ja für jedes  $k$  eine reelle Zahl ist, der reelle Grenzwert aus Definition 3.3 ist. Falls die Metrik mittels  $d(x, y) = \|x - y\|$  von einer Norm erzeugt wird, kann man dies äquivalent auch als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0 \quad (18.3)$$

schreiben. Im Spezialfall  $X = \mathbb{R}^n$  ist es dabei unerheblich, welche Norm  $\|\cdot\|_p$  aus Definition 17.6 wir verwenden, denn aus Satz 17.14 folgt, dass die Konvergenz  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|_p = 0$  genau dann für eine dieser Normen gilt, wenn sie für alle dieser Normen gilt.

(ii) Verwendet man die Äquivalenz

$$d(x_k, a) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_k \in B_\varepsilon(a),$$

so kann (18.1) auch geschrieben werden als

$$\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } x_k \in B_\varepsilon(a) \text{ für alle } k \geq N(\varepsilon). \quad (18.4)$$

(iii) Verwendet man die Tatsache, dass jeder  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(x)$  eine Umgebung von  $x$  ist und dass jede Umgebung  $U$  von  $x$  einen  $\varepsilon$ -Ball enthält, so folgt aus (18.4), dass man (18.1) äquivalent schreiben kann als

$$\text{Für jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ existiert ein } N(U) \in \mathbb{N} \text{ mit } x_k \in U \text{ für alle } k \geq N(U). \quad (18.5)$$

□

Im Spezialfall  $X = \mathbb{R}^n$  sind die Punkte  $x_k$  Vektoren der Form

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall kann man Konvergenz leicht anhand der Einträge von  $x_k$  überprüfen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 18.3** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in  $\mathbb{R}^n$ . Dann konvergiert die Folge für jede  $p$ -Norm aus Definition 17.6 genau dann gegen den Grenzwert

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

wenn für jede der Komponentenfolgen  $x_{ki}$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$$

gilt.

**Beweis:** Nach Bemerkung 18.2(i) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|_\infty = 0.$$

Aus der Definition der  $\infty$ -Norm folgt aber sofort die Äquivalenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{ki} - a_i| = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

und damit die Behauptung. □

Aus Korollar 3.15 folgt die folgende Eigenschaft abgeschlossener Intervalle  $[a, b]$ : Falls  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente reelle Folge ist mit  $x_k \in [a, b]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in [a, b]$ .

Der folgende Satz zeigt, dass sich diese Eigenschaft auf beliebige abgeschlossene Mengen verallgemeinern lässt und sogar äquivalent zur Definition der Abgeschlossenheit ist.

**Satz 18.4** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist  $A$  genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k \in A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A$  gilt.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $A$  abgeschlossen und sei  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Wir zeigen per Widerspruch, dass  $a \in A$  gilt. Angenommen, es gelte  $a \notin A$ . Da  $X \setminus A$  offen ist, ist  $X \setminus A$  eine Umgebung von  $a$ . Aus der Definition der Konvergenz folgt dann, dass  $x_k \in X \setminus A$  liegen muss für alle hinreichend großen  $k$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $x_k \in A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei der Grenzwert jeder konvergenten Folge  $x_k \in A$  wieder in  $A$  enthalten. Wir beweisen die Abgeschlossenheit von  $A$ , indem wir zeigen, dass  $X \setminus A$  offen ist. Sei dazu  $x \in X \setminus A$  ein beliebiger Punkt. Wir müssen beweisen, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$ . Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $\varepsilon = 1/k$  ein  $x_k \in B_\varepsilon(x) \cap A$ . Daraus folgt  $d(x_k, x) < \varepsilon = 1/k$  und damit ist  $x_k$  eine konvergente Folge in  $A$  mit  $x_k \rightarrow x \notin A$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass der Grenzwert von  $x_k$  in  $A$  liegen muss.  $\square$

Genau wie das Konzept der konvergenten Folgen können wir auch den Begriff der Cauchy-Folge verallgemeinern.

**Definition 18.5** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in  $X$ . Dann heißt  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  *Cauchy-Folge*, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon$$

für alle  $k, m \geq C(\varepsilon)$ .  $\square$

Ganz genau wie in  $\mathbb{R}$  beweist man, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung gilt in allgemeinen metrischen Räumen aber nicht unbedingt. Daher benötigen wir die folgende Definition.

**Definition 18.6** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge (gegen ein  $x \in X$ ) konvergiert.

Falls  $X = V$  dabei ein Vektorraum ist und die Metrik  $d$  durch eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert ist, heißt  $(V, \|\cdot\|)$  *vollständig normierter Vektorraum* oder *Banachraum*.  $\square$

Wir hatten in Abschnitt 3.5 gesehen, dass die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, in  $\mathbb{R}$  äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom ist. Definition 18.6 ist also nichts anderes als eine Verallgemeinerung des Vollständigkeitsaxioms auf metrische Räume. Insbesondere folgt, dass der metrische Raum  $(\mathbb{R}, d)$  mit  $d(x, y) = |x - y|$  vollständig ist. Der folgende Satz zeigt, dass dies für den  $\mathbb{R}^n$  ebenso gilt.

**Satz 18.7**  $\mathbb{R}^n$  ist für jede  $p$ -Norm aus Definition 17.6 ein vollständiger normierter Vektorraum und damit mit der zugehörigen Metrik auch ein vollständiger metrischer Raum.



**Beweis:** Ganz analog zum Beweis von Satz 18.3 beweist man, dass eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n$  genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn jede ihrer Komponentenfolgen  $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist. Da in  $\mathbb{R}$  jede Cauchy-Folge konvergiert, konvergiert also jede Komponentenfolge und nach Satz 18.3 konvergiert damit auch die Folge  $x_k$ .  $\square$

Ein weiteres Beispiel für einen vollständigen metrischen Raum liefert der folgende Satz.

**Satz 18.8** Der metrische Raum  $(C([a, b], \mathbb{R}), d)$  mit der Metrik  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$  (vgl. Beispiel 17.15) ist ein vollständiger metrischer Raum (und damit auch ein vollständiger normierter Vektorraum).

**Beweis:** Sei  $f_k$  eine Cauchy-Folge von Funktionen in  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Dann gilt für jedes  $x \in [a, b]$

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq d(f_k, f_m) = \|f_k - f_m\|_\infty,$$

weswegen die reelle Folge  $f_k(x)$  ebenfalls eine Cauchy-Folge ist. Weil  $\mathbb{R}$  vollständig ist, konvergiert  $f_k(x)$  also gegen einen Grenzwert  $f(x)$ . Wir beweisen nun, dass die  $f_k$  gleichmäßig gegen die dadurch definierte Funktion  $f$  konvergieren.

Für gegebenes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$  für alle  $m, k \geq C(\varepsilon)$ , woraus

$$|f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

für alle  $x \in [a, b]$  und alle  $m, k \geq C(\varepsilon)$  folgt. Damit folgt

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + |f_m(x) - f(x)|$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Für jedes feste  $x \in [a, b]$  gilt  $|f_m(x) - f(x)| \rightarrow 0$ , also existiert ein  $m(x) \in \mathbb{N}$  mit  $|f_{m(x)}(x) - f(x)| < \varepsilon$  und es folgt

$$|f_k(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

für alle  $k \geq C(\varepsilon)$ . Da alle Ausdrücke in dieser Ungleichung und auch  $C(\varepsilon)$  nun aber nicht von  $m(x)$  abhängen, gilt diese Ungleichung für alle  $x \in [a, b]$  und es folgt

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_k(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

für alle  $k \geq C(\varepsilon)$  und damit die gleichmäßige Konvergenz von  $f_k$  gegen  $f$ .

Also ist  $f$  nach Satz 14.6 stetig und folglich in  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Die Cauchy-Folge  $f_k$  konvergiert also und folglich ist der Raum  $C([a, b], \mathbb{R})$  vollständig.  $\square$

## 18.2 Stetigkeit

Sowohl das Folgenkriterium der Stetigkeit für reelle Funktionen aus Definition 5.6 als auch das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium aus Satz 5.16 lassen sich mit den bisherigen Vorarbeiten direkt auf allgemeine metrische Räume übertragen. Dabei können wir ganz allgemein Funktionen  $f : X \rightarrow Y$  für metrische Räume  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  betrachten (den Index fügen wir hier zu den Metriken hinzu um zu betonen, dass es sich nicht notwendigerweise um die

gleichen Metriken handelt; wir werden die Metriken aber erst beim  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium explizit verwenden). Die in Abschnitt 5.1 bereits betrachteten Funktionen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  (bzw. auf  $D \subset \mathbb{R}^n$ ) erhalten wir als Spezialfall dieser allgemeinen Funktionen. Beachte, dass wir in diesem allgemeinen Rahmen keine separaten Definitionsmengen  $D \subset X$  betrachten müssen, da jede Teilmenge eines metrischen Raums wieder ein metrischer Raum ist und wir daher  $X$  stets als die zu betrachtende Definitionsmenge  $D$  wählen können.

**Definition 18.9** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  *stetig* in einem Punkt  $x \in X$ , falls für alle Folgen  $x_k \rightarrow x$  die Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

gilt. Die Funktion  $f$  heißt *stetig auf*  $X$ , falls sie stetig in jedem Punkt  $x \in X$  ist.  $\square$

**Beispiel 18.10** Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt für einen normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  aus  $x_k \rightarrow x$  sofort

$$|\|x_k\| - \|x\|| \leq \|x_k - x\| \rightarrow 0,$$

falls  $x_k \rightarrow x$ , denn nach Bemerkung 18.2(i) ist  $x_k \rightarrow x$  ja äquivalent zu  $\|x_k - x\| \rightarrow 0$ . Eine Norm ist also eine stetige Abbildung von  $V$  nach  $\mathbb{R}$ . Zu beachten ist dabei aber, dass Stetigkeit im Allgemeinen nur für die Norm gilt, die auch in der Definition der Konvergenz verwendet wurde und nicht notwendigerweise für andere Normen auf dem gleichen Vektorraum.  $\square$

Genau wie im Reellen werden wir nun einige Aussagen über die Stetigkeit von Verknüpfungen stetiger Funktionen machen.

**Satz 18.11** Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  metrische Räume und  $f : Y \rightarrow Z$  und  $g : X \rightarrow Y$  Funktionen. Ist  $g$  dann stetig in  $x \in X$  und  $f$  stetig in  $y = g(x) \in Y$  so ist die Verknüpfung  $f \circ g : X \rightarrow Z$  stetig in  $x$ .

**Beweis:** Sei  $x_k \rightarrow x$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f(x_k) \rightarrow f(x) = y$  und aus der Stetigkeit von  $g$  folgt dann  $g(f(x_k)) \rightarrow g(f(x))$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Wie bereits zu Beginn von Kapitel 17 gesagt, wird eine Abbildung nach  $\mathbb{R}^m$  als Vektor einzelner Abbildungen  $f_1, \dots, f_n$  nach  $\mathbb{R}$  geschrieben. Für die Stetigkeit einer solchen Abbildung gilt der folgende Satz.

**Satz 18.12** Für eine durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

mit  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , gegebene Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt für jede  $p$ -Norm aus Definition 17.6:  $f$  ist genau dann stetig in einem Punkt  $x \in X$ , wenn alle Komponentenfunktionen stetig in  $x$  sind.

**Beweis:** Folgt sofort aus der Definition der Stetigkeit und Satz 18.3.  $\square$

Der folgende Satz beweist die Stetigkeit einiger Funktionen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Ausdruck  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist dabei nur eine andere Schreibweise für  $\mathbb{R}^2$ , mit der wir betonen wollen, dass die Funktionsargumente hier nicht als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  interpretiert werden (obwohl man das machen könnte, wenn man wollte).

**Satz 18.13** Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{array}{ll} \text{(i) add: } & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto x + y \\ \text{(ii) mult: } & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto xy \\ \text{(iii) quot: } & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto x/y. \end{array}$$

**Beweis:** Sei  $(x_k, y_k)$  eine gegen einen Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  konvergente Folge in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (mit  $(x_k, y_k)$  und  $(x, y)$  aus  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  im Fall (iii)). Nach Satz 18.3 folgt die Konvergenz  $x_k \rightarrow x$  und  $y_k \rightarrow y$ . Die zu beweisenden Konvergenzen  $x_k + y_k \rightarrow x + y$ ,  $x_k y_k \rightarrow xy$  und  $x_k / y_k \rightarrow x / y$  folgen damit aus den Sätzen 3.9, 3.10 und 3.13.  $\square$

**Korollar 18.14** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann sind auch  $f + g$  und  $fg$  stetig. Falls zusätzlich  $g(x) \neq 0$  gilt für alle  $x \in X$ , so ist auch die Funktion  $f/g$  stetig.

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 18.13 und Satz 18.11, da sich die angegebenen Funktionen schreiben lassen als  $f + g = \text{add} \circ (f, g)$ ,  $fg = \text{mult} \circ (f, g)$  und  $f/g = \text{quot} \circ (f, g)$ .  $\square$

**Beispiel 18.15** Wir betrachten einige Beispiele von Funktionen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ , wobei wir  $x \in \mathbb{R}^n$  wie üblich als  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  schreiben.

(i) Für jedes  $i = 1, \dots, n$  ist die Koordinatenfunktion  $x \mapsto x_i$  stetig, da aus der Konvergenz  $x_k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n$  nach Satz 18.3 die Konvergenz  $x_{ki} \rightarrow a_i$  folgt.

(ii) Eine Monomfunktion vom Grad  $r$  ist eine Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$g(x) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

mit Koeffizienten  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  mit  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$ . Die Funktion  $g$  ist also ein Produkt von Koordinatenfunktionen aus (i) und damit nach Korollar 18.14 stetig.

(iii) Ein Polynom vom Grad  $\leq r$  im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n=0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq r}}^r c_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}.$$

Jeder Summand in  $f$  ist also das Produkt einer konstanten (und damit stetigen) Funktion und einer Funktion aus (ii) und damit nach Korollar 18.14 stetig. Ebenfalls mit Korollar 18.14 folgt, dass damit auch die gesamte Funktion  $f$  stetig ist.  $\square$

Kommen wir nun zum zweiten aus  $\mathbb{R}$  bekannten Kriterium für die Stetigkeit, dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.

**Satz 18.16** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann ist  $f$  genau dann in einem Punkt  $a \in X$  stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  gilt

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

**Beweis:** Der Beweis verläuft völlig analog zu dem entsprechenden Beweis in  $\mathbb{R}$ , vgl. Satz 5.16, wobei wir nur die dort verwendeten Beträge durch die entsprechenden Metriken ersetzen:

Wir zeigen zunächst, dass aus dem  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium die Folgendefinition 18.9 der Stetigkeit folgt. Sei dazu  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $X$  mit  $x_k \rightarrow a$ . Zu zeigen ist dann, dass  $f(x_k)$  konvergiert mit  $f(x_k) \rightarrow f(a)$ .

Sei dazu ein  $\varepsilon > 0$  gegeben und sei  $\delta > 0$  aus dem Kriterium. Wegen  $x_k \rightarrow a$  existiert ein  $N_a(\delta) \in \mathbb{N}$  mit  $d_X(x_k, a) < \delta$  für alle  $k \geq N_a(\delta)$  und es folgt

$$d_Y(f(x_k), f(a)) < \varepsilon.$$

Damit ist das Konvergenzkriterium aus Bemerkung 18.2(i) erfüllt mit  $N(\varepsilon) = N_a(\delta)$ .

Nun zeigen wir umgekehrt, dass aus der Folgendefinition der Stetigkeit das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium folgt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass  $f$  in  $a \in X$  im Folgensenne stetig ist, das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium aber nicht gilt. Das bedeutet also:

Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  so dass zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x_\delta \in X$  mit  $d_X(x_\delta, a) < \delta$  und  $d_Y(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$  existiert.

Setzen wir nun  $\delta = 1/k$  und wählen als  $x_k$  gerade dieses  $x_\delta$ , so folgt  $d_X(x_k, a) < 1/k$  und damit nach Bemerkung 18.2(i) auch  $x_k \rightarrow a$ . Andererseits gilt aber

$$d_Y(f(x_k), f(a)) \geq \varepsilon$$

für alle  $k \geq 1$  und damit  $d_Y(f(x_k), f(a)) \not\rightarrow 0$ , also  $f(x_k) \not\rightarrow f(a)$ . Dies widerspricht aber der Stetigkeit in  $a$ . Also muss das  $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium gelten.  $\square$

**Beispiel 18.17** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x_0 \in X$  ein fester Punkt. Betrachte die Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = d(x, x_0)$ .

Dann folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung (17.3) für beliebige  $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y).$$

Für  $a = y$  folgt daraus, dass das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für  $\delta = \varepsilon$  erfüllt ist (wenn wir auf  $\mathbb{R}$  wie üblich die vom Absolutbetrag erzeugte Metrik verwenden). Folglich ist  $f$  in jedem  $a \in X$  stetig.  $\square$

Da das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium genau wie in  $\mathbb{R}$  funktioniert, kann es auch auf die gleiche Weise angewendet werden. Insbesondere folgt, dass der Beweis von Satz 14.6 auf beliebigen metrischen Räumen gültig bleibt, d.h. aus der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} d_Y(f_k(x), f(x)) = 0$$

einer Folge stetiger Funktionen  $f_k : X \rightarrow Y$  gegen eine Grenzfunktion  $f : X \rightarrow Y$  folgt wie im Reellen die Stetigkeit der Grenzfunktion  $f$ .

### 18.3 Lineare Funktionen

Wir betrachten nun kurz eine spezielle Klasse von Funktionen, die insbesondere bei der Definition der Ableitung eine wichtige Rolle spielen werden.

**Definition 18.18** Es seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : V \rightarrow W$  heißt *linear*, falls für alle  $v, \tilde{v} \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Gleichungen

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

gelten. Für lineare Funktionen findet man oft die Schreibweise  $fv$  an Stelle von  $f(v)$ .  $\square$

**Beispiel 18.19** (i) Falls  $V = \mathbb{R}^n$  und  $W = \mathbb{R}^m$  kann jede lineare Funktion nach Festlegen einer Basis (hier verwenden wir wie üblich die Standardbasis (17.2)) durch eine Matrix und ihre Anwendung durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation dargestellt werden:

Betrachten wir die Standardbasisvektoren  $e_i$  aus (17.2), so lässt sich jeder Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  schreiben als

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Aus der Linearität von  $f$  folgt dann

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n).$$

Die Abbildung  $f$  ist also eindeutig durch die  $n$  Vektoren  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \in \mathbb{R}^m$  bestimmt. Schreiben wir diese als Spalten in eine Matrix  $A = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , so folgt mit der üblichen Matrix-Vektor-Multiplikation

$$Ax = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = f(x).$$

Jede lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist also von der Form

$$f(x) = Ax$$

für die gerade konstruierte Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

(ii) Betrachten wir den Raum  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der unendlich oft (stetig) differenzierbaren reellen Funktionen, so ist zu jedem  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  auch  $\frac{d}{dx} f = f'$  wieder eine Funktion in  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Die Ableitung  $\frac{d}{dx}$  ist also eine Funktion von  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  nach  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Wegen  $(f + g)' = f' + g'$  und  $(\lambda f)' = \lambda f'$  ist die Ableitung tatsächlich eine lineare Funktion.

(iii) Sowohl das Riemann- als auch das Lebesgue-Integral sind nach Satz 13.3 bzw. 16.2 lineare Funktionen von der Menge der Riemann- bzw. Lebesgue-integrierbaren Funktionen nach  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Der folgende Satz gibt an, wann eine lineare Abbildung stetig ist.

**Satz 18.20** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x \in V$  die Ungleichung

$$\|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$$

gilt. Eine lineare Abbildung, die diese Bedingung erfüllt, nennen wir *beschränkt*.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Aus der zweiten Bedingung an lineare Funktionen folgt, dass für jede lineare Funktion  $f(0) = 0$  gilt.

Sei  $f$  nun stetig, dann ist  $f$  insbesondere in  $x = 0$  stetig. Also gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0$  mit  $\|f(x)\|_W < 1$  für alle  $x \in V$  mit  $\|x\|_V < \delta$ . Wir setzen  $C := 2/\delta$ . Für ein beliebiges  $x \in V$  setzen wir  $\lambda := 1/(C\|x\|_V)$  und  $y = \lambda x$ . Dann gilt  $\|y\|_V = \lambda\|x\|_V = 1/C < \delta$  und es folgt  $\|f(y)\|_W < 1$ . Wegen

$$f(y) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \frac{1}{C\|x\|_V} f(x)$$

gilt also

$$\|f(x)\|_W = \left\| C\|x\|_V f(y) \right\|_W = C\|x\|_V \|f(y)\|_W < C\|x\|_V.$$

“ $\Leftarrow$ ”: Es existiere ein  $C > 0$  mit  $\|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$  für alle  $x \in V$ . Dann folgt aus der Linearität

$$\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x - y)\|_W \leq C\|x - y\|_V.$$

Daraus folgt, dass das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für  $\delta = \varepsilon/C$  erfüllt ist. Also ist  $f$  stetig.  $\square$

**Beispiel 18.21** (i) Für  $V = \mathbb{R}^n$  und  $W = \mathbb{R}^m$  ist  $f(x) = Ax$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Wir beweisen die Beschränktheitsbedingung aus Satz 18.20 für die Euklidische Norm. Bezeichnen wir die Einträge der Matrix mit  $a_{ij}$ , so gilt für die Einträge des Vektors  $y = Ax \in \mathbb{R}^m$  die Gleichung

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k.$$

Bezeichnen wir mit  $a_i$  die  $i$ -te Zeile der Matrix  $A$ , so können wir dies auch als Skalarprodukt  $\langle a_i^T, x \rangle$  schreiben. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Satz 17.14 folgt dann

$$|y_i| = |\langle a_i^T, x \rangle| \leq \|a_i^T\|_2 \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|a_i^T\|_\infty \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \alpha \|x\|_2$$

mit  $\alpha = \max_{i,k} |a_{ik}|$ . Folglich gilt mit Satz 17.14

$$\|Ax\|_2 = \|y\|_2 \leq \sqrt{m} \|y\|_\infty \leq \sqrt{nm} \alpha \|x\|_2.$$

Also ist  $f(x) = Ax$  beschränkt mit  $C = \sqrt{nm} \alpha$  und folglich ist jede lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Genau wie die Konvergenz ist wegen Satz 17.14 auch die Stetigkeit unabhängig von der verwendeten Norm im  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ .

(ii) Betrachte die Menge der stetigen Funktionen  $C([a, b], \mathbb{R})$  mit der  $\infty$ -Norm, vgl. Beispiel 17.15. Dann gilt für das Riemann- (und auch für das Lebesgue-) Integral

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Also ist die Integral-Abbildung beschränkt mit  $C = b-a$  und folglich auf dem normierten Vektorraum  $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  stetig.

(iii) Betrachte die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  mit der  $\infty$ -Norm. Wir zeigen, dass die Ableitung  $\frac{d}{dx}$  nicht stetig ist. Dies beweisen wir, indem wir zeigen, dass sie nicht beschränkt ist, weswegen sie gemäß Satz 18.20 auch nicht stetig sein kann.

Zu zeigen ist also, dass für jedes  $C > 0$  ein  $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  existiert mit

$$\left\| \frac{d}{dx} f \right\|_\infty > C \|f\|_\infty.$$

Um dies zu beweisen, sei  $C > 0$  beliebig. Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > C$  betrachte die Funktion  $f(x) = x^n$ . Dann gilt  $\|f\|_\infty = 1$  und  $\frac{d}{dx} f(1) = n$  und damit

$$\left\| \frac{d}{dx} f \right\|_\infty = n = n \|f\|_\infty > C \|f\|_\infty.$$

□

Die Menge der linearen Abbildungen  $f : V \rightarrow W$  ist selbst wieder ein Vektorraum, denn für zwei lineare Abbildungen  $f, g$  prüft man leicht nach, dass auch  $f+g$  und  $\lambda f$  wieder eine lineare Abbildung ist. Es stellt sich daher die Frage, ob man auf diesem Raum auch eine Norm definieren kann. Tatsächlich geht das, wenn wir uns auf die Menge der beschränkten linearen Abbildungen einschränken.

**Definition 18.22** Für eine beschränkte lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  definieren wir die Norm

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_W \mid x \in V \text{ mit } \|x\|_V \leq 1\}.$$

□

Dass dies tatsächlich eine Norm ist (also die Bedingungen aus Definition 17.4 erfüllt), muss man natürlich nachprüfen, was wir hier aus Zeitgründen nicht im Detail machen. Beachte, dass die Norm  $\|f\|$  natürlich von der Wahl der Normen  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_W$  abhängt, auch wenn wir das in der Notation nicht berücksichtigt haben (man könnte  $\|f\|_{V,W}$  schreiben, was aber zu einer etwas umständlichen Notation führen würde).

Aus der Definition folgt sofort die Ungleichung  $\|f\| \leq C$  für  $C$  aus der Beschränktheitsbedingung aus Satz 18.20. Zudem folgt für alle  $x \in V$  mit  $x \neq 0$

$$\|f(x)\|_W = \left\| f \left( \frac{\|x\|_V}{\|x\|_V} x \right) \right\|_W = \|x\|_V \left\| f \left( \frac{1}{\|x\|_V} x \right) \right\|_W \leq \|x\|_V \|f\|,$$

wegen  $\|(1/\|x\|_V)x\|_V = (1/\|x\|_V)\|x\|_V = 1$ . Für  $x = 0$  gilt die Ungleichung  $\|f(x)\|_W \leq \|x\|_V \|f\|$  wegen  $f(0) = 0$  (was aus der Linearität folgt) ebenfalls, also gilt diese für alle  $x \in V$ .

Im Fall  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = Ax$ , schreiben wir auch  $\|A\|$  statt  $\|f\|$ . In diesem Fall folgt bei Verwendung der Euklidischen Norm im  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  aus Beispiel 18.21(i) sofort die Ungleichung

$$\|A\| \leq \sqrt{nm} \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

## 18.4 Weitere Stetigkeitskriterien

Wir beenden diesen Abschnitt mit drei alternativen Beschreibungen der Stetigkeit, die den Vorteil besitzen, dass sie weder auf der Konvergenz von Folgen (wie in Definition 18.9) noch auf der Verwendung einer Metrik (wie das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium in Satz 18.16) beruhen.

**Satz 18.23** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ . Dann gilt

- (i) Die Abbildung  $f$  ist genau dann in einem Punkt  $a \in X$  stetig, wenn zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(a)$  eine Umgebung  $U$  von  $a$  existiert mit  $f(U) \subset V$ .
- (ii) Die Abbildung  $f$  ist genau dann auf ganz  $X$  stetig, falls das Urbild

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

für jede offene Menge  $V \subset Y$  selbst eine offene Menge ist.

- (iii) Die Abbildung  $f$  ist genau dann auf ganz  $X$  stetig, falls das Urbild

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

für jede abgeschlossene Menge  $V$  selbst eine abgeschlossene Menge ist.

**Beweis:** (i) Da jeder  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(x)$  eine Umgebung von  $x$  ist und jede Umgebung von  $x$  einen  $\delta$ -Ball  $B_\delta(x)$  für ein  $\delta > 0$  enthält, ist die Bedingung aus (i) äquivalent zum  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit.

(ii) Sei  $f$  stetig und  $V \subset Y$  offen. Wir müssen beweisen, dass  $f^{-1}(V)$  offen ist, d.h. dass zu jedem  $x \in f^{-1}(V)$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(V)$ . Sei dazu ein beliebiges  $x \in f^{-1}(V)$  gegeben. Da  $V$  offen ist und  $f(x) \in V$  gilt, ist  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Nach (i) existiert eine Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  mit  $f(U) \subset V$ . Nach der Definition der Umgebung enthält  $U$  einen Ball  $B_\varepsilon(x)$ . Für diesen gilt  $f(B_\varepsilon(x)) \subset f(U) \subset V$ , also nach Definition des Urbilds  $B_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(V)$ .

Sei umgekehrt das Urbild offen für alle offenen Mengen und sei  $a \in X$ . Wir zeigen, dass das Stetigkeitskriterium aus (i) erfüllt ist. Dazu wählen wir eine beliebige Umgebung  $V$  von  $y = f(a)$ . Diese enthält einen  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(y)$ , und da der Ball offen ist, ist auch  $U = f^{-1}(B_\varepsilon(y))$  offen und nach Definition des Urbilds gilt  $a \in U$ . Also ist  $U$  eine Umgebung



von  $a$  mit  $f(U) \subset V$  und das Kriterium aus (i) ist erfüllt. Folglich ist  $f$  stetig in  $a$  und da  $a \in X$  beliebig war also stetig auf ganz  $X$ .

(iii) Wir zeigen, dass die Bedingung aus (iii) äquivalent zur Bedingung aus (ii) ist, woraus die Behauptung folgt. Für das Urbild gilt für jede Menge  $A \subset Y$

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus A) &= \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\} = \{x \in X \mid f(x) \notin A\} \\ &= X \setminus \{x \in X \mid f(x) \in A\} = X \setminus f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Sei nun die Bedingung aus (iii) erfüllt und  $V \subset Y$  offen. Dann gilt

$$f^{-1}(V) = X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$$

und weil  $Y \setminus V$  abgeschlossen ist, ist  $f^{-1}(Y \setminus V)$  ebenfalls abgeschlossen und  $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$  folglich offen. Also ist die Bedingung aus (ii) erfüllt. Analog zeigt man, dass die Bedingung aus (ii) die Bedingung aus (iii) impliziert.  $\square$

Eine wichtige Anwendung von Teil (ii) und (iii) dieses Satzes gibt das folgende Beispiel.

**Beispiel 18.24** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  die Menge

$$O := \{x \in X \mid f(x) < c\}$$

offen und die Menge

$$A := \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$$

abgeschlossen.

**Beweis:** Es gilt  $O = f^{-1}((-\infty, c))$  und  $A = f^{-1}((-\infty, c])$ . Die Aussage folgt daher mit Satz 18.23 (ii) und (iii) weil  $(-\infty, c)$  offen und  $(-\infty, c]$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  ist.  $\square$

# Kapitel 19

## Kompaktheit

Stand:  
2. August 2022

Wir haben in Kapitel 17 bereits gesehen, wie man offene und abgeschlossene Intervalle auf metrische Räume (und damit insbesondere auf den  $\mathbb{R}^n$ ) verallgemeinert. In diesem Kapitel betrachten wir eine Klasse von Mengen, die sogenannten *kompakten Mengen*, die man als Verallgemeinerung von beschränkten und abgeschlossenen Intervallen auffassen kann.

### 19.1 Definition und Beispiele

Kompakte Mengen kann man auf verschiedene äquivalente Arten definieren. Wir wählen eine davon für unsere Definition und formulieren die anderen später in entsprechenden Sätzen. Die Eigenschaft, die wir zur Definition der Kompaktheit verwenden, ist uns bereits in Satz 15.11 begegnet. Dort hatten wir bewiesen, dass für jede offene Überdeckung  $\{I_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$  eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls  $I$  eine endliche Teilmenge  $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  existiert mit  $I \subset \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathcal{I}}} I_\alpha$ . Dies ist genau die Eigenschaft, die wir nun auf metrische Räume verallgemeinern.

**Definition 19.1** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ .

(i) Eine Familie von offenen Mengen  $U_\alpha \subset X$ ,  $\alpha \in \mathcal{I}$ , heißt *offene Überdeckung* von  $A$ , falls

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$$

gilt.

(ii) Die Menge  $A$  heißt *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{I}$ , eine endliche Menge  $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  gibt mit

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathcal{I}}} U_\alpha.$$

Die Menge  $\{U_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\mathcal{I}}\}$  heißt dann *endliche Teilüberdeckung*. □

**Beispiel 19.2** Wir betrachten den gerade definierten Begriff für Teilmengen in  $\mathbb{R}$  mit  $d(x, y) = \|x - y\|_p$ .

(i) Aus Satz 15.11 folgt, dass jedes kompakte Intervall in  $\mathbb{R}$  kompakt im Sinne unserer neuen Definition ist. Ebenso sieht man leicht, dass jede Vereinigung von endlich vielen kompakten Intervallen kompakt ist, denn für jedes Einzelintervall finden wir dann eine endliche Teilüberdeckung und die Vereinigung all diese Teilüberdeckungen ist wieder endlich.

(ii) Offene oder halboffene Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind nicht kompakt. Betrachte z.B. das Intervall  $A = [a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Mengen  $U_\alpha = (a - 1/\alpha, b - 1/\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{I} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  bilden dann eine Überdeckung von  $A$ , denn jeder Punkt  $x \in A$  erfüllt  $x \geq a$  und  $x < b$  und liegt (wie man nachrechnen kann) in der Menge  $U_\alpha$  für jedes  $\alpha \geq 2/(b - x)$ . Es gibt aber keine endliche Teilüberdeckung, denn in jeder endlichen Teilmenge  $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  gibt es ein maximales  $\alpha^*$ . Folglich sind alle Punkte in dem Intervall  $[b - 1/\alpha^*, b)$  nicht in der Teilüberdeckung enthalten.

(iii) Unbeschränkte Teilmengen  $A$  von  $\mathbb{R}$  sind nicht kompakt, denn betrachten wir die Überdeckung  $U_\alpha = (\alpha - 1, \alpha + 1)$  für  $\alpha \in \mathcal{I} = \mathbb{Z}$  (welche ganz  $\mathbb{R}$  und damit auch jede Menge  $A \subset \mathbb{R}$  überdeckt), so überdeckt jede endliche Teilüberdeckung nur eine beschränkte Menge und kann damit nicht ganz  $A$  überdecken.  $\square$

In den folgenden Sätzen betrachten wir einige allgemeinere kompakte Mengen.

**Satz 19.3** Jede Menge im  $\mathbb{R}^n$  von der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

mit  $a_i \leq b_i$  ( $Q$  wird *Quader* genannt) ist kompakt.

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 15.11: Wir nehmen an, dass es eine Überdeckung  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{I}$ , gibt, zu der keine endliche Teilüberdeckung existiert, setzen  $Q_0 := Q$  und erzeugen — an Stelle der Teilintervalle  $I_k$  im Beweis von Satz 15.11 — nun Teilquader  $Q_k$  durch Halbierung der einzelnen Teilintervalle. Dabei wählen wir  $Q_k$  in jedem Schritt aus den durch Unterteilung entstehenden  $2^n$  Teilquadern von  $Q_{k-1}$  gerade so, dass für diesen wiederum keine endliche Teilüberdeckung existiert. Für die so konstruierte Menge von Quadern  $Q_k$  halbiert sich die Kantenlänge in jedem Schritt, weswegen für je zwei Punkte  $x, y \in Q_k$  die Ungleichung  $\|x - y\|_\infty \leq (1/2)^k C$  gilt, wobei  $C$  die maximale Kantenlänge von  $Q$  ist.

Wählen wir nun aus jedem Quader  $Q_k$  einen beliebigen Punkt  $x_k$ , so folgt  $\|x_k - x_m\|_\infty \leq (1/2)^k C$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $m \geq k$  (denn jeder Punkt  $x_m$  ist ja auch in  $Q_k$  enthalten). Folglich ist die Folge  $x_k$  eine Cauchy-Folge und konvergiert damit gegen ein  $x \in \mathbb{R}^n$ . Für dieses gilt (indem wir  $m$  in der obigen Ungleichung gegen unendlich streben lassen) die Ungleichung  $\|x_k - x\| \leq (1/2)^k C$  und weil jeder Quader  $Q_k$  abgeschlossen ist gilt nach Satz 18.4  $x \in Q_k$  für alle  $k$  und damit insbesondere auch  $x \in Q$ . Also gibt es ein  $U_\alpha$  mit  $x \in U_\alpha$  und weil  $U_\alpha$  offen ist, existiert ein Ball  $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$  (wir nehmen den Ball hier ebenfalls in der  $\infty$ -Norm). Wählen wir nun  $k$  so groß, dass  $(1/2)^k C < \varepsilon$  ist, so folgt  $Q_k \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ , weswegen  $\{U_\alpha\}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $Q_k$  ist. Da nach Konstruktion aber kein  $Q_k$  eine solche endliche Teilüberdeckung besitzt, erhalten wir einen Widerspruch.  $\square$

**Satz 19.4** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $X$  mit Grenzwert  $x$ . Dann ist die Menge

$$A := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt.

**Beweis:** Sei  $U_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Dann gibt es  $\alpha_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und  $\alpha^*$  mit  $x_k \in U_{\alpha_k}$  und  $x \in U_{\alpha^*}$ . Weil  $U_{\alpha^*}$  offen ist, folgt nach Bemerkung 18.2(iii) die Existenz eines  $N(U_{\alpha^*}) \in \mathbb{N}$  so dass  $x_k \in U_{\alpha^*}$  gilt für alle  $k \geq N(U_{\alpha^*})$ . Also ist

$$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_{N(U_{\alpha^*})-1}}, U_{\alpha^*}$$

eine endliche Teilüberdeckung. □

## 19.2 Eigenschaften kompakter Mengen

**Definition 19.5** (i) Eine Menge  $A$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt *beschränkt*, wenn ein  $x \in X$  und ein  $r > 0$  existieren mit  $A \subset B_r(x)$ .

(ii) Eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt *beschränkt*, wenn die Menge  $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist. □

**Satz 19.6** Jede kompakte Menge  $A$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Beweis:** Beschränktheit: Sei  $a \in A$  beliebig. Dann bilden die Mengen  $U_\alpha = B_\alpha(a)$  mit  $\alpha \in \mathcal{I} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , denn jeder Punkt  $x \in A$  ist sicherlich in dem Ball  $B_{2d(x,a)}(a)$  enthalten. Da  $A$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \tilde{\mathcal{I}}$ . Da  $\tilde{\mathcal{I}}$  endlich ist, enthält sie ein maximales  $\alpha \in N$  und es folgt  $A \subset B_\alpha(a)$  und damit die Beschränktheit.

Abgeschlossenheit: Wir müssen zeigen, dass  $X \setminus A$  offen ist. Dazu müssen wir für jedes  $x \in X \setminus A$  beweisen, dass ein Ball  $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$  existiert. Für  $\alpha \in \mathcal{I} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  setzen wir dazu

$$U_\alpha := \{y \in X \mid d(x, y) > 1/\alpha\}.$$

Jedes dieser  $U_\alpha$  ist offen (vgl. Beispiel 17.19(v)) und die Vereinigung enthält alle Punkte aus  $X$  mit Ausnahme von  $x$ . Also bilden die  $U_\alpha$  eine Überdeckung von  $A$  und es gibt eine endliche Teilüberdeckung. Wählen wir das maximale  $\alpha \in \mathbb{N}$  in dieser Teilüberdeckung, so folgt  $A \subset U_\alpha$  und damit  $B_{1/\alpha}(x) \subset X \setminus U_\alpha \subset X \setminus A$ . Damit haben wir einen offenen Ball um  $x$  in  $X \setminus A$  mit  $\varepsilon = 1/\alpha$  gefunden. □

**Satz 19.7** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subset X$  kompakt und  $A \subset K$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $U_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Fügen wir die offene Menge  $X \setminus A$  zu der Überdeckung hinzu, so erhalten wir eine offene Überdeckung von  $K$ , für die es eine endliche Teilüberdeckung gibt, die dann auch eine endliche Teilüberdeckung von  $A$  ist. Entfernen wir (falls vorhanden) die Menge  $X \setminus A$  aus der endlichen Teilüberdeckung, so bilden die verbleibenden Mengen immer noch eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ , da  $X \setminus A$  ja keine Punkte aus  $A$  enthält. Die verbleibenden Mengen bilden also eine endliche Teilüberdeckung von  $A$  bzgl. der ursprünglichen Überdeckung  $U_\alpha$ .  $\square$

Die Umkehrung von Satz 19.6 gilt in allgemeinen metrischen Räumen leider nicht. Sie gilt aber im wichtigen Spezialfall  $X = \mathbb{R}^n$ , wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 19.8 (Heine-Borel)** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Dies gilt nach Satz 19.6 in jedem metrischen Raum, also auch im  $\mathbb{R}^n$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Wenn  $A$  beschränkt ist, existiert ein Ball  $B_r(x)$  (o.B.d.A. bezüglich der  $\infty$ -Norm) mit  $A \subset B_r(x)$ . Damit ist  $A$  aber auch in dem Quader

$$Q = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$$

enthalten. Da dieser nach Satz 19.3 kompakt ist, folgt die Aussage aus Satz 19.7.  $\square$

### 19.3 Kompaktheit und Grenzwerte

Im Folgenden betrachten wir einige Eigenschaften kompakter Mengen im Zusammenhang mit Grenzwerten. Wir beginnen mit einem Korollar aus Satz 19.4 und Satz 19.6, der Satz 3.7 auf metrische Räume verallgemeinert.

**Korollar 19.9** Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 19.4 und Satz 19.6.  $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert den Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.31) auf metrische Räume.

**Satz 19.10** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $A \subset X$  kompakt und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ . Dann gibt es eine Teilfolge, die gegen einen Grenzwert  $a \in A$  konvergiert.

**Beweis:** Angenommen, es gibt keine konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt  $x \in A$  eine offene Umgebung  $U_x$ , in der nur endlich viele Folgenglieder liegen, denn: wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt, so dass in jeder Umgebung  $B_{1/p}(x)$ ,  $p \geq 1$ , unendlich viele Folgenglieder lägen. Definieren wir dann induktiv eine Teilfolge mit  $k_0 := 0$  und  $k_p \geq k_{p-1} + 1$  minimal mit  $x_{k_p} \in B_{1/p}(x)$ , so gilt  $x_{k_p} \in B_{1/p_0}(x)$  für alle  $p \geq p_0$  und die Teilfolge  $x_{k_p}$  würde nach Bemerkung 18.2(ii) gegen  $x$  konvergieren.

Die offenen Umgebungen  $U_x$  bilden nun eine Überdeckung von  $A$ , weswegen eine endliche Teilüberdeckung existiert. Da jede Menge in der endlichen Teilüberdeckung aber nur endlich

viele Folgenglieder enthält, liegen damit auch in  $A$  nur endlich viele Folgenglieder. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $x_k$  in  $A$  liegt.  $\square$

Wie bereits bei Satz 19.6 kann die Aussage des vorhergehenden Satzes im Spezialfall  $X = \mathbb{R}^n$  verschärft werden.

**Korollar 19.11** Jede beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:** Analog zum Beweis von Satz 19.8 zeigt man, dass die Folge in einem Quader  $Q$  enthalten ist, der nach Satz 19.3 kompakt ist. Die Behauptung folgt dann aus Satz 19.10.  $\square$

## 19.4 Kompaktheit und Stetigkeit

Die Aussagen in diesem Abschnitt zeigen, dass die kompakten Mengen für stetige Funktionen auf metrischen Räumen (und folglich auch im  $\mathbb{R}^n$ ) eine ähnliche Rolle spielen wie die abgeschlossenen Intervalle für die reellen Funktionen. Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst einen vorbereitenden Satz.

**Satz 19.12** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann gilt: Ist  $K \subset X$  kompakt, so ist auch  $f(K) \subset Y$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $U_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ , eine offene Überdeckung von  $f(K)$ . Nach Satz 18.23 sind dann die Mengen  $V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$  offen. Zudem überdecken sie  $K$  und folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $V_\alpha, \alpha \in \tilde{\mathcal{I}}$  von  $K$ . Damit überdecken die Mengen  $U_\alpha = f(V_\alpha), \alpha \in \tilde{\mathcal{I}}$  aber auch  $f(K)$  und bilden also eine endliche Teilüberdeckung.  $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 5.14 auf allgemeine metrische Räume.

**Satz 19.13** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subset X$  kompakt. Dann ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $K$  beschränkt, d.h. es existiert  $M \in \mathbb{R}$  mit  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in K$ , und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren  $p, q \in K$  mit

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in K\} \text{ und } f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in K\}.$$

**Beweis:** Nach Satz 19.12 ist  $f(K)$  kompakt in  $\mathbb{R}$ , also beschränkt und abgeschlossen. Daraus folgt sofort die Beschränktheit von  $f$ . Zur Existenz von  $p$  sei  $p_k \in K$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ . Nach Satz 19.10 existiert dann eine konvergente Teilfolge  $p_{k_j} \rightarrow p \in K$ . Die Folge  $f(p_{k_j})$  ist dann eine Teilfolge der Folge  $f(p_k)$ , die als Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. Weil  $f$  stetig ist, folgt

$$f(p) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(p_{k_j}) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}.$$

Die Aussage für das Infimum folgt analog.  $\square$

Als weitere Verallgemeinerung betrachten wir Satz 5.20, der besagt, dass jede stetige Funktion auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig stetig ist. Dazu benötigen wir die folgende Definition.

**Definition 19.14** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt *gleichmäßig stetig* auf einer Menge  $A \subset X$  wenn gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in A$  gilt

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

□

**Satz 19.15** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und sei  $K \subset X$  kompakt. Dann ist jede stetige Funktion  $f : K \rightarrow Y$  auch gleichmäßig stetig auf  $K$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert nach dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit (angewendet mit  $\varepsilon/2$  an Stelle von  $\varepsilon$ ) zu jedem  $a \in K$  ein  $\delta_a > 0$  mit

$$d_X(x, a) < \delta_a \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon/2.$$

Betrachten wir nun die Bälle

$$B_{\delta_a/2}(a), \quad a \in K,$$

so überdecken diese sicherlich die Menge  $K$ , also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$B_{\delta_{a_1}/2}(a_1), \dots, B_{\delta_{a_m}/2}(a_m). \quad (19.1)$$

Wir beweisen nun, dass die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt ist für  $\delta := \min\{\delta_{a_1}/2, \dots, \delta_{a_m}/2\}$ .

Seien dazu  $x, x' \in K$  beliebige Punkte mit  $d_X(x, x') < \delta$ . Da die Bälle in (19.1) die Menge  $K$  überdecken, liegt  $x$  in einem dieser Bälle  $B_{\delta_{a_k}/2}(a_k)$ . Also gilt  $d_X(x, a_k) < \delta_{a_k}/2$  und damit auch  $d_Y(f(x), f(a_k)) < \varepsilon/2$ . Aus  $d_X(x, x') < \delta$  folgt nun  $d_X(x', a_k) \leq d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \delta_{a_k}/2 \leq \delta_{a_k}$  und damit auch  $d_Y(f(x'), f(a_k)) < \varepsilon/2$ . Also gilt

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(a_k)) + d_Y(f(a_k), f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

## 19.5 Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$

Eine Folgerung aus Satz 17.14 ist, dass für je zwei  $p$ -Normen  $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$  Konstanten  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$  existieren, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$\alpha\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta\|x\|_p$$

gilt. Normen mit dieser Eigenschaft heißen *äquivalent*, weil sie die gleiche Topologie (also die gleichen offenen und abgeschlossenen Mengen) und die gleichen Konvergenzbegriffe erzeugen. Der folgende Satz zeigt (unter Zuhilfenahme einiger Aussagen aus diesem Kapitel im Beweis), dass diese Aussage nicht nur für die  $p$ -Normen, sondern tatsächlich für alle möglichen Normen<sup>1</sup> im  $\mathbb{R}^n$  gilt.

<sup>1</sup>Davon gibt es ziemlich viele. Beispielsweise kann man nachrechnen, dass für jede symmetrische Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , für die die Ungleichung  $x^T Q x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt, der Ausdruck  $\|x\|_Q := \sqrt{x^T Q x}$  eine Norm definiert.

**Satz 19.16** Seien  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|_1$  zwei beliebige Normen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann existieren Konstanten  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|$$

gilt.

**Beweis:** Es genügt, die Aussage für eine beliebige Norm  $\|\cdot\|$  und die Norm  $\|\cdot\|_1$  zu beweisen, denn gelten für zwei beliebige Normen für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichungen

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\| \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \tilde{\beta}\|x\|_1,$$

so folgt

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \tilde{\beta}\|x\|_1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\tilde{\beta}}\|x\| \leq \|x\|_1$$

und

$$\tilde{\alpha}\|x\|_1 \leq \tilde{\beta}\|x\|_1 \leq \beta\|x\| \Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{\beta}{\tilde{\alpha}}\|x\|,$$

woraus die Behauptung folgt. Wir beweisen also die Existenz von  $\alpha$  und  $\beta$  mit

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Hierbei genügt es, die Ungleichung für alle  $x \neq 0$  zu zeigen, da sie für  $x = 0$  wegen  $\|x\| = \|x\|_1 = 0$  offensichtlich erfüllt ist.

Zum Beweis der ersten Ungleichung gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Satz 17.14(i), d.h. für  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$y_i := x_i e_i$$

mit  $e_i$  aus (17.2). Definieren wir nun die Werte  $c_i := \|e_i\|$ , so folgt aus der Normeigenschaft die Gleichung  $\|y_i\| = \|x_i e_i\| = |x_i| \|e_i\| = c_i |x_i|$ . Aus der Definition der 1-Norm folgt dann

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|y_i\|_1 \quad \text{und} \quad c_i \|y_i\|_1 = c_i |x_i| = \|y_i\|.$$

Die Dreiecksungleichung für die Norm  $\|\cdot\|$  ergibt damit

$$\|x\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| + \dots + \|y_n\| = c_1 \|y_1\|_1 + c_2 \|y_2\|_1 + \dots + c_n \|y_n\|_1 \leq \left( \max_{i=1, \dots, n} c_i \right) \|x\|_1.$$

Damit folgt die erste Ungleichung mit  $\alpha = 1 / (\max_{i=1, \dots, n} c_i)$ .

Zum Beweis der zweiten Ungleichung setzen wir  $\gamma := \inf\{\|x\| : \|x\|_1 = 1\}$ . Falls  $\gamma > 0$  gilt, so folgt die zweite Ungleichung mit  $\beta = 1/\gamma$ , denn: Für  $x \neq 0$  und  $\lambda := 1/\|x\|_1 > 0$  gilt die Gleichung

$$\|\lambda x\|_1 = \lambda \|x\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_1} = 1$$

und damit

$$\|x\| = \frac{\lambda}{\lambda} \|x\| = \frac{1}{\lambda} \|\lambda x\| \geq \frac{1}{\lambda} \gamma = \gamma \|x\|_1.$$



Es bleibt also  $\gamma > 0$  zu beweisen.

Sei dazu  $x_k$  eine Folge von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\|x_k\|_1 = 1$  und  $\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|$ . Da  $\|\cdot\|_1$  stetig ist, ist die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 \leq 1\}$  nach Beispiel 18.24 abgeschlossen, zudem ist sie beschränkt und damit nach Satz 19.8 kompakt. Folglich existiert nach Satz 19.10 eine konvergente Teilfolge  $x_{k_j}$  von  $x_k$ . Es existiert also ein  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_{k_j} - x^*\|_1 \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  und wiederum wegen der Stetigkeit von  $\|\cdot\|_1$  folgt  $\|x^*\|_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{k_j}\|_1 = 1$ . Also gilt  $x^* \neq 0$  und damit auch  $\|x^*\| \neq 0$ .

Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und der bereits bewiesenen ersten Ungleichung folgt nun

$$|\|x^*\| - \|x_{k_j}\|| \leq \|x^* - x_{k_j}\| \leq \|x^* - x_{k_j}\|_1 / \alpha \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$  und damit

$$\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{k_j}\| = \|x^*\| > 0,$$

was zu beweisen war. □

# Kapitel 20

## Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Stand:  
2. August 2022

Wir kommen in diesem Kapitel zurück auf die vektorwertigen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

mit (Komponenten-)Funktionen  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Wir wollen definieren, wann eine solche Funktion differenzierbar ist, was für ein Objekt die Ableitung ist und wie man diese ausrechnet.

Für reelle Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  hatten wir zwei äquivalente Definitionen der Differenzierbarkeit in einem Punkt  $x \in D$  eingeführt:

- (i) Die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten

$$a = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0, x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

- (ii) Die Existenz einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  und einer Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0,$$

so dass

$$f(y) = f(x) + a(y-x) + \varphi(y-x) \tag{20.1}$$

gilt für alle  $y \in D$ .

Wenn eine dieser beiden Bedingungen<sup>1</sup> erfüllt ist, ist auch die andere erfüllt und die Zahlen  $a$  in den beiden Bedingungen stimmen überein; dieses  $a$  ist dann gerade der Wert der Ableitung in  $x$ , die wir zumeist als  $f'(x)$  oder — seltener — als  $\frac{d}{dx}f(x)$  geschrieben haben.

Für die Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^n$  werden wir zunächst die zweite Definition zu Grunde legen. Warum diese besser geeignet ist, werden wir später sehen.

<sup>1</sup>Schaut man sich den Beweis der Äquivalenz der beiden Bedingungen (Satz 9.4) genauer an, so sieht man, dass es ausreicht, wenn die Bedingung (ii) für alle  $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap D$  und ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  erfüllt ist, weswegen  $\varphi$  auch nur auf dem Intervall  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  definiert sein muss.

## 20.1 Differenzierbarkeit

Wir beginnen damit, eine “vektorwertige” Variante von (20.1) zunächst formal herzuleiten. Schreiben wir zunächst  $y = x + z$ , so kann man (20.1) umschreiben als

$$f(x + z) = f(x) + az + \varphi(z). \quad (20.2)$$

Wenn wir nun zum vektorwertigen Fall übergehen, so gilt  $x, z \in \mathbb{R}^n$  und  $f(x), f(x+z) \in \mathbb{R}^m$ . Damit (20.2) aus Sicht der Dimensionen sinnvoll ist, muss also  $az \in \mathbb{R}^m$  und  $\varphi(z) \in \mathbb{R}^m$  gelten. Die zweite Bedingung ist leicht zu erfüllen, wenn wir  $\varphi$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  (oder einer Teilmenge davon) nach  $\mathbb{R}^m$  definieren. Aber wie verallgemeinert man das Produkt  $az$ , so dass wir das Ergebnis zu den anderen Summanden aus dem  $\mathbb{R}^m$  addieren können?

Wäre  $a$  weiterhin eine reelle Zahl, so wäre  $az$  (im Sinne der Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor) wieder aus  $\mathbb{R}^n$  — aber nicht wie die anderen Summanden in der Gleichung aus dem  $\mathbb{R}^m$ . Würde man  $a$  durch einen Vektor ersetzen, so könnte man die Multiplikation als Skalar-Multiplikation zweier Vektoren auffassen. Deren Ergebnis wäre aber eine reelle Zahl, was wieder nicht passen würde. Wenn man an der Multiplikation festhalten möchte — was wir wollen — ist die einzige Möglichkeit, die Zahl  $a$  durch eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zu ersetzen. Mit dieser Wahl gilt  $Az \in \mathbb{R}^m$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$ .

Da jede Matrix gemäß Beispiel 18.19(i) ja — nach Wahl einer Basis — eindeutig einer linearen Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  zugeordnet ist, kann man  $A$  auch als lineare Abbildung auffassen. Wir unterscheiden im Folgenden in der Notation nicht zwischen einer linearen Abbildung und der zugehörigen Matrix.

Formal ist die Erweiterung von (ii) dann wie folgt definiert.

**Definition 20.1** Gegeben sei eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Die Funktion  $f$  heißt *(total) differenzierbar* in einem Punkt  $x \in D$ , wenn eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , eine Umgebung  $U \subset D$  von  $x$  und eine auf  $V := \{z \in \mathbb{R}^n \mid x+z \in U\}$  definierte Funktion  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in V \setminus \{0\}}} \frac{\varphi(z)}{\|z\|} = 0$$

existiert, so dass

$$f(x + z) = f(x) + Az + \varphi(z)$$

gilt für alle  $z \in V$ . In diesem Fall nennen wir  $Df(x) := A$  die *(totale) Ableitung* von  $f$  in  $x$ . Die zugehörige Matrix aus  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , die wir ebenfalls mit  $Df(x)$  bezeichnen, wird *Jacobi-Matrix* genannt.

(ii) Die Funktion  $f$  heißt *(total) differenzierbar* auf  $D$ , falls sie für alle  $x \in D$  differenzierbar im Sinne von (i) ist. Die Ableitung ist dann eine Funktion  $Df : D \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ , d.h. jedem Punkt  $x \in D$  wird die Jacobi-Matrix  $Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zugeordnet.  $\square$

Der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 0, z \in V}$  in (i) ist hier im Sinne des Grenzwertes für Funktionen zu verstehen, d.h. für jede Folge  $z_k \in V \setminus \{0\}$  mit  $z_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  muss  $\varphi(z_k)/\|z_k\| \rightarrow 0$  gelten. Wie im reellen Fall schreibt man diese Bedingung an  $\varphi$  auch als

$$\varphi(z) = o(\|z\|)$$

mit dem *Landau-Symbol*  $o(\cdot)$ .

Beachte, dass wir in Teil (i) dieser Definition implizit verlangt haben, dass  $x$  im Inneren des Definitionsbereichs  $D$  liegt, da sie ja nur anwendbar ist, wenn eine Umgebung  $U$  von  $x$  in  $D$  existiert. Differenzierbarkeit auf  $D$  gemäß (ii) setzt also implizit voraus, dass die Menge  $D$  offen ist. Dies vermeidet Probleme mit Randpunkten. Diese sind hier noch komplizierter als in  $\mathbb{R}$ , da es ja nicht nur “links” und “rechts” (und die zugehörigen Ableitungen) sondern noch viel mehr Richtungen gibt. Im Folgenden wird der Definitionsbereich daher stets als offene Menge vorausgesetzt.

Ganz analog zum reellen Fall beweist man den folgenden Satz.

**Satz 20.2** Wenn eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, in einem Punkt  $x \in D$  differenzierbar ist, so ist  $f$  auch stetig in  $x$ .

**Beweis:** Zu beweisen ist  $\lim_{z \rightarrow 0} f(x+z) = f(x)$ . Mit den Bezeichnungen aus Definition 20.1 gilt  $\lim_{z \rightarrow 0} Az = 0$  (weil lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  gemäß Beispiel 18.21 stetig sind) und

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|\varphi(z)\| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(z)\|}{\|z\|} \|z\| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(z)\|}{\|z\|} \lim_{z \rightarrow 0} \|z\| = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also folgt die Behauptung wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(x+z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( f(x) + Az + \varphi(z) \right) = f(x) + \lim_{z \rightarrow 0} Az + \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = f(x).$$

□

Um die Ableitung  $Df(x)$  auszurechnen, müssen wir die einzelnen Einträge dieser Matrix bestimmen. Wie dies im Allgemeinen geht, sehen wir im folgenden Abschnitt. Für einen Spezialfall können wir  $Df(x)$  aber direkt mit Definition 20.1 berechnen.

**Beispiel 20.3** Es sei  $f(x) = Ax$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Dann ist  $Df(x) = A$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , denn wegen der Linearität gilt

$$f(x+z) = A(x+z) = Ax + Az = f(x) + Az,$$

weswegen die Gleichung aus Definition 20.1 mit  $\varphi \equiv 0$  erfüllt ist. Die Ableitung einer linearen Abbildung ist also gerade die Matrix der Abbildung selbst. □

Es stellt sich nun die Frage, wie man die Jacobi-Matrix  $A$  ausrechnen kann. Dazu sind die partiellen Ableitungen nützlich.

## 20.2 Partielle Ableitungen

Betrachtet man die Komponentenfunktionen  $f_i(x)$  einer vektorwertigen Funktion, so kann man diese ausführlich als

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

schreiben. Die  $x_j$  werden hier also nicht als Komponenten eines Vektors sondern als  $n$  reelle Variablen aufgefasst. Dies ist nur eine andere Schreibweise, an der Funktion selbst ändert sich natürlich nichts.

Wir wählen nun einen beliebigen Index  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  und betrachten nur noch  $x_j$  als Funktionsargument. Das bedeutet, wir wählen feste Werte  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ , jeweils aus  $\mathbb{R}$ , und betrachten die Abbildung

$$g_{ij} : x_j \mapsto f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (20.3)$$

von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  (bzw. von einer geeignet gewählten Definitionsmenge  $D \subset \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ ). Da dies eine reelle Funktion im üblichen Sinne ist, können wir hier den üblichen Differenzierbarkeitsbegriff auf  $\mathbb{R}$  anwenden, was zu der folgenden Definition führt.

**Definition 20.4** Gegeben sei eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Falls die gemäß (20.3) definierte Funktion  $g_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für feste  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$  in einem Punkt  $x_j \in \mathbb{R}$  definiert und (im üblichen Sinne auf  $\mathbb{R}$ ) differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) := g'_{ij}(x_j)$$

die  $j$ -te partielle Ableitung<sup>2</sup> der  $i$ -ten Komponentenfunktion in

$$x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Falls in einem Punkt  $x \in D$  alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  existieren, so heißt  $f$  partiell differenzierbar in  $x$ .

(iii) Falls  $f$  in allen  $x \in D$  partiell differenzierbar ist, so heißt  $f$  partiell differenzierbar auf  $D$ . In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  Funktionen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Beispiel 20.5** Wir betrachten die Funktionen aus dem einführenden Abschnitt von Kapitel 17.

(i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ . Diese Funktion besitzt nur eine Komponentenfunktion  $f_1 = f$ . Es gilt

$$g_{11} : x_1 \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 \quad \text{und} \quad g_{12} : x_2 \mapsto x_1^2 + 2x_2^2$$

und daher

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = 4x_2.$$

(ii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Diese kann auch als

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)$$

geschrieben werden.

Diese Funktion besitzt zwei Komponentenfunktionen  $f_1(x) = \sin x$  und  $f_2(x) = \cos x$ . Das Argument ist hier eindimensional, also  $x = (x_1)$ , und es gilt  $g_{11}(x_1) = \sin x_1$  und  $g_{21}(x_1) = \cos x_1$ . Also folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -\sin x.$$

(iii)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 2x_2 + 2x_3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = 2x_1 + 2x_3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) = 2x_1 + 2x_2$$

und

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = x_2x_3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = x_1x_3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) = x_1x_2.$$

□

**Bemerkung 20.6** Beachte: das  $x_j$  im “Nenner” von  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  ist lediglich ein symbolischer Platzhalter, der angibt, nach welcher Variablen abgeleitet wird. Das  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  im Argument hingegen gibt an, wo diese Ableitung ausgewertet wird. Wenngleich hier die gleichen Zeichen  $x_i$  verwendet werden, haben diese ganz unterschiedliche Bedeutungen: dem Argument  $x$  kann man Zahlen oder Vektoren zuweisen (also z.B.  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}((5, 7, 9)^T)$  schreiben), nicht aber dem Symbol  $x_j$  in der partiellen Ableitung. □

Den Zusammenhang zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit klärt nun der folgende Satz.

**Satz 20.7** Gegeben sei eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $x \in D$ . Dann gilt

(i) Falls  $f$  total differenzierbar ist in  $x$ , so ist  $f$  auch partiell differenzierbar in  $x$  und es gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \quad (20.4)$$

(ii) Falls  $f$  partiell differenzierbar ist in einer Umgebung  $N \subset D$  von  $x$  und alle partiellen Ableitungen im Punkt  $x$  stetig sind, so ist  $f$  auch total differenzierbar in  $x$  (woraus wiederum (20.4) folgt).

**Beweis:** (i) Es sei  $f$  total differenzierbar in  $x$ . Wir schreiben die Einträge der Matrix  $A = Df(x)$  als  $a_{ij}$  und die  $i$ -te Zeile von  $A$  als  $a_i$ .

Die Definition der totalen Differenzierbarkeit angewendet mit  $z = he_j$  liefert dann, dass für alle hinreichend kleinen  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$  die Gleichung

$$f(x + he_j) = f(x) + Ahe_j + \varphi(he_j)$$

gilt mit  $\varphi(he_j)/h \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Betrachten wir die  $i$ -te Zeile dieser vektorwertigen Gleichung, so lautet diese

$$f_i(x + he_j) = f_i(x) + a_i \cdot he_j + \varphi_i(he_j).$$

Aus der Definition von  $e_j$  folgt nun

$$a_i \cdot he_j = ha_{ij} \quad \text{und} \quad f_i(x + he_j) = g_{ij}(x_j + h)$$

(mit  $g_{ij}$  aus (20.3)), weswegen die Gleichung mit  $\tilde{\varphi}_i(h) := \varphi_i(he_j)$  auch als

$$g_{ij}(x_j + h) = g_{ij}(x_j) + a_{ij}h + \tilde{\varphi}_i(h)$$

geschrieben werden kann. Wegen  $\tilde{\varphi}_i(h)/h \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  ist  $g_{ij}$  nach Satz 9.4 differenzierbar mit  $g'_{ij}(x_j) = a_{ij}$ . Die partielle Ableitung  $\partial f_i / \partial x_j$  existiert also in  $x$  und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = g'_{ij}(x_j) = a_{ij}.$$

(ii) Wir überprüfen Definition 20.1(i) für die  $\infty$ -Norm<sup>3</sup>. Da  $N$  eine Umgebung von  $x$  ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U := B_\varepsilon(x) \subset N$ . Sei  $z \in V := B_\varepsilon(0)$  beliebig. Mit Hilfe der Komponenten  $z_k$  von  $z$  definieren wir

$$v^{(j)} := x + \sum_{k=1}^j z_k e_k, \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

Weil  $U$  ein Ball ist und  $x + z \in U$  liegt, gilt  $v^{(j)} \in U$  für alle  $j = 0, \dots, n$ . Aus der Definition folgt  $v^{(0)} = x$  und  $v^{(n)} = x + z$  sowie  $f_i(v^{(j)}) - f_i(v^{(j-1)}) = g_{ij}(x_j + z_j) - g_{ij}(x_j)$ . Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$  existiert nun für alle  $i, j$  ein  $\xi_{ij} \in (0, z_j)$  mit

$$f_i(v^{(j)}) - f_i(v^{(j-1)}) = g_{ij}(x_j + z_j) - g_{ij}(x_j) = g'_{ij}(x_j + \xi_{ij})z_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)})z_j$$

mit  $y^{(ij)} = v^{(j-1)} + \xi_{ij}e_j$ . Daraus folgt

$$f_i(x + z) - f_i(x) = \sum_{j=1}^n \left( f_i(v^{(j)}) - f_i(v^{(j-1)}) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)})z_j.$$

Setzen wir nun  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  so folgt

$$f(x + z) - f(x) = Az + \varphi(z)$$

<sup>3</sup>Da alle Normen im  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, können wir uns für den Beweis eine beliebige Norm aussuchen.

mit  $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z))^T$  und

$$\varphi_i(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) z_j - a_i \cdot z = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) z_j.$$

Die totale Differenzierbarkeit folgt nun, wenn wir zeigen können, dass

$$\frac{\varphi(z)}{\|z\|_\infty} \rightarrow 0$$

gilt für  $\|z\|_\infty \rightarrow 0$  und alle  $i = 1, \dots, n$ . Dazu genügt es, die Konvergenz  $|\varphi_i(z)|/\|z\|_\infty \rightarrow 0$  für alle  $i$  zu zeigen. Es gilt nun

$$|\varphi_i(z)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| |z_j| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \|z\|_\infty$$

und damit

$$\frac{|\varphi_i(z)|}{\|z\|_\infty} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right|.$$

Für  $\|z\|_\infty \rightarrow 0$  konvergieren nun alle Komponenten von  $z$  gegen 0, woraus  $v^{(j)} \rightarrow x$  sowie  $\xi_{ij} \rightarrow 0$  und damit  $y^{(ij)} \rightarrow x$  folgt. Da die partiellen Ableitungen nach Annahme stetig sind, gilt damit  $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^{(ij)}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \rightarrow 0$  für alle  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  und folglich die gesuchte Konvergenz.  $\square$

**Beispiel 20.8** Da die partiellen Ableitungen für alle Funktionen aus Beispiel 20.5 stetig sind, ist die Bedingung aus Satz 20.7(i) erfüllt und es gilt

$$(i) \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad Df(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Betrachtet man die beiden Bedingungen (i) und (ii) in Satz 20.7, so stellt man fest, dass in (ii) mehr gefordert wird als in (i), nämlich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in  $x$ . Satz 20.7 zeigt also in Kurzform die Implikationen

stetig partiell differenzierbar  $\Rightarrow$  (total) differenzierbar  $\Rightarrow$  partiell differenzierbar.

Beachte, dass die partiellen Ableitungen wegen Satz 20.7 genau dann stetig sind, wenn die totale Ableitung stetig ist. Dies ist der Grund für die folgende Definition.

**Definition 20.9** Eine auf ganz  $D$  partiell differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, mit stetigen partiellen Ableitungen wird als *stetig differenzierbar* bezeichnet. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit  $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ .  $\square$



Neben der totalen Ableitung und den partiellen Ableitungen gibt es noch verschiedene ‘‘Mischformen’’, die wir zum Abschluss dieses Abschnitts kurz betrachten wollen. Hierzu betrachten wir zwei Fälle für Funktionen aus  $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ .

Im ersten Fall betrachten wir die Jacobi-Matrizen  $Df_i(x)$  der Komponenten  $f_i$  einer Funktion  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ . Weil  $f_i$  nach  $\mathbb{R}$  abbildet sind die  $Df_i(x)$  einzeilige Matrizen

$$Df_i(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right)$$

Für die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  der Gesamtfunktion gilt dann

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}.$$

Der zweite Fall, den wir betrachten, sind Funktionen  $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ , deren vektorwertiges Argument sich in zwei (oder mehrere) Vektoren aufspaltet, die also z.B. im Fall von zwei Vektoren in der Form  $f(y, z)$  geschrieben werden, mit  $y \in \mathbb{R}^p$  und  $z \in \mathbb{R}^q$  und  $p + q = s$ . Ein Beispiel dafür ist das Euklidische Skalarprodukt

$$f(y, z) = \langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i,$$

das eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  darstellt (hier ist also  $p = q = n$  und  $s = 2n$ ). Um solche Funktionen abzuleiten, kann man nun zum einen die einzelnen Vektoren im Argument zu einem Vektor  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$  zusammenfassen, die Funktion dann in der Form  $f(x)$  schreiben und die Ableitung im üblichen Sinne definieren.

Das Skalarprodukt kann man auf diese Weise schreiben als

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i x_{n+i}$$

und man kann die partiellen Ableitungen nun berechnen als

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} x_{j+n}, & j = 1, \dots, n \\ x_{j-n}, & j = n + 1, \dots, 2n \end{cases}$$

woraus sich die Jacobi-Matrix

$$Df(x) = (x_{n+1} \ x_{n+2} \ \dots \ x_{2n} \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

ergibt.

Alternativ kann man jeweils ein Argument festhalten, also die Funktionen

$$y \mapsto f(y, z) \quad \text{und} \quad z \mapsto f(y, z)$$

(die dann Abbildungen von  $\mathbb{R}^p$  bzw.  $\mathbb{R}^q$  nach  $\mathbb{R}^m$  sind) betrachten und diese “einzeln” ableiten. Die resultierenden Ableitungen werden mit

$$\frac{d}{dy}f(y, z) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz}f(y, z)$$

oder alternativ mit

$$D_y f(y, z) \quad \text{und} \quad D_z f(y, z)$$

bezeichnet und sind nun Matrizen im  $\mathbb{R}^{m \times p}$  bzw.  $\mathbb{R}^{m \times q}$ . Im Beispiel des Skalarprodukts gilt hier

$$D_y \langle y, z \rangle = (z_1, \dots, z_n) = z^T \quad \text{und} \quad D_z \langle y, z \rangle = (y_1, \dots, y_n) = y^T.$$

Vergleicht man die partiellen Ableitungen in  $D_y f(y, z)$  und  $D_z f(y, z)$  mit denen in der “gesamten” Jacobi-Matrix  $Df(x)$ , so erhält man mit  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  die Identität

$$Df(x) = (D_y f(y, z), D_z f(y, z)). \quad (20.5)$$

Es ist also egal, auf welche Art und Weise man vorgeht, am Ende kommt — richtig zusammengesetzt — das gleiche Ergebnis heraus. Im “Extremfall” kann man ein vektorwertiges Argument  $x$  dabei in seine  $n$  einzelnen Einträge  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  zerlegen und erhält dann

$$Df(x) = (D_{x_1} f(x), \dots, D_{x_n} f(x))$$

mit

$$D_{x_j} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

## 20.3 Die Richtungsableitung

Fixieren wir  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \neq 0$ , so liefert die Abbildung  $t \mapsto x + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$  eine Gerade im  $\mathbb{R}^n$ . Betrachtet man nun eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so definiert

$$h : t \mapsto f(x + tv) \quad (20.6)$$

eine Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^m$ , die gerade die Werte der Funktion  $f$  entlang der Geraden  $x + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$  liefert und für die  $h(0) = f(x)$  gilt.

**Beispiel 20.10** Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir  $x = (1, 1, 1)^T$  und  $v = (1, 1, 0)$ , so erhalten wir

$$h(t) = \begin{pmatrix} 2((1+t)(1+t) + (1+t) + (1+t)1) \\ (1+t)(1+t) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion gibt also an, wie sich Oberfläche und Volumen des Quaders verhalten, wenn wir die Höhe  $x_3 = 1$  festhalten und Länge und Breite als  $x_1 = x_2 = 1 + t$  wählen.  $\square$

Die Ableitung  $Dh(0) \in \mathbb{R}^m$  von  $h$  in  $t = 0$  ist dann ein Vektor, dessen  $i$ -te Komponente die Steigung der Komponentenfunktionen  $f_i$  im Punkt  $x$  in Richtung des Vektors  $v$  angibt. Dieser Vektor wird *Richtungsableitung* von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$  genannt. Der folgende Satz zeigt, wie man die Richtungsableitung mit Hilfe der Jacobi-Matrix  $Df(x)$  leicht berechnen kann.

**Satz 20.11** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, differenzierbar in  $x \in D$ . Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \neq 0$  gegeben. Dann ist die Funktion  $h$  aus (20.6) differenzierbar in  $t = 0$  und es gilt

$$Dh(0) = Df(x)v.$$

**Beweis:** Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  folgt

$$f(x + tv) = f(x) + Df(x)tv + \varphi(tv).$$

Also folgt

$$h(t) = h(0) + (Df(x)v)t + \psi(t)$$

mit  $\psi(t) := \varphi(tv)$ . Wegen

$$\frac{\psi(t)}{t} = \frac{\varphi(tv)}{t} = \frac{\|v\|}{\|v\|} \frac{\varphi(tv)}{t} = \|v\| \frac{\varphi(tv)}{\|tv\|} \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow 0$ , folgt die Differenzierbarkeit von  $h$  in 0 und  $Dh(0) = Df(x)v$ .  $\square$

Im Folgenden werden wir Richtungsableitungen stets als  $Df(x)v$  schreiben. Die hier verwendete Hilfsfunktion  $h$  ist nur ein Hilfskonstrukt für die Definition, die uns allerdings in einigen Überlegungen im Folgenden noch einmal begegnen wird.

Beachte, dass die Größe der Richtungsableitung von der Länge des Vektors  $v$  abhängt. Will man Richtungsableitungen in verschiedene Richtungen  $v$  und  $w$  vergleichen, so sollte man daher Vektoren mit  $\|v\| = \|w\|$  verwenden. Sinnvoll ist hierbei zumeist die Wahl  $\|v\| = \|w\| = 1$ .

**Beispiel 20.12** (i) Für die Angaben aus Beispiel 20.10 gilt

$$Df(x)v = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ (x_1 + x_2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Steigung des Umfangs in Richtung des Vektors  $v$  beträgt also 8 und die Steigung des Volumens 2.

(ii) Setzt man  $v = e_j$  für den Standard-Basisvektor  $e_j$ , so erhält man als Richtungsableitung

$$Df(x)e_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} = D_{x_j}f(x),$$

also gerade den Vektor der partiellen Ableitungen bzgl.  $x_j$ .  $\square$

Mit Hilfe der Richtungsableitung kann man nun auch erklären, warum man die (totale) Ableitung im  $\mathbb{R}^n$  nicht über den Differentialquotienten definiert. Wir betrachten dazu den Spezialfall einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Die formale Verallgemeinerung dieser Definition wäre dann

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0, x+z \in D}} \frac{f(x+z) - f(x)}{\|z\|},$$

wobei  $z$  nun ein Vektor im  $\mathbb{R}^n$  ist. Der Limes für  $z \rightarrow 0$  ist dabei wie üblich zu verstehen als der Grenzwert für alle möglichen Folgen  $z^{(k)} \rightarrow 0$  und enthält die Forderung, dass diese Grenzwerte für alle möglichen Folgen übereinstimmen.

Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \neq 0$  und jede reelle Nullfolge  $t_k \rightarrow 0$  ist  $z^{(k)} := t_k v$  nun gerade eine solche Folge. Für diese Wahl kann man den Differenzenquotienten alternativ mit  $h$  aus (20.6) schreiben und sieht so, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten gerade  $Df(x)v$  ist. Je nach dem, wie man  $v$  (oder allgemeiner die Folge  $z^{(k)}$ ) wählt, erhält man also unterschiedliche Grenzwerte, was der Grund für die Tatsache ist, dass man diesen zur Definition der (totalen) Ableitung nicht verwenden kann. Man kann ihn aber natürlich zur Definition der partiellen Ableitungen oder (komponentenweise) der Richtungsableitungen verwenden.

## 20.4 Der Gradient

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Spezialfall reellwertiger Funktionen, also Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Für diese Funktionen ist die Ableitung  $Df(x)$  eine einzeilige Matrix, die wir auch als Zeilenvektor interpretieren können. Durch Transponieren dieses Vektors erhalten wir einen Spaltenvektor, der Gradient genannt wird.

**Definition 20.13** Für eine in einem Punkt  $x \in D$  differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt der Spaltenvektor<sup>4</sup>

$$\nabla f(x) := Df(x)^T$$

der *Gradient* der Funktion in  $x$ . Das Symbol “ $\nabla$ ” wird dabei auch “nabla” genannt.  $\square$

Aus dieser Definition (und der Definition des Euklidischen Skalarprodukts) folgt, dass man die Richtungsableitung mit dem Gradienten als

$$Df(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

schreiben kann.

Die geometrische Interpretation des Gradienten ist, dass dieser im  $\mathbb{R}^n$  die Richtung angibt, in welche die Funktion  $f$  die größte Steigung aufweist. Formal ist dies in dem folgenden Satz beschrieben.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>In manchen Büchern wird der Gradient als Zeilenvektor definiert.

<sup>5</sup>Während wir bisher stets eine beliebige Norm im  $\mathbb{R}^n$  verwendet haben, gilt der folgende Satz nur für die 2-Norm, weil diese wegen  $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$  gerade zum Skalarprodukt “passt”.

**Satz 20.14** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in D$  mit  $Df(x) \neq 0$ . Dann gilt für  $v^* = \nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|_2$  und alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\|_2 = 1$  die Ungleichung

$$Df(x)v^* \geq Df(x)v.$$

**Beweis:** Wir verwenden die Gleichung  $Df(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle$ . Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt dann

$$Df(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|v\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

Andererseits gilt für  $v^*$

$$Df(x)v^* = \langle \nabla f(x), v^* \rangle = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} \langle \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} \|\nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

□

## 20.5 Rechenregeln für Ableitungen im $\mathbb{R}^n$

Die Rechenregeln für Ableitungen im  $\mathbb{R}^n$  ergeben sich als direkte Verallgemeinerungen aus denen im  $\mathbb{R}$ , weswegen wir sie hier nur informell und ohne Beweise angeben. Es gilt (jeweils mit offenen Definitionsbereichen  $D \subset \mathbb{R}^n$  und Differenzierbarkeit in den angegebenen Stellen vorausgesetzt):

**skalare Produkte:**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$$

**Summenregel:**  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$$

**Produktregel:**  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (beachte: damit wir multiplizieren dürfen, müssen die Funktionen reellwertig sein)

$$D(fg)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

(die Multiplikationen auf der rechten Seite sind im Sinne "Skalar mal Vektor" zu verstehen)

**Quotientenregel:**  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \neq 0$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}$$

**Kettenregel:**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^p$ ,  $g(E) \subset D$

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x).$$

Im letzten Fall ist es sinnvoll, sich die Dimensionen der auftretenden Matrizen anzuschauen: Wegen  $Df(y) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $Dg(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  ist das Produkt wohldefiniert und liegt in  $\mathbb{R}^{m \times p}$ , was gerade zu der Abbildung  $f \circ g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  "passt".

Wir hatten am Ende von Abschnitt 20.2 bereits Funktionen der Form  $f(y, z)$  mit  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$  betrachtet. Ist nun eine weitere Funktion  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  gegeben, so kann man  $f$  und  $g$  in der Form

$$h(y) = f(y, g(y))$$

"teilweise" verketten. Um die Kettenregel in der obigen Form auf diese Form der Verkettung anzuwenden, schreiben wir wieder  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  und betrachten die Funktion  $f$  in der Darstellung  $f(x)$ , für die dann  $Df(x) = (D_y f(y, z), D_z f(y, z))$  gilt. Die obige Verkettung können wir mit diesem umgeschriebenen  $f$  dann in der Form  $f \circ G(y)$  schreiben mit

$$G(y) = \begin{pmatrix} y \\ g(y) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von  $G$  ist dann gegeben durch

$$DG(y) = \begin{pmatrix} \text{Id} \\ Dg(y) \end{pmatrix},$$

wobei  $\text{Id}$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{p \times p}$  bezeichnet. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\begin{aligned} Dh(y) &= Df(G(y))DG(y) = \left( D_y f(y, g(y)), D_z f(y, g(y)) \right) \begin{pmatrix} \text{Id} \\ Dg(y) \end{pmatrix} \\ &= D_y f(y, g(y)) + D_z f(y, g(y))Dg(y). \end{aligned} \quad (20.7)$$

**Beispiel 20.15** Wir berechnen die Ableitung der quadrierten 2-Norm  $y \mapsto \|y\|_2^2$ . Diese können wir mit dem Skalarprodukt  $f(y, z) = \langle y, z \rangle$  und  $g(y) = y = \text{Id } y$  schreiben als  $\|y\|_2^2 = \langle y, g(y) \rangle = f(y, g(y))$ . Wegen  $D_y f(y, z) = z^T$  und  $D_z f(y, z) = y^T$  sowie  $Dg(y) = \text{Id}$  folgt

$$D(\|y\|_2^2) = D_y f(y, g(y)) + D_z f(y, g(y))Dg(y) = g(y)^T + y^T \text{Id} = y^T + y^T = 2y^T.$$

□

## 20.6 Höhere partielle Ableitungen

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ist selbst wieder eine Funktion von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Als solche kann diese — wie wir das bereits bei Funktionen in  $\mathbb{R}$  gemacht haben — wieder abgeleitet werden, wenn die Funktion selbst wieder differenzierbar ist. Formal macht dies die folgende Definition.

**Definition 20.16** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für gegebene Indizes  $i$  sowie  $j_1, j_2, \dots \in \{1, \dots, n\}$  und  $k \geq 2$  definieren wir die *höheren partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$*

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$$

für alle  $x \in D$  induktiv als

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) := \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \frac{\partial^{k-1} f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}}}(x)$$

Dabei setzen wir voraus, dass die angegebene partielle Ableitung auf der rechten Seite dieser Gleichung existiert, dass die Funktion

$$x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}}}(x)$$

(als Funktion von  $D$  nach  $\mathbb{R}$ ) also partiell differenzierbar ist.

Falls alle höheren partiellen Ableitungen für alle  $x \in D$  und alle  $k = 1, \dots, p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  existieren und stetig sind, so heißt  $f$   $p$ -mal stetig differenzierbar. Die Menge dieser Funktionen wird mit  $C^p(D, \mathbb{R}^m)$  bezeichnet.  $\square$

Beachte, dass wir für  $k = 1$  die bereits bekannten partiellen Ableitungen “erster Ordnung” erhalten, weswegen die Definition mit  $k = 2$  beginnt. In nicht-induktiver Form kann man die höheren Ableitungen auch schreiben als

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_{k-1}} \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f_i(x).$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Reihenfolge der  $x_{j_k}$  in dieser Definition keine Rolle spielt.

**Satz 20.17** Es sei  $\pi$  eine Permutation der Menge  $\{1, \dots, k\}$ , d.h. eine bijektive Abbildung dieser Menge in sich selbst. Dann gilt für jede Funktion  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, und alle  $x \in D$

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_{\pi(1)}} \dots \partial x_{j_{\pi(k)}}}(x).$$

**Beweis:** Wir beweisen zunächst den Fall  $k = 2$ . O.B.d.A. können wir zur Vereinfachung der Schreibweise  $n = 2$ ,  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = 2$  und  $x = 0$  annehmen. Zudem schreiben wir  $f(x_1, x_2)$  statt  $f_i(x)$ . Zu beweisen ist dann

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(0, 0). \quad (20.8)$$

Sei  $\delta > 0$  so gewählt, dass  $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \delta \text{ und } |x_2| < \delta\} \subset D$  gilt (dieses  $\delta$  existiert, da  $D$  offen ist). Wir definieren

$$F(x_1) := f(x_1, x_2) - f(x_1, 0).$$

Diese Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann differenzierbar in jedem  $x_1 \in (-\delta, \delta)$  mit

$$F'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$  existiert nun ein  $\xi_1 \in (-|x_1|, |x_1|)$  mit

$$F(x_1) - F(0) = F'(\xi_1)x_1.$$

Mit diesem  $\xi_1$  betrachten wir die reelle Funktion

$$x_2 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2),$$

welche ebenfalls differenzierbar ist mit Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f$ . Indem wir wiederum den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$  anwenden, erhalten wir ein  $\xi_2 \in (-|x_2|, |x_2|)$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, 0) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, \xi_2)x_2.$$

Zusammengefasst erhalten wir damit

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) - f(0, x_2) + f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, \xi_2)x_1x_2. \quad (20.9)$$

Führen wir die gleichen Rechnungen mit  $\tilde{F}(x_2) := f(x_1, x_2) - f(0, x_2)$  und  $x_1 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \tilde{\xi}_2)$  durch ( $\tilde{\xi}_2$  wird hier analog zu  $\xi_1$  in der obigen Rechnung verwendet), so erhalten wir

$$f(x_1, x_2) - f(0, x_2) - f(x_1, 0) + f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)x_1x_2. \quad (20.10)$$

Da die linken Seiten in (20.9) und (20.10) übereinstimmen, folgt für alle  $(x_1, x_2) \in U$  mit  $x_1x_2 \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, \xi_2).$$

Für  $x_1 \rightarrow 0$  und  $x_2 \rightarrow 0$  folgt  $\xi_1 \rightarrow 0$ ,  $\xi_2 \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\xi}_1 \rightarrow 0$  und  $\tilde{\xi}_2 \rightarrow 0$  und weil die partiellen Ableitungen nach Annahme stetig sind, folgt (20.8).

Für  $k > 2$  folgt die Aussage, indem wir ausnutzen, dass sich jede Permutation als  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_l$  schreiben lässt, wobei jedes  $\pi_q$  von der folgenden Form ist: es existiert ein  $p_q \in \{1, \dots, k-1\}$  mit

$$\pi_q(j) = \begin{cases} j+1, & j = p_q \\ j-1, & j = p_q + 1 \\ j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jedes  $\pi_q$  vertauscht also gerade die beiden benachbarten Indizes  $p_q$  und  $p_{q+1}$ . Zum Beweis des Satzes genügt es dann zu zeigen, dass die Aussage für die  $\pi_q$  gilt. Aus der Definition der partiellen Ableitungen und dem ersten Teil des Satzes folgt aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q+2}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f_i(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q+2}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{p_q-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f_i(x) \\ &= \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{p_q-1}} \partial x_{j_{p_q+1}} \partial x_{j_{p_q}} \partial x_{j_{p_q+2}} \dots \partial x_{j_k}}(x) \\ &= \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_{\pi_i(1)}} \dots \partial x_{j_{\pi_i(k)}}}(x), \end{aligned}$$



woraus die gesuchte Eigenschaft folgt.  $\square$

**Beispiel 20.18** Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos(x_1x_2)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \cos(x_1x_2) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\sin(x_1x_2)x_1 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\cos(x_1x_2)x_1x_2 - \sin(x_1x_2) \right) \\ &= \sin(x_1x_2)x_1x_2^2 - \cos(x_1x_2)x_2 - \cos(x_1x_2)x_2 \\ &= \sin(x_1x_2)x_1x_2^2 - 2\cos(x_1x_2)x_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \cos(x_1x_2) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\sin(x_1x_2)x_2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\cos(x_1x_2)x_2^2 \right) \\ &= \sin(x_1x_2)x_1x_2^2 - 2\cos(x_1x_2)x_2. \end{aligned}$$

Die Ableitungen stimmen also wie erwartet überein.  $\square$

**Bemerkung 20.19** Im Allgemeinen kann man die partiellen Ableitungen für  $k \geq 2$  nicht mehr in eine Matrix schreiben, weil diese durch mehr als 2 Indizes (nämlich  $i$  und  $j_1, \dots, j_k$ ) bestimmt sind. Eine Ausnahme ist der Fall  $m = 1$  und  $k = 2$ , also der Fall zweiter Ableitungen einer reellwertigen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . In diesem Fall definiert man

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $H_f$  wird *Hesse-Matrix* von  $f$  genannt und ist auf Grund von Satz 20.17 eine symmetrische Matrix<sup>6</sup> für  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ .  $\square$

<sup>6</sup>Eine quadratische Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  heißt symmetrisch, falls  $a_{ij} = a_{ji}$  gilt für alle  $i, j = 1, \dots, n$ .

# Kapitel 21

## Anwendungen der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Stand:  
2. August 2022

### 21.1 Taylor-Polynome

Wir haben in Abschnitt 10.2 gesehen, dass für hinreichend oft differenzierbare reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Taylor-Polynom

$$P(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

die Gleichung

$$f(x) = P(x) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

erfüllt. In diesem Abschnitt wollen wir diese Aussage auf Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Wir beschränken uns dabei auf reellwertige Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Für Funktionen mit Werten im  $\mathbb{R}^m$  kann ein Taylor-Polynom  $P_i$  für jede Komponentenfunktion  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  aufgestellt werden, was wir hier aber nicht explizit durchführen werden.

Wir hatten bereits Polynome  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kennengelernt. Ein solches Polynom vom Grad  $k$  ist gegeben durch

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n=0 \\ k_1+k_2+\dots+k_n \leq k}}^k c_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}.$$

Um diesen Ausdruck — und einige weitere Ausdrücke, die wir im Folgenden benötigen — in kürzerer Form zu schreiben, führen wir die folgenden Multi-Indizes ein.

**Definition 21.1** (i) Ein Multi-Index der Länge  $n$  ist ein Zeilenvektor

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

mit  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

(ii) Für einen Multi-Index  $\alpha$  definieren wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

(iii) Für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

(iv) Für einen Multi-Index  $\alpha$  und eine Funktion  $f \in C^{|\alpha|}(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen definieren wir

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

mit

$$\partial x_j^{\alpha_j} := \underbrace{\partial x_j \dots \partial x_j}_{\alpha_j \text{ mal}}.$$

□

Ein Polynom  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $k$  können wir damit kurz schreiben als

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha.$$

Die Summe ist dabei zu verstehen als Summe über alle Multi-Indizes der Länge  $n$  mit  $|\alpha| \leq k$ .

Zur Herleitung des Taylor-Polynoms benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 21.2** Sei  $f \in C^k(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $x \in D$  und  $z \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $x + tz \in D$  gilt für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann liegt die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : t \mapsto f(x + tz)$$

in  $C^k([0, 1], \mathbb{R})$  mit

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + tz) z^\alpha.$$

**Beweis (skizziert):** Mit der Kettenregel beweist man zunächst per Induktion über  $k$  die Formel

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x + tz) z_{i_1} \dots z_{i_k} \quad (21.1)$$

(was wir hier nicht im Detail ausführen, siehe dazu Forster II, Kap. 7). Danach bezeichnen wir in jedem Summanden in (21.1) und für jedes  $m = 1, \dots, n$  mit  $\alpha_m$  die Anzahl der  $j$  für die  $i_j = m$  gilt. Aus Satz 20.17 folgt dann für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x + tz) z_{i_1} \dots z_{i_k} = D^\alpha f(x + tz) z^\alpha.$$

In der Summe in (21.1) gibt es nun gerade  $k!/\alpha!$  Indextupel  $i_1, \dots, i_k$ , in denen die Zahl  $m$  gerade  $\alpha_m$ -mal vorkommt (es gibt insgesamt  $k!$  Anordnungen, von denen aber bei jeweils  $\alpha_m!$  nur die Zahl  $m$  mit sich selbst den Platz tauscht, weswegen dies für jedes  $m$  identische Tupel sind). Also taucht der Ausdruck  $D^\alpha f(x+tz)z^\alpha$  gerade  $k!/\alpha!$ -mal in der Summe auf, woraus

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x+tz)z_{i_1} \cdots z_{i_k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x+tz)z^\alpha$$

und damit die Behauptung folgt.  $\square$

Wir definieren das Taylor-Polynom im  $\mathbb{R}^n$  vom Grad  $k$  im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  nun als

$$P(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

**Bemerkung 21.3** Durch explizites Ausrechnen der in  $D^\alpha$  enthaltenen partiellen Ableitungen prüft man die Gleichungen

$$\sum_{|\alpha|=0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha = f(x_0), \quad \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha = Df(x_0)(x - x_0)$$

und

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha = \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(x_0) (x - x_0)$$

mit der Hesse-Matrix  $H_f(x)$  aus Bemerkung 20.19 nach. Damit kann z.B. das Taylor-Polynom vom Grad  $k = 2$  in der Form

$$P(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(x_0) (x - x_0)$$

geschrieben werden.  $\square$

Der folgende Satz gibt die Taylor-Formel im  $\mathbb{R}^n$  an, d.h. den Zusammenhang zwischen  $P(x)$  und  $f(x)$ .

**Satz 21.4** Sei  $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Seien  $x_0, x \in D$  so, dass  $x_0 + tz \in D$  gilt für  $z := x - x_0$  und alle  $t \in [0, 1]$ .

Dann existiert ein  $\theta \in [0, 1]$  mit

$$f(x) = P(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x_0 + \theta z)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Funktion  $g(t) := f(x_0 + tz)$ . Dies ist nach Lemma 21.2 eine Funktion in  $C^{k+1}([0, 1], \mathbb{R})$ , weswegen für das reelle Taylor-Polynom für  $g$  in  $t_0 = 0$

$$P_g(t) := \sum_{j=0}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} t^j$$

nach Satz 10.13 die Gleichung

$$g(1) = P_g(1) + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \quad (21.2)$$

für ein  $\theta \in [0, 1]$  gilt. Aus Lemma 21.2 folgt nun

$$\frac{g^{(j)}(0)}{j!} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} z^\alpha,$$

weswegen  $P_g(1) = P(x)$  gilt. Ebenfalls aus Lemma 21.2 folgt

$$\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x_0 + \theta z)}{\alpha!} z^\alpha,$$

weswegen die Behauptung aus Gleichung (21.2) folgt.  $\square$

**Bemerkung 21.5** Wegen  $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$  ist die Funktion

$$x \mapsto \sum_{|\alpha|=k+1} |D^\alpha f(x)|$$

stetig. Wählen wir also ein  $\delta > 0$  mit  $\overline{B}_\delta(x_0) \subset D$ , so nimmt die Funktion auf der kompakten Menge  $\overline{B}_\delta(x_0)$  nach Satz 19.13 ihr Maximum  $M$  an. Zudem gilt für jede Komponente von  $z = x - x_0$  die Ungleichung  $|z_i| \leq \|x - x_0\|_\infty$  und damit

$$|(x - x_0)^\alpha| = |z^\alpha| = |z_1^{\alpha_1}| \cdots |z_n^{\alpha_n}| \leq \|x - x_0\|_\infty^{\alpha_1} \cdots \|x - x_0\|_\infty^{\alpha_n} = \|x - x_0\|_\infty^{|\alpha|}.$$

Da für alle  $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$  und  $\theta \in [0, 1]$  auch  $x_0 + \theta z \in \overline{B}_\delta(x_0)$  gilt, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x_0 + \theta z)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha|=k+1} \left| \frac{D^\alpha f(x_0 + \theta z)}{\alpha!} \right| \|x - x_0\|_\infty^{|\alpha|} \leq M \|x - x_0\|_\infty^{k+1}.$$

Analog zum reellen Fall (vgl. Bemerkung 10.15) gilt also für alle  $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$

$$f(x) - P(x) = O(\|x - x_0\|_\infty^{k+1}).$$

$\square$

## 21.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Für reelle Funktionen sagt der Mittelwertsatz, dass für eine auf  $[a, b]$  stetige und auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktion ein  $\xi \in (a, b)$  existiert mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Für die Verallgemeinerung in den  $\mathbb{R}^n$  schreiben wir diese Aussage etwas um. Setzen wir  $x = a$  und  $z = b - a$ , so folgt die Existenz eines Wertes  $\theta \in (0, 1)$  mit

$$f(x + z) - f(x) = f'(x + \theta z)z \quad (21.3)$$

(indem man einfach  $\theta = (\xi - x)/z$  setzt).

Betrachten wir nun  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, so ist das Taylor-Polynom für  $k = 0$  gerade die konstante Funktion  $P(x) \equiv f(x_0)$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 21.4 mit  $k = 0$  und  $t = 1$  folgt dann

$$f(x_0 + z) - f(x_0) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(x_0 + \theta z)}{\alpha!} z^\alpha = Df(x_0 + \theta z)z, \quad (21.4)$$

also gerade die Verallgemeinerung von (21.3). Der Mittelwertsatz ist also nichts anderes als ein Spezialfall der Taylor-Formel.

Ein Problem ergibt sich aber, wenn wir Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  betrachten. Zwar gilt Gleichung (21.4) dann für jede Komponentenfunktion  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ , allerdings hängt der Wert von  $\theta$  dann von  $i$  ab, so dass wir im Allgemeinen keinen Punkt  $x_0 + \theta z$  finden können, so dass (21.4) für die gesamte vektorwertige Funktion gilt.

Um einen Mittelwertsatz zu beweisen, der auch für vektorwertige Funktionen gilt, müssen wir daher etwas anders vorgehen. Wir betrachten dazu noch einmal den reellen Fall. Setzen wir voraus, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar ist, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Substitutionsformel die Gleichung

$$f(x + z) - f(x) = \int_x^{x+z} f'(y) dy = \int_0^1 f'(x + tz) dt z.$$

Der Vergleich mit (21.3) zeigt, dass dies als ‘‘Mittelwertsatz in Integralform’’ verstanden werden kann: an die Stelle der Ableitung  $f'(x + \theta z)$  tritt das Integral über diese Ableitung.

In dieser Integralform lässt sich dieser Satz nun auch im  $\mathbb{R}^n$  formulieren und beweisen. Dazu benötigen wir zunächst die Definition des Integrals für matrixwertige Funktionen

$$t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Dies definieren wir analog zu (17.6) komponentenweise als

$$\int_a^b A(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b a_{11}(t) dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b a_{n1}(t) dt & \cdots & \int_a^b a_{nn}(t) dt \end{pmatrix}$$

wobei wir natürlich voraussetzen, dass die (reellen) Komponentenfunktionen integrierbar sind. Im folgenden Satz sind diese Funktionen stetig, weswegen Riemann-Integrierbarkeit gilt.

**Satz 21.6** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ . Seien  $x \in D$  und  $z \in \mathbb{R}^n$  so gewählt, dass  $x + tz$  für alle  $t \in [0, 1]$  in  $D$  liegt. Dann gilt

$$f(x+z) - f(x) = \left( \int_0^1 Df(x+tz) dt \right) z.$$

**Beweis:** Setze  $g_i(t) := f_i(x + tz)$ . Dann gilt nach Kettenregel

$$g'_i(t) = Df_i(x + tz)z = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x + tz) \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x + tz) \right) z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + tz) z_j.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Linearität des Integrals folgt damit

$$\begin{aligned} g_i(1) - g_i(0) &= \int_0^1 g'_i(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + tz) z_j dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + tz) dt z_j = \int_0^1 Df_i(x + tz) dt z. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f(x+z) - f(x) = \begin{pmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 Df_1(x + tz) dt z \\ \vdots \\ \int_0^1 Df_m(x + tz) dt z \end{pmatrix} = \left( \int_0^1 Df(x + tz) dt \right) z,$$

also die Behauptung. □

### 21.3 Extremwerte

Wir kehren nun wieder zurück zu Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. zu Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Für solche Funktionen stellt sich genau wie im Reellen die Frage nach Extremwerten, also nach Maxima und Minima von  $f$ . Wie im Reellen wollen wir diese mit Hilfe der Ableitungen bestimmen und ebenfalls wie im Reellen müssen wir dazu *lokale* Extremwerte definieren.

**Definition 21.7** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Wir sagen, dass  $f$  in einem  $x \in D$  ein *lokales Minimum* besitzt, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass gilt

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{für alle } y \in B_\varepsilon(x) \cap D.$$

Das Minimum heißt *strikt*, falls die obige Ungleichung mit  $<$  erfüllt ist für  $y \neq x$ . Der Punkt  $x$  heißt (*strikte*) *Minimalstelle* von  $f$ . Analog definieren wir das (*strikte*) lokale Maximum mit  $\geq$  bzw.  $>$ . □

**Beispiel 21.8** (i) Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \|x\|_2^2$ . Diese Funktion besitzt ein striktes lokales Minimum in  $x = 0$ , denn dort gilt  $f(x) = 0$  während für alle  $x \neq 0$  die Ungleichung  $f(x) > 0$  gilt. Tatsächlich ist dies hier sogar ein globales Minimum.

(ii) Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^T A x + b^T x + c$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  und eine reelle Zahl  $c \in \mathbb{R}$ . Für  $A = \text{Id}$ ,  $b = 0$  und  $c = 0$  ist dies genau die Funktion in (i). Die Frage ist nun, ob diese Funktion auch für andere  $A$ ,  $b$  und  $c$  Minimalstellen (oder Maximalstellen) besitzt.  $\square$

Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums an, falls  $D$  eine offene Menge ist.

**Satz 21.9** Sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Falls  $f$  in  $x \in D$  ein lokales Minimum oder Maximum besitzt, so gilt  $Df(x) = 0$ .

**Beweis:** Sei  $B_\varepsilon(x)$  der Ball aus Definition 21.7. Dann ist die Funktion  $g(t) := f(x + tv)$  für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| \leq \varepsilon$  und jedes  $t \in (-1, 1)$  definiert, stetig differenzierbar und besitzt ein lokales Minimum oder Maximum in  $t = 0$ . Aus Satz 10.2 und Satz 20.11 folgt

$$0 = g'(0) = Df(x)v.$$

Da dies für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| \leq \varepsilon$  gilt, muss  $Df(x) = 0$  gelten.  $\square$

**Beispiel 21.10** Wir betrachten die Funktionen aus Beispiel 21.8.

(i) Für  $f(x) = \|x\|_2^2$  gilt  $Df(x) = 2(x_1, \dots, x_n)$ . Damit gilt  $Df(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  gilt. Der Punkt  $x = 0$  ist also der einzige Kandidat für eine lokale Minimal- oder Maximalstelle.

(ii) Falls  $A$  eine symmetrische Matrix ist, gilt für  $f(x) = x^T A x + b^T x + c$

$$Df(x) = (2Ax + b)^T$$

(was man ähnlich wie in Beispiel 20.15 ausrechnen kann). Die Bedingung  $Df(x) = 0$  ist hier also äquivalent zu  $2Ax + b = 0$ . Nehmen wir an, dass  $A$  invertierbar ist, so hat diese Gleichung die eindeutige Lösung

$$x = -\frac{1}{2}A^{-1}b.$$

Dieses  $x$  ist für symmetrisches und invertierbares  $A$  also der einzige Kandidat für eine lokale Minimal- oder Maximalstelle.  $\square$

Um sicherzustellen, dass in einem Punkt  $x$  mit  $Df(x) = 0$  ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt (und um Minima und Maxima zu unterscheiden), benötigen wir die zweiten Ableitungen. Im Reellen ist ein Punkt  $x$  mit  $f'(x) = 0$  gemäß Satz 10.7 ein lokales Minimum (bzw. Maximum), falls  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(x) < 0$ ) gilt. Hier können wir — weil die betrachteten Funktionen nach  $\mathbb{R}$  abbilden — die zweiten Ableitungen in Form der Hesse-Matrix aus Bemerkung 20.19  $H_f(x)$  schreiben. Die benötigten Eigenschaften dieser Matrix gibt die folgende Definition.



**Definition 21.11** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Dann nennen wir

- (i)  $A$  *positiv definit*, falls  $x^T A x > 0$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$
- (ii)  $A$  *negativ definit*, falls  $-A$  positiv definit ist.

□

Positive (und damit auch negative) Definitheit kann auf verschiedene Weisen überprüft werden. Wir geben hier (ohne Beweise) zwei Kriterien an:

- (a) Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  die Ungleichung  $\lambda > 0$  erfüllen.
- (b) Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre führenden Hauptminoren, d.h. die Determinanten der Matrizen

$$(a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$$

für alle  $k = 1, \dots, n$  positiv sind.

**Beispiel 21.12** (i) Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen die beiden Kriterien.

- (a) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5,$$

woraus man durch Berechnung der Nullstellen die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

berechnet. Weil diese beide positiv sind (wegen  $\sqrt{5} < 5$ ) ist die Matrix positiv definit.

- (b) Die Hauptminoren der Matrix sind

$$\det(3) = 3 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5.$$

Also ist die Matrix positiv definit.

□

Der folgende Satz gibt nun notwendige Bedingungen an die Hesse-Matrix für die Existenz eines lokalen Minimums oder Maximums an.

**Satz 21.13** Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $x \in D$  ein Punkt mit  $Df(x) = 0$ . Dann gilt: Wenn die Hesse-Matrix  $H_f(x)$  positiv definit (bzw. negativ definit) ist, so ist  $f(x)$  ein striktes lokales Minimum (bzw. Maximum).

**Beweis:** Wir betrachten den positiv definiten Fall und beweisen dazu zunächst das folgende erste Hilfsresultat: Es existiert ein  $c > 0$  mit

$$z^T H_f(x) z \geq 2c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_2 = 1\} \quad (21.5)$$

gilt.

**Beweis von (21.5):** Die Abbildung

$$z \mapsto z^T H_f(x) z$$

ist stetig und nimmt daher auf der kompakten Menge  $\mathbb{S}^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_2 = 1\}$  ein Minimum in einem  $z_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  an. Setzen wir nun  $c := z_0^T H_f(x) z_0 / 2$ , so ist  $c > 0$ , da  $H_f(x)$  positiv definit ist und es folgt (21.5).

Als zweite Hilfsbehauptung zeigen wir, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset D$  und

$$z^T H_f(y) z > c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ und alle } y \in B_\varepsilon(x) \quad (21.6)$$

mit  $c > 0$  aus (21.5).

**Beweis von (21.6):** Da  $D$  offen ist, gilt  $B_\varepsilon(x) \subset D$  für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$ , welche wir im Folgenden betrachten. Da die Abbildung  $x \mapsto H_f(x)$  nach Annahme stetig ist, ist auch die Abbildung

$$(y, z) \mapsto z^T H_f(y) z$$

stetig. Nehmen wir nun an, dass kein  $\varepsilon > 0$  mit (21.6) existiert, so würden Folgen  $y_n \rightarrow x$  und  $z_n \in \mathbb{S}^{n-1}$  existieren mit  $z_n^T H_f(y_n) z_n \leq c$ . Da  $\mathbb{S}^{n-1}$  kompakt ist, besitzt die Folge  $z_n$  eine konvergente Teilfolge  $z_{n_j} \rightarrow z \in \mathbb{S}^{n-1}$  und es folgt wegen der Stetigkeit von  $H_f$  und (21.5)

$$2c \leq z^T H_f(x) z = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{n_j}^T H_f(y_{n_j}) z_{n_j} \leq c,$$

was wegen  $c > 0$  ein Widerspruch ist. Also folgt (21.6).

Für beliebige Vektoren  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $z \neq 0$  und alle  $y \in B_\varepsilon(x)$  folgt daraus mit  $\tilde{z} := z / \|z\|_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$z^T H_f(y) z = (\|z\|_2 \tilde{z})^T H_f(y) (\|z\|_2 \tilde{z}) = \tilde{z}^T H_f(y) \tilde{z} \|z\|_2^2 \geq c \|z\|_2^2.$$

Zum Beweis des lokalen Minimums betrachten wir nun die Taylor-Formel für  $k = 1$  mit  $x$  an Stelle von  $x_0$  und  $y \in B_\varepsilon(x)$  an Stelle von  $x$ . Unter Verwendung der Formeln aus Bemerkung 21.3 und  $Df(x) = 0$  können wir die Formel in der Form

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{2} z^T H_f(x + \theta z) z \quad (21.7)$$

schreiben mit  $z = y - x$  und einem  $\theta \in [0, 1]$ . Da aus  $y \in B_\varepsilon(x)$  und  $\theta \in [0, 1]$  die Beziehung  $x + \theta z \in B_\varepsilon(x)$  folgt, erhalten wir mit (21.6) und (21.7) für  $y \neq x$

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{2} z^T H_f(x + \theta z) z > f(x) + \frac{c}{2} \|y - x\|_2^2,$$

also

$$f(x) < f(y) - \frac{c}{2} \|y - x\|_2^2 < f(y)$$

für alle  $y \in B_\varepsilon(x)$  mit  $y \neq x$ , woraus folgt, dass  $f(x)$  ein striktes lokales Minimum ist.  $\square$

**Beispiel 21.14** Wir betrachten die Funktionen aus Beispiel 21.8 und 21.10.

(i) Für  $f(x) = \|x\|_2^2$  berechnet man  $H_f(x) = 2\text{Id}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , also insbesondere für  $x = 0$ . Diese Matrix ist wegen  $z^T 2\text{Id}z = 2\|z\|_2^2 > 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $z \neq 0$  positiv definit. Also besitzt  $f(x)$  in  $x = 0$  ein striktes lokales Minimum.

(ii) Für  $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$  ergibt sich die Hesse-Matrix zu  $H_f(x) = 2A$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , also insbesondere für  $x = -\frac{1}{2}A^{-1}b$ . Dieser Punkt  $x$  ist also eine strikte Minimalstelle für  $f$ , falls  $A$  positiv definit ist und eine strikte Maximalstelle falls  $A$  negativ definit ist.

Betrachten wir als konkretes Zahlenbeispiel z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 5, \quad (21.8)$$

so erhalten wir eine Minimalstelle (beachte dass  $A$  nach Beispiel 21.12 positiv definit ist) in

$$x = -\frac{1}{2}A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Der Wert von  $f$  in dieser Stelle beträgt  $f(x) = 97/20$ . Abbildung 21.1 zeigt den Graph dieser Funktion und illustriert, dass sich das Minimum tatsächlich an der angegebenen Stelle befindet.

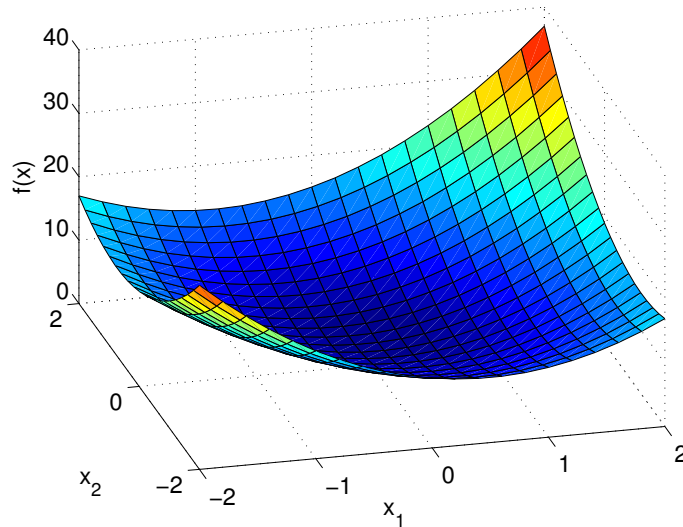


Abbildung 21.1: Graph der Funktion  $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$  mit  $A, b, c$  aus (21.8)

Als weiteres konkretes Zahlenbeispiel betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 5, \quad (21.9)$$

Diese Matrix besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}$$

und weil ein Eigenwert positiv und der andere negativ ist, ist die Matrix weder positiv noch negativ definit. Wir können also weder die Existenz eines Minimums oder eines Maximums folgern und tatsächlich besitzt die Abbildung auch keines von beiden. Stattdessen ist der Punkt

$$x = -\frac{1}{2}A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

— also der einzige Punkt mit  $Df(x) = 0$  — ein sogenannter Sattelpunkt (die Funktion nimmt in eine Richtung ab und in eine andere Richtung zu), wie Abbildung 21.2 zeigt.

□

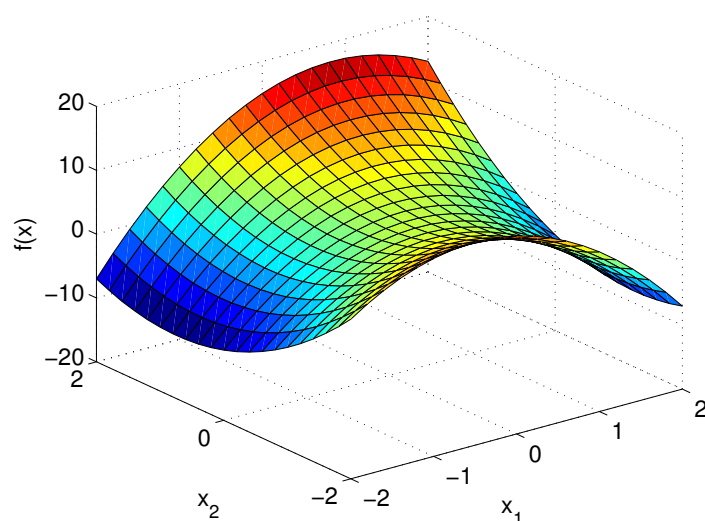


Abbildung 21.2: Graph der Funktion  $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$  mit  $A, b, c$  aus (21.9)



# Kapitel 22

## Implizite Funktionen und Umkehrfunktionen

Stand:  
2. August 2022

### 22.1 Implizite Funktionen

Implizit definierte Funktionen sind Funktionen, die nicht durch eine explizite Formel gegeben sind (wie fast alle Funktionen, die wir bisher kennengelernt haben), sondern durch eine implizite Gleichung.

Einige Beispiele sollen dieses Konzept zunächst erläutern.

**Beispiel 22.1** (i) Kreislinie: Der Einheitskreis (oder die 1-Sphäre  $S^1$ ) im  $\mathbb{R}^2$  ist die Menge aller Punkte  $x = (x_1, x_2)^T$  mit  $\|x\|_2^2 = 1$ . Dies kann man auch als Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$$

mit  $f(x) = \|x\|_2^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 - 1$  schreiben.

Wir können nun versuchen, die Punkte auf dem Kreis (oder zumindest eine Teilmenge dieser Punkte) als Graph einer Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  darzustellen. Die Funktion  $g$  ist dann über die Gleichung

$$f(x_1, g(x_1)) = 0$$

definiert und den Kreis (oder zumindest einen Teil davon) können wir dann als den Graphen dieser Funktion, also als die Menge

$$\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = g(x_1), x_1 \in D\}$$

darstellen.

Zeichnet man den Kreis in ein Koordinatensystem, so stellt man fest, dass es nicht möglich ist, den gesamten Kreis in dieser Form darzustellen, da auf diesem ja z.B. sowohl der Punkt  $(0, 1)^T$  als auch der Punkt  $(0, -1)$  liegt, die Funktion  $g$  aber nur entweder den Wert  $g(0) = 1$  oder  $g(0) = -1$  annehmen kann. Die Darstellung des Kreises gelingt aber, wenn wir nicht eine sondern zwei Funktionen betrachten, nämlich  $g, \tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = [-1, 1]$  und

$$g(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2} \quad \text{und} \quad \tilde{g}(x_1) = -\sqrt{1 - x_1^2}.$$

Diese erfüllen gerade die gesuchte Bedingung

$$f(x_1, g(x_1)) = x_1^2 + g(x_1)^2 - 1 = x_1^2 + 1 - x_1^2 - 1 = 0$$

und

$$f(x_1, \tilde{g}(x_1)) = x_1^2 + \tilde{g}(x_1)^2 - 1 = x_1^2 + 1 - x_1^2 - 1 = 0.$$

Geometrisch stellt der Graph von  $g$  gerade den oberen Halbkreis und der Graph von  $\tilde{g}$  gerade den unteren Halbkreis dar.

(ii) Kugel: Analog zum Kreis kann man die Kugel (oder die 2-Sphäre  $\mathbb{S}^2$ ) im  $\mathbb{R}^3$  als

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$$

mit  $f(x) = \|x\|_2^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$  schreiben. Eine Funktion, die die Kugel (oder einen Teil davon) als Graph besitzt muss jetzt von der Form  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sein: jedem Punkt  $(x_1, x_2)^T$  in der Ebene wird die dritte Koordinate  $x_3$  eines Punktes  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  auf der Kugel zugewiesen. Eine solche Funktion ist durch die implizite Gleichung

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$$

charakterisiert (ob eine solche Funktion existiert und wie viele davon man benötigt, um die gesamte Kugel abzudecken, mag sich jeder selbst überlegen).

(iii) Quadratische Gleichungen: Wir betrachten quadratische Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Suchen wir nun eine Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Paar  $p, q$  eine Lösung  $x = g(p, q)$  der Gleichung zuordnet, so ist  $g$  wiederum implizit definiert durch

$$f(g(p, q), p, q) = 0$$

mit  $f(x, p, q) = x^2 + px + q$  (Funktionen  $g$ , die dieses erfüllen, sollten aus der Schule bekannt sein).

(iv) Nichtlineare Gleichungssysteme: Gesucht ist für gegebenes  $x \in \mathbb{R}$  ein  $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 &= 0 \\ xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Wenn wir wissen wollen, ob dieses Gleichungssystem nach  $y$  auflösbar ist (d.h. ob wir eine Formel für  $y$  abhängig von  $x$  angeben können), so ist das äquivalent zu der Frage, ob eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert, so dass  $f(x, g(x)) = 0$  mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 2 \end{pmatrix}.$$

□

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei Fragen untersuchen:

- Wann existiert eine implizit definierte Funktion  $g$ ?
- Wenn eine solche Funktion  $g$  existiert, was können wir über ihre Differenzierbarkeit aussagen?

Wir werden dabei mit der zweiten Frage beginnen.

**Bemerkung 22.2** Im Folgenden verwenden wir die Notation  $f(x, y)$  für die definierende Funktion und  $y = g(x)$  für die implizit definierte Funktion. Dabei ist  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $D_2 \subset \mathbb{R}^m$  und  $g : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $\square$

Die obigen Beispiele sehen in dieser Notation wie folgt aus.

- (i)  $k = m = 1$ ,  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
- (ii)  $k = 2$ ,  $m = 1$ ,  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $y = x_3$ ,  $f(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$
- (iii)  $k = 2$ ,  $m = 1$ ,  $x = (p, q)^T$ ,  $y = x$ ,  $f(x, y) = y^2 + x_1y + x_2$
- (iv)  $k = 1$ ,  $m = 2$  und  $x, y, f$  wie im Beispiel angegeben.

Beachte, dass die Dimension von  $y$  hier immer gleich der Dimension des Bildraums von  $f$  ist. Warum das so gewählt wurde, sehen wir gleich in dem folgenden Satz. Dieser Satz macht eine Aussage über die Differenzierbarkeit der Funktion  $g$ . Wir erinnern dazu an die Definition der Ableitungen  $D_x f(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  und  $D_y f(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  aus Abschnitt 20.2.

**Satz 22.3** Gegeben seien die Funktionen  $f, g$  aus Bemerkung 22.2. Es sei  $a \in D_1$  und  $U_1 \subset D_1$  eine offene Umgebung von  $a$ , so dass  $g$  stetig auf  $U_1$  ist,  $g(U_1) \subset D_2$  gilt und für alle  $x \in U_1$  die Gleichung

$$f(x, g(x)) = 0$$

gilt. Zudem sei  $f$  (total) differenzierbar im Punkt  $(a, b)$  mit  $b = g(a)$  und die Jacobi-Matrix  $D_y f(a, b) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sei invertierbar.

Dann ist  $g$  im Punkt  $a$  differenzierbar und es gilt

$$Dg(a) = -(D_y f(a, b))^{-1} D_x f(a, b).$$

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $a = 0$  und  $b = g(a) = 0$ .<sup>1</sup> Wir schreiben abkürzend  $A := D_x f(0, 0)$  und  $B := D_y f(0, 0)$ . Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  folgt dann mit (20.5) auf hinreichend kleinen Umgebungen  $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^k$  von  $0 \in \mathbb{R}^k$  und  $\tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$  von  $0 \in \mathbb{R}^m$  die Existenz von  $\varphi : \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$f(x, y) = (A, B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x, y) = Ax + By + \varphi(x, y)$$

<sup>1</sup>Ansonsten betrachten wir  $f(x+a, y+b)$  und  $g(x+a) - b$  an Stelle von  $f$  und  $g$ . Beachte, dass dies die Ableitungen von  $f$  und  $g$  nicht ändert.



und

$$\frac{\varphi(x, y)}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|} \rightarrow 0$$

für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 0$ . Da im  $\mathbb{R}^n$  alle Normen äquivalent sind, können wir  $\|\cdot\|$  hier als die 1-Norm wählen, für die  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$  gilt. Damit gilt dann

$$\frac{\varphi(x, y)}{\|x\|_1 + \|y\|_1} \rightarrow 0.$$

Da nun  $g(0) = 0$  gilt und  $g$  stetig in  $a = 0$  ist, folgt  $\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$  und damit auch

$$\frac{\varphi(x, g(x))}{\|x\|_1 + \|g(x)\|_1} \rightarrow 0$$

für  $x \rightarrow 0$ . Für alle  $c > 0$  folgt daraus insbesondere

$$\|\varphi(x, g(x))\|_1 \leq c(\|x\|_1 + \|g(x)\|_1) \quad (22.1)$$

für alle  $x$  mit  $\|x\|_1$  hinreichend klein.

Wegen

$$0 = f(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + \varphi(x, g(x))$$

und der angenommenen Invertierbarkeit von  $B$  folgt

$$g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, g(x)).$$

Daraus erhalten wir

$$g(x) = -B^{-1}Ax + \tilde{\varphi}(x)$$

mit  $\tilde{\varphi}(x) = -B^{-1}\varphi(x, g(x))$ , woraus mit (22.1) insbesondere

$$\begin{aligned} \|g(x)\|_1 &\leq \|B^{-1}A\|_1\|x\|_1 + \|B^{-1}\|_1\|\varphi(x, g(x))\|_1 \\ &\leq \|B^{-1}A\|_1\|x\|_1 + \|B^{-1}\|_1c\|x\|_1 + \|B^{-1}\|_1c\|g(x)\|_1 \end{aligned}$$

für alle  $x$  mit  $\|x\|_1$  hinreichend klein folgt. Wählen wir nun  $c = \frac{1}{2\|B^{-1}\|_1}$  so folgt daraus

$$\|g(x)\|_1 \leq \underbrace{2(\|B^{-1}A\|_1 + \|B^{-1}\|_1c)}_{=:C} \|x\|_1$$

und damit  $\|x\|_1 + \|g(x)\|_1 \leq (1 + C)\|x\|_1$ .

Um zu beweisen, dass  $g$  differenzierbar ist mit  $Dg(0) = B^{-1}A$  müssen wir nun zeigen, dass  $\tilde{\varphi}(x)/\|x\|_1 \rightarrow 0$  gilt für  $x \rightarrow 0$  oder, äquivalent, dass  $\|\tilde{\varphi}(x)\|_1/\|x\|_1 \rightarrow 0$  gilt für  $x \rightarrow 0$ . Wegen

$$\frac{\|\tilde{\varphi}(x)\|_1}{\|x\|_1} \leq (1 + C) \frac{\|\tilde{\varphi}(x)\|_1}{\|x\|_1 + \|g(x)\|_1} \leq (1 + C) \|B^{-1}\|_1 \frac{\|\varphi(x, g(x))\|_1}{\|x\|_1 + \|g(x)\|_1} \rightarrow 0$$

für  $x \rightarrow 0$  ist dies aber gerade erfüllt, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Der Satz sagt uns also, dass die implizit definierte Funktion  $g$  — unter den angegebenen Bedingungen — differenzierbar ist wenn sie nur stetig ist und erlaubt uns, die Ableitung auszurechnen.

**Beispiel 22.4** (i) Wir betrachten Beispiel 22.1(i), also  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Hier gilt  $D_x f(x, y) = 2x$  und  $D_y f(x, y) = 2y$ . Diese “ $1 \times 1$  Matrix” ist genau dann invertierbar, wenn  $b = g(a) \neq 0$  ist und in diesen Punkten gilt

$$Dg(a) = -(D_y f(a, g(a)))^{-1} D_x f(a, g(a)) = -\frac{2a}{2g(a)} = -\frac{a}{g(a)}.$$

Für  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$  erhalten wir so

$$Dg(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

und für  $\tilde{g}(x) = -\sqrt{1 - x^2}$  ergibt sich

$$D\tilde{g}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Natürlich hätten wir das auch direkt mit der Kettenregel ausrechnen können, zu beachten ist aber, dass wir die Formel für  $g(x)$  hier gar nicht hätten kennen müssen. Zum Berechnen der Ableitung  $Dg(x)$  für  $x = a$  hätte die Kenntnis der Werte  $a$  und  $b = g(a)$  ausgereicht.

Die Punkte  $a = 0$ , in denen Satz 22.3 nicht anwendbar ist, gehören hier übrigens gerade zu den Punkten  $b = -1$  und  $b = 1$ . In diesen Punkten sind die Funktionen  $g$  und  $\tilde{g}$  auch tatsächlich nicht differenzierbar. Beachte aber, dass der Satz keine Aussage über Nicht-Differenzierbarkeit macht. Es könnte daher durchaus sein, dass  $D_y f(x, y)$  nicht invertierbar ist, die Funktion  $g$  aber trotzdem differenzierbar in  $x$  ist. Ein Beispiel dafür ist die konstante Funktion  $f \equiv 0$ . Hier erfüllt z.B. die Funktion  $g \equiv 0$  die Bedingung  $f(x, g(x)) = 0$ . Dies ist überall differenzierbar, wegen  $D_y f \equiv 0$  ist der Satz aber für kein Paar  $(x, y)$  anwendbar.

(ii) Wir betrachten noch einmal das gleiche Beispiel und zeigen, dass die Stetigkeitsvoraussetzung in Satz 22.3 nicht weggelassen werden kann, d.h. dass Stetigkeit von  $g$  nicht “automatisch” aus  $f(x, g(x)) = 0$  folgt, auch wenn  $f$  stetig ist. Betrachten wir nämlich die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 0] \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

so sind in  $(a, b) = (0, 1)$  bis auf die Stetigkeit von  $g$  alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Da  $g$  aber nicht stetig in diesem Punkt ist, kann  $g$  auch nicht differenzierbar sein.  $\square$

**Bemerkung 22.5** Wenn  $f$  die Bedingungen von Satz 22.3 erfüllt und zusätzlich in einer Umgebung von  $(a, b)$  stetig differenzierbar ist, so ist  $g$  stetig differenzierbar in einer Umgebung von  $a$ .

Differenzierbarkeit folgt, weil  $D_y f(a)$  (wie jede Matrix) genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Da die Determinante aber eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  nach  $\mathbb{R}$  ist (denn sie ist ein Polynom in den Koeffizienten der Matrix) ist diese,

wenn sie in  $(a, b)$  ungleich Null ist, nach dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium auch in einer Umgebung von  $(a, b)$  ungleich Null. Folglich ist Satz 22.3 in einer ganzen Umgebung der Null anwendbar, weswegen  $g$  dort differenzierbar ist.

Dass die Ableitung von  $g$  darüberhinaus stetig ist, folgt aus der angegebenen Formel für  $Dg$  und der Tatsache, dass auch das Invertieren einer Matrix eine stetige Abbildung ist, was aus der Tatsache folgt, dass man die Einträge von  $A^{-1}$  mit Hilfe der Cramerschen Regel aus dem Gleichungssystem  $Ax = e_i$  berechnen kann und die Cramersche Regel wiederum auf den stetigen Determinanten und — ebenfalls stetigen — reellen Divisionen beruht.  $\square$

## 22.2 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Wir kommen nun zu der ersten eingangs gestellten Frage, nämlich die nach der Existenz einer implizit definierten Funktion. Um den entsprechenden Satz zu beweisen, verwenden wir einen berühmten Satz aus der Analysis, den Banach'schen Fixpunktsatz. Wir erinnern dazu daran (vgl. Definition 18.6), dass ein Banachraum ein vollständiger normierter Vektorraum ist, also ein Vektorraum, auf dem eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert ist, so dass bezüglich der zugehörigen Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$  alle Cauchy-Folgen konvergieren.

**Satz 22.6 (Banach'scher Fixpunktsatz)** Es sei  $V$  ein Banachraum,  $K \subset V$  abgeschlossen und  $T : K \rightarrow K$  eine Abbildung, für die ein  $\kappa < 1$  existiert mit

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad (22.2)$$

für alle  $x, y \in K$  (solch ein  $T$  heißt *Kontraktion* auf  $K$ ). Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt  $x^* \in K$  von  $T$ , d.h. ein eindeutiges  $x^*$  mit  $T(x^*) = x^*$ .

**Beweis:** Wähle ein beliebiges  $x_0 \in K$  und betrachte die induktiv für  $m = 0, 1, 2, \dots$  definierte Folge

$$x_{m+1} = T(x_m) \in K.$$

Aus der Kontraktionsungleichung (22.2) folgt induktiv

$$\|T(x_m) - T(x_{m+1})\| \leq \kappa \|T(x_{m-1}) - T(x_m)\| \leq \dots \leq \kappa^m \|x_0 - T(x_0)\|.$$

Damit folgt für alle  $n \geq m \geq 1$

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|T(x_{m-1}) - T(x_{n-1})\| \\ &\leq \sum_{l=m-1}^{n-2} \|T(x_l) - T(x_{l+1})\| \\ &\leq \sum_{l=m-1}^{n-2} \kappa^l \|x_0 - T(x_0)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \kappa^{m-1} \sum_{l=0}^{\infty} \kappa^l \|x_0 - T(x_0)\| \\ &\leq \frac{\kappa^{m-1}}{1 - \kappa} \|x_0 - T(x_0)\|. \end{aligned}$$

Weil  $\kappa^{m-1}$  gegen 0 konvergiert für  $m \rightarrow \infty$ , ist  $x_m$  eine Cauchy-Folge, die wegen der Banachraum-Eigenschaft von  $V$  gegen einen Grenzwert  $x^* \in V$  konvergiert, der wegen der Abgeschlossenheit von  $K$  auch wieder in  $K$  liegt. Für diesen gilt wegen der (aus der Kontraktionsungleichung (22.2) folgenden) Stetigkeit von  $T$

$$T(x^*) = T\left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} T(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m+1} = x^*,$$

$x^*$  ist also ein Fixpunkt. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien  $x^*$  und  $x^{**}$  zwei Fixpunkte von  $T$  in  $B$ . Dann gilt

$$\|x^* - x^{**}\| = \|T(x^*) - T(x^{**})\| \leq \kappa \|x^* - x^{**}\|,$$

was wegen  $\kappa < 1$  nur für  $\|x^* - x^{**}\| = 0$ , also  $x^* = x^{**}$  gelten kann.  $\square$

## 22.3 Der Satz über implizite Funktionen

Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes können wir nun die Frage nach der Existenz einer impliziten Funktion mit dem folgenden Satz beantworten.

**Satz 22.7 (Satz über implizite Funktionen)** Die Funktion  $f$  aus Bemerkung 22.2 sei auf  $U_1 \times U_2$  mit offenen Mengen  $U_1 \subset D_1$  und  $U_2 \subset D_2$  stetig differenzierbar. Sei  $(a, b) \in U_1 \times U_2$  so, dass

$$f(a, b) = 0$$

gilt und die Jacobi-Matrix  $D_y f(a, b) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sei invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen  $V_1 \subset U_1$  von  $a$  und  $V_2 \subset U_2$  von  $b$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in V_1.$$

Zudem ist für alle  $x \in V_1$  der Punkt  $y = g(x)$  der einzige Punkt in  $V_2$ , für den  $f(x, y) = 0$  gilt.

**Beweis:** Zum Beweis genügt es, die Existenz einer stetigen Funktion  $g$  mit den angegebenen Eigenschaften zu beweisen, weil die stetige Differenzierbarkeit dann aus Satz 22.3 und Bemerkung 22.5 folgt. Zudem gilt für dieses  $g$  die Ableitungsformel aus Satz 22.3.

**Schritt 1 (vorbereitende Definitionen):** Wie im Beweis von Satz 22.3 sei o.B.d.A.  $a = 0$  und  $b = g(a) = 0$  sowie  $B = D_y f(0, 0)$ . Auf  $U_1 \times U_2$  definieren wir die Abbildung

$$G(x, y) := y - B^{-1} f(x, y).$$

Aus dieser Definition folgt die Äquivalenz

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y) = y. \quad (22.3)$$

Für die Ableitung von  $G$  nach  $y$  gilt

$$D_y G(x, y) = \text{Id} - B^{-1} D_y f(x, y)$$

und damit insbesondere  $D_y G(0, 0) = \text{Id} - B^{-1} B = 0$  gilt. Da  $D_y G$  stetig ist, gibt es Umgebungen  $W_1 \subset U_1$  um 0 und  $W_2 \subset U_2$  um 0, so dass

$$\|D_y G(x, y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } (x, y) \in W_1 \times W_2 \quad (22.4)$$

gilt. Wir wählen nun  $\varepsilon_2 > 0$  so, dass  $V_2 := \overline{B}_{\varepsilon_2}(0) \subset W_2$  gilt,  $\delta > 0$  mit  $\delta < \varepsilon_2/2$  beliebig und  $\varepsilon_1 > 0$  so, dass für alle  $x \in V_1 := B_{\varepsilon_1}(0)$  die Ungleichung

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x, 0)\| \leq \delta \quad (22.5)$$

gilt (solch ein  $\varepsilon_1$  existiert, weil  $G$  stetig ist mit  $G(0, 0) = 0$ ). Schließlich definieren wir  $K$  als die Menge der stetigen Funktionen von  $V_1$  nach  $V_2$ , also  $K = C(V_1, V_2)$ . Beachte, dass  $K$  eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums der stetigen Funktionen  $C(V_1, \mathbb{R}^m)$  mit der Norm  $\|g\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \|g(x)\|$  ist. Wir wenden den Banach'schen Fixpunktsatz nun auf diesem Raum  $V = C(V_1, \mathbb{R}^m)$  an.

**Schritt 2 (Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes):** Wir definieren dazu die folgende Abbildung  $T : C(V_1, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(V_1, \mathbb{R}^m)$ . Für  $g \in C(V_1, \mathbb{R}^m)$  setzen wir

$$T(g) := G(\cdot, g).$$

Diese Definition ist so zu verstehen, dass der Wert der Funktion  $T(g)$  an der Stelle  $x$  gerade gleich  $T(g)(x) = G(x, g(x))$  ist. Wir zeigen nun, dass die Abbildung die Abbildung  $T(y) := G(x, y)$  eine Kontraktion auf  $K$  ist. Seien dazu  $g_1, g_2 \in K$  gegeben und  $x \in V_1$  beliebig. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz und Lemma 17.11<sup>2</sup> und mit der Abkürzung  $y_1 = g_1(x)$ ,  $y_2 = g_2(x)$

$$\begin{aligned} \|T(g_2)(x) - T(g_1)(x)\| &= \|G(x, g_2(x)) - G(x, g_1(x))\| = \|G(x, y_2) - G(x, y_1)\| \\ &= \left\| \int_0^1 D_y G(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D_y G(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|D_y G(x, y_1 + t(y_2 - y_1))\| \|y_2 - y_1\| dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| dt = \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| = \frac{1}{2} \|g_2(x) - g_1(x)\|. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle  $x \in V_1$  gilt, gilt sie auch für das Supremum und es folgt

$$\|T(g_2) - T(g_1)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_2 - g_1\|_\infty.$$

<sup>2</sup>Beachte, dass Lemma 17.11 nur für die 2-Norm gilt, die wir daher in diesem Beweis verwenden, ohne dies in der Notation besonders zu betonen.

Daraus folgt zum einen (22.2) mit  $\kappa = 1/2$  und zum anderen, indem wir  $g_1 \equiv 0$  setzen und ausnutzen, dass alle  $g \in K$  nach  $V_1 = B_{\varepsilon_2}(0)$  abbilden

$$\|T(g_2) - T(g_1)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_2 - g_1\|_\infty = \frac{1}{2}\|g_2\|_\infty \leq \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Zudem gilt  $\|T(g_1)\|_\infty = \|T(0)\|_\infty \leq \|G(\cdot, 0)\|_\infty \leq \delta$  und damit mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\|T(g_2)\|_\infty < \frac{\varepsilon_2}{2} + \|T(g_1)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon_2}{2} + \delta < \varepsilon_2,$$

woraus  $T(g_2) \in K = C(V_1, V_2)$  folgt, weswegen  $T$  die Menge  $K$  nach  $K$  abbildet und damit die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt. Folglich gibt es ein eindeutiges  $g \in K$  mit  $G(x, g(x)) = x$ , das wegen (22.3) genau die gesuchte implizite Funktion ist.  $\square$

**Beispiel 22.8** Wir betrachten die Funktionen aus Beispiel 22.1 und verwenden dabei die Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \mid f(x, y) = 0\}$ .

(i)  $k = m = 1$ ,  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Es gilt  $D_y f(x, y) = 2y$ . Diese "1  $\times$  1-Matrix" ist für alle  $y \neq 0$  invertierbar, weswegen die implizite Funktion  $g$  für alle  $(x, y) \in M$  mit  $y \neq 0$  existiert. Da diese gerade die Punkte mit  $x \in (-1, 1)$  sind, existiert (mindestens) eine stetig differenzierbare implizite Funktion  $g$  auf  $x = (-1, 1)$  (tatsächlich existieren genau zwei davon).

(ii)  $k = 2$ ,  $m = 1$ ,  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $y = x_3$ ,  $f(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$

Es gilt wiederum  $D_y f(x) = 2y$ , weswegen die implizite Funktion wiederum für alle  $(x, y) \in M$  mit  $y \neq 0$  existiert. Diese gehören hier gerade zu den Punkten  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ .

(iii)  $k = 2$ ,  $m = 1$ ,  $x = (p, q)^T$ ,  $y = x$ ,  $f(x, y) = y^2 + x_1 y + x_2$

Hier gilt  $D_y f(x) = 2y + x_1$ , weswegen  $g$  für alle  $(x, y) \in M$  mit  $2y \neq -x_1$  existiert. Die Menge aller  $x = (x_1, x_2)$ , für die dies gilt, ist hier allerdings nicht so leicht zu bestimmen.

(iv)  $k = 1$ ,  $m = 2$  und

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1 y_2 + y_2 x + 2 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt

$$D_y f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & y_1 + x \end{pmatrix}.$$

Sofern  $\det(D_y f(x, y)) = 3(y_1^3 + y_1^2 x - y_2^3 - y_2^2 x) \neq 0$  gilt, ist diese Matrix invertierbar. Dies ist beispielsweise in  $x = 2$  und  $y = (-1, 0)^T$  der Fall, weswegen die Gleichung in einer Umgebung von  $x = 2$  eindeutig auflösbar ist. In diesen Punkten gilt

$$D_y f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D_y f(x, y))^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$D_x f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$Dg(x) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

□

Fassen wir kurz zusammen, was der Satz über implizite Funktionen aussagt und was nicht. Der Satz sagt (unter den angegebenen Bedingungen)

- dass die Gleichung in einer Umgebung  $V_1 \times V_2$  eines gegebenen Lösungspunktes  $(x, y)$  eindeutig auflösbar ist
- dass die Lösungen als differenzierbare Funktion  $g : V_1 \rightarrow V_2$  geschrieben werden können und wie deren Ableitung aussieht.

Der Satz sagt nicht

- wie man eine Formel für die implizite Funktion  $g$  findet
- wie groß die Umgebung  $V_1$  ist, auf der  $g$  definiert werden kann
- wie man einen Punkt  $(x, y)$  findet, in dem man den Satz anwenden kann.

Das klingt zunächst ein wenig enttäuschend, denn für praktische Rechnungen sind ja gerade die letzten Fragen wichtig. Nichtsdestotrotz ist der Satz sehr wichtig für viele Anwendungen, da er sicherstellt, dass überhaupt eine Lösung gefunden werden kann und dass diese eine “schöne” Struktur hat, weil sie der Graph einer differenzierbaren Funktion ist. Dies ist die Grundlage für viele weitere Methoden (z.B. in der numerischen Mathematik), mit denen man die Lösungen dann ausrechnen kann.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Anwendung des Satzes, die zeigt, dass man — auch wenn  $g$  selbst unbekannt ist — aus dem Satz über implizite Funktionen interessante Informationen ableiten kann. Wir betrachten dazu Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Solche Funktionen kann man stets als Fläche über dem  $\mathbb{R}^2$  grafisch darstellen. Wie auf einer Landkarte kann man nun Punkte, an denen  $f$  gleiche Werte annimmt, als Höhenlinien in den  $\mathbb{R}^2$  einzeichnen. Abbildung 22.1 veranschaulicht diese für die Funktion  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$  aus Beispiel 17.2(i).

Formal ist die Höhenlinie zu einem Wert  $c \in \mathbb{R}$  definiert als

$$H(c) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}.$$

In Abbildung 22.1 scheinen alle Höhenlinien lokal aus Graphen von differenzierbaren Funktionen zu bestehen. Das ist kein Zufall. Betrachten wir nämlich die Funktion

$$F(x_1, x_2) := f(x_1, x_2) - c$$

und einen Punkt  $x = (x_1, x_2)^T \in H(c)$ , in dem die Ableitung  $DF(x) = Df(x)$  (oder äquivalent der Gradient  $\nabla f(x) = Df(x)^T$ ) ungleich Null ist. Dann ist entweder  $D_{x_1}f(x) \neq 0$  oder  $D_{x_2}f(x) \neq 0$  und wir können Satz 22.7 entweder mit  $x = x_2$  und  $y = x_1$  oder

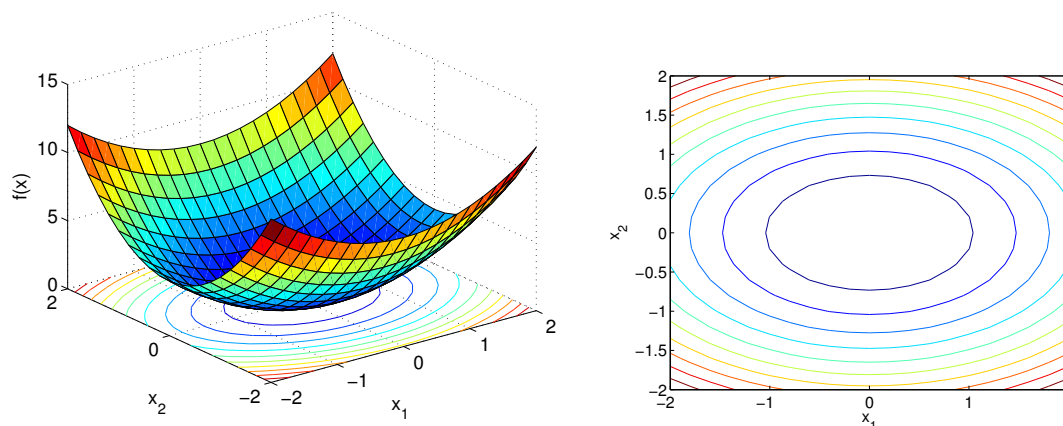


Abbildung 22.1: Darstellung der Funktion  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ . Links: Graph und Höhenlinien. Rechts: nur Höhenlinien

mit  $x = x_1$  und  $y = y_2$  auf  $F$  anwenden. Wir erhalten so entweder eine differenzierbare Funktion  $x_1 = g(x_2)$  mit  $f(g(x_2), x_2) = c$  oder eine differenzierbare Funktion  $x_2 = g(x_1)$  mit  $f(x_1, g(x_1)) = c$ . In beiden Fällen ist die Höhenlinie also durch eine differenzierbare Funktion gegeben.

Neben der Interpretation, dass der Gradient immer in die “Richtung des steilsten Anstiegs” einer Funktion zeigt, erlaubt der implizite Funktionensatz nun noch eine weitere geometrische Interpretation des Gradienten: Weil  $g$  differenzierbar ist und  $x_1 \mapsto f(x_1, g(x_1))$  eine konstante Funktion ist, gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= D(f(x_1, g(x_1))) = D_{x_1}f(x_1, g(x_1)) + D_{x_2}f(x_1, g(x_1))g'(x_1) \\ &= \left\langle \nabla f(x_1, g(x_1)), \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_1) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Der zweite Vektor in diesem Skalarprodukt ist nun gerade die Tangentialrichtung an die Höhenlinie im Punkt  $x$ . Weil das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\neq 0$  genau dann Null ist, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, gilt also, dass der Gradient stets senkrecht auf der Tangente an die Höhenlinie steht, also senkrecht auf der Höhenlinie selbst steht<sup>3</sup>.

## 22.4 Umkehrfunktionen

Eine weitere Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist der Beweis der Existenz von Umkehrfunktionen. Wir haben für reelle Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  in Abschnitt 6.3 verschiedene Kriterien kennengelernt, unter denen eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  existiert und in Satz 9.10 eine Formel für die Ableitung hergeleitet. Dies wollen wir nun auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Beachte, dass wir hier Funktionen betrachten, deren Werte- und Definitionsmengen die gleiche Dimension  $n$  besitzen.

<sup>3</sup>Man sagt, dass ein Vektor senkrecht in einem Punkt  $(x, g(x))$  auf einem Graphen steht, wenn die zugehörige Funktion  $g$  in  $x$  differenzierbar ist und der Vektor senkrecht auf der Tangente steht



Eines der Kriterien für die Existenz einer Umkehrfunktion in  $\mathbb{R}$  ist die strenge Monotonie einer Funktion. Eine hinreichende Bedingung für strenge Monotonie ist gemäß Satz 10.6 die Ungleichung  $f'(x) > 0$  bzw.  $f'(x) < 0$  für alle  $x$  aus einem Intervall  $[a, b]$ .

Falls wir nun in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  wissen, dass  $f'(a) \neq 0$  ist, zudem aber wissen, dass  $f'$  stetig in  $a$  ist, so folgt  $f'(x) > 0$  (oder  $f'(x) < 0$ ) für alle  $x$  aus einer Umgebung  $V$  von  $a$ . Es folgt Monotonie auf  $V$  und damit die Existenz einer Umkehrfunktion.

Dieses Kriterium wollen wir nun auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Es stellt sich allerdings die Frage, was die geeignete Verallgemeinerung von  $f'(a) \neq 0$  in den  $\mathbb{R}^n$  ist. Die naheliegende Vermutung  $Df(a) \neq 0$  ist leider falsch, wie z.B. das Beispiel  $f(x) = (0, x_2)^T$  im  $\mathbb{R}^2$  mit  $Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$  zeigt. Würde für diese Funktion eine Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  existieren, so müsste

$$g(f(x)) = x$$

und damit  $x_1 = g_1(f(x)) = g_1(0, x_2)$  gelten. Das kann aber nicht sein, denn da die Funktion  $g_1(f(x)) = g_1(0, x_2)$  den Wert  $x_1$  gar nicht "kennt", kann sie diesen Wert auch nicht als Funktionswert liefern.

Die richtige Bedingung für die Existenz einer Umkehrfunktion in einer Umgebung eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^n$  ist tatsächlich nicht  $Df(a) \neq 0$  sondern die Invertierbarkeit von  $Df(a)$ , wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 22.9 (Existenz der Umkehrfunktion)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $a \in D$  so, dass  $f$  in einer Umgebung von  $a$  stetig differenzierbar und  $Df(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar ist.

Dann existieren offene Umgebungen  $V \subset D$  von  $a$  und  $V' \subset \mathbb{R}^n$  von  $f(a)$  mit  $f(V) \subset V'$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f^{-1} : V' \rightarrow V$  mit  $f^{-1}(V') \subset V$  und

$$f^{-1} \circ f(x) = x \text{ für alle } x \in V \quad \text{sowie} \quad f \circ f^{-1}(x) = x \text{ für alle } x \in V'.$$

Zudem gilt in  $b := f(a)$

$$D(f^{-1})(b) = (Df(a))^{-1},$$

wobei  $(Df(a))^{-1}$  die Inverse der Jacobi-Matrix  $Df(a)$  bezeichnet.

**Beweis:** Wir betrachten die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$F(x, y) := x - f(y).$$

Es gilt  $F(b, a) = b - f(a) = 0$  und wegen  $D_y F(x, y) = -Df(y)$  ist  $D_y F$  in  $y = a$  invertierbar. Folglich ist Satz 22.7 auf  $F$  anwendbar und es existieren Umgebungen  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  von  $b$ ,  $V_2 \subset D$  von  $a$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit

$$F(x, g(x)) = 0$$

für alle  $x \in V_1$ . Falls nötig ersetzen wir hierbei  $V_2$  durch  $g(V_1)$ , damit  $g(V_1) = V_2$  gilt. Beachte, dass das modifizierte  $V_2$  immer noch eine Umgebung von  $a$  ist.

Wir behaupten nun, dass  $f^{-1} = g$  die gesuchte Funktion ist. Zunächst gilt

$$f \circ g(x) = x - F(x, g(x)) = x$$

für alle  $x \in V_1$ , also die zweite gesuchte Eigenschaft mit  $V' = V_1$ . Für die Ableitung von  $g$  gilt

$$Dg(b) = -(D_y F(b, a))^{-1} D_x F(b, a) = -(-Df(a))^{-1} \text{Id} = (Df(a))^{-1},$$

also gerade die gesuchte Formel. Zudem gilt

$$g \circ f(x) = g \circ (f \circ g) \circ f(x) = (g \circ f) \circ (g \circ f)(x)$$

für alle  $x \in V_2$ . Beachte, dass  $(f \circ g)$  eingeschoben werden kann, weil  $g(V_1) = V_2$  und damit wegen der bereits bewiesenen zweiten Eigenschaft  $f(V_2) = f \circ g(V_1) = V_1$  gilt. Für alle Punkte  $y \in g \circ f(V_2)$  folgt also  $g \circ f(y) = y$ , d.h. die erste gesuchte Eigenschaft. Es bleibt also eine Umgebung  $V$  von  $b$  zu finden, so dass  $V \subset g \circ f(V_2)$  gilt.

Dazu verwenden wir zuerst  $f \circ g(V') = V'$ , woraus wegen  $g(V') \subset V_2$  insbesondere  $f(V_2) \supset V'$  folgt. Als nächstes verwenden wir, dass  $g : V' \rightarrow V_2$  selbst wieder die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Also existieren mit der gleichen Argumentation Umgebungen  $\tilde{V}_1 \subset V'$  und  $\tilde{V}_2 \subset V_2$  von  $a$  und  $b$  mit  $g(V') \supset g(\tilde{V}_1) \supset \tilde{V}_2$ . Daraus folgt aber  $g \circ f(V_2) \supset g(V') \supset \tilde{V}_2$ . Die Menge  $V = \tilde{V}_2$  hat also die gesuchte Eigenschaft.  $\square$

**Beispiel 22.10** Wir hatten in Abschnitt 8.5 gesehen, dass sich jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  als

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit den Polarkoordinaten  $r \geq 0$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  schreiben lässt. Als Folgerung lässt sich jeder Vektor  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  schreiben als

$$x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T =: f(r, \varphi).$$

Dieses  $f$  ist dann eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $D = (0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  (wir fassen  $(r, \varphi)$  also als Vektor im  $\mathbb{R}^2$  auf<sup>4</sup>). Wir untersuchen nun, ob diese Abbildung eine Umkehrfunktion besitzt.

Wegen

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} (r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

gilt  $\det Df(r, \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r > 0$  für alle  $(r, \varphi) \in D$  (darum haben wir die Punkte  $(r, \varphi)$  mit  $r = 0$  aus  $D$  herausgenommen). Also besitzt  $f$  für alle Punkte in  $D$  auf einer geeigneten Umgebung  $V$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Für diese gilt mit  $x = f(r, \varphi)$

$$D(f^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

<sup>4</sup>Wir könnten  $f$  auch auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definieren, allerdings brauchen wir die negativen  $r$  nicht, um alle Punkte  $x \in \mathbb{R}^2$  darzustellen. Warum wir auch die Punkte mit  $r = 0$  herausnehmen, sehen wir in Kürze

Nutzt man die Beziehungen  $r = \|x\|_2$ ,  $x_1 = r \cos \varphi$  und  $x_2 = r \sin \varphi$  aus, kann man diese Ableitung in Abhängigkeit von  $x$  ohne Verwendung von  $r$  und  $\varphi$  schreiben als

$$D(f^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|x\|_2} & \frac{x_2}{\|x\|_2} \\ -\frac{x_2}{\|x\|_2^2} & \frac{x_1}{\|x\|_2^2} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass  $f$  tatsächlich nur auf echten Teilmengen  $V \subset D$  mit  $V \neq D$  “umgekehrt” werden kann. Würde eine Umkehrfunktion auf ganz  $f(D)$  existieren, so müsste für alle  $(r, \varphi) \in D$  insbesondere

$$f^{-1}(f(r, \varphi)) = (r, \varphi) \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(r, \varphi + 2\pi)) = (r, \varphi + 2\pi) \quad (22.6)$$

gelten. Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus folgt aber

$$f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi),$$

woraus

$$f^{-1}(f(r, \varphi)) = f^{-1}(f(r, \varphi + 2\pi))$$

folgt, was (22.6) widerspricht. □

Der Satz über Umkehrfunktionen “erbt” alle Vor- und Nachteile des Satzes über implizite Funktionen. So erhalten wir auch hier eine (lokale) Existenzaussage und eine Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, allerdings keine Formel für die Umkehrfunktion selbst und keine Information über die Größe der Umgebung  $V$ , auf der  $f^{-1}$  definiert ist.

## 22.5 Extremwerte unter Nebenbedingungen

Als letzte Anwendung des Satzes über implizite Funktionen betrachten wir noch einmal die Extremwertberechnung aus Abschnitt 21.3, diesmal aber mit einer zusätzlichen Schwierigkeit: wir wollen das Minimierungsproblem nur für solche Punkte lösen, für die  $g(x) = 0$  gilt. Formal führt das auf die folgende erweiterte Definition des Minimums.

**Definition 22.11** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wir sagen, dass  $f$  in einem  $x \in D$  ein *lokales Minimum unter der Nebenbedingung*  $g(x) = 0$  besitzt, falls  $g(x) = 0$  gilt und ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass gilt

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{für alle } y \in B_\varepsilon(x) \cap D \text{ mit } g(y) = 0.$$

Das Minimum heißt *strikt*, falls die obige Ungleichung mit  $<$  erfüllt ist für  $y \neq x$ . Der Punkt  $x$  heißt (*strikte*) *Minimalstelle unter Nebenbedingung* von  $f$ . Analog definieren wir das (*strikte*) lokale Maximum unter Nebenbedingung mit  $\geq$  bzw.  $>$ . □

Der folgende Satz gibt notwendige Optimalitätsbedingungen analog zu Satz 21.9 an.

**Satz 22.12** Sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ . Falls  $f$  in  $x^* \in D$  ein lokales Minimum oder Maximum besitzt und  $Dg(x^*)$  vollen Rang besitzt, so existiert ein Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  mit

$$Df(x^*) = \lambda^T Dg(x^*). \quad (22.7)$$

Der Vektor  $\lambda$  wird *Lagrange-Multiplikator* genannt.

**Beweis:** Die Matrix  $Dg(x^*)$  besitzt vollen Rang und ist eine Matrix mit  $n$  Spalten und  $m$  Zeilen. Wegen  $m < n$  existieren also  $m$  linear unabhängige Spalten. Durch Ummummerierung der  $x_i$  verschieben sich diese Spalten gerade; wir können daher so umnummerieren, dass gerade die  $m$  letzten Spalten linear unabhängig sind. Beachte, dass dies nur die Spalten von  $Df$  und  $Dg$  vertauscht, Gleichung (22.7) bleibt bei Ummummerierung der  $x_i$  also gültig. Teilen wir nun den Vektor  $x$  in der Form

$$x = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

mit  $z \in \mathbb{R}^{n-m}$  und  $y \in \mathbb{R}^m$  auf und schreiben  $g$  in der Form  $g(z, y)$ , so erfüllt  $g$  die Bedingung des Satzes über implizite Funktionen. Teilen wir das lokale Minimum analog auf mittels  $x^* = (z^*, y^*)$ , so können wir Umgebungen  $V_1$  von  $z^*$  und  $V_2$  von  $y^*$  sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $h : V_1 \rightarrow V_2$  finden mit  $g(z, h(z)) = 0$ . Aus der Definition des lokalen Minimums unter Nebenbedingungen folgt dann, dass  $z^*$  ein lokales Minimum der stetig differenzierbaren Funktion

$$c(z) = f(z, h(z))$$

ist. Satz 21.9, Gleichung (20.7) und Satz 22.3 liefern

$$\begin{aligned} 0 = Dc(z^*) &= D_z f(z^*, h(z^*)) + D_y f(z^*, h(z^*)) Dh(z^*) \\ &= D_z f(z^*, h(z^*)) - D_y f(z^*, h(z^*)) (D_y g(x^*))^{-1} D_z g(x^*). \end{aligned}$$

Setzen wir nun  $\lambda = [D_y f(z^*, h(z^*)) (D_y g(x^*))^{-1}]^T$ , so folgt

$$\begin{aligned} D_z f(z^*, h(z^*)) - \lambda^T D_z g(x^*) &= D_z f(z^*, h(z^*)) - D_y f(z^*, h(z^*)) (D_y g(x^*))^{-1} D_z g(x^*) \\ &= Dc(x^*) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_y f(z^*, h(z^*)) - \lambda^T D_y g(x^*) &= D_y f(z^*, h(z^*)) - D_y f(z^*, h(z^*)) (D_y g(x^*))^{-1} D_y g(x^*) \\ &= D_y f(z^*, h(z^*)) - D_y f(z^*, h(z^*)) = 0. \end{aligned}$$

Zusammen gilt also

$$Df(x^*) = (D_y f(z^*, y^*), D_z f(z^*, y^*)) = (\lambda^T D_z g(x^*), \lambda^T D_y g(x^*)) = \lambda^T Dg(x^*).$$

□

**Bemerkung 22.13** Beachte, dass Gleichung (22.7) nicht sicher stellt, dass  $g(x^*) = 0$  gilt. Will man also Kandidaten für Extremwerte unter Nebenbedingungen ausrechnen, muss man  $g(x^*) = 0$  als weitere Gleichung(en) zur Bestimmung von  $x^*$  und  $\lambda$  hinzufügen.  $\square$

**Beispiel 22.14** Wir betrachten das letzte Zahlenbeispiel aus Beispiel 21.14, also  $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 5.$$

Jetzt fügen wir aber die Nebenbedingung  $g(x) = 0$  mit  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$  hinzu. Wir suchen also die Extremwerte von  $f$  auf dem Einheitskreis, also der Menge aller  $x$  mit  $\|x\|_2 = 1$ . Die Dimensionen lauten hier  $n = 2$  und  $m = 1$  und es gilt

$$Df(x) = (2Ax + b)^T \quad \text{sowie} \quad Dg(x) = (2x_1, 2x_2).$$

Die Bedingung, dass  $Dg$  vollen Rang hat, ist hier also für  $x \neq 0$  erfüllt. Damit ergibt sich (22.7) zusammen mit  $g(x) = 0$  zu

$$\begin{aligned} -6x_1 + 2x_2 + 1 &= \lambda 2x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1 &= \lambda 2x_2 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von  $\lambda$  ergibt

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 + \lambda - 7}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda + 4}{\lambda^2 + \lambda - 7}.$$

Eingesetzt in die weitere Gleichung  $g(x) = 0$ , also  $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{4} \frac{2\lambda^2 + 6\lambda + 17}{(\lambda^2 + \lambda - 7)^2} - 1 = 0,$$

welche gerade die Nullstellen der Polynoms

$$P(\lambda) = 4\lambda^4 + 8\lambda^3 - 54\lambda^2 - 62\lambda + 179$$

als Lösungen besitzt. Die Berechnung der Nullstellen (mit MAPLE) liefert die näherungsweisen Werte

$$\lambda_1 = 2.779408674, \quad \lambda_2 = 1.605041266, \quad \lambda_3 = -2.793395794, \quad \lambda_4 = -3.591054146$$

mit den zugehörigen Extremalstellen

$$\begin{pmatrix} 0.2538732892 \\ 0.9672374900 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.1073224411 \\ -0.9942242700 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9529537485 \\ -0.3031157474 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.9960563225 \\ 0.08872321925 \end{pmatrix}.$$

Abbildung 21.2 legt nahe, warum es gerade vier Extremalstellen mit dieser Vorzeichenstruktur gibt.  $\square$

# Kapitel 23

## Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Stand:  
2. August 2022

Wir haben in Abschnitt 21.2 bereits gesehen, dass die Integration von Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  einfach komponentenweise definiert werden kann. Für vektorwertige Funktionen kann man dies ganz genauso machen wie wir dies dort für matrixwertige Funktionen gemacht haben, also

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_m(x)dx \end{pmatrix}.$$

Etwas komplizierter ist die Frage, wie man Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $D \subset \mathbb{R}^n$  integrieren kann, wenn also die Definitionsmenge  $D$  mehrdimensional ist. Zur Klärung dieser Frage reicht es, den Fall  $m = 1$  zu betrachten, da die Erweiterung auf  $m \geq 2$  dann ebenfalls einfach komponentenweise durchgeführt werden kann.

Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst das Riemann-Integral. Dieses können wir ganz analog zum Fall  $D \subset \mathbb{R}$  definieren, wenn wir wissen, wie man Treppenfunktionen im  $\mathbb{R}^n$  definiert und wie man diese integriert.

### 23.1 Treppenfunktionen

Treppenfunktionen im  $\mathbb{R}^n$  sind ebenfalls wieder Funktionen, die stückweise konstant sind. Im  $\mathbb{R}^n$  sind die Gebiete, auf denen die Funktionen konstant sind, allerdings keine Intervalle mehr. Stattdessen wählt man hier Quader gemäß der folgenden Definition.

**Definition 23.1** (i) Eine Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Quader*, wenn sie von der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

ist für Werte  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i < b_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Das *Innere* des Quaders ist dann gegeben durch

$$\text{int } Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n).$$

(ii) Das *Volumen* eines Quaders definieren wir als

$$\text{Vol}(Q) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

(iii) Eine Familie  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  von  $q \in \mathbb{N}$  Quadern heißt *Quaderzerlegung* einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , falls gilt

(a)  $A = \bigcup_{k=1, \dots, q} Q_k$

(b) Für alle  $k, j = 1, \dots, q$  mit  $k \neq j$  gilt  $\text{int } Q_k \cap \text{int } Q_j = \emptyset$  (man sagt, die Mengen  $\text{int } Q_k$  sind *paarweise disjunkt*).

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit Quaderzerlegung  $\mathcal{Q}$  definieren wir

$$\text{Vol}(A) := \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k). \quad (23.1)$$

(iv) Für einen Quader  $Q_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  der Zerlegung  $\mathcal{Q}$  von  $A$  aus (iii) definieren wir den *halboffenen Quader*

$$Q_k^* := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n).$$

Die Vereinigung all dieser Quader bezeichnen wir mit

$$A^* := \bigcup_{k=1, \dots, q} Q_k^*.$$

□

Beachte, dass die Menge  $A$  in (iii) stets beschränkt sein muss, da sie ansonsten nicht in endlich viele beschränkte Quader zerlegt werden kann. Zudem folgt sofort, dass der Rand von  $A$  stückweise aus Rändern von Quadern bestehen muss.

Definition (iv) erscheint auf den ersten Blick etwas technisch, beschreibt aber etwas ganz Einfaches:  $Q_k^*$  besteht gerade aus  $Q_k$  ohne alle Ränder mit den größeren Koordinaten (also ohne den rechten, oberen, hinteren ... Rand). Die Menge  $A^*$  ist gerade die Menge  $A$  ohne die Ränder mit den größeren Koordinaten. Beachte, dass wir für jede Quaderzerlegung von  $A$  die gleiche Menge  $A^*$  erhalten. Der Grund für diese Definition ist, dass wir so zu jedem Punkt  $x \in A^*$  ein eindeutigen Quader  $Q_k$  finden können mit  $x \in Q_k^*$ . Diese Eigenschaft wird einige Beweise im Folgenden deutlich vereinfachen.

**Definition 23.2** (i) Eine beschränkte Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion* auf einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , falls eine Quaderzerlegung  $\mathcal{Q}$  von  $A$  und eine Menge reeller Zahlen  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, q$  existiert, so dass

$$f|_{Q_k^*} \equiv c_k$$

gilt für jeden Quader  $Q_k \in \mathcal{Q}$ .

(ii) Eine beschränkte Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion* auf  $\mathbb{R}^n$ , falls eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  existiert, so dass  $f|_A$  eine Treppenfunktion auf  $A$  ist und  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus A} \equiv 0$  gilt.

Die so definierten Mengen von Treppenfunktionen werden mit  $T(A)$  bzw  $T(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. □

Dies verallgemeinert die Definitionen 11.1 und 15.21<sup>1</sup> der Treppenfunktionen in  $\mathbb{R}$ . Die Bedingung, dass  $f$  auf  $Q_k^*$  (und nicht nur auf  $\text{int } Q_k$ ) konstant ist, haben wir in  $\mathbb{R}$  nicht gebraucht. Wir werden in Lemma 23.4 sehen, warum wir dies im  $\mathbb{R}^n$  benötigen.

Genau wie in  $\mathbb{R}$  können wir die Zerlegung zu einer Treppenfunktion beliebig weiter in kleinere Quader unterteilen, ohne dass die Treppenfunktionseigenschaft verloren geht.

Aus diesem Grunde können wir wie in  $\mathbb{R}$  für je zwei Treppenfunktionen  $f$  und  $g$  auf der gleichen Menge  $A$  o.B.d.A. annehmen, dass sie auf der gleichen Quaderzerlegung definiert sind, indem wir die ursprünglichen Zerlegungen ggf. weiter unterteilen, so dass beide Funktionen auf den Quadern der neuen Unterteilung konstant sind. Eine solche neue Unterteilung existiert, da man für je zwei Quader  $Q_1$  und  $Q_2$  die Mengen  $Q_1 \cap Q_2$  sowie  $Q_1 \setminus Q_2$  stets wieder durch Quader darstellen kann. Aus diesem Grund sind Summen und Produkte von Treppenfunktionen im  $\mathbb{R}^n$  stets wieder Treppenfunktionen.

Das Integral über eine Treppenfunktion können wir nun ganz analog zum reellen Fall definieren.

**Definition 23.3** Für eine Treppenfunktion  $f \in T(A)$  (oder  $f \in T(\mathbb{R}^n)$  mit definierender Menge  $A$ ) und eine Quaderzerlegung  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  von  $A$  und  $f|_{\text{int } Q_k} \equiv c_k$  definieren wir das Integral als

$$\int_A f(x) dx := \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k) c_k.$$

□

Die anschauliche Interpretation dieses Integrals ist, dass wir das Volumen der Menge unter dem (stückweise konstanten) Graphen berechnen, wie üblich mit negativem Vorzeichen falls  $f$  negative Werte annimmt.

Wie in  $\mathbb{R}$  beweist man, dass der Integralwert nicht von der Wahl der Zerlegung  $\mathcal{Q}$  abhängt. Ebenso gelten Monotonie und Linearität wie in  $\mathbb{R}$ , d.h. Satz 11.4 gilt weiterhin.

Bereits bei der Differentialrechnung haben wir verwendet, dass man vektorwertige Funktionsargumente  $x \in \mathbb{R}^n$  in kleinere Teilvektoren  $y \in \mathbb{R}^p$  und  $z \in \mathbb{R}^s$  mit  $p + s = n$  zerlegen kann und statt  $f(x)$  dann auch  $f(y, z)$  schreiben kann. Das folgende Lemma zeigt einige Eigenschaften von Treppenfunktionen unter einer solchen Darstellung.

**Lemma 23.4** Es sei  $f \in T(A)$  mit  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $A = Y \times Z$  für  $Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $Z \subset \mathbb{R}^s$  mit  $p + s = n$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gilt  $A^* = Y^* \times Z^*$  und die Funktion

$$y \mapsto g(y) := f(y, z)$$

ist für jedes feste  $z \in Z^*$  eine Treppenfunktion auf  $Y$ .

(ii) Die Funktion

$$z \mapsto \int_Y f(y, z) dy$$

<sup>1</sup>Die Treppenfunktion  $T(\mathbb{R}^n)$  werden wir erst beim Lebesgue-Integral benötigen.



ist eine Treppenfunktion auf<sup>2</sup>  $Z$ .

(iii) Es gilt<sup>3</sup>

$$\int_A f(x) dx = \int_Z \int_Y f(y, z) dy dz.$$

**Beweis:** (i) Wir können jeden Quader  $Q_k \in \mathcal{Q}$ ,  $k = 1, \dots, q$ , in der Form  $Q_k = Q_{k,Y} \times Q_{k,Z}$  darstellen, wobei  $Q_{k,Y}$  ein  $p$ - und  $Q_{k,Z}$  ein  $s$ -dimensionaler Quader ist. Mit dieser Aufteilung gilt dann  $Q_k^* = Q_{k,Y}^* \times Q_{k,Z}^*$ , woraus insbesondere die Gleichheit  $A^* = Y^* \times Z^*$  folgt. Definieren wir nun für  $z \in Z^*$  die Menge

$$\mathcal{Q}_Y(z) := \{Q_{k,Y} \mid k = 1, \dots, q, z \in Q_{k,Z}^*\},$$

so definiert dies eine Quaderzerlegung von  $Y$  (die Anzahl der Quader in  $\mathcal{Q}_Y(z)$  ist typischerweise kleiner als  $q$ , wir behalten aber die ursprüngliche Nummerierung bei). Die zu den  $Q_{k,Y}$  gehörigen Mengen  $Q_{k,Y}^*$  bilden dann eine Zerlegung von  $Y^*$ .

Für alle  $Q_{k,Y} \in \mathcal{Q}_Y(z)$  und alle  $y \in Q_{k,Y}^*$  gilt dann  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in Q_k^*$ . Also folgt

$$g(y) = f(y, z) = f(x) = c_k$$

und folglich ist  $g$  eine Treppenfunktion.

(ii) Für jedes  $\tilde{z} \in Z^*$  definieren wir die Quadermenge

$$\mathcal{Q}_Z(\tilde{z}) := \{Q_{k,Z} \in \mathcal{Q}_Z \mid \tilde{z} \in Q_{k,Z}^*\} \quad (23.2)$$

und den Quader

$$Q_Z(\tilde{z}) := \bigcap_{Q_{k,Z} \in \mathcal{Q}_Z(\tilde{z})} Q_{k,Z}.$$

Da nur endlich viele Quader  $Q_{k,Z}$  existieren, gibt es — auch wenn es unendlich viele  $\tilde{z} \in Z^*$  gibt — auch nur endlich viele verschiedene solche Quader  $Q_Z(\tilde{z})$ . Deren Inneres ist wegen der Konstruktion über die Schnittmengen disjunkt. Daher bilden diese Quader eine Quaderzerlegung von  $Z$ , die wir in der Form

$$\tilde{\mathcal{Q}}_Z := \{\tilde{Q}_{j,Z} \mid j = 1, \dots, \tilde{q}\}$$

schreiben.

<sup>2</sup>Gemäß (i) ist das Integral für alle  $z \in Z^*$  definiert. Für  $z \in Z \setminus Z^*$  können wir der Funktion beliebige Werte zuordnen, da diese Werte in der Definition der Treppenfunktion keine Rolle spielen.

<sup>3</sup>Das folgende “verschachtelte” Integral ist zu verstehen als

$$\int_Z \int_Y f(y, z) dy dz = \int_Z \left( \int_Y f(y, x) dy \right) dz.$$

Die Aussage (iii) wird auch als “Satz von Fubini für Treppenfunktionen” bezeichnet.

Ist nun  $\tilde{Q}_{j,Z} \in \tilde{Q}_Z$ , so gilt  $\tilde{Q}_{j,Z} = Q_Z(\tilde{z})$  für ein  $\tilde{z} \in Z^*$ . Aus der Konstruktion von  $Q_Z(\tilde{z})$  folgt dann  $Q_Z(z) = Q_Z(\tilde{z}) = \tilde{Q}_{j,Z}$  für alle  $z \in \tilde{Q}_{j,Z}^*$  und damit  $f(y, z) = f(y, \tilde{z})$  für alle  $y \in Y^*$  und alle  $z \in \tilde{Q}_{j,Z}^*$ . Folglich ist

$$z \mapsto \int_Y f(y, z) dy$$

konstant in  $z$  auf  $\tilde{Q}_{j,Z}^*$  und damit eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung  $\tilde{Q}_Z$ .

(iii) Betrachte einen Quader  $\tilde{Q}_{j,Z} \in \tilde{Q}_Z$ . Dann erhalten wir für jedes  $\tilde{z} \in \tilde{Q}_{j,Z}$  die gleiche Familie von Quadern  $Q_Z(\tilde{z})$  in (23.2), die wir — da sie nur von der Wahl von  $j$  abhängt — mit  $Q_Z(j)$  bezeichnen. Für alle  $z \in \tilde{Q}_{j,Z}^*$  gilt dann

$$\int_Y f(y, z) dy = \sum_{\substack{k=1 \\ Q_{k,Z} \in Q_Z(j)}}^q \text{Vol}(Q_{k,Y}) c_k.$$

Jeder Quader  $Q_{k,Z}$  ist nun in mindestens einer, möglicherweise aber auch in mehreren der Familien  $Q_Z(j)$  enthalten. In jedem Fall ist  $Q_{k,Z}$  aber gerade die Vereinigung aller zugehörigen  $\tilde{Q}_{j,Z}$ . Es gilt also

$$\text{Vol}(Q_{k,Z}) = \sum_{\substack{j=1 \\ Q_{k,Z} \in Q_Z(j)}}^{\tilde{q}} \text{Vol}(\tilde{Q}_{j,Z}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_Z \int_Y f(y, z) dy dz &= \sum_{j=1}^{\tilde{q}} \text{Vol}(\tilde{Q}_{j,Z}) \sum_{\substack{k=1 \\ Q_{k,Z} \in Q_Z(j)}}^q \text{Vol}(Q_{k,Y}) c_k \\ &= \sum_{k=1}^q \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ Q_{k,Z} \in Q_Z(j)}}^{\tilde{q}} \text{Vol}(\tilde{Q}_{j,Z})}_{=\text{Vol}(Q_{k,Z})} \text{Vol}(Q_{k,Y}) c_k \\ &= \sum_{k=1}^q \underbrace{\text{Vol}(Q_{k,Z}) \text{Vol}(Q_{k,Y})}_{=\text{Vol}(Q_k)} c_k \\ &= \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k) c_k = \int_A f(x) dx. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 23.5** (i) Da man die Rollen von  $y$  und  $z$  in Lemma 23.4 einfach vertauschen kann, gilt die Aussage für festes  $y \in Y^*$  analog für die Funktionen  $z \mapsto f(y, z)$  und das entsprechende Integral und es folgt

$$\int_Y \int_Z f(y, z) dz dy = \int_A f(x) dx = \int_Z \int_Y f(y, z) dy dz.$$

Wir können die Integrationsreihenfolge also beliebig vertauschen.

(ii) Mehrfache Anwendung des Satzes liefert, dass wir für eine Menge  $A$ , die sich in der Form  $A = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_N$  zerlegen lässt und die zugehörige Vektorzerlegung  $x^T = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T)$ , die Gleichung

$$\int_A f(x) dx = \int_{Y_1} \int_{Y_2} \dots \int_{Y_N} f(y_1, y_2, \dots, y_N) dy_N \dots dy_2 dy_1$$

erhalten. Falls  $A$  ein Quader von der Form  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ist, folgt daraus

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1,$$

wobei die  $x_i$  jetzt eindimensionale Variablen sind und die Integrale daher Integrale auf  $\mathbb{R}$  sind.  $\square$

## 23.2 Definition des Riemann-Integrals

Das Riemann-Integral kann man nun ganz analog zum reellen Fall definieren.

**Definition 23.6** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $A \subset D$  eine Menge, für die eine Quaderzerlegung existiert. Dann definieren wir das *Oberintegral*

$$\int_A^* f(x) dx := \inf \left\{ \int_A \varphi(x) dx \mid \varphi \in T(A), \varphi \geq f \right\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_{*A} f(x) dx := \sup \left\{ \int_A \varphi(x) dx \mid \varphi \in T(A), \varphi \leq f \right\},$$

wobei die Integrale über  $\varphi$  im Sinne von Definition 23.3 zu verstehen sind.  $\square$

**Definition 23.7** Wir nennen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, *Riemann-integrierbar* auf einer Quader-zerlegbaren Menge  $A \subset D$ , falls

$$\int_A^* f(x) dx = \int_{*A} f(x) dx$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von  $f$  als

$$\int_A f(x) dx := \int_A^* f(x) dx.$$

$\square$

Genau wie in  $\mathbb{R}$  beweist man, dass das Integral ein monotones und lineares Funktional ist und genau wie in  $\mathbb{R}$  folgt der folgende Satz aus der Definition und den Eigenschaften des Supremums und Infimums.

**Satz 23.8** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, ist genau dann Riemann-integrierbar auf einer Quader-zerlegbaren Menge  $A \subset D$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(A)$  existieren mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_A \psi(x) dx - \int_A \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Auch im  $\mathbb{R}^n$  kann man für verschiedene Funktionenklassen zeigen, dass sie Riemann-integrierbar sind. Klar ist, dass Treppenfunktionen stets Riemann-integrierbar sind. Der folgende Satz zeigt, dass dies auch für alle stetigen Funktionen gilt.

**Satz 23.9** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Quader-zerlegbare Menge. Dann ist jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar auf  $A$ .

**Beweis:** Wir zeigen, dass die Voraussetzung von Satz 23.8 erfüllt ist. Sei dazu  $\varepsilon' > 0$  beliebig. Da  $A$  als Vereinigung von endlich vielen Quadern beschränkt und abgeschlossen ist, ist  $A$  kompakt, folglich ist  $f$  nach Satz 19.15 gleichmäßig stetig. Wir setzen  $\varepsilon := \varepsilon' / \text{Vol}(A)$  und wählen  $\delta > 0$  wie in der Definition 19.14 der gleichmäßigen Stetigkeit, wobei wir die  $\infty$ -Norm verwenden. Wählen wir nun eine Quaderzerlegung  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  mit Quadern der Kantenlänge  $< \delta$  (die wir immer durch hinreichend häufiges Unterteilen der ursprünglichen Quaderzerlegung konstruieren können), so gilt für je zwei Punkte  $x, x'$  in einem Quader  $Q_k \in \mathcal{Q}$  die Ungleichung  $\|x - x'\|_\infty < \delta$  und damit  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . Beachte, dass (23.1) auch für die neue Quaderzerlegung gilt, da sich das summierte Volumen durch Unterteilung nicht ändert.

Definieren wir also Werte  $c_k = \min\{f(x) \mid x \in Q_k\}$  und  $c'_k = \max\{f(x) \mid x \in Q_k\}$ , so folgt  $c'_k - c_k < \varepsilon$ . Betrachten wir nun die Treppenfunktionen

$$\varphi|_{Q_k^*} := c_k \quad \text{und} \quad \psi|_{Q_k^*} := c'_k,$$

so gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\begin{aligned} \int_A \psi(x) dx - \int_A \varphi(x) dx &= \int_A \psi(x) - \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k)(c'_k - c_k) \\ &< \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k)\varepsilon = \text{Vol}(A)\varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon' > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung mit Satz 23.8.  $\square$

Wie in  $\mathbb{R}$  (vgl. Abschnitt 11.3) kann man die Konstruktion der Treppenfunktionen in diesem Beweis zur Berechnung der Integrals verwenden. Wir werden aber bereits im nächsten Abschnitt eine Methode kennen lernen, mit der das viel effizienter geht.

**Bemerkung 23.10** Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$$

der *Träger* (engl. *Support*) der Funktion. Für eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und alle Quader  $A, \tilde{A} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp}(f) \subset A$  und  $\text{supp}(f) \subset \tilde{A}$  gilt dann

$$\int_A f(x)dx = \int_{\tilde{A}} f(x)dx,$$

da  $f$  (und damit auch das Integral) ja außerhalb von  $\text{supp}(f)$  gleich Null ist. Dieses Integral schreiben wir kurz auch als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

□

### 23.3 Der Satz von Fubini für stetige Funktionen

Bisher haben wir zwar das Integral definiert, haben aber noch kein richtiges Mittel, das Integral auf einfache Weise auszurechnen. Der folgende Satz liefert zusammen mit der nachfolgenden Bemerkung die Grundlage dafür.

**Satz 23.11 (Satz von Fubini für stetige Funktionen)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Quaderzerlegbare Menge, die sich in der Form  $A = Y \times Z$  für zwei Quaderzerlegbare Mengen  $Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $Z \subset \mathbb{R}^s$  mit  $p+s = n$  schreiben lässt. Dann gilt für jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\int_A f(x)dx = \int_Z \int_Y f(y, z)dydz.$$

Insbesondere sind die beiden auf der rechten Seite definierten Funktionen Riemann-integrierbar.

**Beweis:** Wir wählen  $\varepsilon' > 0$  beliebig und die Funktionen  $\varphi \leq f \leq \psi$  wie im Beweis von Satz 23.9, wobei wir  $\varepsilon > 0$  nun aber als  $\varepsilon := \min\{\varepsilon'/\text{Vol}(A), \varepsilon'/\text{Vol}(Y)\}$  wählen<sup>4</sup>.

Nach Lemma 23.4(i) sind die Funktionen  $y \mapsto \varphi(y, z)$  und  $y \mapsto \psi(y, z)$  Treppenfunktionen. Wegen der Monotonie des Integrals gilt zudem für alle  $z \in Z$

$$\int_Y \psi(y, z)dy - \int_Y \varphi(y, z)dy < \text{Vol}(Y)\varepsilon \leq \varepsilon',$$

weswegen  $y \mapsto f(y, z)$  nach Satz 23.8 Riemann-integrierbar ist mit

$$\tilde{\varphi}(z) := \int_Y \varphi(y, z)dy \leq \int_Y f(y, z)dy \leq \int_Y \psi(y, z)dy =: \tilde{\psi}(z).$$

Nach Lemma 23.4(ii) sind  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  wieder Treppenfunktionen. Für diese gilt

$$\int_Z \tilde{\psi}(z)dz - \int_Z \tilde{\varphi}(z)dz = \int_A \psi(x) - \varphi(x)dx < \text{Vol}(A)\varepsilon \leq \varepsilon'.$$

<sup>4</sup>Beachte, dass  $\text{Vol}(Y) > \text{Vol}(A)$  gelten kann. Als Beispiel betrachte  $A = [0, 1] \times [0, 1/2]$ ,  $Y = [0, 1]$  und  $Z = [0, 1/2]$ .

Daher ist  $z \mapsto \int_Y f(y, z) dy$  nach Satz 23.8 Riemann-integrierbar. Aus der Monotonie des Integrals und Lemma 23.4(iii) folgt dann

$$\left| \int_A f(x) dx - \int_Z \int_Y f(y, z) dy dz \right| \leq \int_A \psi(x) dx - \underbrace{\int_Z \int_Y \varphi(y, z) dy dz}_{= \int_A \varphi(x) dx} < \varepsilon'$$

und damit die behauptete Gleichung, da  $\varepsilon' > 0$  beliebig war.  $\square$

Analog zu Bemerkung 23.5 gelten die folgenden Anmerkungen.

**Bemerkung 23.12** (i) Da man die Rollen von  $y$  und  $z$  in Satz 23.11 einfach vertauschen kann, gilt die Aussage für festes  $y \in Y$  analog für die Funktionen  $z \mapsto f(y, z)$  und das entsprechende Integral und es folgt

$$\int_Y \int_Z f(y, z) dz dy = \int_A f(x) dx = \int_Z \int_Y f(y, z) dy dz.$$

Wir können die Integrationsreihenfolge also beliebig vertauschen.

(ii) Mehrfache Anwendung des Satzes liefert, dass wir für eine Menge  $A$ , die sich in der Form  $A = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_N$  zerlegen lässt und die zugehörige Vektorzerlegung  $x^T = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T)$ , die Gleichung

$$\int_A f(x) dx = \int_{Y_1} \int_{Y_2} \dots \int_{Y_N} f(y_1, y_2, \dots, y_N) dy_N \dots dy_2 dy_1$$

erhalten. Falls  $A$  ein Quader von der Form  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ist, folgt daraus

$$\int_A f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1,$$

wobei die  $x_i$  jetzt eindimensionale Variablen sind und die Integrale daher reelle Riemann-Integrale sind.  $\square$

Teil (ii) dieser Bemerkung liefert nun eine einfache Möglichkeit, die Integration im  $\mathbb{R}^n$  auf Quadern  $A$  auf die Integration in  $\mathbb{R}$  zurückzuführen. Wir betrachten dazu die folgenden Beispiele.

**Beispiel 23.13** (i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x_1^2 + x_2^2 dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-1}^1 \left( x_1^2 x_2 + \frac{x_2^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^1 2x_1^2 + \frac{2}{3} dx_1 = \frac{2x_1^3}{3} + \frac{2x_1}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(ii) (**Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel**) Die Oberfläche der Halbkugel mit Radius 1 im  $\mathbb{R}^3$  wird durch die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

für alle  $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  mit  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  beschrieben. Setzen wir  $f(x_1, x_2) = 0$  für alle anderen  $x_1, x_2$ , so ist  $f$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger  $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ , also Riemann integrierbar und das Volumen der Halbkugel ist gerade das Volumen unter dem Graphen. Für die Integration können wir einen beliebigen Quader  $A$  mit  $\text{supp}(f) \subset A$  verwenden, wir nehmen hier  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Für jedes feste  $x_1 \in \mathbb{R}$  gilt dann  $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  falls  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  (also  $|x_2| \leq \sqrt{1 - x_1^2}$ ) und  $f(x_1, x_2) = 0$  sonst. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_2 &= \int_{\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} dx_2 \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_1^2-(1-x_1^2)x_2^2} dx_2 \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} dx_2 \\ &= (1-x_1^2) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_2^2} dx_2 \\ &= (1-x_1^2) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

wobei wir hier zunächst eine Substitution mit  $\varphi(x_2) = \sqrt{1-x_1^2}x_2$  durchgeführt haben und dann das Ergebnis aus Beispiel 12.11(v) verwendet haben. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-1}^1 (1-x_1^2) \frac{\pi}{2} dx_1 = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 1-x_1^2 dx_1 \\ &= \frac{\pi}{2} \underbrace{(x_1 - x_1^3/3)|_{-1}^1}_{=2/3 - (-2/3) = 4/3} = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Das Volumen der gesamten Kugel beträgt also  $\frac{4}{3}\pi$ . □

**Bemerkung 23.14** Definition 23.7 erlaubt bisher nur die Integration auf Gebieten  $A$ , die in Quader zerlegt werden können. Der Satz von Fubini gibt nun die Möglichkeit, ein Integral auch auf den folgenden induktiv definierten allgemeineren Mengen zu definieren.

Sei  $Y_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ . Für jedes  $y_1 \in Y_1$  sei eine Menge  $Y_2(y_1) \subset \mathbb{R}^{n_2}$  gegeben, für jedes Paar  $(y_1, y_2)$  mit  $y_1 \in Y_1$  und  $y_2 \in Y_2(y_1)$  eine Menge  $Y_3(y_1, y_2) \subset \mathbb{R}^{n_3}$  gegeben usw. Für  $N$  solcher nacheinander definierten Mengen und  $n = n_1 + \dots + n_N$  definieren wir dann

$$A := \{(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^n \mid y_k \in Y_k(y_1, \dots, y_{k-1}) \text{ für alle } k = 1, \dots, N\}.$$

Für  $x^T = (y_1^T, \dots, y_N^T)$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir das Integral dann als

$$\int_A f(x) dx := \int_{Y_1} \int_{Y_2(y_1)} \dots \int_{Y_N(y_1, \dots, y_{N-1})} f(y_1, y_2, \dots, y_N) dy_N \dots dy_2 dy_1.$$

Falls  $A$  in Quader zerlegt werden kann, ist dies nach dem Satz von Fubini genau das Integral aus Definition 23.7, allerdings können wir auf die obige Art viele weitere Mengen (z.B. Kreise im  $\mathbb{R}^2$  mittels  $n_1 = n_2 = 1$  und  $Y_1 = [-1, 1]$ ,  $Y_2(y_1) = [-\sqrt{1 - y_1^2}, \sqrt{1 - y_1^2}]$ ) darstellen und dann über diese integrieren. Ähnlich wie im Beweis von Satz 23.9 zeigt man, dass dieses Integral z.B. dann existiert, wenn  $A$  kompakt und  $f$  stetig ist.

Die Integration auf noch allgemeineren Mengen werden wir im folgenden Kapitel im Rahmen des Lebesgue-Integrals betrachten.  $\square$

## 23.4 Integrale über Teilargumente

Im Satz von Fubini treten Integrale auf, die nur über einen Teil der Funktionsargumente gebildet werden. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die durch solche Integrale definiert werden. Dazu betrachten wir Funktionen der Form

$$f : A \times D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \quad (23.3)$$

mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $A$  sei dabei stets eine Quader-zerlegbare, also insbesondere kompakte Menge, über der wir also im Riemann-Sinn integrieren können.

Ziel ist es nun, Aussagen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : y \mapsto \int_A f(x, y) dx \quad (23.4)$$

zu machen.

Für beide Eigenschaften beweisen wir zunächst ein Hilfslemma und dann den entsprechenden Satz.

**Lemma 23.15** Sei  $f$  aus (23.3) stetig und sei  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $D$  mit  $y^* := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in D$ . Dann konvergieren die Funktionen

$$F_k : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(x) := f(x, y_k)$$

gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $F(x) := f(x, y^*)$ .

**Beweis:** Nach Satz 19.4 ist die Menge

$$M := \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{y^*\}$$

kompakt. Da  $A$  ebenfalls kompakt ist, ist auch  $A \times M$  kompakt (Übungsaufgabe).

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir müssen ein  $K(\varepsilon) > 0$  finden, so dass  $|F_k(x) - F(x)| < \varepsilon$  gilt für alle  $k \geq K(\varepsilon)$  und alle  $x \in A$ . Da  $f$  stetig ist, ist  $f$  auf  $A \times M$  gleichmäßig stetig. Folglich existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\|(x, y) - (x', y')\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$



Ist nun  $K(\varepsilon)$  so groß gewählt, dass  $\|y_k - y^*\|_\infty < \delta$  gilt für alle  $k \geq K(\varepsilon)$ , so folgt  $\|(x, y_k) - (x, y^*)\|_\infty = \|y_k - y^*\|_\infty < \delta$  und damit für alle  $k \geq K(\varepsilon)$  und alle  $x \in A$

$$|F_k(x) - F(x)| = |f(x, y_k) - f(x, y^*)| < \varepsilon,$$

also die gesuchte Eigenschaft.  $\square$

**Satz 23.16** Sei  $f$  aus (23.3) stetig. Dann ist die Funktion  $g$  aus (23.4) ebenfalls stetig.

**Beweis:** Sei  $y \in D$  beliebig und  $y_k \rightarrow y$  eine Folge in  $D$ . Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 23.15

$$g(y_k) = \int_A F_k(x) dx \quad \text{und} \quad g(y) = \int_A F(x) dx.$$

Nach Satz 14.13, der im  $\mathbb{R}^n$  ebenfalls gilt und genauso wie in  $\mathbb{R}$  bewiesen wird und der wegen der gemäß Lemma 23.15 geltenden gleichmäßigen Konvergenz angewendet werden kann, können wir nun Grenzwertbildung und Integration vertauschen. Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A F_k(x) dx = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) dx = \int_A F(x) dx = g(y)$$

und damit die behauptete Stetigkeit in  $y$ .  $\square$

Nun untersuchen wir die Differenzierbarkeit von  $g$  aus (23.4). Wiederum formulieren wir zunächst eine Hilfsaussage.

**Lemma 23.17** Sei  $f$  wie in (23.3). Für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f$  stetig partiell differenzierbar nach  $y_j$  auf  $D$ . Sei  $y \in D$  und  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle Nullfolge mit  $h_k \neq 0$  und  $y_k := y + h_k e_j \in D$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , wobei  $e_j$  den  $j$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$F_k : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(x) := \frac{f(x, y_k) - f(x, y)}{h_k}$$

gleichmäßig gegen die Funktion

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y).$$

**Beweis:** Wir schreiben kurz  $D_j f(x, y) := \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $D$  offen ist, existiert ein  $\eta > 0$  mit  $\overline{B}_\eta(y) \subset D$ . Da  $D_j f$  stetig ist auf  $A \times D$  ist die Funktion gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge  $A \times \overline{B}_\eta(y)$ . Es existiert also ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in A$  und alle  $y' \in \overline{B}_\eta(y)$  gilt

$$\|(x, y) - (x', y')\|_\infty < \delta \Rightarrow |D_j f(x, y) - D_j f(x', y')| < \varepsilon.$$

O.B.d.A. können wir  $\delta \leq \eta$  wählen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$  angewendet auf die reelle Funktion  $h \mapsto f(x, y + h e_j)$  existiert nun für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein  $\theta_k \in [0, 1]$  mit

$$F_k(x) = D_j f(x, y + \theta_k h_k e_j).$$

Sei nun  $K(\varepsilon)$  so groß, dass  $|h_k| < \delta$  gilt für alle  $k \geq K(\varepsilon)$ . Dann gilt auch  $\|(y + \theta_k h_k e_j) - y\|_\infty \leq |h_k| < \delta$ , damit insbesondere  $y + \theta_k h_k e_j \in \overline{B}_\eta(y)$  und es folgt für jedes  $x \in A$

$$|F(x) - F_k(x)| = |D_j f(x, y) - D_j f(x, y + \theta_k h_k e_j)| < \varepsilon$$

und damit die gleichmäßige Konvergenz.  $\square$

**Satz 23.18** Sei  $f$  wie in (23.3). Für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f$  stetig partiell differenzierbar nach  $y_j$  auf  $D$ . Dann ist  $g$  aus (23.4) stetig partiell differenzierbar nach  $y_j$  und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y_j} g(y) = \frac{\partial}{\partial y_j} \int_A f(x, y) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial y_j} f(x, y) dx.$$

Wir dürfen die Reihenfolge von Integration und Differentiation also vertauschen bzw. “unter dem Integral ableiten”.

**Beweis:** Wir wählen  $F_k$ ,  $F$ ,  $h_k$  und  $y_k$  wie in Lemma 23.17. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $F_k$  gegen  $F$  gilt nach Satz 14.13

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A F_k(x) dx = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) dx = \int_A F(x) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial y_j} f(x, y) dx.$$

Insbesondere existiert also der Grenzwert auf der linken Seite dieser Gleichung. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} \int_A F_k(x) dx &= \int_A \frac{f(x, y_k) - f(x, y)}{h_k} dx \\ &= \frac{1}{h_k} \left( \int_A f(x, y_k) dx - \int_A f(x, y) dx \right) = \frac{g(y + h_k e_j) - g(y)}{h_k}. \end{aligned}$$

Folglich existiert für jede Nullfolge  $h_k$  mit  $h_k \neq 0$  der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y + h_k e_j) - g(y)}{h_k},$$

also die Ableitung der Funktion  $g_j(h) := g(y + h e_j)$  in  $h = 0$ . Dies ist genau die Funktion aus der Definition aus der partiellen Ableitung  $\partial g / \partial y_j(y)$ , weswegen diese existiert und die behauptete Gleichung erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 23.19** Durch Anwendung von Satz 23.18 auf die Komponenten der Ableitung  $D_y g$  (vgl. (20.5)) folgt die Gleichung

$$D_y \int_A f(x, y) dx = \int_A D_y f(x, y) dx,$$

falls die Voraussetzungen von Satz 23.18 für alle  $j = \{1, \dots, n\}$  erfüllt sind, was genau dann der Fall ist, wenn  $D_y f(x, y)$  für alle  $(x, y) \in A \times D$  existiert und stetig ist.  $\square$

**Beispiel 23.20** Wir wollen das (reelle) Integral

$$\int_0^b x^2 \cos x \, dx$$

berechnen. Das kann man mit zweimaliger partieller Integration machen (was eine Menge Rechnung erfordert), man kann aber auch Satz 23.18 geschickt anwenden:

Betrachte die Funktion

$$g(y) := \int_0^b \cos(xy) \, dx$$

für  $y \in D = (1/2, 2)$ . Da  $\sin(xy)/y$  Stammfunktion zu  $\cos(xy)$  ist (bezüglich der Variablen  $x$ ), können wir dieses Integral ausrechnen als

$$g(y) = \int_0^b \cos(xy) \, dx = \frac{\sin(xy)}{y} \Big|_0^b = \frac{\sin(by)}{y}.$$

Nach Satz 23.18 mit  $A = [0, b]$  gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial y} g(y) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} \cos(xy) \, dx = - \int_0^b x \sin(xy) \, dx.$$

Da der Integrand wieder stetig differenzierbar nach  $y$  ist, können wir Satz 23.18 noch einmal anwenden und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} g(y) = - \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} x \sin(xy) \, dx = - \int_0^b x^2 \cos(xy) \, dx$$

und damit

$$\int_0^b x^2 \cos x \, dx = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} g(1) = -g''(1).$$

Wegen  $g(y) = \sin(by)/y$  folgt nun

$$g'(y) = -\frac{\sin(by)}{y^2} + \frac{b \cos(by)}{y}$$

und

$$g''(y) = \frac{2 \sin(by)}{y^3} - \frac{2b \cos(by)}{y^2} - \frac{b^2 \sin(by)}{y}$$

und damit

$$\int_0^b x^2 \cos x \, dx = -2 \sin b + 2b \cos b + b^2 \sin b.$$

□

# Kapitel 24

## Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

Stand:

Genau wie im vorhergehenden Abschnitt das Riemann-Integral werden wir nun das Lebesgue-Integral auf den  $\mathbb{R}^n$  — d.h. auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  — erweitern. Schaut man sich die Konstruktion des Lebesgue-Integrals in  $\mathbb{R}$  an, so sieht man, dass man dazu drei Begriffe benötigt.

- Treppenfunktionen — diese haben wir bereits im letzten Kapitel definiert
- Monotone Konvergenz — diese kann man genau wie auf  $\mathbb{R}$  definieren, da ja nur die Werte der Funktionen monoton sein müssen und diese nach wie vor in  $\mathbb{R}$  liegen
- Nullmengen — diese müssen wir nun auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern.

### 24.1 Nullmengen im $\mathbb{R}^n$

Die Definition der Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$  ist völlig analog zu der in  $\mathbb{R}$  (vgl. Definition 15.1), wenn wir die dortigen Intervalle durch Quader ersetzen.

**Definition 24.1** Eine Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Lebesgue-Nullmenge* (im Folgenden kurz *Nullmenge* genannt), falls für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abzählbare Menge von Quadern  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$  existiert mit

$$N \subset \bigcup_{k=0, \dots, \infty} \text{int } Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \text{Vol}(Q_k) \leq \varepsilon.$$

□

Wie bisher sagen wir nun, dass eine Aussage *fast überall* auf einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  gilt, wenn eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  existiert, so dass die Aussage für alle  $x \in M \setminus N$  gilt.

Ganz analog wie in  $\mathbb{R}$  beweist man die folgenden Aussagen.

**Satz 24.2** (i) Jede endliche und jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge.

- (ii) Die Vereinigung  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$  von abzählbar vielen Nullmengen  $N_0, N_1, N_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$  ist wieder eine Nullmenge.
- (iii) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
- (iv) Eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  kann keine offene Menge  $O \subset \mathbb{R}^n$  enthalten.

**Beweis:** (i)-(iii) Folgen völlig analog zu den Beweisen in  $\mathbb{R}$ .

(iv) Da  $O$  offen ist, gibt es ein  $x \in O$  und ein  $\delta > 0$ , so dass  $M := \overline{B}_\delta(x) \subset O$  gilt. Wählen wir die Norm hier als  $\infty$ -Norm, so ist dieser Ball ein Quader mit Kantenlänge  $2\delta$  und besitzt daher das Volumen  $\text{Vol}(M) = (2\delta)^n$ . Ist nun eine Überdeckung von  $N$  durch Quader  $Q_k$  gegeben, so überdecken die Mengen  $\text{int } Q_k$  insbesondere die Menge  $M$  und da  $M$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, die wir mit  $Q_0, Q_1, \dots, Q_p$  bezeichnen. Das summierte Volumen dieser Quader muss nun mindestens so groß wie das Volumen  $\text{Vol}(M)$  sein, weswegen das Gesamtvolumen aller  $Q_k$  mindestens  $(2\delta)^n$  betragen muss und daher nicht kleiner als jedes  $\varepsilon > 0$  sein kann.  $\square$

**Beispiel 24.3** (i) Jede Menge der Form

$$N := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

mit  $a_i \leq b_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $a_{i_0} = b_{i_0}$  für mindestens ein  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  (ein sogenannter *flacher* oder *degenerierter* Quader) ist eine Nullmenge, denn:

Wir können  $N$  stets durch das Innere des Quaders

$$Q := [a_1 - \varepsilon'/2, b_1 + \varepsilon'/2] \times \dots \times [a_n - \varepsilon'/2, b_n + \varepsilon'/2]$$

überdecken, welcher für alle  $\varepsilon' \in (0, 1)$  das Volumen

$$\prod_{i=0}^n (b_i - a_i + \varepsilon') \leq \underbrace{\left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n (b_i - a_i + 1) \right)}_{=: C} (b_{i_0} - a_{i_0} + \varepsilon') = C\varepsilon'$$

besitzt. Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir also die gesuchte Überdeckung (mit nur einem Quader), wenn wir  $\varepsilon' = \varepsilon/C$  setzen.

(ii) Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  und  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  ist die Hyperebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{i_0} = c\}$$

eine Nullmenge, da diese Menge aus den abzählbar vielen flachen Quadern

$$Q = [a_1, a_1 + 1] \times \dots \times [a_{i_0-1}, a_{i_0-1} + 1] \times [c, c] \times [a_{i_0+1}, a_{i_0+1} + 1] \times \dots \times [a_n, a_n + 1]$$

für  $a_i \in \mathbb{Z}$  besteht.

(iii) Die Menge aller Sprungstellen einer Treppenfunktion ist eine Nullmenge, da sie aus endlich vielen Quaderrändern besteht, welche flache Quader und damit gemäß (i) Nullmengen sind.  $\square$

Beispiel (iii) zeigt, dass es im Sinne der Konvergenz fast überall nun wieder egal ist, welchen Wert eine Treppenfunktion am Rand der Quaderzerlegung annimmt. Es reicht also im Folgenden, eine Treppenfunktion durch ihre Werte auf  $\text{int } Q_k$  zu definieren, da wir eine solche Funktion durch Abändern der Werte auf einer Nullmenge stets in eine auf den Mengen  $Q_k^*$  konstante Funktion umwandeln können.

## 24.2 Das Lebesgue-Integral für Borel-messbare Funktionen

Analog zu der Definition in  $\mathbb{R}$  definieren wir zunächst das folgende Integral.

**Definition 24.4** (Lebesgue Integral für Borel-messbare Funktionen) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Mit  $L_B^+(A)$  (bzw.  $L_B^-(A)$ ) definieren wir die Menge der Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , für die eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k \in T(A)$  mit beschränkter Integralfolge existiert mit  $\varphi_k \nearrow f$  (bzw.  $\varphi_k \searrow f$ ) für  $k \rightarrow \infty$ .

Das *Lebesgue-Integral* für  $f \in L_B^+(A)$  bzw.  $f \in L_B^-(A)$  definieren wir dann als

$$\int_A f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k(x) dx.$$

(ii) Wir definieren die Menge  $L_B(A)$  der *Lebesgue-integrierbaren Borel-messbaren Funktionen* als die Menge aller Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich als Summe  $f = g + h$  mit  $g \in L_B^+(A)$  und  $h \in L_B^-(A)$  schreiben lässt.

Das *Lebesgue-Integral* für ein  $f \in L_B(A)$  ist dann gegeben durch

$$\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx + \int_A h(x) dx,$$

□

Alle Eigenschaften des Lebesgue-Integrals in  $\mathbb{R}$  — insbesondere die Konvergenzsätze aus Abschnitt 16.2 — übertragen sich damit auf das Lebesgue-Integral in  $\mathbb{R}^n$ . Beachte, dass wir hier im Gegensatz zum Riemann-Integral auch  $A = \mathbb{R}^n$  zulassen können. Allerdings haben wir auch hier das Problem, dass wir zunächst nur über Mengen  $A$  integrieren können, auf denen wir Treppenfunktionen definieren können. Dieses Problem lösen wir im folgenden Abschnitt.

## 24.3 Borel-messbare Mengen

Wir erinnern zunächst an die folgende Definition und Eigenschaft aus den Bemerkungen 15.3 und 16.12, die wir hier in den  $\mathbb{R}^n$  übertragen:

Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ , heißt *Borel-messbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen  $\vartheta_k \in T(A)$  gibt, die fast überall gegen  $f$  konvergiert. Die Menge dieser Funktionen wird mit  $B(A)$  bezeichnet.

Gegeben sei eine Borel-messbare Funktion  $f \in B(A)$ , für die ein  $g \in L_B(A)$  existiert mit  $|f| \leq g$  fast überall. Dann gilt  $f \in L_B(A)$ .

**Definition 24.5** (i) Zu einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir die *charakteristische Funktion*  $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

(ii) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt Borel-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion  $\chi_A$  in  $L_B(\mathbb{R}^n)$  liegt.  $\square$

Anschaulich kann man sich Borel-messbare Mengen als Mengen vorstellen, die durch Vereinigungen von (beliebig vielen und beliebig kleinen) Quadern beliebig gut approximiert werden können. Für diese Mengen gilt der folgende Satz.

**Satz 24.6** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Borel-messbare und beschränkte Menge. Dann ist  $\chi_A \in L_B(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Wenn  $A$  beschränkt ist, existiert ein Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \subset Q$ . Die Treppenfunktion mit  $\varphi(x) = 1$  auf  $Q$  und  $\varphi(x) = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus Q$  ist dann integrierbar und erfüllt  $|\chi_A| \leq \varphi$  auf dem ganzen  $\mathbb{R}^n$ . Folglich ist  $\chi_A$  integrierbar und Borel-messbar.  $\square$

**Definition 24.7** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Borel-messbare Menge. Falls  $\chi_A \in L_B(A)$  gilt, setzen wir

$$\text{Vol}(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx.$$

Andernfalls setzen wir  $\text{Vol}(A) := \infty$ .  $\square$

Die Wahl “ $\text{Vol}(A) = \infty$ ” für  $\chi_A \notin L_B(\mathbb{R}^n)$  ist durch die folgende Beobachtung motiviert: Für  $R > 0$  betrachte die Quader  $Q_R := [-R, R] \times \dots \times [-R, R]$ . Falls  $A$  Borel-messbar ist, ist  $A \cap Q_R$  ebenfalls Borel-messbar (indem man die Treppenfunktionen  $\vartheta_k \rightarrow \chi_A$  außerhalb von  $Q_R$  auf 0 setzt) und  $\text{Vol}(A \cap Q_R)$  ist endlich, weil  $A \cap Q_R$  beschränkt ist. Für eine monoton wachsende Folge  $R_k \rightarrow \infty$  ist  $\text{Vol}(A \cap Q_{R_k})$  nun monoton wachsend. Wäre diese Folge beschränkt, so wäre  $\chi_A$  nach Satz 16.8 (den wir mit  $Q_{R_k}$  an Stelle von  $I_k$  in den  $\mathbb{R}^n$  übertragen können) aus  $L_B(\mathbb{R}^n)$ . Falls also  $\chi_A \notin L_B(\mathbb{R}^n)$  gilt, wächst die Folge  $\text{Vol}(A \cap Q_{R_k})$  unbeschränkt für  $R_k \rightarrow \infty$ , was die Definition  $\text{Vol}(A) = \infty$  rechtfertigt.

Die Integration auf beliebigen Borel-messbaren Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist nun wie folgt definiert.

**Definition 24.8** Sei  $f \in L_B(D)$  für ein  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $A \subset D$  eine Borel-messbare Menge. Dann definieren wir

$$\int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f(x) dx$$

mit der Konvention  $\chi_A(x) f(x) := 0$  für  $x \notin D$ .  $\square$

Beachte, dass dieses Integral wohldefiniert ist, dass also  $\chi_A f \in L_B(\mathbb{R}^n)$  liegt, weil das Produkt zweier Borel-messbarer Funktionen Borel-messbar ist (was man leicht mit dem Produkt der Treppenfunktionen nachprüft) und  $|\chi_A f| \leq g$  ist mit der integrierbaren Funktion  $g(x) := |f(x)|$  für  $x \in D$  und  $g(x) := 0$  sonst.

Die Definition des Volumens erlaubt uns nun auch, die Nullmengen auf eine alternative Weise zu charakterisieren.

**Satz 24.9** Eine Menge  $N$  ist genau dann eine Nullmenge, falls sie Borel-messbar ist mit  $\text{Vol}(N) = 0$ .

**Beweis:** Sei  $N$  eine Nullmenge. Dann ist  $\chi_N(x) = 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und ist damit nach Satz 16.1 fast überall gleich  $f \equiv 0$  und damit integrierbar — also insbesondere Borel-messbar — mit

$$\text{Vol}(N) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0.$$

Sei umgekehrt  $N$  Borel-messbar mit  $\text{Vol}(N) = 0$ . Dann folgt wegen  $\chi_N \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_N(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x) dx = \text{Vol}(N) = 0$$

und damit aus Satz 16.7, dass  $\chi_N$  fast überall gleich Null ist. Folglich ist  $N$  eine Nullmenge.  $\square$

## 24.4 Lebesgue-messbare Mengen und allgemeines Lebesgue-Integral

Man kann die Menge an messbaren Mengen und der integrierbaren Funktionen durch die folgende Konstruktion noch einmal deutlich vergrößern. Wir skizzieren die Vorgehensweise hierbei nur und verweisen auf das Buch Analysis 3 von O. Forster [4] für Einzelheiten.

**Definition 24.10** Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt Lebesgue-messbar, falls zwei Borel-messbare Mengen  $A_*$ ,  $A^*$  mit  $A_* \subset A \subset A^*$  existieren, so dass  $\text{Vol}(A^* \setminus A_*) = 0$  gilt (was äquivalent ist zu  $\text{Vol}(A_*) = \text{Vol}(A^*)$ ). Wir definieren dann  $\text{Vol}(A) := \text{Vol}(A^*)$ .  $\square$

Man kann zeigen, dass diese Definition viel mehr Mengen umfasst als die Borel-messbaren Mengen. Mit diesen Mengen kann man nun Treppenfunktionen auf allgemeineren Mengen als Quadern definieren.

**Definition 24.11** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Elementarfunktion*, falls es Lebesgue-messbare Mengen  $A_1, \dots, A_q \subset A$  und reelle Zahlen  $c_1, \dots, c_q$  gibt mit

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^q c_k \chi_{A_k}(x).$$

(ii) Das Lebesgue-Integral einer Elementarfunktion ist gegeben durch

$$\int_A \phi(x) dx := \sum_{k=1}^q \text{Vol}(A_k) c_k.$$

$\square$



Mit diesen Elementarfunktionen können wir nun das allgemeine Lebesgue-Integral im  $\mathbb{R}^n$  definieren.

**Definition 24.12** (Lebesgue Integral) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Mit  $L^+(A)$  (bzw.  $L^-(A)$ ) definieren wir die Menge der Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , für die eine Folge von Elementarfunktionen  $\phi_k$  mit beschränkter Integralfolge existiert mit  $\phi_k \nearrow f$  (bzw.  $\phi_k \searrow f$ ) für  $k \rightarrow \infty$ .

Das *Lebesgue-Integral* für  $f \in L^+(A)$  bzw.  $f \in L^-(A)$  definieren wir dann als

$$\int_A f(x)dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \phi_k(x)dx.$$

(ii) Wir definieren die Menge  $L(A)$  der *Lebesgue-integrierbaren Funktionen* als die Menge aller Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich als Summe  $f = g + h$  mit  $g \in L^+(A)$  und  $h \in L^-(A)$  schreiben lässt.

Das *Lebesgue-Integral* für ein  $f \in L(A)$  ist dann gegeben durch

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx + \int_A h(x)dx,$$

□

Alle Eigenschaften des Lebesgue-Integrals für Borel-messbare Funktionen übertragen sich auf das allgemeine Lebesgue-Integral.

## 24.5 Der Satz von Fubini

Wir wollen in diesem Abschnitt beweisen, dass der Satz von Fubini nicht nur für stetige Funktionen im Riemann-Sinne gilt (vgl. Satz 23.11) sondern auch für alle Lebesgue-integrierbaren Funktionen im Lebesgue-Sinne. Der Beweis wird sich als nicht besonders schwierig herausstellen, benötigt aber bisher noch nicht bewiesene Eigenschaften von Nullmengen, die wir zunächst in zwei Lemmata formulieren und beweisen.

Die erste Aussage zeigt eine Eigenschaft von Treppenfunktionen und Nullmengen.

**Lemma 24.13** Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge. Dann existiert eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k \in T(\mathbb{R}^n)$  mit beschränkter Integralfolge und  $\varphi_k(x) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  und jedes  $x \in N$ .

**Beweis:** Für alle  $j \in \mathbb{N}$  sei  $\{Q_{j,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$  eine Quaderüberdeckung von  $N$  mit Volumensumme  $< 1/2^j$ . Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Überdeckungen unendlich viele Quader enthalten (falls nicht, ergänzen wir unendlich viele hinreichend kleine Quader). Sei

$$P_{j,m_1,m_2} := \bigcup_{k=m_1, \dots, m_2-1} Q_{j,k}.$$

und  $P_j := \bigcup_{k \geq 0} Q_{j,k}$ . Wir wählen nun für jedes  $j \in \mathbb{N}$  Indizes  $m_j(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit  $m_j(k+1) > m_j(k)$  und

$$\text{Vol}(P_{j,0,m_j(k)}) \geq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \text{Vol}(P_j).$$

Setzen wir zusätzlich  $m_j(0) = 0$ , so folgt

$$\text{Vol}(P_{j,m_j(k),m_j(k+1)}) \leq \frac{1}{2^k} \text{Vol}(P_j) = \frac{1}{2^{k+j}}$$

für alle  $j, k \in \mathbb{N}$ . Jetzt definieren wir für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Mengen

$$M_k := \bigcup_{j=0}^k P_{j,m_j(k-j),m_j(k-j+1)}.$$

Für diese gilt

$$\text{Vol}(M_k) \leq \sum_{j=0}^k \underbrace{\text{Vol}(P_{j,m_j(k-j),m_j(k-j+1)})}_{\leq \frac{1}{2^{k-j+j}} = \frac{1}{2^k}} \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^k} = \frac{k+1}{2^k}.$$

Zudem existieren für jedes  $x \in N$  beliebig große Indizes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $x \in M_k$ , denn für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existiert ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $x \in P_{j,m_j(l),m_j(l+1)}$  und damit gilt  $x \in M_k$  für  $k = j + l$ .

Definieren wir nun induktiv Treppenfunktionen mittels  $\varphi_0 := 0$  und

$$\varphi_{k+1}(x) := \begin{cases} 2^{k/2}/(k+1), & x \in M_{k+1} \\ \varphi_k(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

so gilt für jedes  $x \in N$  einerseits  $x \in M_k$  für beliebig große  $k$  und damit  $\varphi_k(x) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  wegen  $2^{k/2}/(k+1) \rightarrow \infty$ . Andererseits gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx \leq \sum_{j=0}^k \frac{2^{j/2}}{j+1} \text{Vol}(M_j) \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{j/2}} = \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j =: C < \infty,$$

da diese geometrische Reihe wegen  $1/\sqrt{2} < 1$  konvergiert. Also besitzen die  $\varphi_k$  eine durch dieses  $C$  beschränkte Integralfolge.  $\square$

Die folgende Aussage zeigt, dass wir Nullmengen im  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$  gemäß der Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$  mit  $x = (y, z)$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^s$ , zerlegen können.

**Lemma 24.14** Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge und  $p + s = n$ . Dann existiert eine Nullmenge  $N_Y \subset \mathbb{R}^p$ , so dass die Menge

$$N_Z(y) := \{z \in \mathbb{R}^s \mid (y, z) \in N\}$$

für alle  $y \in \mathbb{R}^p \setminus N_Y$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^s$  ist.

**Beweis:** Betrachte die Treppenfunktionen  $\varphi_k$  aus Lemma 24.13. Nach Lemma 23.4(ii) sind

$$\psi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_k(y, z) dz$$

Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^p$ , die wegen der Monotonie von  $\varphi_k$  ebenfalls monoton wachsen. Nach Lemma 23.4(iii) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p} \psi_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx,$$

weswegen die  $\psi_k$  eine beschränkte Integralfolge besitzen und damit nach dem Satz von Beppo Levi eine Nullmenge  $N_Y \subset \mathbb{R}^p$  existiert, so dass  $\psi_k$  für alle  $y \in \mathbb{R}^p \setminus N_Y$  gegen eine Funktion  $f \in L(\mathbb{R}^p)$  konvergiert.

Betrachte nun ein beliebiges  $y \in \mathbb{R}^p \setminus N_Y$ . Da  $\psi_k(y) = \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_k(y, z) dz$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $f(y)$  konvergiert, besitzt die Funktion  $z \mapsto \varphi_k(y, z)$  also eine beschränkte Integralfolge und konvergiert wiederum nach dem Satz von Beppo Levi außerhalb einer Nullmenge  $N(y) \subset \mathbb{R}^s$  gegen eine Funktion  $g \in L(\mathbb{R}^s)$ . Für alle  $z \in \mathbb{R}^s \setminus N(y)$  ist  $\varphi_k(y, z)$  also für  $k \rightarrow \infty$  beschränkt, weswegen  $(y, z) \notin N$  gilt, woraus  $N_Z(y) \subset N(y)$  folgt. Also ist  $N_Z(y)$  für alle  $y \in \mathbb{R}^n \setminus N_Y$  als Teilmenge der Nullmenge  $N(y)$  auch eine Nullmenge.  $\square$

Nun können wir den Satz von Fubini formulieren und beweisen.

**Satz 24.15 (Satz von Fubini für das Lebesgue-Integral)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine messbare Menge der Form  $A = Y \times Z$  mit messbaren Mengen  $Y \subset \mathbb{R}^p$  und  $Z \subset \mathbb{R}^s$ . Sei  $f \in L(A)$ . Dann ist das Integral

$$g(y) := \int_Z f(y, z) dz$$

für fast alle  $y \in Y$  definiert. Die dadurch definierte<sup>1</sup> Funktion erfüllt  $g \in L(Y)$  und es gilt

$$\int_A f(x) dx = \int_Y g(y) dy = \int_Y \int_Z f(y, z) dz dy.$$

**Beweis:** Es genügt, den Satz für  $A = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^p$  und  $Z = \mathbb{R}^s$  zu beweisen, da wir ihn dann für allgemeine messbare Mengen auf  $\chi_A(x)f(x) = \chi_Y(y)\chi_Z(z)f(y, z)$  anwenden können. Ebenfalls genügt es, den Satz für  $f \in L^+(A)$  zu beweisen, da er für  $f \in L^-(A)$  analog zu beweisen ist und für  $f \in L(A)$  sofort durch Anwendung auf  $g$  und  $h$  aus der Zerlegung  $f = g + h$  folgt.

Wir beweisen den Satz zunächst für  $f \in L_B^+(A)$ . Sei also  $f \in L^+(A)$  und seien  $\varphi_k \nearrow f$  die fast überall monoton gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen mit  $\int_A f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k(x) dx$ . Betrachte die Treppenfunktion  $\psi_k(y) := \int_Z \varphi_k(y, z) dz$ , für die nach Lemma 23.4(iii) die Gleichung

$$\int_Y \psi_k(y) dy = \int_A \varphi_k(x) dx$$

gilt. Da die  $\varphi_k$  monoton sind und beschränkte Integralfolge besitzen, gilt dies auch für die  $\psi_k$ . Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert  $\psi_k$  also für fast alle  $y \in Y$  gegen ein  $\tilde{g} \in L^+(Y)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \psi_k(y) dy = \int_Y \tilde{g}(y) dy$ .

<sup>1</sup>Für alle  $y \in Y$ , für die das Integral in der Definition von  $g(y)$  nicht existiert, setzen wir  $g(y) := 0$ . Beachte, dass diese  $y$  eine Nullmenge bilden, weswegen dies keinen Einfluss auf den Integralwert hat.

Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  nun die Nullmenge, auf der die monotone Konvergenz  $\varphi_k \nearrow f$  nicht gilt und seien  $N_Y$  und  $N_Z(y)$  die zugehörigen Mengen aus Lemma 24.14. Dann konvergiert die Treppenfunktion  $z \mapsto \varphi_k(y, z)$  für alle  $y \notin N_Y$  und für alle  $z \notin N_Z(y)$  monoton gegen  $z \mapsto f(y, z)$ . Folglich ist  $g$  wie im Satz angegeben tatsächlich fast überall definiert. Zudem stimmt  $g$  fast überall auf  $Y$  mit  $\tilde{g} \in L^+(Y)$  überein, liegt daher ebenfalls in  $L^+(Y)$  und kann integriert werden mit

$$\int_Y g(y)dy = \int_Y \tilde{g}(y)dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \psi_k(y)dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \int_Z \varphi_k(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Für den allgemeinen Fall  $f \in L^+(A)$  beachte, dass jede Elementarfunktion  $\psi$  durch eine Funktion in  $L_B^+(A)$  ersetzt werden kann, die sich nur auf einer Nullmenge  $N$  von  $\psi$  unterscheidet und das gleiche Lebesgue-Integral besitzt. Indem wir diese Nullmenge wieder mittels Lemma 24.14 zerlegen, folgt, dass der Satz von Fubini für Elementarfunktionen gilt. Über die Grenzwertbildung folgt der Satz dann auch für  $f \in L^+(A)$ .  $\square$

Die Bemerkung 23.12 gilt nun ebenfalls für das Lebesgue-Integral und erlaubt insbesondere die Aufteilung eines Lebesgue-Integrals im  $\mathbb{R}^n$  in  $n$  eindimensionale Lebesgue-Integrale. Ebenso gelten für die Teilintegrale die Sätze 23.16 und 23.18, indem man Satz 14.13 im Beweis durch den Satz von Lebesgue (Satz 16.9) ersetzt. Diese Sätze gelten dann auf beliebigen messbaren Mengen, wenn wir Lebesgue-Integrierbarkeit bzgl.  $x$  (für alle  $y$ ) und Stetigkeit bzw. stetige partielle Differenzierbarkeit bzgl.  $y$  (für alle  $x$ ) voraussetzen, wobei die Stetigkeit von  $f$  bzw. der partiellen Ableitung gleichmäßig in  $(x, y) \in A \times K$  für kompakte Teilmengen  $K \subset D$  gelten muss.

## 24.6 Die Transformationsformel

Eine der wichtigsten Regeln zur Berechnung von Integralen in  $\mathbb{R}$  ist die Substitutionsformel. Unter den Voraussetzungen von Satz 12.10 gilt die Formel

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Wir geben nun — aus Zeitgründen ohne kompletten Beweis — die entsprechende Formel für den  $\mathbb{R}^n$  an, die hier ebenfalls Substitutionsformel, öfter aber *Transformationsformel* genannt wird.

**Satz 24.16 (Transformationsatz)** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  eine invertierbare Funktion. Sei  $A \subset U$  eine messbare Menge und  $f \in L(\Phi(A))$ . Dann liegt  $f \circ \Phi | \det(D\Phi)| \in L(A)$  und es gilt

$$\int_A f(\Phi(x)) | \det(D\Phi(x)) | dx = \int_{\Phi(A)} f(y) dy.$$

Die hier angegebene Version dieses Satzes findet sich so im Buch Analysis 3 von O. Forster [4, §13]; andere Bücher geben andere Formulierungen mit zum Teil etwas anderen Voraussetzungen (so kann man statt der Invertierbarkeit Injektivität und  $\det(D\Phi(x)) \neq 0$  für

alle  $x \in U$  voraussetzen). Der Beweis ist im allgemeinen Fall recht kompliziert. Um aber zumindest die Idee zu erläutern, betrachten wir den Fall  $n = 2$ ,  $U = A = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  eine Treppenfunktion aus  $T(\mathbb{R}^2)$  und  $\Phi(x) = Bx$  für eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit  $\det(B) \neq 0$ . In diesem Fall ist  $\Phi$  also eine lineare Abbildung und es gilt  $D\Phi(x) = B$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Die Funktion  $f \circ \Phi$  ist dann konstant gleich  $c_k$  auf  $\text{int } P_k$  für die Mengen

$$P_k := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Bx \in Q_k\}$$

für die Rechtecke  $Q_k = [a_{k1}, b_{k1}] \times [a_{k2}, b_{k2}]$  der zu  $f$  gehörigen Quaderzerlegung  $\mathcal{Q}$  und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \circ \Phi(x) dx = \sum_{k=1}^q \text{Vol}(P_k) c_k.$$

Da  $\det(B) \neq 0$  ist, ist  $B$  invertierbar und wir erhalten

$$P_k := B^{-1}Q_k.$$

Diese Menge  $P_k$  ist nun ein Viereck mit den Eckpunkten

$$p_{ij} = B^{-1}x_{ij},$$

wobei die  $x_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  die Eckpunkte von  $Q_k$  sind. Dieses Viereck ist ein Parallelogramm und besitzt daher den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \left| \det \left( (p_{21} - p_{11}, p_{12} - p_{11}) \right) \right| &= \left| \det \left( B^{-1}(a_{21} - a_{12}, a_{12} - a_{11}) \right) \right| \\ &= |\det(B^{-1})| \left| \det \left( (a_{21} - a_{12}, a_{12} - a_{11}) \right) \right| \\ &= \frac{1}{|\det(B)|} \text{Vol}(Q_k). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \circ \Phi(x) |\det(D\Phi(x))| dx = \sum_{k=1}^q \text{Vol}(P_k) |\det(B)| c_k = \sum_{k=1}^q \text{Vol}(Q_k) c_k = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) dy.$$

Dieser Beweis kann im  $\mathbb{R}^n$  ganz ähnlich geführt werden (mit Quadern  $Q_k$  und Parallelotopen  $P_k$ ). Für allgemeine Integranden  $f$  kann man diese durch Treppenfunktionen approximieren. Am schwierigsten ist die Behandlung von nichtlinearen Funktionen  $\Phi$ . Hier muss die Funktion  $\Phi^{-1}$  auf hinreichend kleinen Quadern durch ihre Ableitung approximiert werden. Dann kann man ähnlich wie oben vorgehen, muss dann aber zeigen, dass die summierten Approximationsfehler immer noch hinreichend klein sind (vgl. Forster III [4], §2 und §13).

Alternativ kann man den Satz durch eine Induktion mit Hilfe des Satzes von Fubini auf die Substitution in  $\mathbb{R}$  zurückführen (Heuser II [8], Abschnitt 205).

**Beispiel 24.17** Die Transformation von Polarkoordinaten auf kartesische (also die üblichen) Koordinaten ist gegeben durch die Abbildung  $\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\Phi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ . Für die Funktion

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

gilt also z.B.

$$f \circ \Phi(r, \varphi) = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r.$$

Auf  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  gilt

$$D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit  $\det(D\Phi(r, \varphi)) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$ . Wollen wir nun z.B. das Integral von  $f$  über der Kreisscheibe  $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  berechnen, so können wir diese (mit Ausnahme der für die Integration unerheblichen Nullmenge  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ ) als  $\Phi(A)$  mit  $A = (0, 1] \times (0, 2\pi)$  darstellen und es gilt mit Transformationsformel und Fubini

$$\int_K f(x) dx = \int_A f(\Phi(r, \varphi)) |\det(D\Phi(r, \varphi))| d(r, \varphi) = \int_A r^2 d(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

□

## 24.7 $L^p$ -Räume

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in die sogenannten  $L^p$ -Räume, deren Definition sich in natürlicher Weise aus dem Lebesgue-Integral ergibt.

Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Funktionenraums. Wir haben solche Räume bereits mehrfach benutzt, ohne sie formal zu definieren. Dies holen wir zunächst nach.

**Definition 24.18** Ein Funktionenraum (über  $\mathbb{R}$ ) ist eine Menge  $F$  von Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , so dass für je zwei Funktionen  $f, g \in F$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch die Funktionen  $f + g$  und  $\lambda f$  wieder in  $F$  liegen. □

Ein Funktionenraum ist also nichts anderes als ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , dessen Elemente Funktionen sind. Beispiele für Funktionenräume sind die Menge der differenzierbaren Funktionen (vgl. Satz 9.8 bzw. die entsprechenden Regeln im  $\mathbb{R}^n$ ), die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf einer Menge  $A$  (vgl. Satz 13.3, der auch im  $\mathbb{R}^n$  gilt) oder die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen  $L(\mathbb{R}^n)$  (vgl. Satz 16.2).

Wir haben bereits in Beispiel 17.15 gesehen, dass man auch auf einem Funktionenraum Normen definieren kann. Satz 18.8 hat gezeigt, dass der Raum  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  der stetigen Funktionen mit der  $\infty$ -Norm sogar ein vollständiger normierter Vektorraum<sup>2</sup> ist. Ein solcher Raum wird auch *Banachraum* genannt. Ein weiterer Banachraum ist der Raum  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  der auf  $[a, b]$  stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm  $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ . Beachte, dass  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  mit der Norm  $\|f\|_\infty$  zwar ebenfalls ein normierter Raum ist, allerdings kein vollständiger Raum, also kein Banachraum.

Vollständigkeit von Funktionenräumen erscheint zunächst eine sehr abstrakte Eigenschaft zu sein. Sie ist aber wesentlich für viele Anwendungen der Analysis. So gibt es viele Gebiete der Analysis, in denen man Funktionen mit gewissen Eigenschaften sucht. Beispielsweise

<sup>2</sup>Ein vollständiger metrischer Raum gemäß Definition 18.6 heißt vollständiger normierter Vektorraum, wenn er ein Vektorraum ist und die Metrik in Definition 18.6 durch die Norm definiert ist.

sucht man in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen Funktionen  $f$ , deren Integral eine gewisse Gleichung erfüllt, z.B. in der Art

$$f(x) = f_0 + \int_a^x g(f(x))dx.$$

Ein anderes Beispiel ist die Variationsrechnung. Ein typisches Problem aus diesem Gebiet ist die Suche nach einer Funktion  $f$ , für die das Integral

$$\int_a^b g(f(x))dx$$

minimal wird (in beiden Fällen ist  $g$  eine vorgegebene Funktion und  $f$  ist gesucht). In vielen Fällen kann man dann mit Hilfe einer iterativen Vorschrift eine Cauchy-Folge  $f_n$  bezüglich einer geeigneten Norm konstruieren, deren Elemente das gesuchte Problem näherungsweise und für wachsendes  $n$  immer besser erfüllen. Weiß man dann, dass der zu Grunde liegende Funktionenraum gemeinsam mit der verwendeten Norm ein Banachraum ist, so folgt auf diese Weise die Existenz der Lösung des Problems. Zusätzlich kann man solche Näherungsansätze oft als Algorithmus implementieren, so dass man die Lösungen auf diese Weise mit Hilfe des Computers berechnen kann.

Wie sieht es nun im Raum der integrierbaren Funktionen mit der Vollständigkeit aus? Für das Riemann-Integral ist gemäß Satz 14.13 sicherlich die Norm  $\|\cdot\|_\infty$  "passend", denn die Konvergenz bezüglich dieser Norm ist gerade die gleichmäßige Konvergenz und diese stellt gemäß Satz 14.13 sicher, dass die Grenzfunktion  $f$  wieder Riemann-integrierbar ist und auch die Integralfolge über die  $f_n$  gegen das Integral von  $f$  konvergiert. Dies zeigt, dass wir auf der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen eine Norm finden können, die im Sinne der Vollständigkeit zum Riemann-Integral passt. Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen ist also mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum.

Man könnte mit dieser Eigenschaft nun zufrieden sein. Allerdings ist es für das Lebesgue-Integral unnötig einschränkend, gleichmäßige Konvergenz zu verlangen. Es stellt sich daher die Frage, welche Norm zum Lebesgue-Integral passt.

Die Antwort auf diese Frage liefert das Lebesgue-Integral selbst. Definieren wir den Funktionenraum<sup>3</sup>

$$L^1(A) := \{f \in M(A) : |f| \in L(A)\},$$

so kann man nachrechnen, dass

$$\|f\|_{L^1} := \int_A |f(x)|dx$$

tatsächlich eine Norm auf  $L^1(A)$  ist. Ein Problem dabei stellt zunächst die Tatsache dar, dass  $\|f\|_{L^1} = 0$  gemäß Satz 16.7 nur  $f = 0$  *fast überall* aber nicht *überall* impliziert. Dies widerspricht der Forderung aus Definition 17.4(ii), dass  $\|f\| = 0$  genau dann gelten soll, wenn  $f$  die Nullfunktion ist, die ja als  $f \equiv 0$ , also als  $f = 0$  *überall* definiert ist.

Dies lässt sich aber leicht lösen, indem man alle Funktionen mit " $f = 0$  fast überall" als Nullfunktion auffasst. Ebenso betrachten wir zwei Funktionen  $f$  und  $g$  als gleich, wenn

<sup>3</sup> $M(A)$  ist hier die Menge der Lebesgue-messbaren Funktionen, also die Menge der Funktionen, gegen die eine Folge von Elementarfunktionen fast überall konvergiert.

$f = g$  fast überall gilt. Formal lässt sich dies über sogenannte Äquivalenzklassen definieren: Zwei Funktionen werden als äquivalent bezeichnet, wenn sie fast überall übereinstimmen. Beispielsweise ist die Funktion  $f$  aus (15.1) also äquivalent zu der Funktion  $g \equiv 0$ . Die zu einer Funktion  $f \in M(A)$  gehörige Äquivalenzklasse  $[f]$  ist dann gerade die Menge aller zu  $f$  äquivalenten Funktionen, also

$$[f] := \{g \in M(A) \mid g = f \text{ fast überall}\}.$$

Beachte, dass es dabei völlig egal ist, welches  $f$  als Symbol für die Menge  $[f]$  eingesetzt wird, denn für alle  $g \in [f]$  ergibt sich die gleiche Menge  $[g] = [f]$ . Offensichtlich gilt  $\|f\|_{L^1} = \|g\|_{L^1}$  für alle  $g \in [f]$ , weswegen  $\|[f]\|_{L^1}$  einen eindeutigen Wert liefert und  $\|\cdot\|_{L^1}$  eine Norm auf der Menge der Äquivalenzklassen definiert. Definiert man dann die 0 in dieser Menge als die Äquivalenzklasse  $[0]$  (die 0 bezeichnet hier die Funktion, die konstant gleich 0 ist), so gilt jetzt tatsächlich  $\|[f]\|_{L^1} = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$ . Formal definiert man dann  $L^1(A)$  nicht wie oben als Menge von Funktionen sondern als Menge von Äquivalenzklassen  $[f]$  von Funktionen. Da es in der Praxis aber üblich ist, weiterhin  $f$  und nicht  $[f]$  zu schreiben, werden wir es hier genauso halten und weiterhin mit der einfacheren Schreibweise arbeiten.

Aus Bemerkung 16.12 folgt, dass jede Funktion  $f \in L^1(A)$  auch in  $L(A)$  liegt. Umgekehrt gilt nach Satz 16.3 für jede Funktion  $f \in L(A)$  auch  $|f| \in L(A)$ . Folglich ist  $L^1(A)$  nichts anderes als  $L(A)$  selbst. Warum haben wir diesen Raum dann auf diese Weise neu definiert? Der Grund ist, dass sich die Definition von  $L^1$  wie folgt verallgemeinern lässt.

**Definition 24.19** Für  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p \geq 1$  und eine messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$L^p(A) := \{f \in M(A) : |f|^p \in L(A)\}$$

und

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Diese Räume sind Funktionenräume. Um das zu **beweisen**, muss man zeigen, dass für  $f, g \in L^p(A)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch  $\lambda f$  und  $f + g \in L^p(A)$  gilt. Für  $\lambda f$  folgt dies sofort aus der Definition und Satz 16.2. Für  $f + g$  überlegt man sich zuerst, dass mit  $f$  und  $g$  auch  $f + g$ ,  $|f + g|$  und  $|f + g|^p$  messbar sind (man betrachtet dafür die dazu passenden Summen der Elementarfunktionen für  $f$  und  $g$ ). Aus  $|f + g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}$  folgt dann  $|f + g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\}$  und weil reelle Vielfache und Maxima integrierbarer Funktionen nach den Sätzen 16.2 und 16.3 wieder integrierbar sind und  $|f|^p, |g|^p \in L(A)$  gilt, ist  $2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \in L(A)$  und damit nach Bemerkung 16.12 auch  $|f + g|^p$ . Also ist  $f + g \in L^p(A)$ . □

Es bleibt zu erläutern, was die  $L^p$ -Räume für  $p > 1$  gegenüber dem Raum  $L^1(A) = L(A)$  für Vorteile bringen. Der Grund liegt zum einen in der Tatsache, dass man für größere  $p$  eine andere Menge von Funktionen erhält. So liegt die Funktion  $f(x) = 1/x$  für  $A = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$  nicht in  $L^1(A)$  (weil das Integral  $\int_1^b f(x) dx$  für  $b \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst), sie liegt aber gemäß Beispiel 13.8 in  $L^p(A)$  für alle  $p \geq 2$ .



Ein weiterer Grund liegt darin, dass für die unterschiedlichen  $L^p$ -Räume unterschiedliche Abschätzungen gelten. Beispielsweise kann man die *Höldersche Ungleichung*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

für  $f \in L^p(A)$  und  $g \in L^q(A)$  mit  $1/p + 1/q = 1$  beweisen (Heuser, Analysis II, Satz 130.2) und die *Minkowskische Ungleichung*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

für  $f, g \in L^p(A)$  (Heuser, Analysis II, Satz 130.3) — letztere benötigt man wie im  $\mathbb{R}^n$  zum Beweis der Dreiecksungleichung.

Ein letzter Grund liegt in einer besonderen Eigenschaft des Raums  $L^2(A)$ . Auf diesem lässt sich nämlich mittels

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_A f(x)g(x)dx$$

ein *Skalarprodukt* definieren (dass diese Definition die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt muss man natürlich nachprüfen). Die  $L^2$ -Norm ist dann ganz analog zur euklidischen Norm im  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts beweisen wir nun einen der wichtigsten Sätze der Theorie der  $L^p$ -Räume.

**Satz 24.20 (Satz von Fischer-Riesz)** Für jedes  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p \geq 1$  und jede messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist  $L^p(A)$  ein Banachraum.

Zum Beweise dieses Satzes benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 24.21** Seien  $g_1, g_2, \dots \in L^p(A)$  so, dass der Grenzwert  $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^p}$  existiert. Dann existiert ein  $f \in L^p(A)$  mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_{L^p} = 0.$$

**Beweis:** Wir schreiben kurz  $\|\cdot\|$  statt  $\|\cdot\|_{L^p}$ ,  $f_m := \sum_{k=1}^m g_k$  und definieren

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| \quad \text{und} \quad h_m := |g_1| + |g_2| + \dots + |g_m|.$$

Die  $h_m$  bilden dann eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen Funktionen aus  $L^p(A)$  mit  $\|h_m\| \leq \sum_{k=1}^m \|g_k\| \leq \sigma$ . Also sind die Funktionen  $h_m^p$  eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen Funktionen aus  $L(A)$  mit

$$\int_A h_m^p(x)dx = \|h_m\|^p \leq \sigma^p.$$

Sie besitzen also beschränkte Integralfolge und konvergieren damit nach dem Satz von Beppo Levi fast überall monoton gegen ein  $v \in L(A)$  mit

$$\int_A v(x) dx \leq \sigma^p.$$

Also konvergieren die  $h_m$  fast überall monoton gegen  $h := v^{1/p}$ . Da jedes  $h_m$  messbar ist, ist auch  $v$  messbar (man kann die dafür benötigte Folge von Elementarfunktionen aus den Elementarfunktionen für die einzelnen  $h_m$  konstruieren). Zudem folgt aus  $v \in L(A)$ , dass  $h \in L^p(A)$  gilt mit  $\|h\| \leq \sigma$ . Da fast überall

$$|f_m| \leq h_m \leq h$$

gilt und die  $f_m$  (weil die  $h_m$  eine konvergente Majorante bilden) fast überall punktweise konvergieren, konvergieren die  $f_m$  nach dem Satz von Lebesgue (Satz 16.9) fast überall gegen eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , die mit dem gleichen Argument wie  $v$  messbar ist und für die fast überall  $|f| \leq h$  gilt. Also gilt auch  $|f|^p \leq h^p$  und damit  $f^p \in L(A)$  nach Bemerkung 16.12 und folglich  $f \in L^p(A)$ . Aus  $f_m \in L(A)$  und  $f \in L(A)$  folgt nun  $|f - f_m| \in L^p(A)$  und damit  $|f - f_m|^p \in L(A)$ . Zudem gilt  $|f - f_m|^p \rightarrow 0$  fast überall und damit

$$\|f - f_m\|^p = \int_A |f(x) - f_m(x)|^p dx \rightarrow 0$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 24.20:** Wir schreiben wieder kurz  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^p}$ . Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge von Funktionen  $f_k \in L^p(A)$ , d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f_k - f_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k, m \geq C(\varepsilon).$$

Wir müssen zeigen, dass eine Funktion  $f^* \in L^p(A)$  existiert, gegen die die Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  im Sinne der  $L^p$ -Norm konvergiert, für die also  $\|f_k - f^*\|_{L^p} \rightarrow 0$  gilt für  $k \rightarrow \infty$ .

Betrachte dazu die Indizes  $m_i := C(1/2^i)$  mit  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Für diese gilt für alle  $k \geq m_i$  die Ungleichung

$$\|f_k - f_{m_i}\| < 1/2^i.$$

O.B.d.A. können wir die Indizes  $m_i$  dabei mit  $m_{i+1} > m_i$  wählen. Damit folgt  $\|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\| \leq 1/2^i$  und folglich existiert der Grenzwert

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|.$$

Nach Lemma 24.21 existiert also ein  $f \in L^p(A)$ , so dass

$$f_{m_k} - f_{m_1} = \sum_{i=1}^{k-1} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i})$$

für  $k \rightarrow \infty$  im Sinne der  $L^p$ -Norm gegen  $f$  konvergiert. Folglich konvergiert die Folge  $f_{m_k}$  gegen die Funktion  $f^* := f + f_{m_1} \in L^p(A)$  und ist damit eine konvergente Teilfolge der

Cauchy-Folge. Es bleibt zu zeigen, dass auch die gesamte Cauchy-Folge gegen  $f^*$  konvergiert. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $k \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $m_k \geq C(\varepsilon/2)$  und  $\|f_{m_k} - f^*\| < \varepsilon/2$  gilt. Setzen wir nun  $N(\varepsilon) := m_k$  so folgt für alle  $n \geq N(\varepsilon)$

$$\|f_n - f^*\| \leq \|f_n - f_{m_k}\| + \|f_{m_k} - f^*\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

und damit die gewünschte Konvergenz. □

Jeder  $L^p$ -Raum ist also ein Banachraum. Ein Banachraum, dessen Norm sich durch ein Skalarprodukt definieren lässt, heißt *Hilbertraum*. Der Funktionenraum  $L^2(A)$  ist also ein Hilbertraum.

# Literaturverzeichnis

- [1] H. AMMAN AND J. ESCHER, *Analysis I*, Birkhäuser Verlag, 3. Auflage, 2006.
- [2] C. BLATTER, *Analysis I*, Springer Verlag, 2. Auflage, 1977.
- [3] C. BLATTER, *Analysis II*, Springer Verlag, 3. Auflage, 1992.
- [4] O. FORSTER, *Analysis 3*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1. Auflage, 1981.
- [5] O. FORSTER, *Analysis 2*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1. Auflage, 1984.
- [6] O. FORSTER, *Analysis 1*, Vieweg + Teubner Verlag, 10. Auflage, 2011.
- [7] H. HEUSER, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1984.
- [8] H. HEUSER, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Teubner, Stuttgart, 6. Auflage, 1991.
- [9] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 1*, Springer Verlag, 6. Auflage, 2003.
- [10] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 2*, Springer Verlag, 3. Auflage, 2003.
- [11] W. RUDIN, *Analysis*, Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 2009.

# Index

- abgeschlossene Menge, 242
- Ableitung, 134
  - der Umkehrfunktion, 141, 304
  - einseitig, 144
  - höhere, 146
  - Kettenregel, 142, 276
    - teilweise Verkettung, 277
  - linksseitig, 144
  - partiell, 268
    - höhere Ordnung, 277
  - Produktregel, 139, 276
  - Quotientenregel, 139, 276
  - rechtsseitig, 144
  - Richtungs-, 274
  - totale, 266
  - unter dem Integral, 321
- Abschluss, 243
- Absolutbetrag, 24
- absolute Konvergenz, 66, 195
- Abstand, 25
- abzählbar, 33
- Addition, 16
- Additionstheoreme, 121
- analytisch, 163
- Äquivalenz, 6
  - von Normen, 262
- Äquivalenzklasse, 335
- Arcus-Cosinus, 128
- Arcus-Sinus, 128
- Arcus-Tangens, 128
- Assoziativgesetz, 17
- Axiom, 13
  - Anordnung, 19
  - archimedisch, 19
  - Körper, 16
  - Peano, 13
  - Vollständigkeit, 27
- Ball
  - abgeschlossen, 242
  - offen, 239
- Banach'scher Fixpunktsatz, 298
- Banachraum, 247, 333
- Beppo Levi
  - Satz von, 224
- Bernoulli'sche Ungleichung, 20
- Beschränktheit, 29, 41, 86, 253, 259
- Betrag, 24
- bijektiv, 67
- Binomialkoeffizient, 9
- Binomischer Lehrsatz, 8, 11
- Bolzano-Weierstraß
  - Satz von, 56, 260
- Borel-messbar
  - Menge, 326
- Cauchy-Folge, 48, 247
- Cauchy-Produkt von Reihen, 71
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 235
- Cauchysches Konvergenzkriterium
  - für Reihen, 62
- charakteristische Funktion, 326
- Cosinus, 120
  - Additionstheorem, 121
  - Reihendarstellung, 122
  - Wertetabelle, 126
- Definitionsmenge, 75
  - maximale, 77
- Dezimalbruch, 35, 61
- dicht, 35
- Differential, 134
- Differenzenquotient, 134, 265
- differenzierbar
  - auf  $D$ , 145
  - in einem Punkt, 134
  - partiell, 268
  - stetig, 271

- total, 266
- disjunkt, 213
  - paarweise, 310
- Distanz, 25
- Distributivgesetz, 17
- Divergenz, 40
  - eigentlich, 47
- Dreiecksungleichung, 24, 112, 113
  - für Integrale, 187, 222
  - für Metriken, 232
    - umgekehrte, 233
  - für Normen, 233
    - umgekehrte, 233
  - umgekehrte, 24
- Einheitswurzel, 131
- Element, 15
  - invers, 17
  - neutral, 17
- endliche Teilüberdeckung, 209, 257
- $\varepsilon$ -Umgebung, 38
- Euklidische Norm, 234
- Euklidisches Skalarprodukt, 235
- Eulersche Formel, 120
- Exponentialfunktion, 94
  - Funktionalgleichung, 97
  - komplex, 115
  - zur Basis  $a$ , 103
- Fakultät, 8
- fast überall, 206, 323
- Fischer-Riesz
  - Satz von, 336
- Folge, 37
  - Cauchy, 48, 247
  - monoton, 49
- Fubini
  - Satz von
    - für das Lebesgue-Integral, 330
    - für stetige Funktionen, 316
- Funktion, 75
  - in  $\mathbb{R}^n$ , 230
  - Komposition, 80
  - linear, 252
  - rationale, 78
  - Verkettung, 80
- Funktional, 165
- Funktionenfolge, 191
  - Riemann-Integral, 199
- Funktionsraum, 333
- geometrische Reihe, 6
- Gradient, 275, 303
- Graph, 75
- Grenzfunktion, 192
- Grenzsteuersatz, 136
- Grenzwert, 38, 245
  - bei Funktionen, 80
  - Differenzregel, 44
  - Produktregel, 43
  - Quotientenregel, 44
  - Summenregel, 42
  - Ungleichung, 45
- harmonische Reihe, 63
  - alternierend, 65
- Häufungspunkt, 54
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 176
- Hausdorff-Raum, 244
- Hausdorffsches Trennungsaxiom, 239, 244
- Heine-Borel
  - Satz von
    - in  $\mathbb{R}$ , 209
    - in  $\mathbb{R}^n$ , 260
- Hesse-Matrix, 280
- Hilbertraum, 337
- Höhenlinie, 302
- Höldersche Ungleichung, 235, 335
- imaginäre Einheit, 111
- Imaginärteil, 111
- implizite Funktionen, 293
  - Differenzierbarkeit, 295
  - Satz über, 299
- Induktion
  - vollständige, 3
- Induktionsanfang, 3
- Induktionsschritt, 3
- Infimum, 29
- injektiv, 99
- Inneres, 243
- Integral
  - für Elementarfunktionen in  $\mathbb{R}^n$ , 327

- für Treppenfunktionen in  $\mathbb{R}$ , 166
- für Treppenfunktionen in  $\mathbb{R}^n$ , 311
- Lebesgue in  $\mathbb{R}$ , 212, 217
  - uneigentlich, 219
- Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ , 328
- Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  für Borel-messbare Funktionen, 325
- Riemann in  $\mathbb{R}$ , 169
  - uneigentlich, 188
- Riemann in  $\mathbb{R}^n$ , 314
- Integralfolge, 208
- Intervall, 26
  - abgeschlossen, 26
  - kompakt, 26
  - Länge, 26
  - offen, 26
- Intervallschachtelung, 26
- Jacobi-Matrix, 266
- Kettenregel, 142
- Kommutativgesetz, 16
- Kompaktheit, 257
- Komplement, 242
- komplexe Ebene, 113
- komplexe Einheitswurzel, 131
- komplexe Zahlen, 111
- konkav, 153
- kontinuierliche Verzinsung, 95
- Kontraktion, 298
- Kontraposition, 22
- Konvergenz, 38, 245
  - absolut, 66, 195
  - gleichmäßig, 192
  - komplexe Folgen, 114
  - punktweise, 192
  - uneigentlich, 47
- Konvergenzkriterium
  - von Weierstraß, 194
- Konvergenzradius, 161
- Konvergenzsätze für Lebesgue-Integral
  - schematische Darstellung, 227
- konvex, 153
- Körper, 16
  - archimedisch angeordneter, 19
- Krümmung, 147
- Lagrange-Multiplikator, 307
- Lagrangesches Restglied, 156
- Landau-Symbol, 138, 158, 267
- Lebesgue
  - kleiner Satz von , 227
  - Satz von, 226
- Lebesgue-Integral, *siehe* Integral
- Lebesgue-Nullmenge, *siehe* Nullmenge
- Leibnizsches Konvergenzkriterium
  - für alternierende Reihen, 65
- Limes, 38
  - bei Funktionen, 80
- Limes inferior, 54
- Limes superior, 54
- Logarithmus
  - Funktionalgleichung, 102
  - natürlich, 102
  - zur Basis  $a$ , 103
- $L^p$ -Raum, 335
- Marktgleichgewicht, 38, 60
- Maximalstelle, 86, 149, 286
  - unter Nebenbedingung, 306
- Maximum, 31, 86
  - global, 149
  - lokal, 149, 286
    - unter Nebenbedingung, 306
  - strikt, 149, 286
    - unter Nebenbedingung, 306
- Menge, 15
  - abgeschlossen, 242
  - Lebesgue-messbar, 327
  - offen, 239, 244
- messbare Funktion, 218
- Metrik, 25, 232
- metrischer Raum, 25, 232
  - vollständig, 247
- Minimalstelle, 86, 149, 286
  - unter Nebenbedingung, 306
- Minimum, 31, 86
  - global, 149
  - lokal, 149, 286
    - unter Nebenbedingung, 306
  - strikt, 149, 286
    - unter Nebenbedingung, 306
- Minkowskische Ungleichung, 236, 336
- Mittelwertsatz

- der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$ , 151
  - verallgemeinert, 156
- der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}^n$ , 286
- der Integralrechnung, 172
- Monotonie
  - Folge, 49
  - Funktion, 100
  - Treppenfunktion, 207
- Multiplikation, 16
- natürliche Zahlen, 1
  - formale Definition, 13
- negativ, 19
- negativ definit, 288
- Norm, 233
  - Äquivalenz, 262
  - Euklidische, 234
  - $L^p$ -Norm, 335
  - $p$ -Norm, 234
  - $\infty$ -Norm für Funktionen, 194, 238
- normierter Vektorraum, 233
  - vollständig, 247
- Nullfolge, 38
- Nullmenge
  - in  $\mathbb{R}$ , 206
  - in  $\mathbb{R}^n$ , 323
- Nullstelle, 84
- Nullstellensatz, 84
- Oberintegral, 168, 314
- offene Menge, 239
- Partialsomme, 59
- Partielle Integration, 179
- Pascalsches Dreieck, 9
- Peano-Axiome, 13
- periodisch, 126
- $\pi$ , 125
- Polarkoordinaten, 129
- Polynom, 78
- positiv, 19
- positiv definit, 288
- Potenzreihe, 160, 197
  - gliedweise Ableitung, 198
- Produkt, 8
  - leeres, 8
- Quader, 258, 309
  - flach, 324
- Quaderzerlegung, 310
- Quotientenkriterium, 69
- radiokativer Zerfall, 136
- Rand, 241
- Randpunkt, 241
- reelle Zahlen, 15
- Reihe, 59
  - Cauchy-Produkt, 71
  - geometrische, 6
  - harmonische, 63
    - alternierend, 65
- Riemann-Integral, *siehe* Integral
- Riemann-Summe, 171
- Ring, 18
- Rolle
  - Satz von, 151
- Runge-Funktion, 159
- Schranke, 29
  - obere, 29
  - untere, 29
- Sinus, 120
  - Additionstheorem, 121
  - Reihendarstellung, 122
  - Wertetabelle, 126
- Skalarprodukt
  - Euklidisch, 235
  - in  $L^2$ , 336
- Steigung, 133
- Stetigkeit, 82, 249
  - $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium, 87, 251
  - gleichmäßig, 89, 262
- Substitutionsregel, 177
- Summe, 2
  - leere, 2
- Supremum, 29
- Tangens, 127
- Taylorpolynom, 156, 283
- Taylorreihe, 160
- Teilfolge, 53
- Teilmenge, 16
- topologischer Raum, 244
- Transformationssatz, 331
- Trapezregel, 180



- Treppenfunktion, 165, 219, 310
- überabzählbar, 33
- Überdeckung, 209, 257
- Umgebung, 38, 239
- Umkehrfunktion, 100, 304
- Umordnung, 66, 67
- Unbeschränktheit, 29
- Unterintegral, 168, 314
- Unterteilung, 165
- Urbild, 255
  
- vollständige Induktion, 3
- vollständiger metrischer Raum, 247
- vollständiger normierter Vektorraum, 247
- Vollständigkeitsaxiom, 27
- Vollständigkeit
  - von Funktionenräumen, 333
- Volumen
  - einer Borel-messbaren Menge, 326
  - eines Quaders, 310
  
- Wachstumsprozesse, 95
- Wassertank, 38, 43, 95, 105
- Wertemenge, 75
- Widerspruchsbeweis, 23
- wohldefiniert, 166
- Wurzelberechnung, 38
  
- Zinseszins, 94
- Zwischenwertsatz, 85