

# Numerik Dynamischer Systeme

Lars Grüne  
Mathematisches Institut  
Fakultät für Mathematik und Physik  
Universität Bayreuth  
95440 Bayreuth  
[lars.gruene@uni-bayreuth.de](mailto:lars.gruene@uni-bayreuth.de)  
[www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/](http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/)

Vorlesungsskript  
Wintersemester 2003/2004



# Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2003/2004 an der Universität Bayreuth gehalten habe.

Eine elektronische Version dieses Skripts sowie die zu dieser Vorlesung gehörigen Übungsaufgaben finden sich im WWW unter dem Link “Lehrveranstaltungen” auf der Seite <http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/>.

Bayreuth, Februar 2004

LARS GRÜNE



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1 Dynamische Systeme . . . . .	3
1.2 Ziel der Numerischen Dynamik . . . . .	6
<b>2 Analyse Dynamischer Systeme</b>	<b>9</b>
2.1 Objekte zur Analyse Dynamischer Systeme . . . . .	9
2.2 Methoden zur Analyse Dynamischer Systeme . . . . .	15
<b>3 Gestörte Dynamische Systeme</b>	<b>27</b>
3.1 Numerik und Störung . . . . .	27
3.2 Dynamik gestörter Systeme . . . . .	31
3.3 Attraktionsraten . . . . .	41
<b>4 Robuste Attraktion und zeitliche Diskretisierung</b>	<b>49</b>
4.1 Die Hausdorff–Metrik . . . . .	49
4.2 Robustheit asymptotisch stabiler Mengen . . . . .	51
4.3 Zeitliche Diskretisierung asymptotisch stabiler Mengen I . . . . .	58
4.4 Die ISDS–Eigenschaft . . . . .	61
4.5 Zeitliche Diskretisierung asymptotisch stabiler Mengen II . . . . .	69
4.6 Spezialfälle . . . . .	76
4.7 Globale Attraktoren . . . . .	82
<b>5 Berechnung von Attraktoren</b>	<b>85</b>
5.1 Relative Attraktoren . . . . .	85
5.2 Räumliche Diskretisierung . . . . .	89
5.3 Berechnung relativer Attraktoren . . . . .	92

5.4	Der Subdivisionsalgorithmus . . . . .	97
5.5	Rigorese Diskretisierung . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Berechnung instabiler Mannigfaltigkeiten</b>	<b>111</b>
6.1	Instabile Mannigfaltigkeiten . . . . .	111
6.2	Der Fortsetzungsalgorithmus . . . . .	118
<b>A</b>	<b>Implementierung der Zellenüberdeckung</b>	<b>121</b>
A.1	Implementierung . . . . .	121
A.2	Bedienung der Routinen . . . . .	122
A.2.1	C-Routinen . . . . .	122
A.2.2	MATLAB-Routinen zur grafischen Darstellung . . . . .	124
A.2.3	Technische Hinweise . . . . .	125
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>126</b>
	<b>Index</b>	<b>128</b>

thispagestyleempty





# Kapitel 1

## Einleitung

In diesem Kapitel werden wir die grundlegenden Objekte einführen, deren Numerik wir in dieser Vorlesung betrachten wollen, sowie die Ziele dieser Vorlesung umreißen.

### 1.1 Dynamische Systeme

Zunächst wollen wir den Begriff des dynamischen Systems an sich definieren. “Dynamisch” bedeutet hierbei, dass es sich um ein mathematisches Objekt handelt, das zeitliche Veränderungen eines Zustands beschreibt. Hierzu müssen wir zunächst die Menge der zulässigen Zeiten betrachten.

**Definition 1.1** Wir definieren die Zeitachse  $\mathbb{T}$  entweder als kontinuierliche Zeit

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}$$

oder als diskrete Zeit

$$\mathbb{T} := h\mathbb{Z} = \{hk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

wobei  $h > 0$  ein gegebener Zeitschritt ist.

Zudem definieren wir die Teilmengen

$$\mathbb{T}_0^+ := \{t \in \mathbb{T} \mid t \geq 0\}, \quad \mathbb{T}^+ := \{t \in \mathbb{T} \mid t > 0\}$$

und analog  $\mathbb{T}_0^-$  und  $\mathbb{T}^-$ . □

Welche Definition von  $\mathbb{T}$  wir im Einzelnen verwenden, wird im Kontext immer eindeutig geklärt. Wenn wir in Definitionen, Aussagen etc. die Zeitachse nicht genauer spezifizieren, so gelten diese für diskrete und kontinuierliche Zeitachsen.

Der Grund für die “nicht eindeutige” Definition ist, dass wir dynamische Systeme sowohl in kontinuierlicher Zeit als auch in diskreter Zeit betrachten wollen, oft sogar gemeinsam, wenn wir z.B. eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung und ihre Approximation durch ein Einschrittverfahren betrachten. Die Lösung definiert dann ein dynamisches

System auf  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , während die Approximation mit Schrittweite  $h > 0$  ein dynamisches System auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  definiert.

Wir kommen nun zur Definition eines dynamischen Systems.

**Definition 1.2** Sei  $\mathbb{T}$  eine Zeitachse und  $X$  ein metrischer Raum. Ein *dynamisches System* ist eine stetige Abbildung  $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  mit den zwei Eigenschaften

$$\Phi(0, x) = x \text{ für alle } x \in X \quad (1.1)$$

und

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)) \text{ für alle } t, s \in \mathbb{T}. \quad (1.2)$$

Die Eigenschaft (1.2) wird hierbei als *Kozykluseigenschaft* bezeichnet.

Eine Abbildung  $\Phi : \mathbb{T}_0^+ \times X \rightarrow X$ , die (1.1) und (1.2) für  $t, s \in \mathbb{T}_0^+$  erfüllt, heißt *semi-dynamisches System*.

Für festes  $x$  bezeichnen wir die Abbildung  $\Phi(t, x)$  als *Lösung*, *Trajektorie* oder *Lösungskurve* durch  $x$ . Der Wert  $x$  wird hierbei als *Anfangswert* bezeichnet.  $\square$

**Bemerkung 1.3** Für ein semi-dynamisches System  $\Phi$  kann es für einzelne Anfangswerte  $x \in X$  möglich sein, die Lösung  $\Phi(t, x)$  für gewisse negative Zeiten  $t \in \mathbb{T}^-$  so fortzusetzen, dass  $\Phi(t, x)$  die Bedingung (1.2) auch für diese negativen Zeiten erfüllt. Falls diese Fortsetzung eindeutig ist und für alle  $t \in \mathbb{T}^-$  existiert, so sagen wir, dass die Lösung  $\Phi(t, x)$  auf ganz  $\mathbb{T}$  existiert.  $\square$

**Bemerkung 1.4** (i) Sowohl in der Notation als auch aus konzeptionellen Gründen ist es manchmal günstiger, ein dynamisches System als Abbildung von  $X$  nach  $X$  mit Parameter  $t \in \mathbb{T}$  aufzufassen, also das dynamische System als

$$\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$$

zu schreiben. In dieser Parameternotation lassen sich (1.1) und (1.2) kürzer als

$$\Phi_0 = \text{Id}_X, \quad \Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$$

schreiben. Wir werden in dieser Vorlesung üblicherweise die Schreibweise aus Definition 1.2 verwenden und nur in Ausnahmefällen auf die Parameternotation zurückgreifen.

(ii) Für ein dynamisches System in der Parameternotation gilt

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} \text{ für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Dies folgt sofort aus (1.2) mit  $s = -t$  und (1.1), denn es gilt

$$\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_{t-t} = \Phi_0 = \text{Id}_X$$

$\square$

Wir betrachten einige Beispiele für dynamische Systeme.

**Beispiel 1.5** (i) Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$  definiert ein semi-dynamisches System auf  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , indem wir

$$\Phi(t, x) := f^t(x)$$

setzen, wobei wir die Iteration  $f^t$  induktiv mittels

$$f^0(x) = x, \quad f^{t+1}(x) = f(f^t(x))$$

definieren. Falls  $f$  ein Homöomorphismus ist (also invertierbar mit stetigem  $f^{-1}$ ), so ist das durch  $f^t$  definierte  $\Phi$  ein dynamisches System auf  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , wenn wir die Iteration mittels

$$f^{t-1}(x) = f^{-1}(f^t(x))$$

auf negative  $t \in \mathbb{T}$  erweitern.

(ii) Betrachte eine autonome (d.h. nicht explizit zeitabhängige) gewöhnliche Differentialgleichung in  $X = \mathbb{R}^n$ , gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.3}$$

mit Lipschitz-stetigem Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wenn die Lösungen  $x(t, x_0)$  des zugehörigen Anfangswertproblems mit  $x(0, x_0) = x_0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  eindeutig sind und auf ganz  $\mathbb{R}_0^+$  existieren, so ist

$$\Phi(t, x_0) := x(t; x_0)$$

ein semidynamisches System. Falls die Lösungen  $x(t, x_0)$  darüberhinaus auf ganz  $\mathbb{R}$  existieren, so ist  $\Phi$  sogar ein dynamisches System.

(iii) Betrachte das in (ii) aus der DGL (1.3) abgeleitete dynamische System  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für einen beliebigen Zeitschritt  $h > 0$  können wir diese Abbildung auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  einschränken, und erhalten somit ein zeitdiskretes dynamisches System  $\Phi_h : h\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (das gleiche funktioniert natürlich analog, wenn  $\Phi$  aus (ii) ein semi-dynamisches System ist, das auf  $h\mathbb{N}_0$  eingeschränkt wird).

Dieses zeitdiskrete System lässt sich alternativ auch folgendermaßen konstruieren: Wir definieren die *Zeit-h-Abbildung*  $f_h$  von  $\Phi$  mittels

$$f_h(x) := \Phi(h, x)$$

und definieren  $\Phi_h$  induktiv mittels

$$\Phi_h(0, x) = x, \quad \Phi_h(t + h, x) = f_h(\Phi_h(t, x)), \quad \Phi_h(t - h, x) = f_h^{-1}(\Phi_h(t, x)).$$

(iv) Betrachte eine numerische Approximation der DGL (1.3) durch ein Einschrittverfahren mit konstanter Schrittweite  $h > 0$ , d.h.,

$$x(0) = x_0, \quad x_{i+1} = \phi(x_i, h),$$

wobei  $\phi$  die Iterationsvorschrift des Einschrittverfahrens ist (z.B. im Falle des einfachsten Verfahrens, also des Euler-Verfahrens, gegeben durch  $\phi(x, h) = x + hf(x)$ ).

Dann definiert die induktiv gegebene Abbildung

$$\tilde{\Phi}_h(0, x) = x, \quad \tilde{\Phi}_h(t + h, x) = \phi(x, h)$$

ein semi-dynamisches System auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ . Beachte, dass eine numerische Approximation i.A. auch dann kein dynamisches System auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  definiert, wenn die zu Grunde liegende DGL ein dynamisches System auf  $\mathbb{R}$  definiert, da die numerische Iterationsvorschrift  $\phi$  i.A. nicht invertierbar ist.

Wenn die Zeitschritte  $t_i$  der numerischen Diskretisierung durch eine Schrittweitensteuerung adaptiv bestimmt sind, so wird kein semi-dynamisches System in unserem Sinne definiert, da die  $t_i$  nicht mehr in einer unserer erlaubten Zeitachsen liegen. Solche adaptiv gewählten Schrittweiten können im Kontext dynamischer Systeme nur mit sehr großem formalen Aufwand behandelt werden, weswegen wir uns in dieser Vorlesung auf konstante Schrittweite  $h > 0$  beschränken. Es ist aber durchaus erlaubt, dass die numerische Vorschrift  $\Psi$  den Wert  $\Psi(x, h)$  "intern" adaptiv berechnet, indem das Rechenintervall  $[0, h]$  adaptiv in kleinere Teilintervalle zerlegt wird, deren Größe durch einen adaptiven Algorithmus bestimmt sind (z.B. könnte  $\Psi$  durch den Algorithmus 2.39 aus dem Skript zur Numerik II [6] berechnet werden, wobei  $T = h$  gesetzt wird).  $\square$

## 1.2 Ziel der Numerischen Dynamik

In der Theorie der dynamischen Systeme interessiert man sich vor allem für das Langzeitverhalten der Lösungen  $\Phi(t, x)$ , also für das Verhalten für große Zeiten  $t$  bzw. für  $t \rightarrow \infty$ . Typische Fragen, die man hier beantworten möchte sind z.B.

- (i) Divergiert die Abbildung  $\Phi(t, x)$  für  $t \rightarrow \infty$ , konvergiert sie gegen einen Punkt oder schwingt sie sich auf eine periodische oder evtl. noch kompliziertere Bahn ein?
- (ii) Wie hängt das Verhalten in (i) vom Anfangswert  $x$  ab?
- (iii) Wo liegen die Bahnen aus (i), oder allgemeiner, wo liegen die Mengen, die diese Bahnen enthalten?
- (iv) Gibt es Mengen, die von den Lösungen nicht verlassen werden können und wo liegen diese?

Dies sind die Fragen, die wir in dieser Vorlesung unter dem numerischen Aspekt betrachten wollen. Insbesondere wollen wir im zum einen untersuchen, in wie weit diese Eigenschaften unter Diskretisierung erhalten bleiben und falls ja, wie man Diskretisierungsfehler geeignet abschätzen kann. Zum anderen wollen wir uns mit konkreten Algorithmen beschäftigen, mit denen man Antworten auf diese Fragen geben kann.

Warum aber sind dies überhaupt so schwierige Fragen, dass man zu ihrer Beantwortung eine eigene Theorie entwickeln muss? Um dies zu verstehen, muss man sich die Fehlerabschätzungen für numerische Verfahren gewöhnlicher Differentialgleichungen ansehen. Egal welches Verfahren man verwendet, in jedem Fall erhält man für den Diskretisierungsfehler, also den Abstand zwischen der exakten Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  einer DGL und ihrer numerischen Approximation  $\tilde{x}(t; t_0, x_0)$  eine Abschätzung der Form

$$\|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t; t_0, x_0)\| \leq C(T)h^p \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + T]$$

gilt, wobei  $h > 0$  der Zeitschritt ist und  $C(T) > 0$  eine Konstante ist, die von der Größe des betrachteten Lösungsintervalls abhängt. Betrachtet man die Konvergenzaussagen genauer, so stellt man fest, dass die Konstante  $C(T)$  üblicherweise von der Form

$$C(T) = C_1(\exp(C_2T) - 1)$$

für geeignete  $C_1, C_2 > 0$  ist (siehe z.B. Bemerkung 2.12(ii) im Skript zur Numerik II [6]). Für  $T \rightarrow \infty$  divergiert die Fehlerschranke also gegen  $\infty$ , und zwar exponentiell schnell, da sich die in jedem Einzelschritt der numerischen Approximation auftretenden Fehler exponentiell aufschaukeln können. Dies bedeutet, dass die “klassische” Diskretisierungsfehlertheorie für die numerische Untersuchung des Langzeitverhaltens unbrauchbar ist. Dabei ist es nicht so, dass die Fehlerabschätzung zu schlecht ist, bei vielen Differentialgleichungen ist es tatsächlich der Fall, dass der Fehler  $\|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t; t_0, x_0)\|$  für  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst. Wir werden deswegen in dieser Vorlesung typischerweise keine Aussagen über den Fehler in der Approximation *einzelner Trajektorien* machen, sondern über das qualitative Verhalten der *Gesamtheit der Trajektorien*. Denn auch wenn der Fehler in der Approximation einer einzelnen Trajektorie groß werden kann, kann das qualitative Verhalten der Gesamtheit der Lösungen unter der numerischen Diskretisierung trotzdem erhalten bleiben — in einem geeigneten approximativen Sinne, den wir in dieser Vorlesung genau definieren werden.

Um nun konkrete Algorithmen und Verfahren zu untersuchen und damit die oben gestellten Fragen zu beantworten, müssen wir uns zuerst das notwendige analytische “Werkzeug” erarbeiten. Dies geschieht in zwei Schritten:

Zuerst werden wir in Kapitel 2 die obigen informellen Fragen mathematisch präzisieren, indem wir geeignete mathematische Objekte definieren, mit denen sich das Langzeitverhalten beschreiben lässt und einige grundlegende analytische Techniken zur Behandlung dieser Objekte kennen lernen. Im zweiten Schritt in Kapitel 3 betrachten wir dann gestörte dynamische Systeme. Diese gestörten Systeme werden uns dazu dienen, Aussagen über das dynamische Verhalten numerischer Approximationen zu machen, indem wir den Approximations- bzw. Diskretisierungsfehler numerischer Schemata als Störung des ursprünglichen Systems auffassen.

In Kapitel 4 werden wir diese analytischen Technik dann zur Analyse der numerischen Approximationen gewöhnlicher Differentialgleichungen verwenden und dabei geeignet weiterentwickeln. In den Kapiteln 5 und 6 schließlich werden wir mengenorientierte Algorithmen betrachten, mit denen sich einzelne Aspekte des Langzeitverhaltens dynamischer Systeme numerisch berechnen lassen.



# Kapitel 2

## Analyse Dynamischer Systeme

### 2.1 Objekte zur Analyse Dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir einige wichtige Objekte aus der Theorie der dynamischen Systeme definieren. Da wir in dieser Vorlesung sowohl die Theorie als auch die numerische Behandlung betrachten werden, wollen wir uns auf eine sehr kleine Anzahl von Objekten beschränken, die wir dafür um so genauer untersuchen wollen.

Für eine Teilmenge  $D \subset X$  definieren wir dabei

$$\Phi(t, D) := \bigcup_{x \in D} \{\Phi(t, x)\}$$

Wir beginnen mit der Definition der invarianten Menge.

**Definition 2.1 (invariante Menge)** Gegeben sei ein (semi-)dynamisches System.

(i) Eine Teilmenge  $D \subseteq X$  heißt *vorwärts (oder positiv) invariant*, falls die Inklusion

$$\Phi(t, D) \subseteq D \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt.

(ii) Eine Teilmenge  $D \subseteq X$  heißt *rückwärts (oder negativ) invariant*, falls die Inklusion

$$\Phi(t, D) \supseteq D \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt.

(iii) Eine Teilmenge  $D \subseteq X$  heißt *invariant*, falls sie vorwärts und rückwärts invariant ist, also die Inklusion

$$\Phi(t, D) = D \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt. □

**Bemerkung 2.2** (i) Ausführlich geschrieben bedeutet Vorwärtsinvarianz gerade, dass jede Lösung  $\Phi(t, x)$  mit  $x \in D$  für alle positiven Zeiten  $t \in \mathbb{T}^+$  in  $D$  bleibt, also

$$\Phi(t, x) \in D \quad \text{für alle } x \in D, t \in \mathbb{T}^+.$$

(ii) Eine andere naheliegende Definition der Rückwärtsinvarianz wäre

$$\Phi(t, D) \subseteq D \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^-.$$

Falls alle Lösungen  $\Phi(t, x)$  mit  $x \in D$  für alle negativen Zeiten  $t \in \mathbb{T}^-$  existieren (was insbesondere für dynamische Systeme der Fall ist aber auch für semi-dynamische Systeme gelten kann), so ist dies äquivalent zur obigen Definition, denn für  $t > 0$  gilt

$$\Phi(t, D) \supseteq D \Leftrightarrow \Phi_{-t}(\Phi_t(D)) \supseteq \Phi_{-t}(D) \Leftrightarrow D \supseteq \Phi_{-t}(D).$$

Falls die Lösungen in Rückwärtszeit existieren, kann man die Rückwärtsinvarianz ausführlich als

$$\Phi(t, x) \in D \quad \text{für alle } x \in D, t \in \mathbb{T}^-$$

ausdrücken.

Die “indirekte” Definition in (ii) hat den Vorteil, dass sie auch anwendbar ist, wenn die Lösungen in negativer Zeit nicht definiert sind. Allerdings gibt es in diesem Fall keine so schöne anschauliche Interpretation.

(iii) Unter der Bedingung aus (ii) folgt, dass die Invarianz einer Menge  $D$  äquivalent ist zur Bedingung

$$\Phi(t, D) \subseteq D \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

oder, ausführlich geschrieben,

$$\Phi(t, x) \in D \quad \text{für alle } x \in D, t \in \mathbb{T}.$$

□

**Beispiel 2.3** (i) Ein Punkt  $x^* \in X$  heißt *Gleichgewicht* eines dynamischen Systems, falls  $\Phi(t, x^*) = x^*$  gilt für alle  $t \in \mathbb{T}^+$ . Falls  $\Phi$  von einer Differentialgleichung erzeugt wird, so prüft man leicht nach, dass ein Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^n$  gerade dann ein Gleichgewicht von  $\Phi$  ist, falls  $f(x^*) = 0$  ist, falls  $\Phi$  von einer Abbildung  $f$  erzeugt wird, so ist  $x^*$  genau dann ein Gleichgewicht, wenn  $f(x^*) = x^*$  ist.

Offenbar ist die Menge  $D = \{x^*\}$  für jedes Gleichgewicht  $x^*$  eine invariante Menge.

(ii) Betrachte die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + x_1(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) \end{aligned}$$

Abbildung 2.1 zeigt ausgewählte Lösungskurven dieser Gleichung, mit verschiedenen Anfangswerten auf der  $x_2$ -Achse.

Auf dem Bild kann man die folgenden invarianten Mengen erkennen:



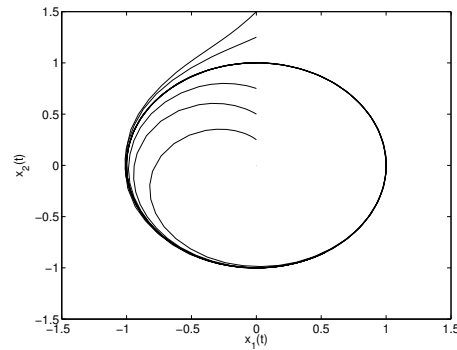


Abbildung 2.1: Lösung der DGL mit verschiedenen Anfangswerten auf der  $x_2$ -Achse

- $D_1 = \{0\}$ , da die 0 ein Gleichgewicht ist
- $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ , da jede Lösung, die auf dem Kreis startet, für alle positiven und negativen Zeiten darauf bleibt
- $D_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ , aus dem gleichen Grund wie in (ii)

Man sieht also leicht, dass invariante Mengen nicht eindeutig sein müssen. Sie können disjunkt sein (wie  $D_1$  und  $D_2$ ), oder sich schneiden, wie  $D_1$  und  $D_3$  oder  $D_2$  und  $D_3$ .

Natürlich wurde Abbildung 2.1 numerisch erstellt und liefert damit keinen formalen Beweis, dass die behaupteten Mengen tatsächlich invariant sind. Dieser formale Beweis ist bei diesem einfachen System allerdings durchaus machbar (Übungsaufgabe).  $\square$

Ein weiteres wichtiges Objekt für die Langzeitanalyse dynamischer Systeme sind die asymptotisch stabilen Mengen. Um diese zu definieren, müssen wir zunächst einen Abstandsbe-  
griff für Mengen definieren.

**Definition 2.4** Gegeben sei ein metrischer Raum  $X$  mit Metrik  $d$  und eine kompakte Menge  $A \subseteq X$ .

(i) Wir definieren den *Abstand eines Punktes  $x \in X$  von  $A$*  als

$$d(x, A) = \min_{y \in A} d(x, y)$$

(ii) Sei  $B \subseteq X$  eine weitere Menge. Wir definieren den *nichtsymmetrischen Hausdorff-Abstand* zwischen  $B$  und  $A$  als

$$H^*(B, A) = \sup_{x \in B} d(x, A)$$

$\square$

- Bemerkung 2.5** (i) Man sieht leicht, dass  $d(x, A) = 0$  genau dann gilt, wenn  $x \in A$  gilt.  
(ii) Aus (i) folgt sofort, dass  $H^*(B, A) = 0$  genau dann gilt, wenn  $B \subseteq A$  ist.  
(iii) Das folgende Beispiel zeigt, dass  $H^*$  tatsächlich ein *nichtsymmetrischer* Abstand ist: Sei  $X = \mathbb{R}$  mit  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $A = [-1, 1]$  und  $B = \{0\}$ . Dann gilt

$$H^*(B, A) = 0 \quad \text{aber} \quad H^*(A, B) = 1.$$

- (iv) Für  $H^*$  gilt die Dreiecksungleichung

$$H^*(C, A) \leq H^*(C, B) + H^*(B, A)$$

für jede kompakte Menge  $B \subset X$ . Um dies zu sehen, wähle für jedes  $x \in X$  einen Punkt  $x^*(x) \in B$ , für den

$$d(x, B) = d(x, x^*(x))$$

gilt (dieser existiert, da  $B$  kompakt ist). Damit gilt

$$\begin{aligned} H^*(C, A) &= \sup_{x \in C} d(x, A) = \sup_{x \in C} \min_{y \in A} d(x, y) \\ &\leq \sup_{x \in C} \min_{y \in A} \left( d(x, x^*(x)) + d(x^*(x), y) \right) \\ &= \sup_{x \in C} \min_{y \in A} \left( d(x, B) + d(x^*(x), y) \right) \\ &\leq \sup_{x \in C} \sup_{z \in B} \min_{y \in A} \left( d(x, B) + d(z, y) \right) \\ &= \sup_{x \in C} d(x, B) + \sup_{z \in B} \min_{y \in A} d(z, y) \\ &= H^*(C, B) + H^*(B, A). \end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$H^*(C, B) \geq H^*(C, A) - H^*(B, A).$$

□

**Definition 2.6 (asymptotische Stabilität)** Eine kompakte Menge  $A \subset X$  heißt *asymptotisch stabil*, falls sie vorwärts invariant ist und eine offene Umgebung  $B$  von  $A$  existiert, so dass die Konvergenz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H^*(\Phi(t, B), A) = 0$$

gilt. Die Menge  $B$  wird dann *Stabilitätsumgebung* genannt. □

Um diese recht kompakte Definition besser zu verstehen, empfiehlt es sich, die Bedingung ausführlicher aufzuschreiben: Es gilt

$$H^*(\Phi(t, B), A) = \sup_{x \in \Phi(t, B)} d(x, A) = \sup_{x_0 \in B} d(\Phi(t, x_0), A).$$

Die Bedingung  $H^*(\Phi(t, B), A) \rightarrow 0$  bedeutet also, dass alle Lösungen mit Anfangswert  $x_0 \in B$  gleichmäßig gegen  $A$  konvergieren. Beachte, dass es nicht genügt, dass alle Lösungen “einzeln” konvergieren, also wenn

$$d(\Phi(t, x_0), A) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

gilt für alle  $x_0 \in B$ , denn wenn dies gilt, könnte es trotzdem passieren, dass das Supremum  $\sup_{x_0 \in B} d(\Phi(t, x_0), A)$  nicht gegen Null konvergiert.

**Beispiel 2.7** (i) Für ein exponentiell stabiles Gleichgewicht  $x^* \in X$  eines (semi-)dynamischen Systems ist  $A = \{x^*\}$  eine asymptotisch stabile Menge. Zur Erinnerung: Ein Gleichgewicht  $x^*$  heißt exponentiell stabil, falls eine (o.B.d.A. beschränkte) Umgebung  $U$  von  $x^*$  sowie Konstanten  $c, \sigma > 0$  existieren, so dass für alle Anfangswerte  $x_0 \in U$  die Ungleichung

$$d(\Phi(t, x_0), x^*) \leq ce^{-\sigma t} d(x_0, x^*)$$

für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt. Mit  $B = U$  gilt dann

$$H^*(\Phi(t, B), A) = \sup_{x_0 \in B} d(\Phi(t, x_0), A) = \sup_{x_0 \in B} d(\Phi(t, x_0), x^*) \leq ce^{-\sigma t} \sup_{x_0 \in B} d(x_0, x^*) \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow \infty$ , da  $B$  beschränkt ist, weswegen  $\sup_{x_0 \in B} d(x_0, x^*)$  endlich ist.

(ii) Wir betrachten wieder die DGL aus Beispiel 2.3(ii). Hier kann man die folgenden asymptotisch stabilen Mengen identifizieren:

- $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  (=  $D_2$  aus Beispiel 2.3)
- $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  (=  $D_3$  aus Beispiel 2.3)
- Jede Menge der Form  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|x\| \leq b\}$  mit  $a \in [0, 1]$ ,  $b \geq 1$  (diese sind nicht invariant).

Aufgrund der numerischen Simulation sind diese Mengen naheliegend, allerdings ist der formale Nachweis hier nicht ohne geeignete analytische Techniken möglich, die wir erst später kennen lernen werden. □

Die letzte Definition, die wir in diesem einführenden Abschnitt betrachten wollen, ist die des Attraktors.

**Definition 2.8** Eine asymptotisch stabile Menge  $A \subseteq X$  heißt *Attraktor*, falls sie invariant ist. □

Wir werden in Kürze sehen, warum Attraktoren besonders schöne asymptotisch stabile Mengen sind. Zunächst aber wieder einige Beispiele:

**Beispiel 2.9** (i) Offenbar ist jede asymptotisch stabile einpunktige Menge  $A = \{x^*\}$  (also jedes asymptotisch stabile Gleichgewicht  $x^*$ ) ein Attraktor, da aus der Gleichgewichtseigenschaft  $\Phi(t, x^*) = x^*$  sofort die Invarianz folgt.

(ii) Von den in Beispiel 2.7(ii) aufgeführten asymptotisch stabilen Mengen sind nur die Mengen  $A_1$  und  $A_2$  invariant, vgl. Beispiel 2.3(ii). Beachte, dass alle anderen in Beispiel 2.7(ii) angegebenen Mengen entweder  $A_1$  oder  $A_1$  und  $A_2$  enthalten. Dies ist, wie wir gleich sehen werden, kein Zufall, da Attraktoren — in geeignetem Sinne — minimale asymptotisch stabile Mengen sind.

(iii) Einige Attraktoren haben es wegen ihrer komplexen geometrischen Struktur zu einer gewissen “Berühmtheit” in der Mathematik gebracht. Ein Beispiel ist der Attraktor des durch die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 - 1.2x_1^2 + x_2/5 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

definierten diskreten dynamischen Systems. Diese Funktion heißt Hénon–Abbildung, nach dem französischen Astronomen Michel Hénon, der die Abbildung 1976 als vereinfachte zeitdiskrete Variante der (ebenfalls berühmten) Lorenz–Gleichung eingeführt hat.

Abbildung (2.2) zeigt zwei verschiedene Ausschnitte des zugehörigen Attraktors. Speziell in der Vergrößerung (rechts) des im linken Bild angedeuteten Bereichs sieht man deutlich, dass die einzelnen “Stränge” des Attraktors eine komplizierte Feinstruktur aufweisen.

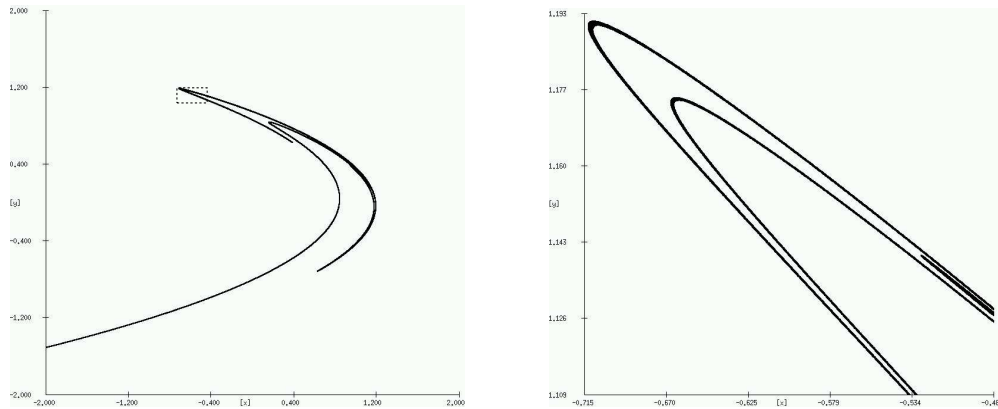


Abbildung 2.2: Der Hénon–Attraktor (größerer/kleinerer Ausschnitt)

Im Prinzip kann man diese Bilder durch Simulation einer Vielzahl von Lösungen  $\Phi(t, x_i)$  für viele verschiedene Anfangswerte  $x_i$  erzeugen. Bei dieser Vorgehensweise wird man aber üblicherweise nicht alle Teile des Attraktors “erwischen”, da sich die Trajektorien in gewissen Bereichen nur sehr selten aufhalten. Die Bilder in Abbildung (2.2) sind durch ein mengenwertiges numerisches Verfahren berechnet worden, das wir in Kapitel 5 dieser Vorlesung kennen lernen werden.  $\square$

## 2.2 Methoden zur Analyse Dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt werden wir eine Reihe von Aussagen über dynamische Systeme machen und dabei insbesondere Techniken kennen lernen, mit denen man die oben eingeführten Objekte handhaben kann.

Wir beginnen mit einer Aussage über Attraktoren, die zeigt, in welchem Sinne die Attraktoren besonders ausgezeichnete asymptotisch stabile Mengen sind.

**Satz 2.10** Gegeben sei eine asymptotisch stabile Menge  $A$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Dann ist die Menge  $A$  genau dann ein Attraktor, wenn sie die minimale asymptotisch stabile Menge mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist, d.h., wenn für jeder weitere asymptotisch stabile Menge  $A^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  die Inklusion  $A \subseteq A^*$  gilt.<sup>1</sup>

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $A$  vorwärts invariant und asymptotisch stabil. Die Menge  $A$  ist also genau dann ein Attraktor, wenn sie negativ invariant ist, also  $\Phi(t, A) \supseteq A$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt. Wir beweisen die zur Behauptung äquivalente Aussage

$$A \text{ ist nicht negativ invariant} \Leftrightarrow A \text{ ist nicht minimal.}$$

Wir zeigen zunächst die Aussage “ $A$  nicht negativ invariant  $\Rightarrow A$  nicht minimal”:

Sei  $A$  nicht negativ invariant. Dann gibt es  $t^* > 0$  so dass  $A^* := \Phi(t^*, A) \not\supseteq A$  gilt. Da  $A$  nach Definition vorwärts invariant ist, ist  $A^* = \Phi(t^*, A) \subseteq A$ , also ist  $A^*$  eine echte Teilmenge von  $A$ . Zudem ist  $A^*$  vorwärts invariant, denn für jedes  $t \geq 0$  gilt

$$\Phi(t, A^*) = \Phi(t, \Phi(t^*, A)) = \Phi(t + t^*, A) = \Phi(t^*, \underbrace{\Phi(t, A)}_{\subseteq A}) \subseteq \Phi(t^*, A) = A^*.$$

Sei nun beliebiges  $t > t^*$  gegeben. Dann gilt

$$H^*(\Phi(t, B), A^*) = H^*(\Phi(t^*, \Phi(t - t^*, B)), \Phi(t^*, A)).$$

Nun gilt  $H^*(\Phi(t - t^*, B), A) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Da  $\Phi$  stetig ist und  $\Phi(t - t^*, B)$  beschränkt ist, ist  $\Phi(t^*, \cdot)$  gleichmäßig stetig auf einer kompakten Umgebung von  $B$ . Daraus folgt

$$H^*(\Phi(t^*, \Phi(t - t^*, B)), \Phi(t^*, A)) \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow \infty$ , also auch  $H^*(\Phi(t, B), A^*) \rightarrow 0$ . Wir haben damit für  $A^*$  alle notwendigen Eigenschaften für eine asymptotisch stabile Menge nachgewiesen, und da  $A^* \subset A$  ist, ist  $A$  folglich keine minimale asymptotisch stabile Menge.

Nun zeigen wir die umgekehrte Aussage “ $A$  nicht minimal  $\Rightarrow A$  nicht negativ invariant”:  
Sei  $A$  nicht minimal, d.h., es gibt eine asymptotisch stabile Menge  $A^* \subset A$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  und  $A^* \neq A$ . Dann gilt  $H^*(A, A^*) > 0$ . Also folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$H^*(A, \Phi(t, A)) \geq \underbrace{H^*(A, A^*)}_{>0} - \underbrace{H^*(\Phi(t, A), A^*)}_{\rightarrow 0}.$$

<sup>1</sup>Wir verwenden die Inklusionszeichen analog zu den Ungleichungszeichen:  $A^* \subseteq A$  bedeutet, dass  $A^* = A$  möglich ist, während  $A^* \subset A$  impliziert, dass  $A^* \neq A$  ist.

Für hinreichend großes  $t > 0$  folgt also  $H^*(A, \Phi(t, A)) > 0$  und damit  $\Phi(t, A) \neq A$ , womit  $A$  nicht negativ invariant ist.  $\square$

Asymptotisch stabile Mengen beschreiben per Definition solche Regionen in  $X$ , in deren Umgebung sich die Lösungen des Systems nach einer gewissen Übergangszeit aufhalten (sofern sie nicht divergieren). Attraktoren sind also deswegen besonders schön, da sie die kleinsten solchen Mengen sind und deswegen die genauest mögliche Information über den Aufenthalt der Lösungen liefern. Das Verhalten der Lösungen bis zur Konvergenz<sup>2</sup> gegen einen Attraktor wird *transientes Verhalten* genannt.

Für kompliziertere Systeme ist es oft schwierig bis unmöglich, Attraktoren analytisch zu bestimmen. Es gibt aber ein Verfahren, mit dem man Bereiche ermitteln kann, in denen ein Attraktor liegen muss, auch wenn sich dieser selbst unbekannt ist. Dazu benötigen wir das folgende Konzept:

**Definition 2.11** Eine kompakte Menge  $C \subset X$  heißt *absorbierende Menge*, falls ein  $T > 0$  existiert, so dass  $\Phi(t, C) \subset \text{int } C$  gilt für alle  $t \geq T$ , wobei “int  $C$ ” das Innere der Menge  $C$  bezeichnet.  $\square$

Absorbierende Mengen sind — im Vergleich zu Attraktoren — relativ leicht zu finden, z.B. durch numerische Simulationen aber auch durch analytische Betrachtungen. Der folgende Satz zeigt, dass sich in absorbierenden Mengen immer ein Attraktor findet.

**Satz 2.12** Jede absorbierende Menge  $C \subset X$  enthält einen Attraktor  $A \subset \text{int } C$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } C$ . Dieser Attraktor ist gegeben durch

$$A = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)}.$$

**Beweis:** Zunächst einmal muss man sich überlegen, dass  $A$  nicht leer ist. Betrachte ein  $x \in C$ . Da  $\Phi(t, x) \in \Phi(t, C) \subset \text{int } C$  ist für  $t \geq T$ , ist  $\Phi(t, x)$  beschränkt und besitzt damit einen Häufungspunkt, der für alle  $s > 0$  in  $\overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)}$  liegen muss. Daher ist  $A$  nicht leer.

Als nächstes zeigen wir, dass  $A$  in  $\text{int } C$  enthalten ist. Hierzu zeigen wir zunächst die Inklusion

$$\bigcup_{t \geq T} \Phi(t, C) \subseteq \bigcup_{t \in [T, 2T]} \Phi(t, C). \quad (2.1)$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass für beliebige  $t > 0$  die Inklusion

$$\Phi(t + T, C) = \Phi(t, \Phi(T, C)) \subseteq \Phi(t, C)$$

gilt, weswegen per Induktion auch die Inklusion  $\Phi(t + nT, C) \subseteq \Phi(t, C)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Damit folgt (2.1). Da  $\Phi(t, C) \subset \text{int } C$  für jedes  $t \in [T, 2T]$  gilt, gilt

$$\bigcup_{t \in [T, 2T]} \Phi(t, C) \subset \text{int } C$$

<sup>2</sup>Diese Beschreibung ist natürlich etwas informell, denn man kann nicht präzise definieren, wann Konvergenz “eintritt”. Anschaulich dürfte aber klar sein, was hier gemeint ist.

und weil  $\bigcup_{t \in [T, 2T]} \Phi(t, C)$  (als Bild der kompakten Menge  $[T, 2T] \times C$  unter der stetigen Abbildung  $\Phi$ ) abgeschlossen ist, folgt mit (2.1)

$$\overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)} \subseteq \overline{\bigcup_{t \in [T, 2T]} \Phi(t, C)} = \bigcup_{t \in [T, 2T]} \Phi(t, C) \subset \text{int } C$$

für alle  $s \geq T$ , womit auch der Schnitt  $A$  in  $\text{int } C$  liegt.

Wir zeigen nun die Attraktoreigenschaften für  $A$ , nämlich Invarianz und asymptotische Stabilität.

Zur Invarianz: Beachte zunächst, dass für jedes  $\tau \in \mathbb{T}^+$  die Gleichung

$$A = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)} = \bigcap_{s \geq \tau} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)}$$

gilt, da die Mengen, die hier geschnitten werden, für wachsende  $s$  kleiner werden.

Für ein beliebiges  $\tau \in \mathbb{T}$  gilt nun

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, A) &= \Phi \left( \tau, \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)} \right) = \bigcap_{s \geq 0} \Phi \left( \tau, \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)} \right) \\ &= \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(\tau, \Phi(t, C))} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(\tau + t, C)} \\ &= \bigcap_{s \geq \tau} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)} = A \end{aligned}$$

Zur asymptotischen Stabilität: Angenommen, diese Eigenschaft gilt nicht. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  sowie Folgen  $x_n \in B$  und  $t_n \rightarrow \infty$ , so dass

$$d(\Phi(t_n, x_n), A) \geq \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Da  $\Phi(t_n, x_n) \in C$  liegt, gibt es einen Häufungspunkt  $y$  dieser Folge, für den

$$y \in \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)}$$

für alle  $s \geq 0$  gelten muss. Also liegt  $y \in A$ , und nach Dreiecksungleichung gilt

$$d(\Phi(t_n, x_n), A) \leq d(\Phi(t_n, x_n), y) + \underbrace{d(y, A)}_{=0} = d(\Phi(t_n, x_n), y).$$

Da  $y$  ein Häufungspunkt der Folge  $\Phi(t_n, x_n)$  ist, gibt es eine Teilfolge  $t_{n_j} \rightarrow \infty$  mit  $d(\Phi(t_{n_j}, x_{n_j}), y) \rightarrow 0$ . Also folgt

$$d(\Phi(t_{n_j}, x_{n_j}), A) \leq d(\Phi(t_{n_j}, x_{n_j}), y) \rightarrow 0,$$

was (2.2) widerspricht.  $\square$

Das folgende Korollar fasst zwei Konsequenzen der vorangegangenen Sätze zusammen.

**Korollar 2.13** (i) Jede asymptotisch stabile Menge enthält einen Attraktor mit der gleichen Stabilitätsumgebung.

(ii) Für jede offene Menge  $O \subset X$  gibt es höchstens einen Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B = O$ .

**Beweis:** (i) Für jede asymptotisch stabile Menge  $A$  ist der Abschluss  $C = \overline{B}$  ihrer Stabilitätsumgebung  $B$  eine absorbierende Menge. Dies folgt aus der folgenden Tatsache: Da  $B$  eine offene Umgebung von  $A$  ist, existiert eine weitere offene Umgebung  $U$  von  $A$ , für deren Abschluss  $\overline{U} \subset B$  gilt. Da  $\Phi(t, B)$  im Hausdorff-Abstand gegen  $A$  konvergiert, gilt  $\Phi(t, B) \subset U$  für alle hinreichend großen  $t > 0$ . Daraus folgt

$$\Phi(t, C) = \Phi(t, \overline{B}) = \overline{\Phi(t, B)} \subseteq \overline{U} \subset B = \text{int } C,$$

weswegen  $C$  eine absorbierende Menge ist. Also enthält  $C$  nach Satz 2.12 einen Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$ , der nach Satz 2.10 in  $A$  liegen muss.

(ii) Es seien  $A_1$  und  $A_2$  Attraktoren mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Da Attraktoren asymptotisch stabile Mengen sind gilt nach Satz 2.10  $A_1 \subseteq A_2$  und  $A_2 \subseteq A_1$ . Also folgt  $A_1 = A_2$ .  $\square$

Die bisher erzielten Resultate liefert einen Anhaltspunkt dafür, wo im Zustandsraum  $X$  Attraktoren liegen können, sie geben aber i.A. keine Auskunft darüber, wie der Attraktor tatsächlich aussieht. Auch wenn Satz 2.12 eine explizite Formel liefert, so ist es doch i.A. schwierig bis unmöglich, diese auszuwerten.

Der folgende Satz liefert eine Technik, mit der man beweisen kann, dass eine gegebene Menge  $A$  asymptotisch stabil ist. Um den Satz mathematisch sauber formulieren zu können, benötigen wir die folgende Klasse von Funktionen.

**Definition 2.14** Wir definieren die folgende Klasse von Funktionen

$$\mathcal{K}_\infty := \left\{ \alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ ist stetig, streng monoton wachsend,} \\ \text{unbeschränkt und erfüllt } \alpha(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

$\square$

Beachte, dass die Umkehrfunktion  $\alpha^{-1}$  einer Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$  wieder in  $\mathcal{K}_\infty$  liegt.

In der Formulierung des Satzes müssen wir zwischen kontinuierlichen und diskreten Systemen unterscheiden.

**Satz 2.15** Gegeben sei eine kompakte Menge  $A$ , eine vorwärts invariante offene Menge  $O \subset X$  mit  $A \subset O$  und eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$\alpha_1(d(x, A)) \leq V(x) \leq \alpha_2(d(x, A))$$

für alle  $x \in O$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Hieraus folgt insbesondere  $A = \{x \in X \mid V(x) = 0\}$ , die Menge  $A$  ist also die Nullstellenmenge von  $V$ .



Darüberhinaus existiere eine lokal Lipschitz stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $g(r) = 0$  für  $r \leq 0$ , so dass eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(a) Falls  $\Phi$  ein durch eine Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  erzeugtes (semi-)dynamisches System mit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  und  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, so sei  $V$  stetig differenzierbar und es gelte

$$DV(x)f(x) \leq -g(V(x)) \quad (2.3)$$

für alle  $x \in O$  (die Ableitung  $DV(x) := d/dxV(x)$  ist hierbei als Zeilenvektor aufzufassen).

(b) Falls  $\Phi$  ein diskretes (semi-)dynamisches System mit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  ist, so gelte

$$V(\Phi(h, x)) \leq V(x) - hg(V(x)) \quad (2.4)$$

für alle  $x \in O$ .

Dann ist  $A$  eine asymptotisch stabile Menge, wobei als Stabilitätsumgebung  $B$  jede beschränkte offene Teilmenge  $B \subseteq O$  mit  $A \subset B$  gewählt werden kann. Die Funktion  $V$  bezeichnen wir als *Lyapunov-Funktion*.<sup>4</sup>

**Beweis:** Wir beweisen zuerst den kontinuierlichen Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . Wir wählen ein beliebiges  $x \in O$  und schreiben kurz  $V(t) = V(\Phi(t, x))$  für  $t > 0$ . Aus (2.3) folgt dann

$$\dot{V}(t) \leq -g(V(t)). \quad (2.5)$$

Wir betrachten nun die Funktion  $r(t; r_0)$ , die als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{r}(t) = -g(r(t)) \quad (2.6)$$

mit Anfangswert  $r_0 \geq 0$  zur Anfangszeit  $t_0 = 0$  definiert ist. Da  $g(r) \geq 0$  ist für  $r \geq 0$ , ist die Lösung  $r(t; r_0)$  monoton fallend in  $t$ . Da  $r = 0$  ein Gleichgewicht ist und sich Lösungen mit unterschiedlichem Anfangswert (wegen ihrer Eindeutigkeit) nicht schneiden können, ist die Lösung nach unten durch Null beschränkt, also muss  $r(t; r_0)$  gegen einen Punkt  $r^* \geq 0$  konvergieren. Man überlegt sich leicht, dass dann  $g(r^*) = 0$  sein muss, also muss  $r^* = 0$  sein, die Lösungen  $r(t; r_0)$  mit  $r_0 \geq 0$  konvergieren also gegen  $r^* = 0$ . Wiederum weil sich Lösungen nicht schneiden können, folgt die Ungleichung

$$r(t; r_1) \leq r(t; r_2) \quad (2.7)$$

für alle Anfangswerte  $r_1 \leq r_2$  und alle  $t \geq 0$ .

Für kleine  $\varepsilon > 0$  betrachten wir außerdem die Funktionen  $r_\varepsilon(t; r_0)$ , die als Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{r}_\varepsilon(t) = -g(r_\varepsilon(t)) + \varepsilon, \quad (2.8)$$

wiederum mit Anfangswert  $r_0 \geq 0$  zur Anfangszeit  $t_0 = 0$ , definiert sind. Da die Lösungen parameterabhängiger Differentialgleichungen stetig im Parameter sind (dies ist ein grundlegender Satz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, siehe z.B. [1]) gilt die Konvergenz  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t; r_0) = r(t; r_0)$  für jedes  $t \geq 0$ .

<sup>4</sup>Nach dem russischen Mathematiker A.M. Lyapunov (1857–1918), der diese Funktionen in seiner 1892 veröffentlichten Dissertation eingeführt hat.

Die Gleichung (2.6) wird uns dazu dienen, eine Abschätzung für  $V(t)$  zu erhalten, die Gleichung (2.8) dient dabei als Hilfe im Beweis. Wir zeigen nämlich, dass aus (2.5) die Ungleichung

$$V(t) \leq r(t; V(x)) \quad (2.9)$$

für alle  $t \geq 0$  folgt.

Wir beweisen (2.9) indem wir die Ungleichung

$$V(t) \leq r_\varepsilon(t; V(x)) \quad (2.10)$$

für alle  $t \geq 0$  und alle  $\varepsilon > 0$  zeigen. Wegen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t; r_0) = r(t; r_0)$  folgt damit (2.9).

Zum Beweis von (2.10) fixieren wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Offenbar ist (2.10) für  $t = 0$  erfüllt. Wir nehmen nun an, es gebe ein  $t^* > 0$ , so dass (2.9) nicht erfüllt ist, also

$$V(t^*) > r_\varepsilon(t^*, V(x)) \quad (2.11)$$

Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Ausdrücke in (2.9) ein  $t_1 \in [0, t^*)$ , so dass

$$V(t_1) = r_\varepsilon(t_1; V(x)) \quad (2.12)$$

und

$$V(t) > r_\varepsilon(t; V(x)) \text{ für alle } t \in (t_1, t^*] \quad (2.13)$$

gilt. Aus (2.5), (2.8) und (2.12) folgt nun

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (V(t) - r_\varepsilon(t, V(x))) \leq -g(V(t_1)) + g(r_\varepsilon(t_1, V(x))) - \varepsilon = -\varepsilon < 0.$$

Da die linke Seite dieser Abschätzung stetig in  $t$  ist, existiert  $t_2 \in (t_1, t^*]$ , so dass

$$\frac{d}{dt}(V(t) - r_\varepsilon(t, V(x))) < 0. \quad (2.14)$$

für alle  $t \in [t_1, t_2]$  gilt. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass ein  $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$  existiert mit

$$\begin{aligned} V(t_2) - r_\varepsilon(t_2; V(x)) &= V(t_1) - r_\varepsilon(t_1; V(x)) \\ &\quad + (t_2 - t_1) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tilde{t}} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x))). \end{aligned}$$

Aus (2.12) und (2.14) folgt aber nun

$$V(t_2) - r_\varepsilon(t_2; V(x)) = (t_2 - t_1) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tilde{t}} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x))) < 0$$

und damit

$$V(t_2) < r_\varepsilon(t_2; V(x_0)),$$

was ein Widerspruch zu (2.13) ist, da  $t_2 \in (t_1, t^*]$  liegt. Also folgt (2.10) und damit (2.9).

Alle benötigten Eigenschaften der asymptotischen Stabilität von  $A$  folgen jetzt aus (2.9). Falls  $x \in A$  liegt, so gilt  $V(x) \leq \alpha_2(d(x, A)) = \alpha_2(0) = 0$ . Damit folgt für  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$V(\Phi(t, x)) \leq r(t; V(x)) = r(t; 0) = 0.$$

Also gilt

$$d(\Phi(t, x), A) \leq \alpha_1^{-1}(V(\Phi(t, x))) = \alpha_1^{-1}(0) = 0$$

und damit  $\Phi(t, x) \in A$  für alle  $t \geq 0$ , also die Vorwärts-Invarianz.

Sei nun  $B \subseteq O$  eine beschränkte offene Menge mit  $A \subset B$ . Da  $B$  beschränkt ist, gilt  $\sup_{x \in B} d(x, A) =: M < \infty$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} H^*(\Phi(t, B), A) &\leq \sup_{x \in B} d(\Phi(t, x), A) \\ &\leq \sup_{x \in B} \alpha_1^{-1}(V(\Phi(t, x))) \\ &\leq \sup_{x \in B} \alpha_1^{-1}(r(t; V(x))) \\ &\leq \sup_{x \in B} \alpha_1^{-1}(r(t; \alpha_2(d(x, A)))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(r(t; \alpha_2(M))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $t \rightarrow \infty$ , wobei wir in der letzten Ungleichung die Monotonieeigenschaft (2.7) von  $r$  und die Monotonie von  $\alpha_1^{-1}$  und  $\alpha_2$  verwendet haben. Dies zeigt die asymptotische Stabilität.

Im zeitdiskreten Fall argumentiert man ähnlich, man muss aber die Funktion  $g$  zunächst etwas modifizieren. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\tilde{g}(r) = \inf_{s \in \mathbb{R}} \{g(s) + |r - s|/h\}.$$

Sicherlich gilt  $\tilde{g}(r) \leq g(r)$  und  $\tilde{g}(r) > 0$  für  $r > 0$ . Zudem ist  $\tilde{g}(r)$  Lipschitz stetig mit globaler Konstante  $1/h$ . Um dies zu sehen wählen wir für jedes  $r \in \mathbb{R}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  einen Punkt  $s^*(r, \varepsilon)$ , der das Infimum in der Definition von  $\tilde{g}$  bis auf  $\varepsilon$  realisiert, also

$$\tilde{g}(r) \geq g(s^*(r, \varepsilon)) + |r - s^*(r, \varepsilon)|/h - \varepsilon.$$

Damit folgt für alle  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r_1) - \tilde{g}(r_2) &\leq g(s^*(r_2, \varepsilon)) + |r_1 - s^*(r_2, \varepsilon)|/h - g(s^*(r_2, \varepsilon)) - |r_2 - s^*(r_2, \varepsilon)|/h + \varepsilon \\ &= (|r_1 - s^*(r_2, \varepsilon)| - |r_2 - s^*(r_2, \varepsilon)|)/h + \varepsilon \leq \frac{1}{h}|r_1 - r_2| + \varepsilon \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war und die Abschätzung symmetrisch in  $r_1$  und  $r_2$  ist, folgt die behauptete Lipschitz-Eigenschaft.

Nun betrachten wir die induktiv definierten Lösungen  $r(t; x)$  der Differenzgleichung

$$r(t + h; r_0) = r(t; r_0) - h\tilde{g}(r(t; r_0)).$$

Für jeden Anfangswert  $r_0 = r(0; r_0)$  ist diese Lösungsfolge monoton fallend und nach unten beschränkt (wegen  $\tilde{g}(r) = 0$  für  $r \leq 0$ ), sie konvergiert also gegen ein  $r^* \leq r_0$ , das wegen

der Stetigkeit von  $\tilde{g}$  ein Fixpunkt von  $r$  sein muss. Da die Fixpunkte von  $r$  gerade die Nullstellen von  $\tilde{g}$  sind, muss  $r^* \leq 0$  sein.

Aus der oben bewiesenen Lipschitz-Eigenschaft von  $\tilde{g}$  folgt für alle  $r_1 \leq r_2$

$$r_1 - h\tilde{g}(r_1) \leq r_1 - h\tilde{g}(r_2) + \underbrace{|r_1 - r_2|}_{=r_2-r_1} \leq r_2 - h\tilde{g}(r_2)$$

gilt. Per Induktion erhält man daraus die Ungleichung (2.7), also

$$r(t; r_1) \leq r(t; r_2)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ . Beachte, dass (2.7) für unser ursprüngliches  $g$  nicht gelten muss, genau aus diesem Grunde haben wir die Hilfsfunktion  $\tilde{g}$  eingeführt.

Mittels Induktion und der Tatsache, dass  $\tilde{g} \leq g$  gilt, beweist man nun wiederum per Induktion die Eigenschaft (2.9) für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ . Nun kann man wie im kontinuierlichen Fall fortfahren.  $\square$

**Beispiel 2.16** Für unsere Beispiel-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + x_1(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)\end{aligned}$$

rechnet man nach, dass die Funktion

$$V_1(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$$

eine Lyapunov-Funktion für den Attraktor

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

ist und die Funktion

$$V_2(x) = \begin{cases} (\|x\|^2 - 1)^2, & \|x\| \geq 1 \\ 0, & \|x\| < 1 \end{cases}$$

eine Lyapunov-Funktion für den Attraktor

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

ist. Zum Nachweis müssen natürlich geeignete Definitionsmengen  $O \subset \mathbb{R}^2$  sowie geeignete Funktionen  $g$  gefunden werden (Übungsaufgabe).  $\square$

**Bemerkung 2.17** (i) Lyapunov-Funktionen sind deswegen so praktische Hilfsmittel, da man zum Nachweis der asymptotischen Stabilität einer Menge die Lösungen  $\Phi(t, x)$  nicht kennen muss, sondern lediglich das zu Grunde liegende Vektorfeld bzw. die zu Grunde liegende Iterationsvorschrift. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung von Satz 2.15: Man kann beweisen, dass für jede asymptotisch stabile Menge eine geeignete Lyapunov-Funktion existiert. Leider ist dieser Beweis nicht konstruktiv, d.h. er liefert i.A. keine Möglichkeit, eine Formel für  $V$  zu finden. Nichtsdestotrotz gelingt es für viele Systeme, Lyapunov-Funktionen zu finden (durch Intuition, physikalische Überlegungen, systematische Konstruktion...)

und damit asymptotische Stabilität formal nachzuweisen. Aber auch wenn wir nur ein abstraktes Existenzresultat für solche Funktionen haben und nicht wissen, wie sie genau aussehen, kann das für die weitere Analyse sehr nützlich sein.

(ii) Für kontinuierliche Systeme lassen sich die Annahmen in Satz 2.15 etwas vereinfachen: Wenn sich die Funktion  $V$  auf einer Umgebung  $N$  von  $O$  stetig fortsetzen lässt und die Menge  $O$  durch  $O = \{x \in N \mid V(x) < C\}$  für ein  $C > 0$  gegeben ist, so folgt die Vorwärts-Invarianz von  $O$  aus den restlichen Annahmen von Satz 2.15. Die recht schwer zu überprüfende Vorwärts-Invarianz lässt sich also durch eine viel leichter überprüfbare Bedingung ersetzen.

**Beweis:** Betrachte ein  $x \in O$ , d.h. es gilt  $V(x) < C$ . Da  $O$  offen ist, liegt die zugehörige Lösung  $\Phi(t, x)$  zumindest für alle hinreichend kleinen  $t > 0$  in  $O$ . Sei  $T > 0$  der kleinste Zeitpunkt mit  $\Phi(T, x) \notin O$ . Dann gilt nach dem obigen Beweis einerseits

$$V(\Phi(T, x)) \leq r(T, V(x)) \leq V(x) < C. \quad (2.15)$$

Andererseits gilt wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  in  $t$  aber  $\Phi(T, x) \in \partial O$ , woraus wegen der Stetigkeit von  $V$  die Gleichung

$$V(\Phi(T, x)) = C$$

gilt. Dies ist ein Widerspruch zu (2.15).  $\square$

Wenn man eine Lyapunov Funktion für einen Attraktor kennt, so braucht man diesen nicht mehr numerisch zu ermitteln, da die Nullstellenmenge  $\{x \in X \mid V(x) = 0\}$  den Attraktor vollständig beschreibt. Da wir eine solche Funktion aber oft nicht kennen (für den Hénon-Attraktor z.B. ist bis heute keine Lyapunov-Funktion bekannt), sind wir nach wie vor auf numerische Simulationen angewiesen.

Wenn wir aber ein kontinuierliches (semi-)dynamisches System  $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  (also mit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ) numerisch approximieren, so erhalten wir als Approximation i.A. nur eine Gitterfunktion auf einem diskreten (in dieser Vorlesung auch äquidistanten) Gitter, also eine Abbildung  $\tilde{\Phi} : h\mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$ . Zwar gibt es Methoden, die “Lücken” zwischen den diskreten Approximationspunkten  $\tilde{\Phi}(ih, x)$  mittels geeigneter Interpolationsmethoden zu schließen, die so erhaltene Abbildung ist dann aber kein semidynamisches System auf  $\mathbb{R}_0^+$ , da sie die Kozykluseigenschaft (1.2) nicht erfüllen kann (dies liegt daran, dass die Werte  $\tilde{\Phi}(t, x)$  für  $t \neq ih$  anders ermittelt werden als die Werte zur Zeit  $t = ih$ .)

Man muss eine numerische Approximation  $\tilde{\Phi}_h$  daher als eine Approximation der Einschränkung  $\Phi_h : h\mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$  auffassen. Wenn wir also dynamische Objekte mittels numerischer Methoden approximativ bestimmen, so approximieren wir tatsächlich dynamische Objekte für  $\Phi_h$  und *nicht* für  $\Phi$ . Der folgende — im ersten Moment vielleicht etwas überraschende — Satz zeigt, dass dies für Attraktoren kein Problem ist.

**Satz 2.18** Betrachte ein kontinuierliches (semi-)dynamisches System  $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$  und die zugehörige zeitdiskrete Restriktion  $\Phi_h : h\mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$  für einen beliebigen Zeitschritt  $h > 0$ . Betrachte eine kompakte Menge  $A$  mit offener Umgebung  $B$ .

Dann gilt: Die Menge  $A$  ist genau dann ein Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$  für  $\Phi$  wenn sie ein Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$  für  $\Phi_h$  ist.

**Beweis:** Falls  $A$  ein Attraktor für  $\Phi$  ist, so ist  $A$  auch ein Attraktor für  $\Phi_h$ , da die Bedingungen für Invarianz und asymptotische Stabilität bzgl.  $\Phi$  für alle  $t \geq 0$  definiert sind, und damit insbesondere auch für  $t \in h\mathbb{N}_0$  gelten.

Sei umgekehrt  $A$  ein Attraktor für  $\Phi_h$ . Wir zeigen zunächst die asymptotische Stabilität bzgl.  $\Phi$ .

Wir beginnen mit der Vorwärtsinvarianz von  $A$  bzgl.  $\Phi$ . Für jedes  $t \geq 0$  gilt

$$\Phi_h(h, \Phi(t, A)) = \Phi(t + h, A) = \Phi(t, \Phi_h(h, A)) = \Phi(t, A),$$

also ist die Menge  $\Phi(t, A)$  invariant unter  $\Phi_h$ . Da  $\Phi$  stetig und  $\Phi(0, A) = A \subset B$  ist, existiert ein  $T > 0$  so dass  $\Phi(t, A) \subset B$  ist für alle  $t \in [0, T]$ . Für diese  $t \in [0, T]$  folgt

$$H^*(\Phi(t, A), A) = H^*(\Phi_h(ih, \Phi(t, A)), A) \leq H^*(\Phi_h(ih, B), A) \rightarrow 0$$

für  $ih \rightarrow \infty$ . Also folgt  $H^*(\Phi(t, A), A) = 0$  und damit  $\Phi(t, A) \subseteq A$  für  $t \in [0, T]$ . Per Induktion über  $k$  zeigen wir nun  $\Phi(t, A) \subseteq A$  für alle  $t \in [0, kT]$ . Für  $k = 1$  ist die Aussage bereits gezeigt. Für den Schritt  $k \rightarrow k + 1$  genügt es, die neu hinzukommenden  $t \in (kT, (k + 1)T]$  zu betrachten. Unter der Induktionsannahme  $\Phi(t, A) \subseteq A$  für  $t \in [0, kT]$  gilt

$$\Phi(t, A) = \Phi(t - kT, \underbrace{\Phi(kT, A)}_{\subseteq A}) \subseteq \Phi(\underbrace{t - kT}_{\leq T}, A) \subseteq A.$$

Also erhalten wir  $\Phi(t, A) \subseteq A$  für alle  $t \in [0, kT]$  und alle  $k \geq 0$ , d.h. für alle  $t \geq 0$ . Daher ist  $A$  vorwärts invariant für  $\Phi$ .

Für die asymptotische Stabilität bleibt die Konvergenz  $H^*(\Phi(t, B), A) \rightarrow 0$  zu zeigen. Aus der Stetigkeit von  $\Phi$  folgt für jedes  $\varepsilon > 0$  die Existenz eines  $\delta > 0$ , so dass für jede beschränkte Menge  $D \subset X$  die Implikation

$$H^*(D, A) < \delta \Rightarrow H^*(\Phi(t, D), A) < \varepsilon$$

für alle  $t \in [0, h]$  gilt. Sei nun ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $\delta > 0$  wie oben. Da  $A$  ein Attraktor für  $\Phi_h$  ist, existiert ein  $T > 0$ , so dass

$$H^*(\Phi_h(ih, B), A) \leq \delta$$

gilt für alle  $i \in \mathbb{Z}$  mit  $ih \geq T$ . Für jedes  $t \geq T$  wählen wir nun  $i(t)$  so, dass  $t \in [i(t)h, (i(t) + 1)h]$  liegt. Dann folgt für alle  $t \geq T$  die Ungleichung

$$H^*(\Phi(t, B), A) = H^*\left(\Phi\left(t - i(t)h, \Phi_h(i(t)h, B)\right), A\right) < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt für  $t \rightarrow \infty$  damit die gewünschte Konvergenz gegen 0, also die asymptotische Stabilität.

Es bleibt zu zeigen, dass  $A$  ein Attraktor ist. Da  $A$  asymptotisch stabil mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist, enthält  $A$  nach Korollar 2.13(i) einen Attraktor  $\tilde{A}$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Nach dem ersten Teil dieses Beweises ist  $\tilde{A}$  auch ein Attraktor für  $\Phi_h$ . Also sind  $A$  und  $\tilde{A}$  zwei Attraktoren für  $\Phi_h$  mit gleicher Stabilitätsumgebung, weswegen nach Korollar 2.13(i)  $\tilde{A} = A$  gelten muss. Daher ist  $A$  ein Attraktor für  $\Phi$ .  $\square$

**Bemerkung 2.19** Für andere dynamische Objekte gilt diese starke Eigenschaft nicht, z.B. für invariante Mengen (vgl. Übungsblatt 3) oder für asymptotisch stabile Mengen, die nicht invariant sind. Erst die Kombination “asymptotische Stabilität + Invarianz” macht den Satz 2.18 möglich.  $\square$





# Kapitel 3

## Gestörte Dynamische Systeme

In diesem Kapitel legen wir die analytischen Grundlagen für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens einer numerischen Approximation.

Bevor wir das Verhalten gestörter dynamischer Systeme genauer analysieren, betrachten wir den Zusammenhang zwischen gestörten Systemen und numerischen Approximationen etwas genauer.

### 3.1 Numerik und Störung

Zunächst geben wir eine präzise Definition eines gestörten dynamischen Systems.

**Definition 3.1** Gegeben sei ein (semi)–dynamisches System  $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ .

(a) Falls  $\Phi$  durch eine Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

mit  $X \subset \mathbb{R}^n$  erzeugt ist, so definieren wir das zugehörige *gestörte dynamische System* als

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t)$$

wobei

$$w \in \mathcal{W}_\alpha := \{w : \mathbb{R} \rightarrow W_\alpha \mid w \text{ ist stückweise stetig}\},$$

wobei  $W_\alpha := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \alpha\}$  ist. Die Lösungen zu gegebenem Anfangswert  $x$  und gegebener Störfunktion  $w$  bezeichnen wir mit  $\Psi(t, x, w)$ . Wie bei den dynamischen (bzw. semidynamischen) Systemen nehmen wir an, dass sie für alle Zeiten  $t \in \mathbb{T}$  (bzw.  $t \in \mathbb{T}_0^+$ ) existieren.

(b) Falls  $\Phi$  ein diskretes System mit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  ist, so definieren wir das zugehörige *gestörte semidynamische System induktiv* mittels

$$\Psi(0, x, w) = x, \quad \Psi(t + h, x, w) = \Phi(h, \Psi(t, x, w)) + hw(t),$$

wobei

$$w \in \mathcal{W}_\alpha^h := \{w : h\mathbb{Z} \rightarrow W_\alpha\}$$

mit  $W_\alpha$  wie oben ist. Beachte, dass  $\Psi$  über die obige Iteration nur in Vorwärtszeit definiert ist, was für unsere Zwecke aber ausreicht.  $\square$

**Bemerkung 3.2** (i) Das gestörte dynamische System erfüllt ebenfalls eine *Kozykluseigenschaft*, allerdings in verallgemeinerter Form, nämlich

$$\Psi(t + s, x, w) = \Psi(t, \Psi(s, x, w), w(s + \cdot)),$$

wobei  $w(s + \cdot)$  die um  $s$  verschobene Funktion  $w$  bezeichnet, also  $w(s + \cdot)(\tau) := w(s + \tau)$ .

(ii) Für eine gegebene Funktion  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  kann das Verhalten der Lösung recht kompliziert sein. Deutlich einfacher ist aber i.A. das Verhalten der Gesamtheit der Lösungen für alle  $w \in W_\alpha$ . Wir führen für diese Menge die Bezeichnung

$$\Psi_\alpha(t, x) = \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, x, w)\}$$

ein. Im Folgenden werden wir vor allem Eigenschaften dieser (mengenwertigen) Funktion  $\Psi_\alpha$  untersuchen.  $\square$

Was haben diese gestörten Systeme nun mit der Numerik zu tun? Um dies zu verstehen, müssen wir eine Definition aus der Numerik 2 wiederholen.

**Definition 3.3** Betrachte eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{3.1}$$

im  $\mathbb{R}^n$  mit Lösungen  $\Phi(t, x)$  des zugehörigen Anfangswertproblems sowie eine Approximation von  $\Phi(t, x)$  durch ein Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h(t, x)$  (wir fassen die Lösung als ein (semi-)dynamisches System auf  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  und die Approximation als ein semidynamisches System auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  auf).

(i) Das Verfahren heißt *konsistent* mit Konsistenzordnung  $p > 0$ , falls für jede kompakte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Konstante  $E > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in D$  die Ungleichung

$$\|\Phi(h, x) - \tilde{\Phi}_h(h, x)\| \leq Eh^{p+1}$$

gilt.

(ii) Das Verfahren erfüllt die *Lipschitz-Bedingung* (in vielen Büchern auch *Stabilitätsbedingung* genannt), falls für jede kompakte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Konstante  $L > 0$  existiert, so dass für alle  $x_1, x_2 \in D$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\Phi}_h(h, x_1) - \tilde{\Phi}_h(h, x_2)\| \leq (1 + Lh)\|x_1 - x_2\|$$

gilt.  $\square$

In der Numerik 2 [6] haben wir aus diesen Bedingungen die Konvergenz der Verfahren gefolgert. Auch in dieser Vorlesung sind diese Bedingungen wesentlich, um das dynamische Verhalten der numerischen Approximation zu untersuchen.

**Bemerkung 3.4** Wir werden uns im Folgenden immer auf eine kompakte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  einschränken, in der wir das dynamische Verhalten untersuchen wollen, und nur solche Lösungen betrachten, die sich in dieser Menge aufhalten. Aus diesem Grunde werden wir stets vereinfachend annehmen, dass die Konstanten  $E$  und  $L$  unabhängig von  $D$  sind. Aus dem selben Grunde nehmen wir vereinfachend an, dass das Vektorfeld  $f$  der zu Grunde liegenden DGL (3.1) global Lipschitz stetig mit der gleichen Konstante  $L$  ist.  $\square$

Wir wollen nun diese numerischen Verfahren mit den gestörten dynamischen Systemen in Beziehung setzen. Um dies formal zu fassen, benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.5 (Einbettungslemma)** Gegeben seien eine Differentialgleichung (3.1) sowie ein Einschrittverfahren gemäß Definition 3.3. Die davon definierten semidynamischen Systeme seien mit  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}_h$  bezeichnet. die zugehörigen gestörten Systeme mit  $\Psi$  und  $\tilde{\Psi}_h$ . Dann gilt:

(i) Für jeden Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Störfunktion  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  mit  $\alpha = (1+Lh)Eh^p$ , so dass die Gleichung

$$\tilde{\Phi}_h(t, x) = \Psi(t, x, w)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt. Insbesondere gilt also

$$\tilde{\Phi}_h(t, x) \in \Psi_\alpha(t, x)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ .

(ii) Für jeden Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Störfunktion  $w \in \mathcal{W}_\alpha^h$  mit  $\alpha = Eh^p$ , so dass die Gleichung

$$\Phi(t, x) = \tilde{\Psi}_h(t, x, w)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt. Insbesondere gilt also

$$\Phi_h(t, x) \in \tilde{\Psi}_{h,\alpha}(t, x)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ .

**Beweis:** (i) Wir zeigen zunächst, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  ein  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  mit  $\alpha = (1+Lh)Eh^p$  existiert, so dass die Gleichung

$$\tilde{\Phi}_h(h, x) = \Psi(h, x, w) \tag{3.2}$$

gilt. Zum Beweis dieser Gleichung setzen wir

$$\Delta x = \frac{\tilde{\Phi}_h(h, x) - \Phi(h, x)}{h} \quad \text{und} \quad y(t) = \Phi(t, x) + t\Delta x.$$

Damit gilt  $y(0) = x$ ,  $y(h) = \tilde{\Phi}_h(h, x)$  und

$$\|y(t) - \Phi(t, x)\| \leq t\|\Delta x\| \leq tEh^p.$$

Wir konstruieren nun ein  $w$ , so dass  $\Psi(t, x, w) = y(t)$  für alle  $t \in [0, h]$  gilt. Dieses  $w$  ist gegeben durch

$$w(t) = f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x,$$

denn einerseits gilt

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, x, w) = f(\Psi(t, x, w)) + w(t)$$

und andererseits gilt

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(\Phi(t, x)) + \Delta x = f(y(t)) + f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x = f(y(t)) + w(t).$$

Also erfüllen  $\Psi(t, x, w)$  und  $y(t)$  die gleiche DGL mit gleichem Anfangswert in  $t = 0$ , weswegen sie für alle  $t \geq 0$  und damit insbesondere in  $t = h$  übereinstimmen müssen.

Um nachzuweisen, dass  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  für  $\alpha = (1 + Lh)Eh^p$  gilt, überlegt man sich zuerst, dass es reicht,  $w(t)$  für  $t \in [0, h)$  wie oben zu wählen und  $w(t) = 0$  für  $t \notin [0, h)$  zu setzen, da nur die Werte  $w(t)$  für  $t \in [0, h)$  in der Berechnung von  $\Psi(h, x, w)$  eingehen (wir legen hier immer das Lebesgue-Integral zu Grunde, bei dem man einzelne Punkte — hier also  $t = h$  — des Integrationsintervalls herausnehmen kann, ohne das Integral zu ändern). Wegen

$$\|w(t)\| = \|f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x\| \leq Lt\|\Delta x\| + \|\Delta x\| \leq (1 + Lh)Eh^p$$

für  $t \in [0, h]$  folgt damit  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  für das behauptete  $\alpha = (1 + Lh)Eh^p$ . Damit ist (3.2) bewiesen.

Zum Beweis der Behauptung für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  schreiben wir diese Zeiten als  $hi$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und beweisen die Behauptung per Induktion über  $i$ . Für  $i = 1$  ist die Behauptung bewiesen. Nehmen wir also an, es existiert ein  $w_1$ , so dass die Behauptung für ein  $i \in \mathbb{N}$  gilt. Für  $i + 1$  wählen wir das  $w$  aus (3.2), wobei wir  $x$  durch  $\tilde{\Phi}_h(ih, x)$  ersetzen. Nun definieren wir ein neues  $w_2$  mittels

$$w_2(t) = \begin{cases} w_1(t), & t < ih \\ w(t - ih), & t \geq ih \end{cases}$$

Beachte, dass hiermit  $w_2(t) = w_1(t)$  für alle  $t < ih$  und  $w_2(ih + t) = w(t)$  für alle  $t \geq 0$  gilt, also  $w(ih + \cdot) = w$  auf  $\mathbb{R}_0^+$ . Mit der Kozykluseigenschaft für  $\Psi$  und der Konstruktion von  $w$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_h((i + 1)h, x) &= \tilde{\Phi}_h(h, \tilde{\Phi}_h(ih, x)) \\ &= \tilde{\Phi}_h(h, \Psi(ih, x, w_1)) \\ &= \Psi(h, \Psi(ih, x, w_1), w) \\ &= \Psi(h, \Psi(ih, x, w_2), w_2(ih + \cdot)) = \Psi((i + 1)h, x, w_1), \end{aligned}$$

also die Behauptung für  $i + 1$ .

(ii) Wie im Teil (i) zeigen wir die Behauptung zunächst für  $t = h$ . Dies folgt hier sofort mit der Wahl

$$w(0) = \frac{\Phi(h, x) - \tilde{\Phi}_h(h, x)}{h}.$$

Auf Grund der Konsistenz-Annahme ist  $w_0 \in \mathcal{W}_\alpha$  und die behauptete Gleichheit ist offensichtlich. Nun ergibt sich die Behauptung analog zu Teil (i) mittels Induktion.  $\square$

Das erste Hauptziel dieser Vorlesung ist die Analyse des dynamischen Verhaltens von Ein-schrittverfahren im Sinne von Definition 3.3, bzw. von den durch diese definierten semi-dynamischen Systeme auf  $h\mathbb{N}_0$ . Das Einbettungslemma 3.5 wird dabei wesentlich sein, da

wir zunächst das Verhalten der allgemeinen gestörten Systeme gemäß Definition 3.1 analysieren wollen und daraus auf das Verhalten der Einschrittverfahren schließen wollen. Der Grund für diese Vorgehensweise ist, dass sich die allgemeinen gestörten Systeme deutlich leichter analysieren lassen als die numerischen Systeme, die man ja nach Lemma 3.5 auch als spezielle gestörte Systeme auffassen kann. Im Rest dieses Abschnittes werden wir hierfür diverse Techniken zur Analyse gestörter Systeme entwickeln. Diese Resultate werden damit die analytische Basis für unsere numerischen Untersuchungen bilden.

## 3.2 Dynamik gestörter Systeme

In diesem Abschnitt werden wir die wesentlichen Definitionen und Aussagen aus Kapitel 2 auf die gestörten dynamischen Systeme verallgemeinern. Viele Beweise können wir uns hierbei sparen, weil sie völlig analog zu den Beweisen aus Kapitel 2 funktionieren.

Wir erinnern an die Definition von  $\Psi_\alpha$  als

$$\Psi_\alpha(t, x) = \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, x, w)\}.$$

Analog zu dynamischen Systemen definieren wir für  $D \subseteq X$  die Menge

$$\Psi_\alpha(t, D) = \bigcup_{x \in D} \Psi_\alpha(t, x).$$

Das schöne an dieser Abbildung  $\Psi_\alpha$  ist, dass diese nun wieder die einfachere Kozykluseigenschaft nichtgestörter (semi-)dynamischer Systeme erfüllt.

**Lemma 3.6** Für jede Menge  $D \subseteq X$  und alle  $t, s \in \mathbb{T}_0^+$  gilt

$$\Psi_\alpha(t + s, D) = \Psi_\alpha(t, \Psi_\alpha(s, D)).$$

**Beweis:** Betrachte ein beliebiges  $s \in \mathbb{T}_0^+$ . Dann ist für jedes  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  die Funktion  $w(s + \cdot)$  wieder in  $\mathcal{W}_\alpha$ . Umgekehrt ist für je zwei Funktionen  $w_1, w_2 \in \mathcal{W}_\alpha$  die Funktion  $w(t)$  gegeben durch

$$w(t) = w_1(t), t < s \text{ und } w(t + s) = w_2(t), t \geq 0$$

ebenfalls wieder in  $\mathcal{W}_\alpha$ . Also folgt die Gleichheit

$$\mathcal{W}_\alpha = \{w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid w(t) = w_1(t), t < s, w(t + s) = w_2(t), t \geq 0, w_1, w_2 \in \mathcal{W}_\alpha\},$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t + s, D) &= \bigcup_{x \in D} \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t + s, x, w)\} \\ &= \bigcup_{x \in D} \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, \Psi(s, x, w), w(s + \cdot))\} \\ &= \bigcup_{x \in D} \bigcup_{w_1 \in \mathcal{W}_\alpha} \bigcup_{w_2 \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, \Psi(s, x, w_1), w_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{w_2 \in \mathcal{W}_\alpha} \Psi \left( t, \underbrace{\bigcup_{x \in D} \bigcup_{w_1 \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(s, x, w_1)\}}_{=\Psi_\alpha(s, D)}, w_2 \right) \\
&= \Psi_\alpha(t, \Psi_\alpha(s, D))
\end{aligned}$$

also die Behauptung.  $\square$

Nun können wir dynamische Objekte für  $\Psi_\alpha$  definieren.

**Definition 3.7 ( $\alpha$ -invariante Menge)** Eine Menge  $D_\alpha \subseteq X$  heißt *vorwärts (oder positiv)  $\alpha$ -invariant*, falls die Inklusion

$$\Psi_\alpha(t, D_\alpha) \subseteq D_\alpha \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt. Die Menge  $D_\alpha$  heißt *rückwärts (oder negativ)  $\alpha$ -invariant*, falls

$$\Psi_\alpha(t, D_\alpha) \supseteq D_\alpha \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt und sie heißt  *$\alpha$ -invariant*, falls

$$\Psi_\alpha(t, D_\alpha) = D_\alpha \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

gilt.  $\square$

Wir illustrieren dies an einem Beispiel.

**Beispiel 3.8** Betrachte die eindimensionale gestörte Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t) + w(t).$$

Für diese DGL sind die Mengen

$$D_\alpha = [-\alpha, \alpha]$$

$\alpha$ -invariant.

Wir beweisen zunächst die Vorwärts-Invarianz: Betrachte einen Punkt  $x \in D_\alpha$ , eine Störfunktion  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  und die zugehörige Lösung  $\Psi(t; x, w)$ . Wir nehmen an, es gebe einen Zeitpunkt  $t^* > 0$ , so dass  $\Psi(t^*; x, w) > \alpha$  ist. Dann gibt es einen Zeitpunkt  $t_1 < t^*$  mit  $\Psi(t_1; x, w) < \Psi(t^*; x, w)$  und  $\Psi(t; x, w) > \alpha$  für alle  $t \in [t_1, t^*]$ . Auf diesem Intervall gilt dann

$$\frac{d}{dt} \Psi(t; x, w) = - \underbrace{\Psi(t; x, w)}_{> \alpha} + \underbrace{w(t)}_{\leq \alpha} < 0.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\Psi(t^*; x, w) < \Psi(t_1; x, w),$$

was der Wahl von  $t^*$  und  $t_1$  widerspricht. Also gilt

$$\Psi(t; x, w) \leq \alpha,$$

und wegen der Symmetrie der Gleichung auch  $\Psi(t; x, w) \geq -\alpha$ , also  $\Psi(t; x, w) \in D_\alpha$  und damit  $\Psi_\alpha(t; D_\alpha) \subseteq D_\alpha$  für alle  $t \geq 0$ .

Die Rückwärts-Invarianz ergibt sich wie folgt. Für  $x \in D_\alpha$  wähle  $w_x(t) \equiv x$ . Dann gilt für die Funktion  $y(t) \equiv x$  die Gleichung

$$\dot{y}(t) = 0 = -x + x = -x + w_x(t) = -y(t) + w_x(t).$$

Die konstante Funktion  $y(t) \equiv x_0$  erfüllt also die DGL sowie die Anfangsbedingung  $y(0) = x$  und stimmt daher mit  $\Psi(t; x, w_x)$  überein. Also folgt

$$\Psi_\alpha(t; D_\alpha) = \bigcup_{x \in D_\alpha} \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t; x, w)\} \supseteq \bigcup_{x \in D_\alpha} \{\Psi(t; x, w_x)\} = \bigcup_{x \in D_\alpha} \{x\} = D_\alpha$$

für alle  $t \geq 0$  und damit die Rückwärts-Invarianz.  $\square$

**Bemerkung 3.9** Für ungestörte dynamische Systeme konnten wir die Invarianzeigenschaften alternativ mittels des Verhaltens in Rückwärtszeit charakterisieren, vgl. Bemerkung 2.2 (ii) und (iii). Für die gestörten Systeme gilt diese alternative Darstellung der nicht, selbst wenn die Lösungen in Rückwärtszeit eindeutig existieren.

In Beispiel 3.8 kann man z.B. für die Störfunktion  $w(T) \equiv 0$  leicht die expliziten Lösungen  $\Psi(t; x, 0) = e^{-t}x$  errechnen. Jede Lösung  $\Psi(t; x, 0)$  mit  $x \in D_\alpha$  und  $x \neq 0$  divergiert also in Rückwärtszeit gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  und verlässt damit die (gemäß der obigen ‘Vorwärts’-Definition invariante) Menge  $D_\alpha$  für hinreichend kleines  $t < 0$ .  $\square$

**Definition 3.10 ( $\alpha$ -asymptotische Stabilität,  $\alpha$ -Attraktor)**

(i) Eine kompakte Menge  $A \subset X$  heißt  $\alpha$ -asymptotisch stabil, falls sie vorwärts  $\alpha$ -invariant ist und eine offene Umgebung  $B$  von  $A$  existiert, so dass die Konvergenz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H^*(\Psi_\alpha(t, B), A) = 0$$

gilt. Die Menge  $B$  wird auch hier *Stabilitätsumgebung* genannt.

(ii) Eine kompakte Menge  $A \subset X$  heißt  $\alpha$ -Attraktor, falls sie  $\alpha$ -asymptotisch stabil und  $\alpha$ -invariant ist.  $\square$

**Beispiel 3.11** Tatsächlich sind die Mengen  $D_\alpha$  aus Beispiel 3.8  $\alpha$ -Attraktoren für jede beliebige beschränkte offene Umgebung  $B$  von  $D_\alpha$ . Dies kann man direkt nachweisen, eleganter ist es allerdings, hierfür Lyapunov-Funktionen zu verwenden. Wir kommen auf dieses Beispiel zurück, wenn wir den dafür nötigen Satz formuliert haben.  $\square$

Für die hier definierten ‘ $\alpha$ -Objekte’ gelten alle Aussagen aus Abschnitt 2.2 analog, wenn sie geeignet an  $\Psi_\alpha$  angepasst werden. Die folgenden Resultate sind daher völlig analog zu denen aus Abschnitt 2.2.

**Satz 3.12** Gegeben sei eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Dann ist die Menge  $A_\alpha$  genau dann ein  $\alpha$ -Attraktor, wenn sie die minimale  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist, d.h., wenn für jeder weitere  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  die Inklusion  $A_\alpha \subseteq A_\alpha^*$  gilt.

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.10, wobei man lediglich benötigt, dass die Stetigkeit von  $\Psi$  in  $x$  auf kompakten Mengen gleichgradig in  $w$  ist (d.h., das  $\delta$  in der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Formulierung der Stetigkeit kann unabhängig von  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  gewählt werden). Diese Eigenschaft erhält man für Differentialgleichungen aus dem Gronwall-Lemma, aus dem folgt, dass die Stetigkeitseigenschaften der Lösungen der gestörten DGL nur von der Lipschitz-Konstante von  $f$  abhängen. Für diskrete Systeme folgt die Eigenschaft per Induktion.

Der Vollständigkeit halber geben wir hier den ausführlichen Beweis an, er ist aber tatsächlich vollständig identisch zum Beweis von Satz 2.10:

Nach Voraussetzung ist  $A_\alpha$  vorwärts  $\alpha$ -invariant und  $\alpha$ -asymptotisch stabil. Die Menge  $A_\alpha$  ist also genau dann ein  $\alpha$ -Attraktor, wenn sie negativ  $\alpha$ -invariant ist, also  $\Psi_\alpha(t, A_\alpha) \supseteq A_\alpha$  für alle  $t \in \mathbb{T}^+$  gilt. Wir beweisen die zur Behauptung äquivalente Aussage

$$A_\alpha \text{ ist nicht negativ } \alpha\text{-invariant} \Leftrightarrow A_\alpha \text{ ist nicht minimal.}$$

Wir zeigen zunächst die Aussage “ $A_\alpha$  nicht negativ  $\alpha$ -invariant  $\Rightarrow A_\alpha$  nicht minimal”:

Sei  $A_\alpha$  nicht negativ  $\alpha$ -invariant. Dann gibt es  $t^* > 0$  so dass  $A_\alpha^* := \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha) \not\supseteq A_\alpha$  gilt. Da  $A_\alpha$  nach Definition vorwärts  $\alpha$ -invariant ist, ist  $A_\alpha^* = \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha) \subseteq A_\alpha$ , also ist  $A_\alpha^*$  eine echte Teilmenge von  $A_\alpha$ . Zudem ist  $A_\alpha^*$  vorwärts  $\alpha$ -invariant, denn für jedes  $t \geq 0$  gilt

$$\Psi_\alpha(t, A_\alpha^*) = \Psi_\alpha(t, \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha)) = \Psi_\alpha(t + t^*, A_\alpha) = \Psi_\alpha(t^*, \underbrace{\Psi_\alpha(t, A_\alpha)}_{\subseteq A_\alpha}) \subseteq \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha) = A_\alpha^*.$$

Sei nun beliebiges  $t > t^*$  gegeben. Dann gilt

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha^*) = H^*(\Psi_\alpha(t^*, \Psi_\alpha(t - t^*, B)), \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha)).$$

Nun gilt  $H^*(\Psi_\alpha(t - t^*, B), A_\alpha) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Da  $\Psi$  stetig ist und  $\Psi_\alpha(t - t^*, B)$  beschränkt ist, ist  $\Psi(t^*, \cdot, w)$  gleichmäßig (in  $x$ ) und gleichgradig (in  $w$ ) stetig auf einer kompakten Umgebung von  $B$ . Daraus folgt

$$H^*(\Psi_\alpha(t^*, \Psi_\alpha(t - t^*, B)), \Psi_\alpha(t^*, A_\alpha)) \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow \infty$ , also auch  $H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha^*) \rightarrow 0$ . Wir haben damit für  $A_\alpha^*$  alle notwendigen Eigenschaften für eine asymptotisch stabile Menge nachgewiesen, und da  $A_\alpha^* \subset A_\alpha$  ist, ist  $A_\alpha$  folglich keine minimale asymptotisch stabile Menge.

Nun zeigen wir die umgekehrte Aussage “ $A_\alpha$  nicht minimal  $\Rightarrow A_\alpha$  nicht negativ  $\alpha$ -invariant”:

Sei  $A_\alpha$  nicht minimal, d.h., es gibt eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha^* \subset A_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  und  $A_\alpha^* \neq A_\alpha$ . Dann gilt  $H^*(A_\alpha, A_\alpha^*) > 0$ . Also folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$H^*(A_\alpha, \Psi_\alpha(t, A_\alpha)) \geq \underbrace{H^*(A_\alpha, A_\alpha^*)}_{>0} - \underbrace{H^*(\Psi_\alpha(t, A_\alpha), A_\alpha^*)}_{\rightarrow 0}.$$

Für hinreichend großes  $t > 0$  folgt also  $H^*(A_\alpha, \Psi_\alpha(t, A_\alpha)) > 0$  und damit  $\Psi_\alpha(t, A_\alpha) \neq A_\alpha$ , womit  $A_\alpha$  nicht negativ  $\alpha$ -invariant ist.  $\square$



**Definition 3.13** Eine kompakte Menge  $C_\alpha \subset X$  heißt  $\alpha$ -absorbierende Menge, falls ein  $T > 0$  existiert, so dass  $\overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subset \text{int } C_\alpha$  gilt für alle  $t \geq T$ , wobei “ $\text{int } C_\alpha$ ” das Innere der Menge  $C_\alpha$  bezeichnet.  $\square$

**Satz 3.14** Jede  $\alpha$ -absorbierende Menge  $C_\alpha \subset X$  enthält einen  $\alpha$ -Attraktor  $A_\alpha \subset \text{int } C_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } C$ . Dieser Attraktor ist gegeben durch

$$A_\alpha = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Psi_\alpha(t, C_\alpha)}.$$

**Beweis:** Wiederum ist der Beweis völlig analog zu seinem “ungestörten” Gegenstück (Satz 2.12), wobei man  $\Phi(t, D)$  durch  $\overline{\Psi_\alpha(t, D)}$  ersetzt. In diesem Beweis benötigt man, dass für kompakte Mengen  $D \subset X$  das Bild

$$\bigcup_{t \in [T_1, T_2]} \overline{\Psi_\alpha(t, D)}$$

kompakt ist. Für diskrete Systeme lässt sich dies leicht per Induktion beweisen, für gestörte Differentialgleichungen ist dies allerdings ein tief liegendes Resultat, dessen Beweis wir hier nur skizzieren wollen:

Mit einer geeigneten Metrik (der sogenannten schwach\*-Metrik) versehen, wird die Menge  $\overline{\mathcal{W}_\alpha}$  eine kompakte Teilmenge des Funktionenraums  $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Der schwierige Teil des Beweises (er findet sich z.B. in [2]) besteht nun darin, zu zeigen, dass die Lösungen  $\Psi(t, x, w)$  bzgl. dieser schwach\*-Metrik auf  $\overline{\mathcal{W}_\alpha}$  stetig von  $w$  abhängen. Damit folgt die Kompaktheit der obigen Menge, da sie gerade das Bild der kompakten Menge  $[T_1, T_2] \times D \times \overline{\mathcal{W}_\alpha}$  unter einer stetigen Abbildung ist.

Aus Gründen der Vollständigkeit hier der ausführliche Beweis, der wiederum direkt aus dem ungestörten Fall, also von Satz 2.12, übernommen wurde:

Zunächst einmal muss man sich überlegen, dass  $A_\alpha$  nicht leer ist. Betrachte ein  $x \in C_\alpha$  und ein  $w \in \mathcal{W}_\alpha$ . Da  $\Psi(t, x, w) \in \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subset \text{int } C_\alpha$  ist für  $t \geq T$ , ist  $\Psi(t, x, w)$  beschränkt und besitzt damit einen Häufungspunkt, der für alle  $s > 0$  in  $\bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}$  liegen muss. Daher ist  $A_\alpha$  nicht leer.

Als nächstes zeigen wir, dass  $A_\alpha$  in  $\text{int } C_\alpha$  enthalten ist. Hierzu zeigen wir zunächst die Inklusion

$$\bigcup_{t \geq T} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subseteq \bigcup_{t \in [T, 2T]} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}. \quad (3.3)$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass für beliebige  $t > 0$  die Inklusion

$$\overline{\Psi_\alpha(t+T, C_\alpha)} = \overline{\Psi_\alpha(t, \Psi_\alpha(T, C_\alpha))} \subseteq \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}$$

gilt, weswegen per Induktion auch die Inklusion  $\overline{\Psi_\alpha(t+nT, C_\alpha)} \subseteq \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Damit folgt (3.3). Da  $\overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subset \text{int } C_\alpha$  für jedes  $t \in [T, 2T]$  gilt, gilt

$$\bigcup_{t \in [T, 2T]} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subset \text{int } C_\alpha$$

und weil  $\bigcup_{t \in [T, 2T]} \overline{\Psi_\alpha(t, C)}$  nach der Vorüberlegung am Anfang des Beweises kompakt ist, folgt mit (3.3)

$$\bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subseteq \overline{\bigcup_{t \in [T, 2T]} \Psi_\alpha(t, C_\alpha)} = \bigcup_{t \in [T, 2T]} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \subset \text{int } C_\alpha$$

für alle  $s \geq T$ , womit auch der Schnitt  $A_\alpha$  in  $\text{int } C_\alpha$  liegt.

Wir zeigen nun die  $\alpha$ -Attraktoreigenschaften für  $A_\alpha$ , nämlich  $\alpha$ -Invarianz und  $\alpha$ -asymptotische Stabilität.

Zur  $\alpha$ -Invarianz: Beachte zunächst, dass für jedes  $\tau \in \mathbb{T}^+$  die Gleichung

$$A_\alpha = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} = \bigcap_{s \geq \tau} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}$$

gilt, da die Mengen, die hier geschnitten werden, für wachsende  $s$  kleiner werden.

Für ein beliebiges  $\tau \in \mathbb{T}$  gilt nun

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(\tau, A_\alpha) &= \Psi \left( \tau, \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \right) = \bigcap_{s \geq 0} \Psi_\alpha \left( \tau, \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} \right) \\ &= \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(\tau, \Psi_\alpha(t, C_\alpha))} = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(\tau + t, C_\alpha)} \\ &= \bigcap_{s \geq \tau} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)} = A_\alpha \end{aligned}$$

Zur  $\alpha$ -asymptotischen Stabilität: Angenommen, diese Eigenschaft gilt nicht. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  sowie Folgen  $x_n \in B$ ,  $w_n \in \mathcal{W}_\alpha$  und  $t_n \rightarrow \infty$ , so dass

$$d(\Psi(t_n, x_n, w_n), A_\alpha) \geq \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Da  $\Psi(t_n, x_n, w_n) \in C_\alpha$  liegt, gibt es einen Häufungspunkt  $y$  dieser Folge, für den

$$y \in \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, C_\alpha)}$$

für alle  $s \geq 0$  gelten muss. Also liegt  $y \in A_\alpha$ , und nach Dreiecksungleichung gilt

$$d(\Psi(t_n, x_n, w_n), A_\alpha) \leq d(\Psi(t_n, x_n, w_n), y) + \underbrace{d(y, A_\alpha)}_{=0} = d(\Psi(t_n, x_n, w_n), y).$$

Da  $y$  ein Häufungspunkt der Folge  $\Psi(t_n, x_n, w_n)$  ist, gibt es eine Teilfolge  $t_{n_j} \rightarrow \infty$  mit der Eigenschaft  $d(\Psi(t_{n_j}, x_{n_j}, w_{n_j}), y) \rightarrow 0$ . Also folgt

$$d(\Psi(t_{n_j}, x_{n_j}, w_{n_j}), A) \leq d(\Psi(t_{n_j}, x_{n_j}, w_{n_j}), y) \rightarrow 0,$$

was (3.4) widerspricht.  $\square$

Wie im ungestörten Fall können wir zwei Konsequenzen der vorangegangenen Sätze zusammen fassen.

**Korollar 3.15** (i) Jede  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge enthält einen  $\alpha$ -Attraktor mit der gleichen Stabilitätsumgebung.

(ii) Für jede offene Menge  $O \subset X$  und jedes  $\alpha \geq 0$  gibt es höchstens einen  $\alpha$ -Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B = O$ .

**Beweis:** Völlig analog zum Beweis von Korollar 2.13.  $\square$

Auch das Konzept der Lyapunov-Funktionen lässt sich direkt auf die gestörten Systeme übertragen. Es gilt der folgende Satz.

**Satz 3.16** Gegeben sei ein  $\alpha \geq 0$ , eine kompakte Menge  $A_\alpha$ , eine vorwärts  $\alpha$ -invariante offene Menge  $O \subset X$  mit  $A_\alpha \subset O$  und eine stetige Funktion  $V_\alpha : O \rightarrow \mathbb{R}$  mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$\alpha_1(d(x, A_\alpha)) \leq V_\alpha(x) \leq \alpha_2(d(x, A_\alpha))$$

für alle  $x \in O$ .

Darüberhinaus existiere eine lokal Lipschitz stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $g(r) = 0$  für  $r \leq 0$ , so dass eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(a) Falls  $\Psi$  ein durch eine gestörte Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t)$  erzeugtes (semi-)dynamisches System mit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  und  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, so sei  $V_\alpha$  stetig differenzierbar und es gelte

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n, \|w\| \leq \alpha} DV_\alpha(x)(f(x) + w) \leq -g(V_\alpha(x)) \quad (3.5)$$

für alle  $x \in O$ .

(b) Falls  $\Psi$  ein durch ein  $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  erzeugtes diskretes gestörtes (semi-)dynamisches System mit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  und  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, so gelte

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n, \|w\| \leq \alpha} V_\alpha(\Phi(h, x) + hw) \leq V_\alpha(x) - hg(V_\alpha(x)) \quad (3.6)$$

für alle  $x \in O$ .

Dann ist  $A_\alpha$  eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge, wobei als Stabilitätsumgebung  $B$  jede beschränkte offene Teilmenge  $B \subseteq O$  mit  $A_\alpha \subset B$  gewählt werden kann. Die Funktion  $V_\alpha$  bezeichnen wir als  $\alpha$ -Lyapunov-Funktion.

**Beweis:** Auch hier verläuft der Beweis völlig analog zum ungestörten Fall (Satz 2.15).

Wir beweisen zuerst den kontinuierlichen Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . Wir wählen ein beliebiges  $x \in O$  und  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  und schreiben kurz  $V_\alpha(t) = V_\alpha(\Psi(t, x, w))$  für  $t > 0$ . Aus (3.5) folgt dann

$$\dot{V}_\alpha(t) \leq -g(V_\alpha(t)). \quad (3.7)$$

Wir betrachten nun die Funktion  $r(t; r_0)$ , die als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{r}(t) = -g(r(t)) \quad (3.8)$$

mit Anfangswert  $r_0 \geq 0$  zur Anfangszeit  $t_0 = 0$  definiert ist. Diese Funktion ist exakt die gleiche Funktion wie im Beweis von Satz 2.15, es gilt also  $r(t; r_0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ ,  $r(t; r_1) \leq r(t; r_2)$  für alle  $t \geq 0$  und alle  $r_1 \leq r_2$  und

$$V_\alpha(t) \leq r(t; V_\alpha(x)) \quad (3.9)$$

für alle  $t \geq 0$ .

Alle benötigten Eigenschaften der  $\alpha$ -asymptotischen Stabilität von  $A_\alpha$  folgen jetzt aus (3.9). Falls  $x \in A_\alpha$  liegt, so gilt  $V_\alpha(x) \leq \alpha_2(d(x, A_\alpha)) = \alpha_2(0) = 0$ . Damit folgt für  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$V_\alpha(\Psi(t, x, w)) \leq r(t; V_\alpha(x)) = r(t; 0) = 0.$$

Also gilt

$$d(\Psi(t, x, w), A_\alpha) \leq \alpha_1^{-1}(V_\alpha(\Psi(t, x, w))) = \alpha_1^{-1}(0) = 0$$

und damit  $\Psi(t, x, w) \in A$  für alle  $t \geq 0$ . Da dies für alle  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  gilt, folgt daraus die Vorwärts- $\alpha$ -Invarianz.

Sei nun  $B \subseteq O$  eine beschränkte offene Menge mit  $A_\alpha \subset B$ . Dann gilt  $\sup_{x \in B} d(x, A_\alpha) =: M < \infty$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} H^*(\Psi(t, B), A_\alpha) &\leq \sup_{x \in B} \sup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} d(\Psi(t, x, w), A_\alpha) \\ &\leq \sup_{x \in B} \sup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \alpha_1^{-1}(V_\alpha(\Psi(t, x, w))) \\ &\leq \sup_{x \in B} \alpha_1^{-1}(r(t; V_\alpha(x))) \\ &\leq \sup_{x \in B} \alpha_1^{-1}(r(t; \alpha_2(d(x, A_\alpha)))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(r(t; \alpha_2(M))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $t \rightarrow \infty$ , wobei wir in der letzten Ungleichung die Monotonieeigenschaft von  $r$  und die Monotonie von  $\alpha_1^{-1}$  und  $\alpha_2$  verwendet haben. Dies zeigt die asymptotische Stabilität.

Im zeitdiskreten Fall argumentiert man mit den gleichen Modifikationen wie im Beweis von Satz 2.15 für ungestörte Systeme.  $\square$

**Beispiel 3.17** Wir beweisen nun die in Beispiel 3.11 aufgestellte Behauptung, dass die Mengen

$$A_\alpha = [-\alpha, \alpha]$$

Attraktoren für die gestörte DGL

$$\dot{x}(t) = -x(t) + w(t)$$

aus Beispiel 3.8 sind.

Die  $\alpha$ -Invarianz wurde bereits in Beispiel 3.8 gezeigt, es bleibt, die  $\alpha$ -asymptotische Stabilität zu zeigen. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$V_\alpha(x) = \begin{cases} (x - \alpha)^2, & x \geq \alpha \\ 0, & |x| \leq \alpha \\ (x + \alpha)^2, & x \leq -\alpha \end{cases}$$

Zunächst beobachten wir, dass  $V_\alpha$  wegen

$$DV_\alpha(x) = \begin{cases} 2(x - \alpha), & x \geq \alpha \\ 0, & |x| \leq \alpha \\ 2(x + \alpha), & x \leq -\alpha \end{cases}$$

tatsächlich (einmal) stetig differenzierbar ist. Außerdem gelten offenbar die in Satz 3.16 benötigten Schranken mit  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ .

Nun unterscheiden wir drei Fälle

(1) Für  $x \geq \alpha$  gilt

$$\begin{aligned} DV_\alpha(x)(f(x) + w) &= 2(x - \alpha)(-x + w) \\ &= -2x^2 + 2\alpha x + 2xw - 2\alpha w \\ &= -2(x - \alpha)^2 - 2x\alpha + 2\alpha^2 + 2xw - 2\alpha w \\ &= -2(x - \alpha)^2 - 2(x - \alpha)\alpha + 2(x - \alpha)w. \end{aligned}$$

Hier wird das Maximum für  $w \in [-\alpha, \alpha]$  in  $w = \alpha$  angenommen, es folgt also

$$\max_{|w| \leq \alpha} DV_\alpha(x)(f(x) + w) = -2V_\alpha(x) \underbrace{-2(x - \alpha)\alpha + 2(x - \alpha)\alpha}_{=0} \leq -2V_\alpha(x).$$

(2) Für  $x \leq -\alpha$  gilt

$$\begin{aligned} DV_\alpha(x)(f(x) + w) &= 2(x + \alpha)(-x + w) \\ &= -2x^2 + 2\alpha x + 2xw + 2\alpha w \\ &= -2(x + \alpha)^2 + 2x\alpha + 2\alpha^2 + 2xw + 2\alpha w \\ &= -2(x + \alpha)^2 + 2(x + \alpha)\alpha + 2(x + \alpha)w. \end{aligned}$$

Hier wird das Maximum für  $w \in [-\alpha, \alpha]$  in  $w = -\alpha$  angenommen, es folgt also

$$\max_{|w| \leq \alpha} DV_\alpha(x)(f(x) + w) = -2V_\alpha(x) \underbrace{+2(x + \alpha)\alpha + 2(x + \alpha)(-\alpha)}_{=0} \leq -2V_\alpha(x).$$

(3) Für  $x \in A_\alpha$  (also  $|x| \leq \alpha$ ) gilt  $DV_\alpha(x) = 0$  und damit

$$DV_\alpha(x)(f(x) + w) = 0 = -2V_\alpha(x)$$

für alle  $w \in [-\alpha, \alpha]$ .

In allen drei Fällen erhalten wir also mit der Wahl  $g(r) = 2r$  die Ungleichung (3.5). Daher ist  $V_\alpha$  eine  $\alpha$ -Lyapunov Funktion, weswegen  $A_\alpha$   $\alpha$ -asymptotisch stabil ist.  $\square$

Tatsächlich könnte man jetzt fortfahren und auch das letzte Resultat aus Abschnitt 2.2 — nämlich Satz 2.18, der besagt, dass Attraktoren unter Diskretisierung erhalten bleiben — für gestörte Systeme formulieren. Da wir diesen Satz für gestörte Systeme im Folgenden aber nicht benötigen, sparen wir uns diese Arbeit.

Statt dessen überlegen wir uns zum Ende dieses Abschnittes, welche Folgerung wir aus der Existenz von  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen für unsere numerischen Approximationen ziehen können. Die Antwort liefert der folgende Satz.

**Satz 3.18** Betrachte eine DGL (3.1) und ein zugehöriges Einschrittverfahren gemäß Definition 3.3 für eine beliebige aber feste Schrittweite  $h > 0$ . Dann gilt:

(i) Falls das gestörte System  $\Psi_\alpha$  eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  für  $\alpha = (1 + Lh)Eh^p$  besitzt, so ist  $A_\alpha$  ebenfalls eine asymptotisch stabile

Menge für das numerische System  $\tilde{\Phi}_h$ . Insbesondere besitzt  $\tilde{\Phi}_h$  einen Attraktor  $\tilde{A}_h^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  und  $\tilde{A}_h^* \subseteq A_\alpha$ .

(ii) Falls das gestörte numerische System  $\tilde{\Psi}_{h,\alpha}$  eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $\tilde{A}_{h,\alpha}$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  für  $\alpha = Eh^p$  besitzt, so ist  $\tilde{A}_{h,\alpha}$  ebenfalls eine asymptotisch stabile Menge für die Zeit- $h$ -Abbildung  $\tilde{\Phi}_h$  des kontinuierlichen Systems  $\Phi$ . Insbesondere besitzt das kontinuierliche System  $\Phi$  einen Attraktor  $A^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  und  $A^* \subseteq \tilde{A}_{\alpha,h}$ .

**Beweis:** (i) Nach dem Einbettungslemma 3.5 gilt für jede Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  die Gleichung

$$\tilde{\Phi}_h(t, D) \subseteq \Psi_\alpha(t, D)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ . Hieraus folgt sofort die Vorwärts-Invarianz von  $A_\alpha$  bzgl.  $\tilde{\Phi}_h$ . Außerdem folgt aus der Inklusion für jede beliebige kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$H^*(\tilde{\Phi}_h(t, D), C) \leq H^*(\Psi_\alpha(t, D), C)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ . Also folgt die Konvergenz  $H^*(\tilde{\Phi}_h(t, B), A) \rightarrow 0$  sofort aus der  $\alpha$ -asymptotischen Stabilität. Damit ist  $A_\alpha$  asymptotisch stabil für  $\tilde{\Phi}_h$ . Die Existenz von  $\tilde{A}_h^*$  folgt nun sofort aus Korollar 2.13(i).

(ii) Die asymptotische Stabilität von  $\tilde{A}_{h,\alpha}$  bzgl.  $\tilde{\Phi}_h$  folgt ganz analog zum Teil (i). Nach Korollar 2.13(i) existiert also ein Attraktor  $A$  für  $\tilde{\Phi}_h$ , der nach Satz 2.18 ebenfalls ein Attraktor für  $\Phi$  ist.  $\square$

Zu beachten ist bei diesem Satz, dass beide Aussagen für die numerische Simulation wertvoll sind: Aussage (i) besagt, dass wir asymptotisch stabile Mengen in der numerische Approximation entdecken können, während Aussage (ii) ein numerisches Kriterium liefert, mit dessen Hilfe wir auf die Existenz einer asymptotisch stabilen Menge für das kontinuierliche System schließen können.

Dieser Satz kann als Startpunkt unserer weiteren Untersuchungen verstanden werden. Wenngleich der Satz relativ starke Aussagen macht, so hat er doch den großen Nachteil, dass seine Voraussetzungen (nämlich die Existenz von  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen) nur sehr schwer zu überprüfen sind. Unsere Hauptziele in den folgenden Abschnitten sind also die folgenden:

- Die Herleitung einfacher Bedingungen, aus denen die Existenz  $\alpha$ -asymptotisch stabiler Mengen folgt.
- Die Klärung der Beziehung zwischen  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen  $A_\alpha$  (bzw.  $\tilde{A}_{h,\alpha}$ ) für die gestörten Systeme  $\Psi_\alpha$  (bzw.  $\tilde{\Psi}_{h,\alpha}$ ) und asymptotisch stabilen Mengen  $A$  (bzw.  $\tilde{A}_h$ ) für das zugehörige ungestörte System  $\Phi$  (bzw.  $\tilde{\Phi}_h$ ).
- Die Entwicklung geeigneter analytischer Methoden, um diese Fragen “elegant” zu beantworten.

Zur “Bearbeitung” dieser Punkte werden wir insbesondere *quantitative* Aspekte der asymptotischen Stabilität benötigen, die wir bisher noch gar nicht berücksichtigt haben. Diese führen wir im folgenden Abschnitt ein.

### 3.3 Attraktionsraten

Wir betrachten in diesem Abschnitt die gestörten Systeme  $\Psi_\alpha$  für  $\alpha \geq 0$ . Beachte, dass wir  $\Psi_0$  mit  $\Phi$  identifizieren können, der Fall  $\alpha = 0$  entspricht also gerade dem ungestörten System. Alle Definitionen und Resultate in diesem Abschnitt gelten also insbesondere für ungestörte Systeme.

Bisher haben wir in der  $\alpha$ -asymptotischen Stabilität nur angenommen, dass der Abstand

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha)$$

gegen Null konvergiert. Wir wollen nun ein Maß dafür einführen, wie schnell dieser Abstand gegen Null konvergiert. Dazu dient die folgende Funktionenklasse.

**Definition 3.19** Wir definieren die folgende Klasse von Funktionen

$$\mathcal{KL} := \left\{ \beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \left| \begin{array}{l} \beta \text{ ist stetig, } \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}_\infty \text{ für jedes } t \geq 0 \\ \text{und } \beta(r, t) \text{ ist streng monoton fallend in } t \\ \text{mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0 \text{ für jedes } r > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

□

Abbildung 3.1 veranschaulicht eine typische  $\mathcal{KL}$ -Funktion.

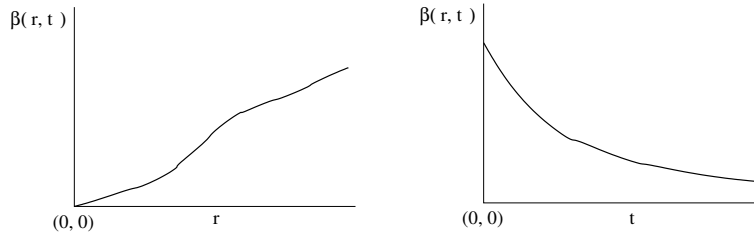


Abbildung 3.1: Typische  $\mathcal{KL}$ -Funktion  $\beta$

**Definition 3.20 (Attraktionsrate)** Gegeben sei eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  heißt *Attraktionsrate* von  $A_\alpha$ , wenn für alle  $x \in B$  die Abschätzung

$$H^*(\Psi_\alpha(t, x), A_\alpha) \leq \beta(d(x, A_\alpha), t)$$

gilt.

□

Das folgende Lemma zeigt, dass jede  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge eine Attraktionsrate in obigem Sinne besitzt.

**Lemma 3.21** Jede  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge  $A_\alpha$  besitzt eine Attraktionsrate  $\beta \in \mathcal{KL}$ .

**Beweis:** Für jedes  $r > 0$  betrachten wir die Menge  $B_r$  aller Punkte in  $B$  mit Abstand  $\leq r$  von  $A_\alpha$ , also

$$B_r := \{x \in B \mid d(x, A_\alpha) \leq r\}.$$

Wir definieren zunächst eine Hilfsfunktion  $\tilde{\beta}$  mittels

$$\tilde{\beta}(r, t) := \sup_{s \geq t} H^*(\Psi_\alpha(s, B_r), A_\alpha).$$

Für diese Funktion beweisen wir die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $H^*(\Psi_\alpha(t, x), A_\alpha) \leq \tilde{\beta}(d(x, A_\alpha), t)$
- (ii)  $\beta(0, t) = 0$  für alle  $t \geq 0$
- (iii)  $\beta$  ist monoton wachsend in  $r$
- (iv)  $\beta$  ist monoton fallend in  $t$
- (v)  $\beta$  ist stetig

Zu (i): Sei  $x \in B$  mit  $r = d(x, A_\alpha)$ . Dann gilt  $x \in B_r$  und damit

$$H^*(\Psi_\alpha(t, x), A_\alpha) \leq H^*(\Psi_\alpha(t, B_r), A_\alpha) \leq \sup_{s \geq t} H^*(\Psi_\alpha(s, B_r), A_\alpha) = \tilde{\beta}(r, t) = \tilde{\beta}(d(x, A_\alpha), t).$$

Zu (ii): Offenbar ist  $B_0 = A_\alpha$ . Da  $A_\alpha$  vorwärts  $\alpha$ -invariant ist, folgt also

$$\Psi_\alpha(t, B_0) \subseteq A_\alpha$$

und damit

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B_0), A_\alpha) = 0$$

für alle  $t \geq 0$ . Dies zeigt die Behauptung.

Zu (iii): Für  $r_2 \geq r_1$  gilt  $\Psi_\alpha(t, B_{r_2}) \supseteq \Psi_\alpha(t, B_{r_1})$  und damit

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B_{r_2}), A_\alpha) \geq H^*(\Psi_\alpha(t, B_{r_1}), A_\alpha)$$

für alle  $t \geq 0$ . Diese Ungleichung überträgt sich auf das Supremum über  $t$ , also auf  $\tilde{\beta}$ .

Zu (iv): Für  $t_2 \geq t_1$  gilt offenbar

$$\tilde{\beta}(r, t_2) = \sup_{s \geq t_2} H^*(\Psi_\alpha(s, B_r), A_\alpha) \leq \sup_{s \geq t_1} H^*(\Psi_\alpha(s, B_r), A_\alpha) = \tilde{\beta}(r, t_1),$$

also die behauptete Monotonie von  $\tilde{\beta}$  in  $t$ .

Zu (v): Wir wählen ein beliebiges  $r_0 > 0$  und zeigen die Stetigkeit für alle  $t \geq 0$  und alle  $r \in [0, r_0]$ . Da  $r_0 > 0$  beliebig ist, folgt damit die Stetigkeit für alle  $r \geq 0$ . Zum Beweis der Stetigkeit zeigen wir, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $t_1, t_2 \geq 0$  und alle  $r_1, r_2 \in [0, r_0]$  mit  $|t_1 - t_2| \leq \delta_\varepsilon$  und  $|r_1 - r_2| \leq \delta_\varepsilon$  die Ungleichung

$$|\tilde{\beta}(r_1, t_1) - \tilde{\beta}(r_2, t_2)| \leq \varepsilon \tag{3.10}$$



gilt.

Sei also ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $A_\alpha$  asymptotisch stabil ist, folgt die Existenz einer Zeit  $T_\varepsilon > 0$ , so dass

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B_r), A_\alpha) \leq H^*(\Psi_\alpha(t, B_{r_0}), A_\alpha) \leq \varepsilon/2$$

gilt für alle  $r \in [0, r_0]$  und alle  $t \geq T_\varepsilon$ . Daraus folgt für alle  $t_1, t_2 \geq T_\varepsilon$  und alle  $r_1, r_2 \in [0, r_0]$  die Ungleichung

$$|H^*(\Psi_\alpha(t_1, B_{r_1}), A_\alpha) - H^*(\Psi_\alpha(t_2, B_{r_2}), A_\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\Psi_\alpha$  auf  $[0, T_\varepsilon] \times \overline{B_{r_0}}$  existiert nun ein  $\delta_\varepsilon > 0$ , so dass die Ungleichung

$$H^*(\Psi_\alpha(t_1, B_{r_1}), \Psi_\alpha(t_2, B_{r_2})) \leq \varepsilon$$

gilt für alle  $t_1, t_2 \in [0, T_\varepsilon + \delta_\varepsilon]$  und alle  $r_1, r_2 \in [0, r_0]$  mit  $|t_1 - t_2| \leq \delta_\varepsilon$  und  $|r_1 - r_2| \leq \delta_\varepsilon$ . Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung ergibt sich

$$H^*(\Psi_\alpha(t_1, B_{r_1}), A_\alpha) - H^*(\Psi_\alpha(t_2, B_{r_2}), A_\alpha) \leq H^*(\Psi_\alpha(t_1, B_{r_1}), \Psi_\alpha(t_2, B_{r_2})) \leq \varepsilon$$

was wegen der Symmetrie der Abschätzung auch für den Betrag gilt.

Folglich erhalten wir

$$|H^*(\Psi_\alpha(t_1, B_{r_1}), A_\alpha) - H^*(\Psi_\alpha(t_2, B_{r_2}), A_\alpha)| \leq \varepsilon.$$

für alle  $t_1, t_2 \geq 0$  und alle  $r_1, r_2 \in [0, r_0]$  mit  $|t_1 - t_2| \leq \delta_\varepsilon$  und  $|r_1 - r_2| \leq \delta_\varepsilon$ . Hieraus folgt (3.10), denn für alle diese  $t_1, t_2, r_1, r_2$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(t_1, r_1) - \tilde{\beta}(t_2, r_2) &\leq \sup_{s_1 \geq t_1} H^*(\Psi_\alpha(s_1, B_{r_1}), A_\alpha) - \sup_{s_2 \geq t_2} H^*(\Psi_\alpha(s_2, B_{r_2}), A_\alpha) \\ &= \sup_{s_1 \geq t_1} H^*(\Psi_\alpha(s_1, B_{r_1}), A_\alpha) - \underbrace{\sup_{s_2 \geq t_1} H^*(\Psi_\alpha(s_2 + (t_2 - t_1), B_{r_2}), A_\alpha)}_{\geq H^*(\Psi_\alpha(s_1 + (t_2 - t_1), B_{r_2}), A_\alpha)} \\ &\leq \sup_{s_1 \geq t_1} H^*(\Psi_\alpha(s_1, B_{r_1}), A_\alpha) - H^*(\Psi_\alpha(s_1 + (t_2 - t_1), B_{r_1}), A_\alpha) \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

da  $|s_1 - (s_1 + (t_2 - t_1))| \leq \delta_\varepsilon$  ist. Wiederum aus Symmetriegründen gilt diese Ungleichung auch für den Betrag  $|\tilde{\beta}(t_1, r_1) - \tilde{\beta}(t_2, r_2)|$ , woraus (3.10) folgt.

Unser  $\tilde{\beta}$  erfüllt mit den Eigenschaften (i)–(v) alle Eigenschaften einer  $\mathcal{KL}$ -Funktion, mit Ausnahme der geforderten *strengen* Monotonieeigenschaften. Wählen wir nun eine beliebige Funktion  $\hat{\beta} \in \mathcal{KL}$  und setzen

$$\beta(r, t) = \tilde{\beta}(r, t) + \hat{\beta}(r, t),$$

so bleiben (i)–(v) erhalten. Zusätzlich ist  $\beta$  streng monoton und ist damit eine geeignete Attraktionsrate.  $\square$

Der Attraktionsratenformalismus erlaubt eine äquivalente Formulierung der  $\alpha$ -asymptotischen Stabilität.

**Satz 3.22** Gegeben sei eine kompakte Menge  $A_\alpha$  mit beschränkter offener Umgebung  $B$ . Dann ist  $A_\alpha$  genau dann  $\alpha$ -asymptotisch stabil mit Stabilitätsumgebung  $B$ , falls eine Attraktionsrate  $\beta \in \mathcal{KL}$  im Sinne von Definition 3.20 existiert.

**Beweis:** Falls  $A_\alpha$   $\alpha$ -asymptotisch stabil ist, so existiert  $\beta$  gemäß Lemma 3.21. Falls umgekehrt eine Attraktionsrate  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so folgt für jede Menge  $D \subseteq B$  die Ungleichung

$$H^*(\Psi_\alpha(t, D), A_\alpha) \leq \beta(H^*(D, A_\alpha), t).$$

Insbesondere gilt also

$$H^*(\Psi_\alpha(t, A_\alpha), A_\alpha) \leq \beta(H^*(D, A_\alpha), t) = \beta(0, t) = 0$$

für alle  $t \geq 0$ , woraus die vorwärts  $\alpha$ -Invarianz von  $A_\alpha$  folgt und

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha) \leq \beta(H^*(B, A_\alpha), t) \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow \infty$ , woraus die Konvergenzeigenschaft folgt.  $\square$

Zu beachten ist insbesondere, dass aus der Existenz einer Attraktionsrate auch die vorwärts  $\alpha$ -Invarianz folgt, diese muss also nicht mehr gesondert vorausgesetzt werden.

Eine besonders schöne Form der Attraktionsraten erhält man, wenn die Raten selbst wieder durch eine Differenzialgleichung und damit durch ein semi-dynamisches System gegeben sind.

**Definition 3.23** Eine Funktion  $\mu \in \mathcal{KL}$  heißt *dynamisch*, falls eine stetige und auf  $(0, \infty)$  lokal Lipschitz-stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $g(r) = 0$  für  $\mu < 0$  existiert, so dass  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(r, t) = -g(\mu(r, t)), \quad \mu(r, 0) = r$$

ist. Mit  $\mathcal{KLD}$  bezeichnen wir die Menge der dynamischen  $\mathcal{KL}$ -Funktionen.  $\square$

**Bemerkung 3.24** Beachte, dass wir hier nur lokale Lipschitz Stetigkeit für  $r \in (0, \infty)$  angenommen haben. Der übliche Eindeutigkeitsatz garantiert daher nur solange die Eindeutigkeit der Lösungen  $\mu$ , solange sie sich im positiven Bereich aufhalten. Da  $\mu$  als  $\mathcal{KL}$  Funktion allerdings für  $r > 0$  streng monoton fallend in  $t$  ist und nach unten durch 0 beschränkt ist, muss jede Lösung für  $r > 0$  für alle Zeiten positiv bleiben, weswegen wir Eindeutigkeit für alle  $t \geq 0$  erhalten.  $\square$

Das folgende Lemma besagt, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass jede Attraktionsrate  $\beta$  durch eine  $\mathcal{KLD}$ -Funktion erzeugt wird.

**Lemma 3.25** Für jede Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert eine Funktion  $\mu \in \mathcal{KLD}$  und eine Funktion  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ , so dass die Ungleichung

$$\beta(r, t) \leq \mu(\sigma(r), t)$$

für alle  $t, r \geq 0$  gilt. Die Funktion  $\sigma$  kann hierbei sogar auf  $\mathbb{R}^+$  stetig differenzierbar gewählt werden, also aus  $C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

**Beweis:** Da der Beweis zum einen sehr technisch und zum anderen nicht konstruktiv ist, geben wir hier nur eine Skizze:

**Schritt 1:** Zunächst überlegt man sich, dass man für jede  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion  $\sigma$  beliebig nahe an  $\sigma$  liegende  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktionen  $\sigma_*$ ,  $\sigma^* \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  finden kann, die die Ungleichungen

$$\sigma_*(r) \leq \sigma(r) \leq \sigma^*(r)$$

für alle  $r \geq 0$  sowie  $\sigma'_*(r) > 0$  und  $\sigma^{*\prime}(r) > 0$  für alle  $r > 0$  erfüllen. Dies ist in Lemma B.2.1 in [5] genauer ausgeführt.

**Schritt 2:** Den Kern des Beweises bildet ein technisches Resultat aus dem Artikel [9]. Die Proposition 7 in diesem Artikel besagt, dass für jedes  $\beta \in \mathcal{KL}$  Funktionen  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass die Ungleichung

$$\beta(r, t) \leq \sigma_1(\sigma_2(r)e^{-t})$$

für alle  $r, t \geq 0$  gilt. Nach Schritt 1 können wir annehmen, dass  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  aus  $C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  sind.

**Schritt 3:** Wir definieren nun die Funktionen  $\mu$  und  $\sigma$  mittels

$$\mu(r, t) = \sigma_1(\sigma_1^{-1}(r)e^{-t}) \quad \text{und} \quad \sigma(r) = \sigma_1(\sigma_2(r)).$$

Dann gilt

$$\mu(\sigma(r), t) = \sigma_1(\sigma_1^{-1}(\sigma_1(\sigma_2(r)))e^{-t}) = \sigma_1(\sigma_2(r)e^{-t}) \geq \beta(r, t).$$

Für die Ableitung in  $t = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mu(r, t) \right|_{t=0} &= \left. \sigma'_1(\sigma_1^{-1}(r)e^{-t})(-\sigma_1^{-1}(r)e^{-t}) \right|_{t=0} \\ &= -\sigma'_1(\sigma_1^{-1}(r))\sigma_1^{-1}(r) \\ &= -\sigma'_1(\sigma_1^{-1}(\mu(r, 0)))\sigma_1^{-1}(\mu(r, 0)) = -g(\mu(r, 0)) \end{aligned}$$

mit

$$g(r) = \sigma'_1(\sigma_1^{-1}(r))\sigma_1^{-1}(r).$$

Beachte, dass das so definierte  $g$  tatsächlich  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  erfüllt.

Für  $t, s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \mu(r, s+t) &= \sigma_1(\sigma_1^{-1}(r)e^{-s-t}) \\ &= \sigma_1(\sigma_1^{-1}(r)e^{-t}e^{-s}) \\ &= \sigma_1(\sigma_1^{-1}(\underbrace{\sigma_1(\sigma_1^{-1}(r)e^{-t})}_{=\mu(r,t)}))e^{-s} \\ &= \mu(\mu(r, t), t). \end{aligned}$$

Also folgt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$\left. \frac{d}{dt} \mu(r, t) = \frac{d}{ds} \mu(\mu(r, t), s) \right|_{s=0} = -g(\mu(r, t)),$$

weswegen  $\mu$  diese DGL für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 3.26** Beachte, dass die in diesem Beweis konstruierte  $\mathcal{KLD}$ -Funktion  $\mu$  auch für alle negativen  $t$  definiert ist.  $\square$

Aus diesem Lemma erhält man sofort das folgende Korollar.

**Korollar 3.27** Gegeben sei eine kompakte Menge  $A_\alpha$  mit beschränkter offener Umgebung  $B$ . Dann ist  $A_\alpha$  genau dann  $\alpha$ -asymptotisch stabil mit Stabilitätsumgebung  $B$ , falls Funktionen  $\mu \in \mathcal{KLD}$  und  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  existieren, so dass  $\beta(r, t) = \mu(\sigma(r), t)$  eine Attraktionsrate im Sinne von Definition 3.20 ist. Hierbei kann  $\mu$  so gewählt werden, dass es die DGL aus Definition 3.23 für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt.

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 3.22 und Lemma 3.25.  $\square$

Wie kann man nun Attraktionsraten für ein gegebenes Beispiel bestimmen? Tatsächlich gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, von denen wir nur eine betrachten wollen, die für Differentialgleichungen funktioniert und wiederum auf Lyapunov-Funktionen beruht.

**Satz 3.28** Betrachte ein kontinuierliches (semi-)dynamisches System  $\Phi$  im  $\mathbb{R}^n$  mit einer  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Menge  $A_\alpha$  und einer  $\alpha$ -Lyapunov-Funktion  $V_\alpha$  mit den zugehörigen Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus  $C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  seien. Die Funktion  $r(t, r_0)$  bezeichne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{r}(t) = -g(r(t)), \quad r(0) = r_0,$$

wobei wir annehmen, dass jede Lösung  $r(t, r_0)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  existiert.

Dann ist  $\beta(r, t) = \mu(\sigma(r), t)$  mit  $\mu \in \mathcal{KLD}$  und  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  gegeben durch

$$\mu(r, t) = \alpha_1^{-1}(r(t, \alpha_1(r))) \quad \text{und} \quad \sigma(r) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r))$$

eine Attraktionsrate im Sinne von Definition 3.20.

Im Spezialfall  $\alpha_1(r) = r$  vereinfacht sich dies zu

$$\mu(r, t) = r(t, r) \quad \text{und} \quad \sigma(r) = \alpha_2(r).$$

**Beweis:** Zunächst rechnet man nach, dass  $\mu$  die DGL

$$\frac{d}{dt}\mu(r, t) = -\tilde{g}(\mu(r, t)) \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(r) = \alpha_1^{-1}'(\alpha_1(r))g(\alpha_1(r))$$

erfüllt, also tatsächlich aus  $\mathcal{KLD}$  ist.

Aus dem Beweis von Satz 2.15 bzw. Satz 3.16 wissen wir, dass die Ungleichung

$$V_\alpha(\Psi(t, x, w)) \leq r(t, V_\alpha(x))$$

für alle  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  und alle  $x \in O$  gilt. Also folgt für alle  $x \in O$  die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned}
H^*(\Psi_\alpha(t, x), A_\alpha) &\leq \sup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} d(\Psi(t, x, w), A_\alpha) \\
&\leq \sup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \alpha_1^{-1}(V_\alpha(\Psi(t, x, w))) \\
&\leq \alpha_1^{-1}(r(t, V_\alpha(x))) \\
&\leq \alpha_1^{-1}(r(t, \alpha_2(d(x, A_\alpha)))) \\
&= \alpha_1^{-1}(r(t, \alpha_1(\underbrace{\alpha_1^{-1}(\alpha_2(d(x, A_\alpha)))}_{=\sigma(d(x, A_\alpha))}))) \\
&= \mu(d(x, A_\alpha), t) = \beta(s(x, A_\alpha), t)
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 3.29** Wir betrachten wieder die eindimensionale DGL

$$\dot{x}(t) = -x(t) + w(t).$$

In Beispiel 3.17 haben wir mittels der  $\alpha$ -Lyapunov-Funktion  $V_\alpha(x) = d(x, A_\alpha)^2$  nachgewiesen, dass die Mengen

$$A_\alpha = [-\alpha, \alpha]$$

$\alpha$ -asymptotisch stabil sind. Die zugehörige Lyapunov-Ungleichung war mit  $g(r) = 2r$  erfüllt, die Abstandsungleichung mit  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ . Die Lösung der zugehörigen DGL  $\dot{r}(t) = -r(r(t)) = -2r(t)$  lautet

$$r(t, r_0) = e^{-2t} r_0.$$

Mit

$$\alpha_1^{-1}(r) = \alpha_2^{-1}(r) = \sqrt{r}$$

erhalten wir

$$\mu(r, t) = \alpha_1^{-1}(r(t, \alpha_1(r))) = \sqrt{e^{-2t} r^2} = \sqrt{e^{-2t}} r = e^{-t} r$$

und

$$\sigma(r) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r)) = \sqrt{r^2} = r,$$

zusammen also

$$\beta(r, t) = e^{-t} r.$$

□

**Beispiel 3.30** Allgemein nennen wir eine asymptotisch stabile Menge mit Attraktionsrate

$$\beta(r, t) = ce^{-\lambda t} r$$

und  $c, \lambda > 0$  *exponentiell stabil*. Wir werden später sehen, dass solche Mengen bei der numerischen Approximation von Attraktoren eine schöne Eigenschaft haben, die für allgemeinere Attraktionsraten nicht gilt. □



## Kapitel 4

# Robuste Attraktion und zeitliche Diskretisierung

Bisher haben wir die gestörten Systeme  $\Psi_\alpha$  immer für zwar beliebiges aber festes  $\alpha$  betrachtet. In diesem Kapitel ändern wir unsere Sichtweise, wir betrachten die gestörten Systeme als mit  $\alpha \geq 0$  parametrisierte Familie von Systemen, und betrachten explizit, wie sich das dynamische Verhalten ändert, wenn sich der Parameter  $\alpha$  ändert. Dies wird uns erlauben, Aussagen über numerische Verfahren für variablen Zeitschritt  $h > 0$  (und damit variable Genauigkeit) zu machen.

Insbesondere wollen wir dabei messen, wie sich asymptotisch stabile Mengen und Attraktoren bei der Variation von  $\alpha$  (bzw.  $h$ ) ändern. Als erstes führen wir dazu einen schärferen Abstandsbegriff für Mengen ein.

### 4.1 Die Hausdorff–Metrik

Der bisher verwendete nicht symmetrische Hausdorff–Abstand

$$H^*(B, A) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y)$$

hat — neben der nicht–Symmetrie — den Nachteil, dass aus  $H^*(B, A) = 0$  nicht notwendigerweise  $A = B$  folgt. Tatsächlich muss ja nur  $B \subseteq A$  gelten, damit  $H^*$  gleich Null ist. Insbesondere können sich die Mengen  $B$  und  $A$  selbst bei kleinem Abstand  $H^*(B, A) \leq \varepsilon$  stark unterscheiden.

Die folgende Definition behebt dieses Problem.

**Definition 4.1** Für je zwei kompakte Mengen  $A, \tilde{A} \subset X$  definieren wir die *Hausdorff–Metrik* als

$$H(A, \tilde{A}) = \max\{H^*(A, \tilde{A}), H^*(\tilde{A}, A)\}.$$

□

**Bemerkung 4.2** Wir notieren eine Reihe von Eigenschaften von  $H$ :

(i) Die Hausdorff–Metrik ist tatsächlich eine Metrik auf der Menge der kompakten Teilmengen von  $X$ , d.h. für alle kompakten Mengen  $A, \tilde{A}, \hat{A} \subseteq X$  erfüllt sie die Eigenschaften

- $H(A, \tilde{A}) = H(\tilde{A}, A)$  (Symmetrie)
- $H(A, \tilde{A}) \leq H(A, \hat{A}) + H(\hat{A}, \tilde{A})$  (Dreiecksungleichung)
- $H(A, \tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow A = \tilde{A}$

Die Menge  $\mathcal{M}$  der kompakten Teilmengen von  $X$  wird mit dieser Metrik ein metrischer Raum.

(ii) Wenn die Hausdorff–Metrik zweier Mengen klein ist, so hat dies eine sehr intuitive geometrische Bedeutung: Wenn wir den  $\varepsilon$ –Ball um eine kompakte Menge  $A$  mit

$$\mathcal{B}_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

bezeichnen, so gilt

$$H(A, \tilde{A}) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\tilde{A}) \text{ und } \tilde{A} \subset \mathcal{B}_\varepsilon(A).$$

□

Da wir die Hausdorff–Metrik im Folgenden als zentralen Abstandsbegriff in unseren numerischen Untersuchungen verwenden werden, wollen wir einige Eigenschaften an Beispielen illustrieren.

**Beispiel 4.3** (i) Bereits in Bemerkung 4.2(ii) wurde ausgenutzt, dass eine enge Beziehung zwischen der Hausdorff–Metrik und den  $\varepsilon$ –Bällen besteht. Ein weiteres Beispiel für diese Beziehung ist das folgende:

Für eine beliebige kompakte Menge  $A$  und ihren abgeschlossenen  $\varepsilon$ –Ball  $\tilde{A} = \overline{\mathcal{B}_\varepsilon(A)}$  gilt

$$H(A, \tilde{A}) = \varepsilon.$$

(ii) Die Hausdorff–Metrik hängt natürlich von der zu Grunde liegenden Metrik auf  $X$  ab: Als Beispiel betrachte eine quaderförmige Menge  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a_i < b_i$  und für ein  $\varepsilon > 0$  ein darin liegendes “ $\varepsilon$ –Gitter”

$$A_\varepsilon = \{x = (k_1\varepsilon, k_2\varepsilon, \dots, k_n\varepsilon)^T \mid k_i \in \mathbb{Z}, x \in A\},$$

vgl. Abbildung 4.1, wobei wir  $A_\varepsilon \neq \emptyset$  annehmen.

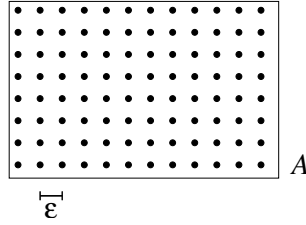
Falls wir auf  $\mathbb{R}^n$  die Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|_2$  verwenden, so gilt für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$

$$H(A, A_\varepsilon) = \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{2},$$

verwenden wir aber  $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ , so gilt

$$H(A, A_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Abbildung 4.1: Menge  $A$  und  $\varepsilon$ -Gitter  $A_\varepsilon$ 

(iii) Abschätzungen für die Hausdorff-Metrik kann man aus anderen Abschätzungen gewinnen:

Für eine global Lipschitz-stetige Funktion  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die also die Bedingung

$$|W(x) - W(y)| \leq L\|x - y\|$$

erfüllt, gilt für die Sub-Niveaumengen

$$W^{-1}(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid W(x) \leq a\}$$

(sofern diese kompakt sind) die Abschätzung

$$H(W^{-1}(a), W^{-1}(b)) \geq \frac{1}{L}|a - b|. \quad (4.1)$$

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $a > b$ . Wir betrachten einen Punkt  $y^* \in W^{-1}(a)$  mit  $W(y^*) = a$  und einen beliebigen Punkt  $x \in W^{-1}(b)$ , also mit  $W(x) \leq b$ . Dann gilt

$$\|y^* - x\| \geq \frac{1}{L}|W(y^*) - W(x)| \geq \frac{1}{L}|a - b|.$$

Also folgt

$$H^*(W^{-1}(a), W^{-1}(b)) \geq \sup_{y \in W^{-1}(a)} \inf_{x \in W^{-1}(b)} \|y - x\| \geq \inf_{x \in W^{-1}(b)} \|y^* - x\| \geq \frac{1}{L}|a - b|$$

und damit auch (4.1). □

## 4.2 Robustheit asymptotisch stabiler Mengen

Aus Satz 3.18 wissen wir, dass wir aus der Existenz von  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen auf die Existenz von “numerischen” asymptotisch stabilen Mengen schließen können. Dies ist jedoch nur ein Hilfsresultat. Tatsächlich möchte man hier nicht die  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen verwenden (deren Existenz ja schwer zu überprüfen ist) sondern asymptotisch stabile Mengen für die ungestörten Systeme. Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir die Beziehung zwischen asymptotisch stabilen und  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen klären. Wir wollen in diesem Abschnitt beweisen, dass in der Nähe einer asymptotisch stabilen Menge  $A$  immer  $\alpha$ -asymptotisch stabile Mengen  $A_\alpha$  des gestörten Systems liegen. Genauer beschreibt dies die folgende Definition.

**Definition 4.4** Betrachte ein ungestörtes System  $\Phi$  und das zugehörige gestörte System  $\Psi_\alpha$ . Sei  $A$  eine asymptotisch stabile Menge für  $\Phi$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ . Dann nennen wir  $A$   $\gamma$ -robust für ein  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ , falls ein  $\alpha_0 > 0$  existiert, so dass für alle gestörten Systeme  $\Psi_\alpha$  mit  $\alpha \in (0, \alpha_0]$  eine  $\alpha$ -asymptotisch stabile Menge mit Stabilitätsumgebung  $B$  existiert, für die die Ungleichung

$$H(A_\alpha, A) \leq \gamma(\alpha)$$

gilt. Die Funktion  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  heißt dabei *Robustheitsmaß* für  $A$ . □

Beachte, dass aus dieser Definition insbesondere die Konvergenz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H(A_\alpha, A) = 0$$

folgt.

Wir wollen in diesem Abschnitt beweisen, dass jede asymptotisch stabile Menge  $A$   $\gamma$ -robust für geeignetes  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\alpha_0 > 0$  ist. Zudem wollen wir zeigen, wie die Attraktionsrate  $\beta$  von  $A$  mit dem Robustheitsmaß  $\gamma$  zusammenhängt.

Als erstes Hilfsmittel benötigen wir dazu das folgende aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Lemma.

**Lemma 4.5 (Gronwall–Lemma)**

(i) (**Kontinuierliche Zeit**) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine stetige Funktion, die für Konstanten  $a, b \geq 0$ , ein  $t_0 \in I$  und alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$  die Abschätzung

$$\psi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \psi(s) ds \tag{4.2}$$

erfüllt. Dann gilt für alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$  die Ungleichung

$$\psi(t) \leq a e^{b(t-t_0)}.$$

(ii) (**Diskrete Zeit**) Sei  $I = \{hk, h(k+1), \dots, h(k+m)\} \subset h\mathbb{Z}$  ein “diskretes Intervall”,  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine Funktion, die für ein  $t_0 \in I$  die Gleichung  $\psi(t_0) = 0$  und für Konstanten  $c, b \geq 0$  und alle  $t \in I$  mit  $t > t_0$  die Abschätzung

$$\psi(t) \leq hc + (1 + hb)\psi(t - h)$$

erfüllt. Dann gilt für alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$  die Ungleichung

$$\psi(t) \leq c(t - t_0)e^{b(t-t_0)}.$$

**Beweis:** (i) Setze

$$\phi(t) := \int_{t_0}^t \psi(s) ds.$$

Damit schreibt sich (4.2) als  $\dot{\phi}(t) \leq a + b\phi(t)$ . Setze nun  $\theta(t) := \phi(t)e^{-bt}$ . Durch Differenzieren von  $\theta$  erhält man  $\dot{\theta}(t) \leq ae^{-bt}$ . Integration dieser Ungleichung (die Funktionen sind nichtnegativ wegen (4.2) und es gilt  $\theta(t_0) = 0$ ) liefert

$$\theta(t) \leq \frac{a}{b}(e^{-bt_0} - e^{-bt}).$$

Damit ergibt sich für  $\phi$

$$\phi(t) \leq \frac{a}{b}e^{b(t-t_0)} - \frac{a}{b}.$$

Für  $\psi$  erhält man daraus

$$\psi(t) \leq a + b\phi(t) \leq a + ae^{b(t-t_0)} - a = ae^{b(t-t_0)}.$$

(ii) Induktion (Übungsaufgabe). □

**Bemerkung 4.6** Wir erinnern daran, dass wir für die Vektorfelder  $f$  der von uns betrachteten Differentialgleichungen und für die numerischen Approximationsn in Bemerkung 3.4 die “Dauerannahme” der globalen Lipschitz–Stetigkeit mit Konstante  $L$  bzw.  $1 + Lh$  gemacht haben. Diese Annahme erweitern wir nun auf alle betrachteten diskreten Systeme mit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ , d.h. es gelte

$$\|\Phi(h, x_1) - \Phi(h, x_2)\| \leq (1 + Lh)\|x_1 - x_2\|. \quad (4.3)$$

Die Form dieser Abschätzung ist natürlich durch die numerischen Einschrittverfahren motiviert, (4.3) gilt aber auch für Zeit– $h$  Abbildungen  $\Phi_h$  von Differentialgleichungen. Genauer kann man unter der globalen Lipschitz–Annahme an  $f$  für jedes  $h_0 > 0$  eine Konstante  $L_{h_0} > 0$  finden, so dass (4.3) für  $L = L_{h_0}$  und alle  $h \in (0, h_0]$  gilt. □

Unter diesen Lipschitz–Annahmen gilt die folgende Aussage.

**Lemma 4.7** Betrachte ein (semi–)dynamisches System  $\Phi(t, x)$  mit  $X = \mathbb{R}^n$  und das zugehörige gestörte System  $\Psi(t, x, w)$ . Dann gilt für alle  $t \geq \mathbb{T}_0^+$ , alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  bzw.  $w \in \mathcal{W}_\alpha^h$  die Abschätzung

$$\|\Psi(t, x, w) - \Phi(t, x)\| \leq \alpha te^{Lt}.$$

**Beweis:** Wir beweisen den kontinuierlichen Fall, also  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , der diskrete Fall mit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  ist Übungsaufgabe. Betrachte die Funktion

$$\psi(t) = \|\Psi(t, x, w) - \Phi(t, x)\|.$$

Aus den Differentialgleichungen für  $\Psi$  und  $\Phi$  erhält man durch Integration die äquivalenten Integralgleichungen

$$\Psi(t, x, w) = x + \int_0^t f(\Psi(s, x, w)) + w(s)ds \quad \text{und} \quad \Phi(t, x) = x + \int_0^t f(\Phi(s, x))ds.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \left\| \int_0^t f(\Psi(s, x, w)) + w(s) - f(\Phi(s, x)) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(\Psi(s, x, w)) - f(\Phi(s, x))\| ds + \int_0^t \|w(x)\| ds \\
&\leq L \int_0^t \|\Psi(s, x, w) - \Phi(s, x)\| ds + \alpha t \\
&= L \int_0^t \psi(s) ds + \alpha t.
\end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen des Gronwall-Lemmas 4.5 auf jedem Intervall  $I = [0, t]$  mit  $t_0 = 0$ ,  $a = \alpha t$  und  $b = L$  erfüllt, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Wir können nun unser Hauptresultat über die Existenz  $\alpha$ -asymptotisch stabiler Mengen formulieren.

**Satz 4.8** (i) Jede asymptotisch stabile Menge  $A$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $B$  ist  $\gamma$ -robust für ein geeignetes  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  und ein geeignetes  $\alpha_0 > 0$ .

(ii) Es existieren  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\alpha_0 > 0$ , die nur von der Lipschitz-Konstante  $L > 0$  von  $\Phi$ , der Attraktionsrate  $\beta \in \mathcal{KL}$  von  $A$  und dem Abstand  $H^*(B, A)$  der Stabilitätsumgebung  $B$  von  $A$  abhängen und für die  $\gamma$ -Robustheit von  $A$  gilt.

(iii) Fall  $A$  ein Attraktor ist, so können die  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen in der  $\gamma$ -Robustheits-Eigenschaft in (i) bzw. (ii) als  $\alpha$ -Attraktoren gewählt werden.

**Beweis:** Wir beweisen (i) und (ii) gemeinsam, indem wir  $\gamma$  und  $\alpha_0$  aus (ii) konstruieren. Wir setzen zunächst  $r_0 = H^*(B, A)$ . Für alle  $r \in (0, r_0]$  definieren wir

$$T(r) = \min \left\{ t \in \mathbb{T}_0^+ \mid \beta(s, t) \leq \frac{s}{4} \text{ für alle } s \in [r, r_0] \right\}.$$

Beachte, dass  $T(r)$  für alle  $r \in (0, r_0]$  endlich und per Definition monoton fallend ist. Wegen der Monotonie von  $\beta$  gilt damit

$$\beta(s, T(r) + t) \leq \frac{r}{4}$$

für alle  $t \geq 0$ , alle  $r \in (0, r_0]$  und alle  $s \in [0, r]$ . Mittels

$$\tilde{T}(r) = \sup_{s > 0} \{T(s) - |s - r|\}$$

erhalten wir eine Funktion mit  $\tilde{T}(r) \geq T(r)$ , die ebenfalls monoton fallend ist, zusätzlich aber auch stetig ist (tatsächlich sogar Lipschitz-stetig mit Konstante  $L = 1$ , vgl. den Beweis von Satz 2.15).

Wir definieren  $\alpha_0$  nun als

$$\alpha_0 = \frac{r_0}{4\tilde{T}(r_0)e^{\tilde{T}(r_0)}}$$

und definieren eine Funktion  $r(\alpha)$  für  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ , indem wir für jedes  $\alpha$  den Wert  $r(\alpha) = r > 0$  als Lösung der Gleichung

$$\tilde{T}(r)e^{\tilde{T}(r)}\alpha = \frac{r}{4} \quad (4.4)$$

wählen. Beachte, dass die linke Seite von (4.4) monoton fallend in  $r$  und die rechte Seite streng monoton wachsend in  $r$  ist und für  $\alpha_0$  die Lösung gerade durch  $r(\alpha_0) = r_0$  gegeben ist. Aus Stetigkeitsgründen existiert daher für alle  $\alpha \in (0, \alpha_0]$  eine eindeutige Lösung  $r(\alpha)$ , die wiederum stetig ist und nur von  $\beta$ ,  $L$  und  $r_0 = H^*(B, A)$  abhängt. Zudem ist  $r(\alpha)$  streng monoton wachsend und es gilt  $r(\alpha) \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$ , denn für jedes beliebige  $r > 0$  und hinreichend kleines  $\alpha^* > 0$  gilt

$$T(r)e^{T(r)}\alpha^* < \frac{r}{4},$$

weswegen  $r(\alpha^*) < r$  gelten muss. Wir können  $r(\alpha)$  daher mittels  $r(0) = 0$  in  $\alpha = 0$  stetig fortsetzen.

Für jedes  $x \in B$  und  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  bzw.  $w \in \mathcal{W}_\alpha^h$  folgt aus Lemma 4.7 für alle Zeiten  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$d(\Psi(t, x, w), A) \leq \|\Psi(t, x, w) - \Phi(t, x)\| + d(\Phi(t, x), A) \leq \alpha t e^{Lt} + \beta(d(x, A), t). \quad (4.5)$$

Für den Term  $\alpha t e^{Lt}$  mit  $t \leq \tilde{T}(r(\alpha))$  gilt hierbei

$$\alpha t e^{Lt} \leq \alpha \tilde{T}(r(\alpha)) e^{L\tilde{T}(r(\alpha))} = \frac{r(\alpha)}{4}. \quad (4.6)$$

Wir betrachten nun die Mengen

$$D_\alpha = \overline{\mathcal{B}_{r(\alpha)}(A)}.$$

Für  $x \in D_\alpha$  gilt  $d(x, A) \leq r(\alpha)$  und damit mittels (4.5) und (4.6) und der Definition von  $T(r)$  die Abschätzung

$$d(\Psi(T(r(\alpha)), x, w), A) \leq \frac{r(\alpha)}{4} + \underbrace{\beta(d(x, A), T(r(\alpha)))}_{\leq r(\alpha)/4} \leq \frac{r(\alpha)}{2} < r(\alpha),$$

also  $\Psi(T(r(\alpha)), x, w) \in D_\alpha$  und damit

$$\Psi_\alpha(T(r(\alpha)), D_\alpha) \subseteq D_\alpha. \quad (4.7)$$

Für die Zeiten  $t \in \mathbb{T}_0^+$  mit  $0 \leq t \leq T(r(\alpha))$  gilt

$$d(\Psi(t, x, w), A) \leq \frac{r(\alpha)}{4} + \beta(d(x, A), t) \leq \frac{r(\alpha)}{4} + \beta(r(\alpha), 0).$$

Daraus folgt für alle diese  $t$  die Abschätzung

$$H^*(\Psi(t, D_\alpha), A) \leq \frac{r(\alpha)}{4} + \beta(r(\alpha), 0).$$

Für alle Zeiten  $t > T(r(\alpha))$  gilt diese Abschätzung ebenfalls, da aus (4.7) und der Kozykluseigenschaft von  $\Psi_\alpha$  die Inklusion

$$\Psi_\alpha(t, D_\alpha) \subseteq \Psi_\alpha(t - iT(r(\alpha)), D_\alpha)$$

folgt für alle  $i \in \mathbb{N}$  mit  $t - iT(r(\alpha)) \geq 0$ . Definieren wir also

$$A_\alpha = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_0^+} \overline{\Psi_\alpha(t, D_\alpha)},$$

so erhalten wir eine vorwärts  $\alpha$ -invariante Menge, für die wegen  $A \subset D_\alpha \subset A_\alpha$  die Abschätzung

$$H(A_\alpha, A) = H^*(A_\alpha, A) \leq \sup_{t \in \mathbb{T}_0^+} H^*(\Psi(t, D_\alpha), A) \leq \frac{r(\alpha)}{4} + \beta(r(\alpha), 0) =: \gamma(\alpha)$$

folgt. Beachte, dass das so definierte  $\gamma$  tatsächlich nur von  $\beta$  und  $r(\alpha)$ , und damit von  $\beta$ ,  $L$  und  $r_0 = H^*(B, A)$  abhängt.

Um die  $\alpha$ -asymptotische Stabilität von  $A_\alpha$  nachzuweisen, bleibt die Konvergenzeigenschaft  $H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha) \rightarrow 0$  zu zeigen. Wir betrachten dazu alle  $x \in B \setminus A_\alpha$ . Für diese gilt insbesondere  $d(x, A) \geq r(\alpha)$  und damit  $T(d(x, A)) \leq T(r(\alpha))$ . Aus (4.5) mit  $t = T(r(\alpha))$  und (4.6) folgt für daher die Ungleichung

$$\begin{aligned} d(\Psi(T(r(\alpha))), x, w), A) &\leq \frac{r(\alpha)}{4} + \underbrace{\beta(d(x, A), T(r(\alpha)))}_{\leq d(x, A)/4} \\ &\leq \frac{r(\alpha) + d(x, A)}{4} \leq \max \left\{ \frac{r(\alpha)}{2}, \frac{d(x, A)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Also folgt für jede Teilmenge  $C \subseteq B$  die Ungleichung

$$H^*(\Psi_\alpha(T(r(\alpha))), C \setminus A_\alpha, A) \leq \max \left\{ \frac{r(\alpha)}{2}, \frac{H^*(C, A)}{2} \right\}. \quad (4.8)$$

Wir setzen nun  $C_0 := B$  und

$$C_i := \Psi_\alpha(T(r(\alpha)), C_{i-1} \setminus A_\alpha) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Per Induktion erhalten wir für  $i \in \mathbb{N}$  aus (4.8) die Ungleichung

$$H^*(C_i, A) \leq \max \left\{ \frac{r(\alpha)}{2}, \frac{H^*(B, A)}{2^i} \right\},$$

und damit mit hinreichend großem  $i^* \in \mathbb{N}$

$$H^*(C_{i^*}, A) \leq \frac{r(\alpha)}{2}, \quad \text{also } C_{i^*} \subseteq D_\alpha \subseteq A_\alpha.$$

Aus der Konstruktion der  $C_i$  und der vorwärts  $\alpha$ -Invarianz von  $A_\alpha$  folgt per Induktion über  $i \in \mathbb{N}$  die Inklusion

$$\Psi_\alpha(iT(r(\alpha)), B) \subseteq C_i \cup A_\alpha,$$

und damit für  $T^* = iT(r(\alpha))$  die Inklusion

$$\Psi_\alpha(T^*, B) \subseteq C_{i^*} \cup A_\alpha \subseteq A_\alpha.$$

Wiederum wegen der vorwärts  $\alpha$ -Invarianz von  $A_\alpha$  erhalten wir

$$\Psi_\alpha(T^* + t, B) \subseteq A_\alpha$$

für alle  $t \in \mathbb{T}_0^+$ . Daraus folgt

$$H^*(\Psi_\alpha(T^* + t, B), A_\alpha) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha) = 0,$$

was die benötigte Konvergenzeigenschaft und damit die  $\alpha$ -asymptotische Stabilität von  $A_\alpha$  zeigt.

(iii) Unabhängig davon, ob  $A$  ein Attraktor ist, enthält jede der Mengen  $A_\alpha$  nach Korollar 3.15(i) einen  $\alpha$ -Attraktor

$$A_\alpha^* = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Psi_\alpha(t, \overline{B})}.$$

Im Allgemeinen gilt für diesen aber nicht die Abstandsbedingung  $H(A_\alpha^*, A) \leq \gamma(\alpha)$  für das oben konstruierte  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ . Falls  $A$  jedoch ein Attraktor ist, so folgt aus der Invarianz von  $A$  die Inklusion

$$\Psi_\alpha(t, A) \supseteq \Phi(t, A) = A$$

für alle  $t \geq 0$ . Daraus folgt

$$A \subset \Psi_\alpha(t, B)$$

für alle  $t \geq 0$  und damit auch

$$A \subseteq A_\alpha^*.$$

Also gilt

$$H(A_\alpha^*, A) = H^*(A_\alpha^*, A) \leq H^*(A_\alpha, A) = \gamma(\alpha)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.9** (i) Die in Satz 4.8(i) gezeigte “eingebaute” Robustheitseigenschaft asymptotisch stabiler Mengen gegenüber Störungen wird auch *totale Stabilität* genannt.

(ii) Die im Beweis von Satz 4.8(ii) konstruierten Robustheitsmaße  $\gamma$  und die Werte  $\alpha_0 > 0$  sind nicht notwendigerweise optimal. Tatsächlich liefern sie in vielen Fällen sogar nur sehr grobe Abschätzungen für das wirkliche  $\gamma$ -Robustheitsverhalten (wir werden später noch eine Technik zur genaueren Abschätzung von  $\gamma$  kennen lernen). Wichtig ist allerdings, dass diese  $\gamma$  und  $\alpha_0$  weder vom genauen Verhalten von  $\Phi$  noch von der genauen Gestalt von  $A$  abhängen sondern nur von der Attraktionsrate  $\beta$ , der Lipschitz-Konstante  $L$  und dem Abstand  $H(B, A)$ .

(iii) Wir werden später sehen, dass Satz 4.8(iii) für die numerische Approximation von Attraktoren leider nicht brauchbar ist, dieser Teil ist also eher von theoretischem Interesse. In der Literatur sind die  $\alpha$ -Attraktoren auch als *inflated attractors* (“inflated” = aufgeblasen) bekannt.  $\square$

**Bemerkung 4.10** (i) Im Allgemeinen ist die Konstruktion von  $\gamma$  im Beweis von Satz 4.8 nicht wirklich konstruktiv, da die transzendente Gleichung (4.4) nur schwer analytisch zu lösen ist. Man kann aber recht leicht sehen, dass  $\gamma$  um so kleiner ist, je kleiner  $\beta$  ist (wenn  $L$  und  $H^*(B, A)$  dabei gleich bleiben). Für das hier konstruierte Robustheitsmaß gilt also das Prinzip

$$\text{schnellere Attraktion} \Rightarrow \text{höhere Robustheit.}$$

Ob dies auch für das optimale Robustheitsmaß gilt, ist eine offene Frage. In vielen Beispielen ist diese Implikation aber tatsächlich zu beobachten, vgl. das 5. Übungsblatt.

(ii) In einem wichtigen Spezialfall ist die Gleichung (4.4) lösbar und liefert auch (im Gegensatz zum allgemeinen Fall, vgl. Bemerkung 4.9 (ii)) eine recht gute Abschätzung für das optimale  $\gamma$ . Dies ist der Fall, wenn der Attraktor  $A$  exponentielle Attraktionsrate besitzt, also

$$\beta(r, t) = ce^{-\lambda t}r$$

für geeignete Konstanten  $c, \lambda > 0$  gilt. In diesem Fall erhalten wir  $T(r) = T = (\ln 4c)/\lambda$ , also eine konstante Funktion, womit sich (4.4) explizit zu  $r = \tilde{K}\alpha$  mit  $\tilde{K} = 4Te^{LT}$  ergibt. Also folgt

$$\gamma(\alpha) = r(\alpha)/4 + \beta(r(\alpha), 0) = \tilde{K}\alpha/4 + c\tilde{K}\alpha =: K\alpha.$$

Aus exponentieller Attraktion folgt also ein *lineares* Robustheitsmaß  $\gamma(r) = Kr$ .  $\square$

### 4.3 Zeitliche Diskretisierung asymptotisch stabiler Mengen, Teil I

In diesem Abschnitt wollen wir erste grundlegende Resultate über die Diskretisierung von Attraktoren beweisen. Tatsächlich ist der folgende fundamentale Satz nach all unseren Vorbereitungen nur noch ein einfaches Korollar.

**Satz 4.11** Betrachte eine Differentialgleichung (3.1) mit Lösungen  $\Phi$  und ein dazu gehöriges Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  gemäß Definition 3.3 mit Konsistenzordnung  $p > 0$ . Es sei  $A$  eine asymptotisch stabile Menge für  $\Phi$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $B$ . Dann gilt:

(i) Für alle hinreichend kleinen  $h > 0$  besitzt das numerische System  $\tilde{\Phi}_h$  eine asymptotisch stabile Menge  $\tilde{A}_h$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ , so dass die Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(\tilde{A}_h, A) = 0$$

gilt.

(ii) Falls  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  ein Robustheitsmaß für die  $\gamma$ -Robustheit von  $A$  ist, so gilt für die asymptotisch stabilen Mengen  $\tilde{A}_h$  aus (i) die Abschätzung

$$H(\tilde{A}_h, A) \leq \gamma(Eh^p).$$

(iii) Falls  $A$  exponentiell stabil ist, so existiert ein  $M > 0$ , so dass für die asymptotisch stabilen Mengen  $\tilde{A}_h$  aus (i) die Abschätzung

$$H(\tilde{A}_h, A) \leq Mh^p$$



gilt, die Konvergenzordnung des Verfahrens bleibt in der Approximation von  $A$  also erhalten.

**Beweis:** (i): Nach Satz 4.8 ist  $A$   $\gamma$ -robust für ein geeignetes  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ . Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.18(i).

(ii): Die Behauptung folgt sofort aus der Definition 4.4 der  $\gamma$ -Robustheit und Satz 3.18(i).

(iii): Die Behauptung folgt aus Bemerkung 4.10(ii) und (ii).  $\square$

**Bemerkung 4.12** Teil (i) dieses Satzes ist als *Satz von Kloeden und Lorenz*<sup>1</sup> bekannt und wurde 1986 in der Arbeit [8] veröffentlicht.  $\square$

Mit anderen Worten besagt dieser Satz, dass wir asymptotisch stabile Mengen mit numerischen Methoden prinzipiell “beobachten” können. Er sagt natürlich nichts darüber aus, wie man die Mengen  $\tilde{A}_h$  finden kann, sondern nur, dass sie überhaupt da sind und, falls wir ein Robustheitsmaß  $\gamma$  kennen, wie weit sie von der Menge  $A$  entfernt sind.

Aus diesem Satz ergeben sich in recht natürlicher Weise zwei Fragen, denen wir im Folgenden nachgehen wollen.

- (1) Gilt der Satz auch, wenn wir “asymptotisch stabile Menge” überall durch “Attraktor” ersetzen?
- (2) Gilt die Umkehrung dieses Satzes, d.h. falls wir asymptotisch stabile Mengen  $\tilde{A}_h$  für  $\Phi_h$  finden können und diese im Hausdorff-Sinne gegen eine kompakte Menge  $\hat{A}$  konvergieren, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(\tilde{A}_h, \hat{A}) = 0$$

gilt, ist  $\hat{A}$  dann asymptotisch stabil für  $\Phi$ ?

Das folgende Beispiel zeigt, dass beide Fragen mit “nein” beantwortet werden müssen.

**Beispiel 4.13** Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) - \max\{\|x(t)\| - 1, 0\}x(t)$$

für  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ . Abbildung 4.2 zeigt links einige exakte Lösungstrajektorien. Man erkennt aus der Abbildung recht gut, dass die schraffierte Menge  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$  ein Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 2\}$  ist: Von außerhalb konvergieren alle Lösungen gegen  $A$ , innerhalb von  $A$  sind alle Lösungen periodisch, woraus die Invarianz folgt.

In der rechten Grafik in Abbildung 4.2 ist die numerische Lösung mittels des impliziten Euler-Verfahrens  $x(t+h) = x(t) + hf(x(t+h))$  für  $h = 1/2$  abgebildet. Hier konvergieren alle Lösungen aus  $B$  gleichmäßig gegen den Gleichgewichtspunkt  $0$ , die Menge  $\tilde{A}_h = \{0\}$

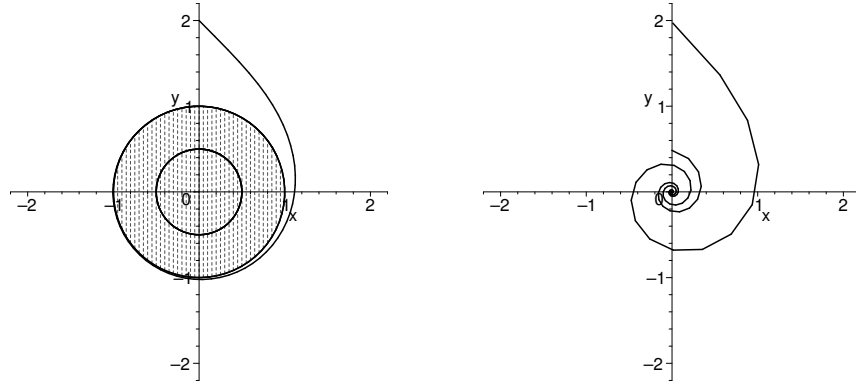


Abbildung 4.2: Exakte und implizite Euler Lösung der DGL aus Beispiel 4.13

ist also eine asymptotisch stabile Menge für das zugehörige diskrete dynamische System  $\tilde{\Phi}_h$  und — da einpunktig — auch invariant, also ein Attraktor.

Man könnte dieses Verhalten nun auf den ziemlich großen Zeitschritt schieben. Wiederholt man die numerische Rechnung allerdings mit kleinerem Zeitschritt, so stellt man fest, dass  $\tilde{A}_h = \{0\}$  für *alle* Zeitschritte  $h > 0$  ein Attraktor bleibt. Offenbar konvergieren diese Mengen im Hausdorff-Sinne gegen  $\hat{A} = \{0\}$ . Da die exakten Lösungen in  $A$  aber periodisch sind, können sie sicherlich nicht gegen  $\hat{A}$  konvergieren, weswegen  $\hat{A}$  keine asymptotisch stabile Menge ist.  $\square$

Dieses Beispiel zeigt tatsächlich, dass beide oben gestellten Fragen negativ beantwortet werden müssen:

- (1) Da Attraktoren mit einer vorgegebenen Stabilitätsumgebung nach Korollar 2.13(ii) eindeutig sind, können neben den  $\tilde{A}_h$  keine weiteren Attraktoren  $\hat{A}_h$  mit Stabilitätsumgebung  $B = B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 2\}$  existieren, insbesondere also keine, die im Hausdorff-Sinne gegen  $A$  konvergieren. Satz 4.11 gilt also nicht für Attraktoren.
- (2) Da  $H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \rightarrow 0$  für  $\hat{A} = \{0\}$  gilt, ist die Umkehrung von Satz 4.11 offenbar falsch.

Dieses Beispiel motiviert die folgende Frage, die wir in den nächsten Abschnitten beantworten wollen:

Welche Bedingungen muss man (an  $A$  oder an die  $\tilde{A}_h$ ) stellen, um zu gewährleisten, dass sie im Hausdorff-Sinne gegen eine “echte” asymptotisch stabile Menge (bzw. einen Attraktor)  $A$  konvergieren.

Geeignete Bedingungen an  $A$  werden wir am Ende dieses Kapitels in Abschnitt 4.6 kennen lernen. Zunächst wollen wir aber untersuchen, wie geeignete Bedingungen an die numerischen Mengen  $\tilde{A}_h$  aussehen. Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage liegt wiederum in den Attraktionsraten.

<sup>1</sup>Dies ist nicht der Lorenz, der den Lorenz-Attraktor entdeckt hat!

## 4.4 Die ISDS–Eigenschaft

Wir werden nun eine Eigenschaft kennen lernen, die die Attraktionraten  $\beta$  (hier immer in der Form  $\beta(r, t) = \mu(\sigma(r, t))$ ) und das Robustheitsmaß  $\gamma$  in einer Abschätzung verknüpft werden. Diese Eigenschaft ist gegeben durch die folgende Definition.

**Definition 4.14** Betrachte ein dynamisches System  $\Phi$  mit  $X = \mathbb{R}^n$  und das zugehörige gestörte System  $\Psi$ . Eine kompakte Menge  $A \subset X$  hat die *ISDS–Eigenschaft*, wenn eine offene Umgebung  $B$  von  $A$ , ein  $\alpha_0 > 0$ , sowie Funktionen  $\mu \in \mathcal{KLD}$  und  $\sigma, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass die Ungleichung

$$d(\Psi(t, x, w), A) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A))), t\}, \nu(w, t)\}$$

für alle  $t \in \mathbb{T}_0^+$ ,  $x \in B$  und alle  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$  bzw.  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}^h$  gilt.

Im Falle  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ist die Funktion  $\nu : \mathcal{W}_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\nu(w, t) = \sup_{\tau \in [0, t]} \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), t - \tau)$$

und im Falle  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  ist die Funktion  $\nu : \mathcal{W}_{\alpha_0}^h \times h\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\nu(w, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \nu(w, t) = \sup_{\tau \in [0, t-h] \cap h\mathbb{Z}} \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), t - \tau - h), \quad t \in \mathbb{T}^+.$$

□

Diese doch recht komplizierte Definition bedarf sicherlich einiger Erläuterung.

**Bemerkung 4.15** (i) Die ISDS–Eigenschaft enthält die asymptotische Stabilität von  $A$ , denn für die Null–Störfunktion  $w \equiv 0$  folgt  $\nu(w, t) = 0$  für alle  $t \geq 0$  und damit

$$d(\Phi(t, x), A) = d(\Psi(t, x, w), A) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A))), t\} = \mu(\sigma(d(x, A))), t\}.$$

Damit ist  $\beta(r, t) = \mu(\sigma(r), t)$  eine Attraktionsrate und  $A$  also asymptotisch stabil.

(ii) Die ISDS–Definition enthält auch die  $\gamma$ –Robustheit. Wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass  $B$  beschränkt ist, können wir die Mengen

$$A_\alpha = \underbrace{\bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, \overline{B})}}_{=A_\alpha^1} \cup \underbrace{\bigcup_{t \geq s} \overline{\Psi_\alpha(t, A)}}_{=A_\alpha^2}$$

definieren. Aus der ISDS–Eigenschaft und der Stetigkeit von  $\Psi$  in  $x$  folgt, dass  $\overline{B}$  eine absorbierende Menge ist, womit die so konstruierte Menge gerade die Vereinigung eines  $\alpha$ –Attraktors  $A_\alpha^1$  mit einer vorwärts invarianten Menge  $A_\alpha^2$  ist, woraus die  $\alpha$ –asymptotische Stabilität folgt. Die Ungleichung

$$H(A_\alpha, A) \leq \gamma(\alpha)$$

folgt nun wiederum aus der ISDS–Abschätzung und der Tatsache, dass  $A \subseteq A_\alpha$  per Definition gilt, weswegen  $H(A_\alpha, A) = H^*(A_\alpha, A)$  gilt.

Beachte, dass  $A_\alpha^1$  zwar auch eine  $\alpha$ –asymptotisch stabile Menge ist, aber nicht notwendigerweise  $H(A_\alpha^1, A) \leq \gamma(\alpha)$  erfüllt, da  $A_\alpha^1$  viel kleiner als  $A$  sein kann.

(iii) Das Kürzel “ISDS” stammt aus der nichtlinearen Kontrolltheorie. Dort gibt es die ISS–Eigenschaft, wobei ISS eine Abkürzung für “Input–to–State Stability” ist, was eine Stabilitätsbedingung für Systeme mit einer “Input”–Funktion, hier gerade unser  $w$ , bezeichnet. “ISDS” ist eine ISS–Variante, wobei das “D” für “dynamisch” steht, da hier  $\mathcal{KLD}$ –Funktionen verwendet werden.

(iv) Warum die Funktion  $\nu(w, t)$  gerade in dieser etwas eigenartigen Form gewählt wurde, werden wir in Lemma 4.17 sehen.  $\square$

Wie viele andere Stabilitätseigenschaften kann auch die ISDS–Eigenschaft mittels Lyapunov–Funktionen nachgewiesen werden.

**Satz 4.16** Gegeben sei eine kompakte Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , ein  $\alpha_0 > 0$ , eine vorwärts  $\alpha_0$ –invariante Menge  $O \supset A$  und eine Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Wir nehmen an, dass Funktionen  $\mu \in \mathcal{KLD}$  sowie  $\sigma, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$d(x, A) \leq V(x) \leq \sigma(d(x, A)) \quad (4.9)$$

und

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(w, t)\} \quad (4.10)$$

für alle  $t \in \mathbb{T}_0^+$ ,  $x \in O$  und  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$  bzw.  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}^h$  gelten, wobei  $\nu : \mathcal{W}_{\alpha_0} \times \mathbb{T}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\nu : \mathcal{W}_{\alpha_0}^h \times \mathbb{T}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  die in Definition 4.14 gegebenen Funktionen sind.

Dann ist  $A$  ISDS mit den angegebenen Funktionen und  $B = O$ . Die Funktion  $V$  heißt dann ISDS–Lyapunov–Funktion.

**Beweis:** Es gilt

$$d(\Psi(t, x, w), A) \leq V(x) \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(w, t)\} \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A))), t), \nu(w, t)\}.$$

Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

Beachte, dass wir hier keinerlei Regularitätseigenschaften der Funktion  $V$  verlangt haben, nicht einmal Stetigkeit. Dies wird es uns später erleichtern, ISDS–Lyapunov–Funktionen  $V$  zu konstruieren. Für stetig differenzierbare Funktionen  $V$  lässt sich die Bedingung aus Satz 4.16 auch in Ableitungform schreiben.

**Lemma 4.17** Es sei  $\Phi$  ein durch die DGL  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  gegebenes kontinuierliches System, d.h.  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . Sei  $\mu \in \mathcal{KLD}$  eine für alle  $t \in \mathbb{R}$  definierte Lösung der DGL

$$\frac{d}{dt}\mu(r, t) = -g(\mu(r, t)).$$

Dann erfüllt eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die die Ungleichung (4.9) erfüllt und die auf  $O \setminus A$  stetig differenzierbar ist, die Bedingung (4.10) mit diesem  $\mu$  genau dann, wenn die Ungleichung

$$\max_{w \in W_{\alpha_0}, \gamma(\|w\|) \leq V(x)} DV(x)(f(x) + w) \leq -g(V(x)) \quad (4.11)$$

für alle  $x$  in denen  $V$  differenzierbar ist, erfüllt ist.

**Beweis:** “(4.10)  $\Rightarrow$  (4.11)”: Betrachte  $x \in O \setminus A$  und  $w \in W_{\alpha_0}$  mit  $\gamma(\|w\|) < V(x)$ , wobei wir den Wert  $w \in \mathbb{R}^n$  mit der konstanten Funktion gleichen Wertes identifizieren. Aus der Definition von  $\nu$  und der Wahl von  $w$  erhalten wir für alle  $t \geq 0$

$$\nu(w, t) = \gamma(\|w\|) < V(x).$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt

$$\nu(w, t) < V(\Psi(t, x, w))$$

für alle hinreichend kleinen  $t > 0$ . Aus (4.10) folgt daher

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \mu(V(x), t)$$

für alle hinreichend kleinen  $t$ . Da zudem  $\mu(V(x), 0) = V(x)$  gilt, liefert ableiten in  $t = 0$

$$DV(x)(f(x) + w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\Psi(t, x, w)) \leq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(V(x), t) = -g(V(x)).$$

Diese Ungleichung gilt nun für alle  $w \in W_{\alpha_0}$  mit  $\gamma(\|w\|) < V(x)$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt sie damit auch, falls  $\gamma(\|w\|) = V(x)$  ist, woraus (4.11) direkt folgt.

“(4.11)  $\Rightarrow$  (4.10)”: Wir zeigen die Behauptung zunächst unter der Annahme, dass  $V$  entlang der Lösung  $\Psi(\tau, x, w)$  für  $\tau \in [0, t]$ , differenzierbar ist. Wir zeigen dazu zuerst die Hilfsbehauptung

$$\begin{aligned} V(\Psi(t, x, w)) &\leq \mu(V(x), t) \text{ für alle } w \in \mathcal{W}_\alpha \\ \text{mit } \gamma(\|w(\tau)\|) &\leq \mu(V(x), \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, t]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wir zeigen dazu, dass unter der obigen Annahme an  $w$  die Ungleichung

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \mu_\varepsilon(V(x), t)$$

für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, wobei  $\mu_\varepsilon$  die DGL

$$\frac{d}{dt} \mu_\varepsilon(r, t) = -g(\mu_\varepsilon(r, t)) + \varepsilon$$

erfüllt. Da  $\mu_\varepsilon(r, t) \rightarrow \mu(r, t)$  gilt für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , folgt daraus die Behauptung. Nehmen wir also, dass  $x \in O$ ,  $t \geq 0$  und  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$  existieren, so dass die Annahme aus (4.12) erfüllt ist, aber  $V(\Psi(t, x, w)) > \mu_\varepsilon(V(x), t)$  gilt. Es sei  $t^* > 0$  die größte Zeit in  $[0, t]$ , für die

$$V(\Psi(t^*, x, w)) = \mu_\varepsilon(V(x), t^*) \quad (4.13)$$

gilt. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir mit  $x^* = \Psi(t^*, x, w)$  und  $w^* = w(t^*)$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} DV(x)(f(x^*) + w^*) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t^*} V(\Psi(t, x, w)) \\ &\geq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t^*} \mu_\varepsilon(V(x), t) \\ &= -g(\mu_\varepsilon(V(x), t^*)) + \varepsilon = -g(V(x^*)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber (4.11) und da

$$\gamma(\|w^*\|) = \gamma(\|w(t^*)\|) \leq \mu(V(x), t^*) \leq \mu_\varepsilon(V(x), t^*) = V(x^*)$$

gilt, muss

$$DV(x)(f(x^*) + w^*) \leq -g(V(x^*))$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch, weswegen (4.12) gilt.

Nun benutzen wir (4.12) um (4.10) zu beweisen. Sei dazu  $t > 0$  beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $\nu(w, t) \leq \mu(V(x), t)$ .

In diesem Fall folgt aus der Definition von  $\nu$  die Ungleichung  $\gamma(\|w(\tau)\|) \leq \mu(V(x), \tau)$  für alle  $\tau \in [0, t]$ : Wäre  $\gamma(\|w(\tau)\|) > \mu(V(x), \tau)$  für ein  $\tau \in [0, t]$ , so folgt

$$\nu(w, t) \geq \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), t - \tau) > \mu(\mu(V(x), \tau), t - \tau) = \mu(V(x), t),$$

ein Widerspruch. Also folgt (4.10) aus (4.12).

2. Fall:  $\nu(w, t) > \mu(V(x), t)$ .

Um (4.10) zu beweisen, nehmen wir zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass (4.10) in  $t$  nicht gilt. Dann folgt

$$V(\Psi(t, x, w)) > \nu(w, t) > \mu(V(x), t). \quad (4.14)$$

Wir definieren  $r = \mu(\nu(w, t), -t)$  und wählen  $t_0 \geq 0$  minimal, so dass  $V(\Psi(\tau, x, w)) \geq \mu(r, \tau)$  für alle  $\tau \in (t_0, t]$  gilt. Aus Stetigkeitsgründen folgt  $V(\Psi(t_0, x, w)) \leq \mu(r, t_0)$ , außerdem gilt  $\nu(w, t) = \mu(r, t)$ . Analog zur Rechnung in Fall 1 erhalten wir damit die Abschätzung

$$\gamma(\|w(\tau)\|) \leq \mu(r, \tau)$$

für alle  $\tau \in [0, t]$  und damit insbesondere

$$\nu(w(t_0 + \cdot), \tau) = \sup_{s \in [0, \tau]} \mu(\gamma(\|w(t_0 + s)\|), \tau - s) \leq \sup_{s \in [0, \tau]} \mu(\mu(r, t_0 + s), \tau - s) = \mu(r, t_0 + \tau).$$

Den rechten Ausdruck können wir nun durch die Wahl von  $t_0$  abschätzen. Dies ergibt

$$\nu(w(t_0 + \cdot), \tau) \leq \mu(r, t_0 + \tau) \leq \mu(V(x_0), \tau)$$

für  $x_0 = \Psi(t_0, x, w)$ . Damit erfüllen  $x_0$  und  $w(t_0 + \cdot)$  die Voraussetzungen von (4.12) für  $\tau = t - t_0$  an Stelle von  $t$  und es folgt

$$V(\Psi(t, x, w)) = V(\Psi(t - t_0, x_0, w(t_0 + \cdot))) \leq \mu(V(x_0), t - t_0) \leq \mu(r, t) = \nu(w, t),$$

was im Widerspruch zu (4.14) steht. Also folgt (4.10).

Wir müssen nun noch den Fall betrachten, dass  $V$  für gewisse Punkte  $\Psi(t^*, x, w)$  und  $t^* \geq 0$  nicht differenzierbar ist. Aus der Differenzierbarkeitsannahme und (4.9) folgt, dass dies nur für  $\Psi(t^*, x, w) \in A$  passieren kann. Auf  $A$  gilt aber wegen (4.9) die Gleichung  $V(\Psi(t^*, x, w)) = 0$ , so dass (4.10) in  $t^*$  trivialerweise erfüllt ist. Insbesondere ist also (4.10) für alle Zeiten  $t \geq 0$  erfüllt, in denen  $V$  in  $\Psi(t, x, w)$  nicht differenzierbar ist.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass  $V$  in  $\Psi(t, x, w)$  differenzierbar ist, aber nicht entlang der gesamten Lösung von 0 bis  $t$ . In diesem Fall sei  $t^*$  die größte Zeit  $t^* < t$ , so dass  $x^* = \Psi(t^*, x, w)$  ein Nicht-Differenzierbarkeitspunkt von  $V$  ist. Wir können dann den ersten Teil des Beweises dann auf die Lösung  $\Psi(\tau, x, w)$  für  $\tau \in [t^*, t]$  anwenden (der einzige Ausnahmepunkt  $\tau = t^*$  spielt im Lebesgue-Integral keine Rolle) und erhalten

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \max\{\underbrace{\mu(V(x^*), t - t^*)}_{=0}, \underbrace{\nu(w(t^* + \cdot), t - t^*)}_{\leq \nu(w, t)}\} \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(w, t)\},$$

also gilt auch in diesem Falle (4.10).  $\square$

Dieses Lemma ist der Grund für die spezielle Form der Funktion  $\nu$  in Definition 4.14, da nur diese komplizierte Funktion zu der recht einfachen Ungleichung 4.11 “passt”.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen  $\gamma$ -Robustheit und ISDS genauer klären. Dies wird einfacher, wenn wir die Definition der  $\gamma$ -Robustheit etwas verschärfen.

**Definition 4.18** Eine  $\gamma$ -robuste Menge  $A$  heißt *monoton*  $\gamma$ -robust, falls die Mengen  $A_\alpha$  aus der  $\gamma$ -Robustheits-Definition 4.4 die Bedingungen

$$A \subset \text{int } A_\alpha \quad \text{und} \quad A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$$

für alle  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, \alpha_0]$  mit  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  erfüllen.  $\square$

Beachte, dass die in Satz 4.8 konstruierten  $A_\alpha$  diese Bedingung erfüllen, dieser Satz zeigt also tatsächlich monotone  $\gamma$ -Robustheit.

Die Beziehung zwischen der monotonen  $\gamma$ -Robustheit und der ISDS-Eigenschaft wird nun von dem folgenden Satz beschrieben.

**Satz 4.19** Gegeben sei eine asymptotisch stabile Menge  $A$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $B$ , eine Funktion  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  und ein  $\alpha_0 > 0$ . Dann gilt: Die Menge  $A$  ist monoton  $\gamma$ -robust genau dann, wenn sie für jedes  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_\infty$  mit  $\tilde{\gamma}(r) > \gamma(r)$  für  $r > 0$  die ISDS-Eigenschaft mit  $B$  und  $\alpha_0$  besitzt für geeignete (von  $\tilde{\gamma}$  abhängige) Funktionen  $\mu \in \mathcal{KLD}$  und  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ .

Bevor wir den Beweis dieses Satzes betrachten, wollen wir ein wichtiges und direktes Korollar angeben.

**Korollar 4.20** Es sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge mit beschränkter Umgebung  $B$ . Dann gilt: Die Menge  $A$  besitzt genau dann die ISDS-Eigenschaft (für geeignete  $\mu, \sigma, \gamma, \alpha_0$  und das obige  $B$ ), wenn sie asymptotisch stabil mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist.

**Beweis:** Nach Bemerkung 4.15(i) folgt aus ISDS die asymptotische Stabilität von  $A$ .

Umgekehrt zeigt Satz 4.8(i), dass  $A$   $\gamma$ -robust ist, wobei die Konstruktion im Beweis dieses Satzes sogar monotone  $\gamma$ -Robustheit liefert. Also ist  $A$  nach Satz 4.19 ISDS.  $\square$

**Beweis von Satz 4.19:** Nach Bemerkung 4.15(ii) folgt aus ISDS die  $\gamma$ -Robustheit zunächst mit Robustheitsmaß  $\tilde{\gamma}$ . Wenn wir die dortige Konstruktion mit  $\mathcal{B}_{\sigma^{-1}(\gamma(\alpha))}(A)$  an Stelle von  $A$  durchführen, so folgt  $A \subset \text{int } A_\alpha$ , die  $\tilde{\gamma}$ -Robustheit wird also monoton (die zweite Monotonieeigenschaft gilt per Konstruktion). Da diese Konstruktion der  $A_\alpha$  unabhängig von  $\tilde{\gamma}$  ist, folgt  $H(A_\alpha, A) \leq \tilde{\gamma}(\alpha)$  für alle  $\tilde{\gamma} > \gamma$ , und damit auch  $H(A_\alpha, A) \leq \gamma(\alpha)$ , also die  $\gamma$ -Robustheit.

Die Folgerung “ $\gamma$ -Robustheit  $\Rightarrow$  ISDS” beweisen wir, indem wir eine ISDS-Lyapunov-Funktion  $V$  gemäß Satz 4.16 auf  $O = B$  konstruieren. O.B.d.A. können wir vorwärts  $\alpha$ -Invarianz von  $B$  annehmen, ansonsten ersetzen wir  $B$  durch  $\text{int } \bigcup_{t \geq 0} \Psi_{\alpha_0}(t, B)$  (beachte, dass die  $\gamma$ -Robustheit mit diesem erweiterten  $B$  erhalten bleibt).

Wir wählen nun ein beliebiges  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_\infty$  mit  $\tilde{\gamma} > \gamma$  für  $r > 0$  und definieren zunächst induktiv eine zweiseitige Folge  $b_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , indem wir  $b_0 = 1$  setzen,  $b_1 < b_2$  beliebig im Intervall  $(b_0, \gamma^{-1}(\tilde{\gamma}(b_0)))$  und setzen

$$b_{i+3} = \gamma^{-1}(\tilde{\gamma}(b_i)) \text{ und } b_{i-3} = \tilde{\gamma}^{-1}(\gamma(b_i))$$

für  $i \in \mathbb{Z}$ . Man rechnet nach, dass diese Folge

$$b_i < b_{i+1} \text{ und } \tilde{\gamma}(b_i) = \gamma(b_{i+3}),$$

sowie  $b_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow -\infty$  und  $b_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$  erfüllt. Wir schreiben kurz  $r_i = \gamma(b_i)$  und  $\tilde{r}_i = \tilde{\gamma}(b_i)$  und setzen  $a_i = \max\{b_i, \alpha_0\}$ .

Nun definieren wir die Mengen

$$B_i := \{x \in B \mid H^*(\Psi_{a_{j-1}}(t, x), A) \leq r_j \text{ für alle } j \geq i, t \in \mathbb{T}_0^+\}.$$

Aus der Konstruktion folgt  $H^*(B_i, A) \leq r_i$  und  $B_i \subseteq B_{i+1}$ . Darüberhinaus ist jedes  $B_i$  vorwärts  $a_{i-1}$ -invariant, woraus insbesondere

$$\Psi_{a_{i-1}}(t + \varepsilon, B_i) = \Psi_{a_{i-1}}(t, \Psi_{a_{i-1}}(\varepsilon, B_i)) \subseteq \Psi_{a_{i+1}}(t, B_i)$$

für alle  $t, \varepsilon > 0$  folgt. Wegen der Monotonie der  $A_\alpha$  folgt für alle  $j \geq i$  die Ungleichung

$$H^*(\Psi_{a_{j-1}}(t, A_{a_{i-1}}), A) \leq H^*(\Psi_{a_{j-1}}(t, A_{a_{j-1}}), A) \leq \gamma(a_{j-1}) \leq \gamma(a_j) = r_j,$$

weswegen  $A_{a_{i+1}} \subseteq B_i$  ist. Jede der Mengen  $B_i$  enthält damit wegen  $A \subseteq \text{int } A_\alpha$  insbesondere eine Umgebung von  $A$ . Zudem gilt  $B_i = B$  für alle hinreichend großen  $i$

Aus der  $\gamma$ -Robustheit folgt die Ungleichung

$$H^*(\Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, t), A_{a_{i-1}}) \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow \infty$  und damit wegen  $H(A_{a_{i-1}}, A) \leq \gamma(a_{i-1})$  auch

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} H^*(\Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, t), A) \leq \gamma(a_{i-1}) < \gamma(a_i) \leq \gamma(b_i) = r_i.$$



Insbesondere existiert also ein  $\Delta t_i \in \mathbb{T}_0^+$ , so dass für alle  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$H^*(\Psi_{a_{i-1}}(t, \Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, \Delta t_i)), A) = H^*(\Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, \Delta t_i + t), A) \leq r_i$$

gilt. Wenn wir o.B.d.A.  $\Delta t_i \geq \Delta t_j$  für alle  $j > i$  annehmen (beachte, dass die  $\Delta t_j$ ,  $j > i$  beschränkt sind, da  $B_j = B$  und  $a_j = \alpha_0$  gilt für alle hinreichend großen  $j$ ), folgt damit auch

$$H^*(\Psi_{a_{j-1}}(t, \Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, \Delta t_i)), A) \leq H^*(\Psi_{a_{j-1}}(B_{j+1}, \Delta t_j + t), A) \leq r_j$$

für alle  $t \geq 0$ , weswegen die Inklusion

$$\Psi_{a_{i-1}}(B_{i+1}, \Delta t_i) \subseteq B_i$$

gilt.

Nun definieren wir  $V$  wie folgt: Falls  $\Phi$  ein kontinuierliches System ist, definieren wir für jedes  $r \in [\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  die Mengen

$$C_r := \Psi_{a_{i-1}} \left( \frac{\tilde{r}_{i-1} - r}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i, B_{i+1} \right) \cup B_i$$

und falls  $\Phi$  ein diskretes System auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  ist, definieren wir

$$C_r := \Psi_{a_{i-1}} \left( \left[ \frac{\tilde{r}_{i-1} - r}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i \right]_h, B_{i+1} \right) \cup B_i,$$

wobei  $[r]_h$  die größte Zahl  $s \in h\mathbb{Z}$  mit  $s \leq r$  ist. Schließlich setzen wir für  $x \in B$

$$V(x) := \inf\{r > 0 \mid x \in C_r\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass  $V(x)$  die Ungleichung (4.9) erfüllt. Per Konstruktion gilt für  $r \in [\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} H^*(C_r, A) &\leq \max\{\sup_{t \geq 0} H^*(\Psi_{a_{i-1}}(t, B_{i+1}), A), H^*(B_i, A)\} \\ &\leq r_{i+1} = \gamma(b_{i+1}) = \tilde{\gamma}(b_{i-2}) = \tilde{r}_{i-2} \leq r. \end{aligned}$$

Damit gilt die Folgerung  $d(x, A) = r \Rightarrow x \notin C_{\tilde{r}}$  für alle  $\tilde{r} < r \Rightarrow V(x) \geq \tilde{r}$  für alle  $\tilde{r} < r \Rightarrow V(x) \geq r$  und wir erhalten

$$V(x) \geq d(x, A).$$

Für die obere Schranke setzen wir zunächst

$$\tilde{\sigma}(r) := \sup\{V(x) \mid x \in O, d(x, A) \leq r\}.$$

Sicherlich gilt dann  $V(x) \leq \tilde{\sigma}(d(x, A))$ , zudem ist  $\tilde{\sigma}$  monoton wachsend und es gilt  $\tilde{\sigma}(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ , da jedes  $B_i$  und damit jedes  $C_r$  eine Umgebung von  $A$  enthält: Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir deswegen  $\delta > 0$ , so dass  $\mathcal{B}_\delta(A) \subset C_r$  gilt für ein  $r < \varepsilon$ , woraus  $V(x) < \varepsilon$  für alle  $x \in \mathcal{B}_\delta(A)$  folgt. Mit der inzwischen bekannten Regularisierung

$$\hat{\sigma}(r) = \max_{s \geq 0} \{\tilde{\sigma}(s) - |s - r|\}$$

erhalten wir aus  $\tilde{\sigma}$  eine stetige und monoton wachsende obere Schranke  $\hat{\sigma}$  für  $V$  und durch Addieren einer beliebigen Funktion  $\eta \in \mathcal{K}_\infty$  schließlich die gesuchte obere Schranke  $\sigma = \hat{\sigma} + \eta \in \mathcal{K}_\infty$ .

Es bleibt die Ungleichung (4.10) zu zeigen, insbesondere müssen wir  $\mu$  definieren. Wir definieren dazu zunächst die stückweise konstante Funktion

$$\hat{g}(r) := \frac{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}}{\Delta t_i}$$

für  $r > 0$  mit  $r \in [\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  und  $\tilde{g}(r) := 0$  für  $r \leq 0$ . Für dieses  $\hat{g}$  können wir nun wiederum ein Lipschitz-stetiges  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g \leq \tilde{g}$  und  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  finden. Wir definieren  $\mu$  als Lösung der DGL  $\dot{\mu}(t) = -g(\mu(t))$ . Für alle  $r \in [\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  gilt dann die Ungleichung  $\dot{\mu}(t) \geq -\tilde{g}(\mu)$  und deswegen auch

$$\mu(r, t) \geq r - t \frac{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}}{\Delta t_i}$$

solange  $\mu(r, t) \geq \tilde{r}_{i-2}$  ist. Aus dieser Ungleichung folgt

$$\frac{\tilde{r}_{i-1} - \mu(r, t)}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i \leq \frac{\tilde{r}_{i-1} - \left( r - t \frac{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}}{\Delta t_i} \right)}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i = \frac{\tilde{r}_{i-1} - r}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i + t.$$

Für jedes  $r \in (\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  wählen wir  $t(r) > 0$  so, dass die Gleichung

$$\mu(\tilde{r}_{i-1}, t(r)) = r$$

gilt und setzen  $s_i = t(\tilde{r}_{i-2})$ . Aus der Konstruktion der  $C_r$  erhalten wir damit für alle  $t \in [0, s_i - t(r)]$

$$\begin{aligned} \Psi_{a_{i-1}}(t, C_r) &\subseteq \Psi_{a_{i-1}} \left( \frac{\tilde{r}_{i-1} - r}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i + t, B_{i+1} \right) \cup B_i \\ &\subseteq \Psi_{a_{i-1}} \left( \frac{\tilde{r}_{i-1} - \mu(r, t)}{\tilde{r}_{i-1} - \tilde{r}_{i-2}} \Delta t_i, B_{i+1} \right) \cup B_i \subseteq C_{\mu(r, t)}. \end{aligned}$$

Im zeitdiskreten Fall gilt diese Inklusion ebenfalls, wenn man alle betrachteten Zeiten mittels  $[\cdot]_h$  auf  $h\mathbb{Z}$  einschränkt.

Wir betrachten nun ein  $x \in B$ , ein  $t > 0$  und eine Störung  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}$ . Es sei  $r \geq V(x)$  minimal mit der Eigenschaft

$$\nu(w, t) \leq \mu(r, t),$$

wobei  $\nu$  gemäß Definition 4.14 mit  $\tilde{\gamma}$  an Stelle von  $\gamma$  definiert ist. Wegen der Minimalität von  $r$  muss dann entweder  $r = V(x)$  oder  $\nu(w, t) = \mu(r, t)$  gelten. Aus der Ungleichung für  $\nu$  erhalten wir wie im Beweis von Lemma 4.17

$$\tilde{\gamma}(\|w(\tau)\|) \leq \mu(r, \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, t]. \quad (4.15)$$

Aus der Definition von  $V$  folgt außerdem  $x \in C_{\tilde{r}}$  für jedes  $\tilde{r} > r$ . Wählen wir nun ein beliebiges  $\tilde{r} > r$  und  $i$  so, dass  $\tilde{r} \in (\tilde{r}_{i-2}, \tilde{r}_{i-1}]$  gilt, so folgt die Inklusion

$$\Psi(t, C_{\tilde{r}}, w) \in \Psi_{a_{i-1}}(t, C_{\tilde{r}}) \subseteq \Psi_{a_{i-1}}(t + t(\tilde{r}), B_{i+1}) \cap B_i \subseteq C_{\mu(\tilde{r}, t)}$$

für alle  $\tau \in [0, s_i - t(\tilde{r})]$ . Für  $V$  bedeutet dies

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \mu(\tilde{r}, t)$$

für alle diese  $\tau$ , und da  $r > \tilde{r}$  beliebig war, auch

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \mu(r, t) \tag{4.16}$$

für alle  $\tau \in [0, s_i - t(r)]$ . Zum Zeitpunkt  $\tau = s_i - t(r)$  gelten

$$V(\Psi(\tau, x, w)) \leq \mu(r, s_i - t(r)) = \tilde{r}_{i-2} \text{ und } \nu(w(\tau + \cdot), t) \leq \mu(r, s_i - t(r)) = \tilde{r}_{i-2},$$

so dass wir mit  $x = \Psi(\tau, x, w)$ ,  $w = w(\tau + \cdot)$  und  $r = \tilde{r}_{i-2}$  induktiv fortfahren können, bis wir den gewählten Zeitpunkt  $t > 0$  erreichen. Damit erhalten wir aus der Wahl von  $r$  die Ungleichung

$$V(\Psi(t, x, w)) \leq \mu(r, t) \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(w, t)\},$$

also gerade (4.10) und die Behauptung folgt aus Satz 4.16.  $\square$

## 4.5 Zeitliche Diskretisierung asymptotisch stabiler Mengen, Teil II

In diesem Abschnitt wollen wir die am Ende von Abschnitt 4.3 aufgeworfene Frage beantworten, indem wir geeignete Bedingungen an die  $\tilde{A}_h$  formulieren. Zunächst brauchen wir dazu eine erweiterte Version unseres Einbettungslemmas 3.5.

**Lemma 4.21 (Einbettungslemma mit Störung)** Gegeben seien eine Differentialgleichung (3.1) sowie ein Einschrittverfahren gemäß Definition 3.3. Die davon definierten semidynamischen Systeme seien mit  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}_h$  bezeichnet. Die zugehörigen gestörten Systeme mit  $\Psi$  und  $\tilde{\Psi}_h$ . Dann gilt:

(i) Für jeden Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$ , jedes  $\varepsilon > 0$  und jede Störfunktion  $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\varepsilon^h$  existiert eine Störfunktion  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  mit  $\alpha = (1 + Lh)(Eh^p + \varepsilon)$ , so dass die Gleichung

$$\tilde{\Psi}_h(t, x, \tilde{w}) = \Psi(t, x, w)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt. Insbesondere gilt also

$$\tilde{\Psi}_{h,\varepsilon}(t, x) \subseteq \Psi_\alpha(t, x)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ .

(ii) Für jeden Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$ , jedes  $\varepsilon > 0$  und jede Störfunktion  $w \in \mathcal{W}_\varepsilon$ , existiert eine Störfunktion  $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\alpha^h$  mit  $\alpha = Eh^p + \varepsilon e^{Lh}$ , so dass die Gleichung

$$\Psi(t, x, w) = \tilde{\Psi}_h(t, x, \tilde{w})$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt. Insbesondere gilt also

$$\Psi_\varepsilon(t, x) \subseteq \tilde{\Psi}_{h,\alpha}(t, x)$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ .

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.5.

(i) Wir zeigen zunächst, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\varepsilon$  ein  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  mit  $\alpha = (1 + Lh)(Eh^p + \varepsilon)$  existiert, so dass die Gleichung

$$\tilde{\Phi}_h(h, x, \tilde{w}) = \Psi(h, x, w) \quad (4.17)$$

gilt. Zum Beweis dieser Gleichung setzen wir

$$\Delta x = \frac{\tilde{\Psi}_h(h, x, \tilde{w}) - \Phi(h, x)}{h} \quad \text{und} \quad y(t) = \Phi(t, x) + t\Delta x.$$

Damit gilt  $y(0) = x$ ,  $y(h) = \tilde{\Psi}_h(h, x, \tilde{w})$  und

$$\|y(t) - \Phi(t, x)\| \leq t\|\Delta x\| \leq t(Eh^p + \varepsilon).$$

Wir konstruieren nun ein  $w$ , so dass  $\Psi(t, x, w) = y(t)$  für alle  $t \in [0, h]$  gilt. Dieses  $w$  ist gegeben durch

$$w(t) = f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x,$$

denn einerseits gilt

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, x, w) = f(\Psi(t, x, w)) + w(t)$$

und andererseits gilt

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(\Phi(t, x)) + \Delta x = f(y(t)) + f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x = f(y(t)) + w(t).$$

Also erfüllen  $\Psi(t, x, w)$  und  $y(t)$  die gleiche DGL mit gleichem Anfangswert in  $t = 0$ , weswegen sie für alle  $t \geq 0$  und damit insbesondere in  $t = h$  übereinstimmen müssen.

Um nachzuweisen, dass  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  für  $\alpha = (1 + Lh)(Eh^p + \varepsilon)$  gilt, überlegt man sich zuerst, dass es reicht,  $w(t)$  für  $t \in [0, h)$  wie oben zu wählen und  $w(t) = 0$  für  $t \notin [0, h)$  zu setzen, da nur die Werte  $w(t)$  für  $t \in [0, h)$  in der Berechnung von  $\Psi(h, x, w)$  eingehen. Wegen

$$\|w(t)\| = \|f(\Phi(t, x)) - f(y(t)) + \Delta x\| \leq Lt\|\Delta x\| + \|\Delta x\| \leq (1 + Lh)(Eh^p + \varepsilon)$$

für  $t \in [0, h]$  folgt damit  $w \in \mathcal{W}_\alpha$  für das behauptete  $\alpha = (1 + Lh)(Eh^p + \varepsilon)$ . Damit ist (3.2) bewiesen.

Der Beweis der Behauptung für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  folgt nun analog zum Beweis von Lemma 3.5(i) per Induktion über  $hi$ .

(ii) Wie im Teil (i) zeigen wir die Behauptung für  $t = h$ . Dies folgt hier sofort mit der Wahl

$$\tilde{w}(0) = \frac{\Psi(h, x, w) - \tilde{\Phi}_h(h, x)}{h}.$$

Auf Grund der Konsistenz–Annahme und Lemma 4.7 ist  $\tilde{w}(0) \in \mathcal{W}_\alpha$  und die behauptete Gleichheit ist offensichtlich. Nun ergibt sich die Behauptung analog zum Beweis von Lemma 3.5(i) mittels Induktion.  $\square$

Um unseren Satz zu formulieren, benötigen wir noch eine weitere Definition.

**Definition 4.22** (i) Eine Menge von Funktionen  $\gamma_h \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$  heißt *asymptotisch gleichmäßig*, falls eine Funktion  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \gamma_h(r) \leq \gamma(r)$$

für jedes  $r \geq 0$  gilt.

(ii) Eine Folge von Funktionen  $\beta_h \in \mathcal{KL}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$  heißt *asymptotisch gleichmäßig*, falls eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \beta_h(r, t) \leq \beta(r, t)$$

für jedes  $r \geq 0$  und  $t \geq 0$  gilt. □

**Bemerkung 4.23** (i) Anschaulich bedeutet Bedingung (i) gerade, dass die Werte  $\gamma_h(r)$  für  $h \rightarrow 0$  nicht beliebig groß werden können und dass die Geschwindigkeit der Konvergenz  $\lim_{r \rightarrow 0} \gamma_h(r) = 0$  für  $h \rightarrow 0$  nicht beliebig langsam werden kann.

(ii) Für Bedingung (ii) gilt das in (i) gesagte analog für  $\beta_h$  im ersten Argument. Zusätzlich verlangt Bedingung (ii), dass die Geschwindigkeit der Konvergenz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_h(r, t) = 0$  für  $h \rightarrow 0$  nicht beliebig langsam werden kann. □

Wir illustrieren Definition 4.22 an einigen Beispielen.

**Beispiel 4.24** (i) Betrachte die Funktionen

$$\gamma_h(r) = K_h r.$$

Für diese Funktionen besagt Definition 4.22(i) gerade, dass  $\limsup_{h \rightarrow 0} K_h = K < \infty$  ist. Die Funktion  $\gamma$  kann dann als

$$\gamma(r) = Kr$$

gewählt werden.

(ii) Betrachte die Funktionen

$$\gamma_h(r) = Kr^{\rho_h}.$$

Hier ist Definition 4.22(i) genau dann erfüllt, wenn

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \rho_h =: \rho^* < \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{h \rightarrow 0} \rho_h =: \rho_* > 0$$

ist. Falls die erste Bedingung verletzt ist, folgt  $\limsup_{h \rightarrow 0} \gamma_h(r) = \infty$  für jedes  $r > 1$ , falls die zweite Bedingung verletzt ist, folgt  $\limsup_{h \rightarrow 0} \gamma_h(r) = 1$  für jedes  $r \in (0, 1)$ . Falls die Bedingungen erfüllt sind, kann die Funktion  $\gamma$  als

$$\gamma(r) = \begin{cases} Kr^{\rho_*}, & r < 1 \\ Kr^{\rho^*}, & r \geq 1 \end{cases}$$

gewählt werden.

(iii) Für

$$\beta_h(r, t) = c_h e^{-\lambda t} r$$

ist Definition 4.22(ii) gerade erfüllt, falls  $\limsup_{h \rightarrow 0} c_h =: c < \infty$  ist. Dann kann

$$\beta(r, t) = c e^{-\lambda t} r$$

gewählt werden.

(iv) Für

$$\beta_h(r, t) = c e^{-\lambda_h t} r$$

ist Definition 4.22(ii) gerade erfüllt, falls  $\liminf_{h \rightarrow 0} \lambda_h =: \lambda > 0$  ist. Falls dies nicht gilt, folgt  $\limsup_{h \rightarrow 0} \beta_h(r, t) = r$  für alle  $t, r \geq 0$ . Falls die Bedingung erfüllt ist, können wir

$$\beta(r, t) = c e^{-\lambda t} r$$

wählen. □

Mit Hilfe von Definition 4.22 können wir nun unseren zweiten fundamentalen Satz zur Diskretisierung asymptotisch stabiler Mengen formulieren.

**Satz 4.25** Betrachte eine Differentialgleichung (3.1) mit Lösungen  $\Phi$  und ein dazu gehöriges Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  gemäß Definition 3.3 mit Konsistenzordnung  $p > 0$ . Für alle hinreichend kleinen  $h > 0$  seien  $\tilde{A}_h$  asymptotisch stabile Mengen für  $\tilde{\Phi}_h$  mit beschränkter Stabilitäts Umgebung  $B$ . Weiterhin sei  $\hat{A} \subset B$  eine Menge mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \rightarrow 0$$

und es seien  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\beta \in \mathcal{KL}$ .

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Mengen  $\tilde{A}_h$  sind monoton  $\gamma$ -robust mit asymptotisch gleichmäßigen Robustheitsraten  $\gamma_h \in \mathcal{K}_\infty$  (mit Schranke  $\gamma$ ).
- (ii) Die Mengen  $\tilde{A}_h$  besitzen asymptotisch gleichmäßige Attraktionsraten  $\beta_h \in \mathcal{KL}$  (mit Schranke  $\beta$ ).
- (iii) Die Menge  $\hat{A}$  ist eine asymptotisch stabile Menge für  $\Phi$  mit Stabilitäts Umgebung  $B$ .

Falls diese Aussagen gelten, so gilt zudem:

- (a) Die Menge  $\hat{A}$  ist  $\gamma$ -robust mit Robustheitsmaß  $\gamma$  aus (i) und besitzt die Attraktionsrate  $\beta$  aus (ii).
- (b) Falls die  $\tilde{A}_h$  Attraktoren sind, so ist auch  $\hat{A}$  ein Attraktor.
- (c) Falls  $\hat{A}$  und  $\tilde{A}_h$  Attraktoren sind, so gelten zudem die Abschätzungen

$$H^*(\tilde{A}_h, \hat{A}) \leq \gamma(Eh^p) \quad \text{und} \quad H^*(\hat{A}, \tilde{A}_h) \leq \gamma_h(Eh^p),$$

also insbesondere

$$H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \leq \max\{\gamma(Eh^p), \gamma_h(Eh^p)\}$$

für  $\gamma_h$  und  $\gamma$  aus (i) und (iii).

**Beweis:** Wir beweisen zunächst die behauptete Äquivalenz und (a).

“(i)  $\Rightarrow$  (iii)”: Es seien  $\tilde{A}_{h,\alpha}$  die  $\alpha$ -asymptotisch stabilen Mengen aus der  $\gamma$ -Robustheit der  $\tilde{A}_h$ . Nach Satz 3.18(ii) ist  $A_h := \tilde{A}_{h,\alpha}$  mit  $\alpha = Eh^p$  eine asymptotisch stabile Menge für  $\Phi_h$ . Wegen

$$H(A_h, \hat{A}) \leq H(A_h, \tilde{A}_h) + H(\tilde{A}_h, \hat{A})$$

folgt  $H(A_h, \hat{A}) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Zum Beweis der Vorwärtsinvarianz von  $\hat{A}$  sei  $t > 0$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für hinreichend großes  $k > 0$  und  $h = t/k$  gilt  $H(A_h, \hat{A}) \leq \varepsilon$ . Da  $A_h$  asymptotisch stabil bzgl.  $\Phi$  ist, gilt insbesondere  $\Phi(t, A_h) \subseteq A_h$ . Aus dem Gronwall-Lemma folgt

$$H^*(\Phi(t, \hat{A}), A_h) \leq H^*(\Phi(t, A), \Phi(t, A_h)) + \underbrace{H^*(\Phi(t, A_h), A_h)}_{=0} \leq e^{Lt} H^*(\hat{A}, A_h) \leq e^{Lt} \varepsilon.$$

Also folgt

$$H^*(\Phi(t, \hat{A}), \hat{A}) \leq H^*(\Phi(t, \hat{A}), A_h) + H^*(A_h, \hat{A}) \leq (1 + e^{Lt})\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt

$$H^*(\Phi(t, \hat{A}), \hat{A}) = 0,$$

also

$$\Phi(t, \hat{A}) \in \hat{A}$$

und damit die Vorwärtsinvarianz.

Zum Beweis der Konvergenz  $H^*(\Phi(t, B), \hat{A}) \rightarrow 0$  sei wiederum  $\varepsilon > 0$  und  $A_h$  so gewählt, dass  $H(A_h, \hat{A}) \leq \varepsilon$  gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} H(\Phi(t, B), \hat{A}) &= \limsup_{t \rightarrow 0, t \in h\mathbb{Z}} H^*(\Phi_h(t, B), \hat{A}) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0, t \in h\mathbb{Z}} H^*(\Phi_h(t, B), A_h) + H(A_h, \hat{A}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.

Wir zeigen noch den ersten Teil der Behauptung (a), nämlich, dass das  $\gamma$  aus (i) ein Robustheitsmaß für die  $\gamma$ -Robustheit von  $\hat{A}$  bzgl.  $\Phi$  ist. Dazu verwenden wir die aus Bemerkung 4.15(ii) bekannten Mengen

$$A_\alpha = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Psi_\alpha(t, \bar{B})} \cup \overline{\bigcup_{t \geq 0} \Psi_\alpha(t, \hat{A})}.$$

Da  $\tilde{A}_h$  nach Satz 4.19 ISDS für  $\tilde{\gamma}_h = (1+h)\gamma_h$  ist, sieht man mit Hilfe von Lemma 4.21(ii), dass die Abschätzung

$$H(A_\alpha, \hat{A}) \leq (1+h)\gamma_h(Eh^p + e^{Lh}\alpha)$$

für jedes  $h > 0$  gilt. Für  $h \rightarrow 0$  folgt  $H(A_\alpha, \hat{A}) \leq \gamma(\alpha)$ , also gerade die benötigte Abschätzung.

“(iii)  $\Rightarrow$  (i)”: Nach Satz 4.8(i) ist jede Menge  $\tilde{A}_h$   $\gamma$ -robust mit einem (zunächst unbekanntem) Robustheitsmaß  $\tilde{\gamma}_h$ . Ebenfalls nach Satz 4.8(i) ist auch  $\hat{A}$   $\gamma$ -robust mit geeignetem

$\gamma$  und damit nach Satz 4.19 auch ISDS mit  $\tilde{\gamma} = (1+h)\gamma$  und geeignetem  $\sigma$ . Mit Lemma 4.21(i) folgt, dass die bereits im Beweis von Satz 4.19 verwendeten Mengen

$$\tilde{A}_{h,\alpha} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \tilde{\Psi}_{h,\alpha}(t, \bar{B})} \cup \overline{\bigcup_{t \geq 0} \tilde{\Psi}_{h,\alpha}(t, \mathcal{B}_{\sigma^{-1}(\gamma(\alpha))}(\hat{A}))}$$

die Abschätzung

$$H(\tilde{A}_{h,\alpha}, \tilde{A}_h) \leq H(\tilde{A}_{h,\alpha}, \hat{A}) + H(\hat{A}, \tilde{A}_h) \leq (1+h)\gamma((1+Lh)(Eh^p + \alpha)) + H(\hat{A}, \tilde{A}_h)$$

erfüllen. Für  $h \rightarrow 0$  konvergiert diese Schranke gegen  $\gamma(\alpha)$ , weswegen

$$\gamma_h(\alpha) = \min\{\tilde{\gamma}_h(\alpha), (1+h)\gamma((1+Lh)(Eh^p + \alpha)) + H(\hat{A}, \tilde{A}_h)\}$$

asymptotisch gleichmäßige Robustheitsmaße mit Schranke  $\gamma$  sind.

“(ii)  $\Rightarrow$  (iii)”: Aus dem Konvergenzsatz für Einschrittverfahren folgt für jedes  $t > 0$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t, x) - \Psi_h(t, x)\| \leq C_t h^p$$

für ein geeignetes  $C_t > 0$ . Also folgt

$$\begin{aligned} d(\Phi(t, x), \hat{A}) &\leq \|\Phi(t, x) - \Psi_h(t, x)\| + d(\Psi_h(t, x), \tilde{A}_h) + H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \\ &\leq C_t h^p + \beta_h(d(x, \tilde{A}_h), t) + H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \\ &\leq C_t h^p + \beta_h(d(x, \hat{A}) + \varepsilon, t) + \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $h > 0$ , für die  $H(\tilde{A}_h, \hat{A}) \leq \varepsilon$  gilt. Mit  $h \rightarrow 0$  folgt

$$d(\Phi(t, x), \hat{A}) \leq \beta(d(x, \hat{A}) + \varepsilon, t) + \varepsilon$$

für alle  $\varepsilon > 0$  und damit auch

$$d(\Phi(t, x), \hat{A}) \leq \beta(d(x, \hat{A}), t).$$

Mit Satz 3.22 folgt (iii) und zugleich der zweite Teil der Aussage (a).

“(iii)  $\Rightarrow$  (ii)”: Nach Korollar 4.20 ist  $\hat{A}$  ISDS. Mit Lemma 3.5(i) folgt daraus die Abschätzung

$$d(\Phi_h(t, x), \tilde{A}_h) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, \hat{A})) + H(\tilde{A}, \hat{A})), t\}, \gamma(Eh^p)\} + H(\tilde{A}, \hat{A}).$$

Nach Lemma 3.21 existiert eine Attraktionsrate  $\tilde{\beta}_h$ . Offenbar ist damit

$$\beta_h(r, t) \leq \min\{\max\{\mu(\sigma(r + H(\tilde{A}, \hat{A})), t), \gamma(Eh^p)\} + H(\tilde{A}, \hat{A}), \tilde{\beta}_h(r, t)\}$$

eine weitere Attraktionsrate, für die

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \beta_h(r, t) = \mu(\sigma(r), t)$$

gilt, also (ii) mit  $\beta(r, t) = \mu(\sigma(r), t)$ .

(b) Falls die  $\tilde{A}_h$  Attraktoren sind, so kann man die Rückwärtsinvarianz von  $\hat{A}$  analog zum Beweis der Vorwärtsinvarianz im Teil “(i)  $\Rightarrow$  (iii)” zeigen, also ist  $\hat{A}$  ebenfalls ein Attraktor.

(c) Die Aussage folgt wegen der Minimalität von Attraktoren (Satz 2.10) sofort aus Satz 3.18 und den angenommenen Robustheitseigenschaften.  $\square$



**Bemerkung 4.26** Die in Satz 4.25 gegebenen Bedingungen (i) und (ii) sind hinreichend und notwendig für die Tatsache, dass  $\hat{A}$  eine asymptotisch stabile Menge bzw. ein Attraktor ist. Bedingung (i) ist hierbei eher theoretischer Natur, da man die  $\gamma$ -Robustheit der numerischen Mengen nur schwer überprüfen kann. Bedingung (ii) hingegen eignet sich gut für die praktische Überprüfung, denn auch wenn man die Bedingung in der Praxis nicht für *alle* (hinreichend kleinen) Zeitschritte  $h > 0$  testen kann, so liefert sie doch die Grundlage für das folgende praktisch brauchbare Verfahren zur Überprüfung numerischer Simulationen:

Wenn man in einer Simulation eine Folge numerischer Attraktoren  $\tilde{A}_{h_i}$  für verschiedene Schrittweiten  $h_1 > \dots > h_k > 0$  beobachtet, so betrachtet man die Konvergenzgeschwindigkeit der Trajektorien aus einer Umgebung von  $\hat{A}_{h_i}$  gegen  $\hat{A}_{h_i}$ . Wenn diese unabhängig von  $h_i$  ist, so legt das nahe, dass sich in der Nähe der  $\tilde{A}_{h_i}$  ein echter Attraktor  $A$  befindet; falls die Konvergenzgeschwindigkeit aber mit fallendem  $h_i$  immer langsamer wird, so befindet sich kein echter Attraktor  $A$  in der Nähe der  $\tilde{A}_{h_i}$ .  $\square$

Satz 4.25 gibt eine umfassende Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen Satz 4.11 umkehrbar ist, allerdings beantwortet er noch nicht die Frage, wann man die “asymptotisch stabilen Mengen” in Satz 4.11 durch “Attraktoren” ersetzen kann.

Wenn dies geht, dann müssen wegen der Implikation “(iii)  $\Rightarrow$  (ii)” in Satz 4.25 notwendigerweise Attraktoren für die numerischen Systeme existieren, die die Eigenschaft aus Satz 4.25 (ii) erfüllen, also asymptotisch gleichmäßige Attraktionsraten besitzen. Der folgende Satz zeigt, dass diese Bedingung auch hinreichend ist.

**Satz 4.27** Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.11, zusätzlich sei  $A$  ein Attraktor.

Dann gilt: Die Mengen  $\tilde{A}_h$  aus Satz 4.11(i) können genau dann als Attraktoren gewählt werden, wenn für die numerischen Systeme  $\tilde{\Phi}_h$  Attraktoren  $\tilde{A}_h^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  existieren, die asymptotisch gleichmäßige Attraktionsraten besitzen.

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ”: Wenn die  $\tilde{A}_h$  Attraktoren sind, so besitzen sie nach Satz 4.25(ii) auch asymptotisch gleichmäßige Attraktionsraten, also folgt die Aussage mit  $\tilde{A}_h^* = \tilde{A}_h$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Wir nehmen an, dass die  $\tilde{A}_h^*$  existieren. Seien  $\tilde{A}_h$  die asymptotisch stabilen Mengen aus Satz 4.11(i) erfüllen. Wir zeigen, dass auch die  $\tilde{A}_h^*$  die Aussage von Satz 4.11(i) erfüllen.

Wegen der Minimalität der Attraktoren muss  $\tilde{A}_h^* \subseteq \tilde{A}_h$  gelten, also folgt insbesondere  $H^*(\tilde{A}_h^*, A) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Nehmen wir nun an, dass  $H^*(A, \tilde{A}_h^*) \not\rightarrow 0$  gilt. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $h_i \rightarrow 0$ , so dass

$$H^*(A, \tilde{A}_{h_i}^*) \geq \varepsilon$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt. Da  $B$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $M > 0$  mit

$$H^*(B, \tilde{A}_{h_i}^*) \leq M$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$ , und aus der gleichmäßigen Attraktion der  $h_i$  folgt, dass es ein  $t \geq 0$  gibt, so dass die Ungleichung

$$\beta_{h_i}(M, t) \leq \varepsilon/4$$

für alle hinreichend großen  $i \in \mathbb{N}$  gilt. Mit dieser Wahl ergibt sich insbesondere

$$H^*(\tilde{\Phi}_{h_i}(t, B), \tilde{A}_{h_i}^*) = \sup_{x \in B} d(\tilde{\Phi}_{h_i}(t, x), \tilde{A}_{h_i}^*) \leq \sup_{x \in B} \beta(d(x, \tilde{A}_{h_i}^*), t) \leq \beta(M, t) \leq \varepsilon/4.$$

Aus dem Konvergenzsatz für Einschrittverfahren erhalten wir

$$H(\Phi(t, B), \tilde{\Phi}_{h_i}(t, B)) \leq Ch_i^p \leq \varepsilon/4$$

für alle hinreichend großen  $i \in \mathbb{N}$ . Also folgt mit zweimaliger Anwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung für  $H^*$

$$\begin{aligned} H^*(A, \Phi(t, A)) &\geq H^*(A, \Phi(t, B)) \\ &\geq H^*(A, \tilde{\Phi}_{h_i}(t, B)) - H^*(\Phi(t, B), \tilde{\Phi}_{h_i}(t, B)) \\ &\geq H^*(A, \tilde{A}_{h_i}^*) - H^*(\tilde{\Phi}_{h_i}(t, B), \tilde{A}_{h_i}^*) - H^*(\Phi(t, B), \tilde{\Phi}_{h_i}(t, B)) \\ &\geq \varepsilon - \beta(M, t) - Ch_i^p \geq \varepsilon - \varepsilon/4 - \varepsilon/4 \geq \varepsilon/2 > 0. \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Invarianz des Attraktors  $A$ , weswegen die Konvergenz  $H^*(A, \tilde{A}_h^*) \rightarrow 0$  gelten muss.  $\square$

## 4.6 Spezialfälle

Satz 4.25 verwendet Bedingungen an die numerischen asymptotisch stabilen Mengen  $\tilde{A}_h$  (bzw. Attraktoren), um Konvergenz gegen eine echte asymptotisch stabile Menge  $A$  (bzw. einen echten Attraktor) zu zeigen.

In diesem Abschnitt wollen wir einige Spezialfälle von Attraktoren betrachten, in denen wir Konvergenz erhalten, ohne Bedingungen an die  $\tilde{A}_h$  stellen zu müssen. Wir ersetzen die Bedingungen an die  $\tilde{A}_h$  also durch Bedingungen an  $A$ .

Zunächst halten wir dazu die folgende direkte Konsequenz aus Satz 4.11 fest.

**Korollar 4.28** Betrachte eine DGL (3.1) mit Lösungssystem  $\Phi$  sowie ein zugehöriges numerisches Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  gemäß Definition 3.3. Sei  $A$  ein Attraktor von  $\Phi$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  und Robustheitsmaß  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ . Dann existieren für alle hinreichend kleinen  $h > 0$  Attraktoren  $A_h^*$  für  $\tilde{\Phi}_h$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ , für die Ungleichung

$$H^*(A_h^*, A) \leq \gamma(Eh^p)$$

gilt.

**Beweis:** Nach 4.11 existieren asymptotisch stabile Mengen  $A_h$  für  $\tilde{\Phi}$ , für die die behauptete Abschätzung gilt. Nach Korollar 3.15 existieren dann auch Attraktoren  $A_h^* \subseteq A_h$ , für die wegen der Eigenschaften von  $H^*$  dann auch die behauptete Ungleichung gilt.  $\square$

**Bemerkung 4.29** Die aus Korollar 4.28 folgende Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} H^*(A_h^*, A) = 0$$

wird auch *oberhalbstetige* Konvergenz genannt.  $\square$

Als ersten Spezialfall betrachten wir einen Attraktor, der aus genau einer periodischen Lösung besteht.

**Satz 4.30** Es sei  $A$  ein Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$ , der aus genau einer periodischen Lösung besteht, d.h. es existiert ein  $T > 0$ , so dass für jedes  $x \in A$  die Gleichung

$$A = \{\Phi(t, x) \mid t \in [0, T]\}$$

gilt. Sei  $\tilde{\Phi}_h$  ein Einschrittverfahren gemäß Definition 3.3 und  $\gamma$  das Robustheitsmaß des Attraktors  $A$ . Dann existiert für alle hinreichend kleinen  $h > 0$  ein Attraktor  $A_h^*$  mit Stabilitätsumgebung  $B$ , für den die Ungleichung

$$H(A_h^*, A) \leq C(\gamma(Eh^p) + h^p + h)$$

für eine geeignete Konstante  $C > 0$  gilt. Insbesondere folgt also die Hausdorff-Konvergenz von  $A_h^*$  gegen  $A$  ohne weitere Annahmen an  $A_h^*$ .

**Beweis:** Aus Korollar 4.28 folgt, dass für  $\tilde{\Phi}_h$  und hinreichend kleine  $h$  Attraktoren  $A_h^*$  existieren, für die die Ungleichung

$$H^*(A_h^*, A) \leq \gamma(Eh^p) \tag{4.18}$$

gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die Abschätzung

$$H^*(A, A_h^*) \leq C(\gamma(Eh^p) + h^p + h)$$

für ein geeignetes  $C \geq 1$  gilt, dann folgt die Behauptung mit diesem  $C$ . Aus dem Konvergenzsatz für Einschrittverfahren (Satz 2.11 der Numerik II-Vorlesung [6]) folgt, dass ein  $C_1 > 0$  existiert, so dass die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x) - \Phi(t, x)\| \leq C_1 h^p$$

für alle  $t \in h\mathbb{Z}$  mit  $t \in [0, T]$  gilt. Aus dem Gronwall–Lemma 4.5 können wir folgern, dass  $\Phi$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2)\| \leq C_2 \|x_1 - x_2\|$$

für alle  $t \in [0, T]$  erfüllt. Zudem gilt für  $\Phi$  auf  $A$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t, x) - x\| \leq C_3 t,$$

wobei  $C_3$  eine Schranke für  $\|f\|$  auf  $A$  ist.

Aus (4.18) folgt nun, dass Punkte  $x^* \in A_h^*$  und  $x \in A$  mit  $\|x^* - x\| \leq \gamma(Eh^p)$  existieren. Da  $A_h^*$  invariant ist, folgt  $\tilde{\Phi}_h(t, x^*) \in A_h^*$  für alle  $t \in h\mathbb{N}$ . Es sei nun  $y \in A$  ein beliebiger Punkt. Wegen der Periodizitätsannahme lässt sich  $y = \Phi(t, x)$  für ein  $t \in [0, T]$  schreiben. Es sei nun  $t_h$  das größte ganzzahlige Vielfache von  $h$  mit  $t_h \leq t$ . Wegen  $y = \Phi(t - t_h, \Phi(t_h, x))$  folgt

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{\Phi}_h(t_h, x^*)\| &\leq \|y - \Phi(t_h, x)\| + \|\Phi(t_h, x) - \Phi(t_h, x^*)\| + \|\Phi(t_h, x^*) - \tilde{\Phi}_h(t_h, x^*)\| \\ &\leq C_3 h + C_2 \gamma(Eh^p) + C_1 h^p = C(h + \gamma(Eh^p) + h^p), \end{aligned}$$

wobei wir  $C = \max\{1, C_1, C_2, C_3\}$  wählen. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

Tatsächlich kann man diese Abschätzung zu

$$H(A_h^*, A) \leq C(\gamma(Eh^p) + h^p)$$

verschärfen, wenn man die geometrische Eigenschaft des Attraktors ausnutzt, dass dieser durch eine differenzierbare Kurve definiert ist. Wir wollen diesen Aspekt hier aber nicht vertiefen.

Beachte, dass wir bereits einige Attraktoren kennen gelernt haben, die die Voraussetzung von Satz 4.30 erfüllen, z.B. den Attraktor  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  aus Beispiel 2.9(ii). Zudem erfüllt jeder einpunktige Attraktor  $A = \{x^*\}$  die Voraussetzung, sogar für jedes  $T > 0$ . Für exponentiell stabile einpunktige Attraktoren kann man Satz 4.30 sogar weiter verschärfen, wenn man die folgende Annahme an das numerische Einschrittverfahren macht.

**Annahme 4.31** Es sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  ein Gleichgewicht der DGL (3.1), also  $f(x^*) = 0$ . Das Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  erfülle in einer Umgebung  $\mathcal{B}_\delta(x^*)$  mit  $\delta > 0$  die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(h, x) - \Phi(h, x)\| \leq D \|x - x^*\| h^2$$

für eine Konstante  $D > 0$ .  $\square$

**Beispiel 4.32** Jedes Runge–Kutta–Verfahren erfüllt Annahme 4.31. Wir beweisen dies für das Euler–Verfahren  $\tilde{\Phi}_h(h, x) = x + hf(x)$ :

Wir betrachten zunächst die Funktion  $\psi(t) = \|\Phi(t, x) - x\|$ . Für diese gilt

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \|\Phi(t, x) - x\| \\ &= \left\| \int_0^t f(\Phi(s, x)) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t f(\Phi(s, x)) - f(x) + f(x) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(\Phi(s, x)) - f(x)\| ds + \int_0^t \|f(x) - f(x^*)\| ds \\
&\leq \int_0^t L \|\Phi(s, x) - x\| ds + \int_0^t L \|x - x^*\| ds \\
&= tL \|x - x^*\| + L \int_0^t \psi(s) ds
\end{aligned}$$

Mit dem Gronwall–Lemma folgt also

$$\|\Phi(t, x) - x\| \leq \hat{t}L \|x - x^*\| e^{Lt}$$

mit  $t \leq \hat{t}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\Phi}_h(h, x) - \Phi(h, x)\| &= \left\| hf(x) - \int_0^h f(\Phi(s, x)) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^h f(x) - f(\Phi(s, x)) ds \right\| \\
&\leq \int_0^h L \|x - \Phi(s, x)\| ds \\
&\leq \int_0^h hL^2 \|x - x^*\| e^{Ls} ds \leq Le^{Lh} \|x - x^*\| h^2
\end{aligned}$$

also gerade die verlangte Abschätzung mit  $D = Le^{Lh}$ .  $\square$

Nun können wir den Satz über exponentiell stabile einpunktige Attraktoren (= Gleichgewichte) formulieren.

**Satz 4.33** Betrachte eine DGL (3.1) mit Lösungssystem  $\Phi$  sowie ein zugehöriges numerisches Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  gemäß Definition 3.3, welches Annahme 4.31 erfüllt. Dann gilt: Falls  $\Phi$  einen einpunktigen Attraktor der Form  $A = \{x^*\}$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $B$  besitzt, der exponentiell stabil ist, also eine Attraktionsrate der Form  $\beta(r, t) = ce^{-\lambda t} r$  besitzt, so ist  $A$  für alle hinreichend kleinen  $h > 0$  auch ein exponentiell stabiler Attraktor für  $\tilde{\Phi}_h$  mit gleicher Stabilitätsumgebung  $B$ .

**Beweis:** Aus der Numerik II ist bekannt (vgl. den Beweis des Konvergenzsatzes Satz 2.11 im Skript zur Numerik II), dass Einschrittverfahren, die die Bedingungen aus Definition 3.3 erfüllen, konvergent sind. Genauer gilt für jedes  $T > 0$  die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x) - \Phi(t, x)\| \leq EC_T h^p \quad (4.19)$$

für alle  $t = ih \in [0, T]$  und eine von  $E$  und  $h$  unabhängige Konstante  $C_T$ . Aus Annahme 4.31 erhalten wir für alle  $\varepsilon \leq \delta$  analog

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x) - \Phi(t, x)\| \leq D\varepsilon C_T h \quad (4.20)$$

für alle  $x, T$ , für die die Ungleichung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x) - x^*\| \leq \varepsilon$$

für alle  $t = ih \in [0, T]$  gilt.

Wir zeigen nun zunächst die folgende Aussage: Es existiert ein  $T^* > 0$ , so dass für alle  $x \in B$  und alle hinreichend kleinen  $h > 0$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - x^*\| \leq \frac{\|x - x^*\|}{2} \quad (4.21)$$

gilt, wobei  $T_h^*$  das kleinste ganzzahlige Vielfache von  $h$  mit  $T_h^* \geq T^*$  bezeichnet. Zum Beweis von (4.21) wählen wir  $T^* = (\ln 4c)/\lambda$ , also gerade

$$ce^{-\lambda T^*} = \frac{1}{4}.$$

Beachte, dass  $c \geq 1$  sein muss, damit die Ungleichung  $\|\Phi(t, x) - x^*\| \leq \beta(\|x - x^*\|, t)$  für  $t = 0$  gelten kann. Wir setzen  $T = T^* + 1$  und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $\|x - x^*\| > \delta/(2c)$  für  $\delta$  aus Annahme 4.31.

In diesem Fall wählen wir  $h \in (0, 1)$  so klein, dass

$$EC_T h^p \leq \frac{\delta}{8c}$$

gilt (beachte, dass  $T^* \leq T_h^* \leq T^* + h \leq T^* + 1 \leq T$  gilt). Aus (4.19) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - x^*\| &\leq \|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - \Phi(T_h^*, x)\| + \|\Phi(T_h^*, x) - x^*\| \\ &\leq EC_T h^p + \beta(\|x - x^*\|, T_h^*) \\ &\leq \frac{\delta}{8c} + ce^{-\lambda T^*} \|x - x^*\| \\ &\leq \frac{\delta}{8c} + \frac{1}{4} \|x - x^*\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|x - x^*\| + \frac{1}{4} \|x - x^*\| = \frac{\|x - x^*\|}{2}, \end{aligned}$$

also (4.21).

2. Fall:  $\|x - x^*\| \leq \delta/(2c)$  für  $\delta$  aus Annahme 4.31.

In diesem Fall wählen wir  $h \in (0, 1)$  so klein, dass die Ungleichungen

$$DC_T h \leq \frac{1}{4} \text{ und } EC_T h^p \leq \frac{\delta}{8c}$$

gelten. Analog zum Fall 1 folgt aus der zweiten Ungleichung und (4.19) für alle  $t = ih \in [0, T]$  die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - x^*\| \leq \frac{\delta}{8c} + ce^{-\lambda t} \|x - x^*\|,$$

aus der wir wegen

$$\dots \leq \frac{\delta}{8} + c\|x - x^*\| \leq \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

schließen können, dass  $\tilde{\Phi}_h(t, x) \in \mathcal{B}_\delta(x^*)$  liegt. Also können wir Ungleichung (4.20) anwenden, aus der

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - x^*\| &\leq \|\tilde{\Phi}_h(T_h^*, x) - \Phi(T_h^*, x)\| + \|\Phi(T_h^*, x) - x^*\| \\ &\leq D\|x - x^*\|C_T h + \beta(\|x - x^*\|, T_h^*) \\ &\leq \frac{\|x - x^*\|}{4} + ce^{-\lambda T^*}\|x - x^*\| \\ &\leq \frac{\|x - x^*\|}{4} + \frac{\|x - x^*\|}{4} = \frac{\|x - x^*\|}{2}, \end{aligned}$$

also wiederum (4.21) folgern können.

Die Behauptung ist nun, dass aus (4.21) die exponentielle Stabilität von  $A = \{x^*\}$  bzgl.  $\tilde{\Phi}_h$  folgt. Zunächst einmal folgt aus Annahme 4.31, dass  $x^*$  ein Gleichgewicht für  $\tilde{\Phi}_h$  ist. Außerdem folgt per Induktion die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(iT_h^*, x) - x^*\| \leq \|x - x^*\|/2^i.$$

Aus dem Gronwall–Lemma angewendet auf  $\psi(t) = \|\tilde{\Phi}_h(t, x) - x\|$  folgt (vgl. die erste Ungleichung in Beispiel 4.32) die Ungleichung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x) - x^*\| \leq \|\tilde{\Phi}_h(t, x) - x\| + \|x - x^*\| \leq (1 + tLe^{Lt})\|x - x^*\|.$$

Setzen wir nun  $\tilde{\lambda} = (\ln 2)/T$ , also  $e^{-\tilde{\lambda}T} = 1/2$ , und  $\tilde{c} = 2(1 + TLe^{LT})$ , so folgt für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $t = ih \in [iT_h^*, (i+1)T_h^*]$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_h(t, x) - x^*\| &= \|\tilde{\Phi}_h(t - iT_h^*, \tilde{\Phi}_h(iT_h^*, x)) - x^*\| \\ &\leq (1 + tLe^{Lt})\|\tilde{\Phi}_h(iT_h^*, x) - x^*\| \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{2}\|x - x^*\|/2^i \\ &= \tilde{c}\frac{1}{2^{i+1}}\|x - x^*\| \\ &= \tilde{c}e^{-\tilde{\lambda}T(i+1)}\|x - x^*\| \leq \tilde{c}e^{-\tilde{\lambda}t}\|x - x^*\| \end{aligned}$$

und damit die behauptete exponentielle Stabilität.  $\square$

Dieser Satz sagt also zweierlei aus. Erstens stimmen die numerischen Attraktoren mit den exakten überein und zweitens erhält man auch numerisch eine exponentielle Attraktionsrate.

**Bemerkung 4.34** Beachte, dass es für differenzierbare Vektorfelder  $f$  ein einfaches Kriterium für die exponentielle Stabilität von Gleichgewichten gibt. Berechnet man nämlich die Jacobi–Matrix

$$Df(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

im Gleichgewichtspunkt, so ist  $A = \{x^*\}$  genau dann ein exponentiell stabiler Attraktor, falls alle Eigenwerte von  $Df(x^*)$  negativen Realteil besitzen.  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Annahme der exponentiellen Stabilität wesentlich ist.

**Beispiel 4.35** Betrachte die DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_1(t)\|x(t)\| \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\|x(t)\|\end{aligned}$$

Abbildung 4.3 zeigt links die exakte Lösung für  $t = 0, \dots, 200$  und Anfangswert  $x = (0, 1)^T$ , die gegen das Gleichgewicht  $x^* = 0$  konvergiert, allerdings nicht exponentiell schnell. Die rechte Kurve in Abbildung 4.3 zeigt die gleiche Lösung approximiert durch das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite  $h = 0.1$ . Die Lösung konvergiert nicht gegen  $x^* = 0$ , sondern gegen eine periodische Lösung, die einen echt positiven Abstand von der Null besitzt.

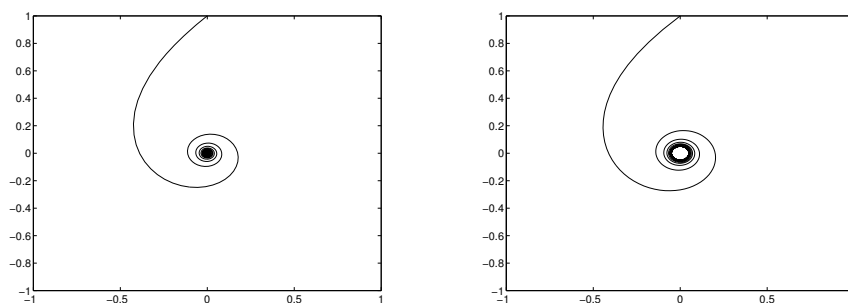


Abbildung 4.3: Exakte und explizite Euler Lösung der DGL aus Beispiel 4.35

□

## 4.7 Globale Attraktoren

Bisher haben wir bei der Definition der Attraktoren immer feste Stabilitätsumgebungen  $B$  betrachtet. Wenn die asymptotische Stabilitätseigenschaft für beliebige  $B \subset X$  gilt, so spricht man von einem globalen Attraktor. Formal definiert man dies wie folgt.

**Definition 4.36** Ein Attraktor  $A$  heißt *globaler Attraktor*, falls jede beschränkte Menge  $B \subset X$  eine Stabilitätsumgebung von  $A$  ist. In diesem Fall sagen wir auch, dass  $A$  eine *unendliche* Stabilitätsumgebung besitzt. □

Globale Attraktoren sind vom Standpunkt der Analyse dynamischer Systeme wichtige Objekte des Langzeitverhaltens, da *jede* Lösung  $\Phi(t, x)$  für hinreichend großes  $t \geq 0$  in der Nähe von  $A$  landet. Natürlich müssen globale Attraktoren nicht existieren — es kann ja divergierende Lösungen  $\|\Phi(t, x)\| \rightarrow \infty$  geben. Man kann aber für eine große Klasse von Systemen, die sogenannten *dissipativen Systeme* beweisen, dass ein globaler Attraktor existiert, der dann wegen Korollar 2.13 auch eindeutig sein muss.

Für eine feste Stabilitätsumgebung  $B \supset A$  gelten für einen globalen Attraktor natürlich alle bisher bewiesenen Resultate. Beispielfhaft wollen wir hier zeigen, wie man Korollar 4.28 im Falle eines globalen Attraktors verschärfen kann. Analoge Versionen kann man für alle anderen Konvergenzresultate beweisen.



**Satz 4.37** Betrachte eine DGL (3.1) mit Lösungssystem  $\Phi$  sowie ein zugehöriges numerisches Einschrittverfahren  $\tilde{\Phi}_h$  gemäß Definition 3.3. Sei  $A$  ein globaler Attraktor für  $\Phi$  mit Robustheitsmaß  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ . Dann existiert für jede beschränkte offene Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein  $h_B > 0$ , so dass für alle Schrittweiten  $h \in (0, h_B]$  Attraktoren  $A_h^*$  für  $\tilde{\Phi}_h$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  existieren, für die Ungleichung

$$H^*(A_h^*, A) \leq \gamma(Eh^p)$$

gilt.

**Beweis:** Das Resultat folgt sofort aus Korollar 4.28.  $\square$

Mit anderen Worten besagt Satz 4.37, dass die numerischen Attraktoren beliebig große Stabilitätsumgebungen  $B$  besitzen können, *wenn* die Schrittweite  $h > 0$  klein genug (relativ zu  $B$ ) gewählt wurde. Im Allgemeinen wird man für festes  $h > 0$  aber keinen *numerischen* globalen Attraktor  $A_h^*$  finden.

Dieses numerische Verhalten wird auch als *semiglobal* bezeichnet: Die Stabilitätsumgebungen der  $A_h^*$  sind *beliebig* groß (abhängig von  $h$ ) aber i.A. nicht *unendlich* groß (für festes  $h$ ).

Für dieses Verhalten gibt es zwei Gründe, die wir beide an jeweils einem einfachen Beispiel illustrieren wollen.

**Beispiel 4.38** Der erste Grund dafür, dass man numerisch keine echte Globalität erhält, liegt gerade in der globalen Natur der Eigenschaft. Bisher haben wir immer vereinfachend angenommen, dass die Konsistenzabschätzungen *global* gelten. Dies war dadurch gerechtfertigt, dass wir sowieso nur Lösungen betrachtet haben, die sich in einer zwar möglicherweise großen aber immer beschränkten Menge aufhalten. Bei der globalen Frage kann man diese Vereinfachung nicht mehr machen, d.h., man muss explizit berücksichtigen, dass die Konstanten  $E$  und  $L$  in Bemerkung 3.4 nun von der Wahl von  $B$  abhängen. Zur Illustration betrachten wir die eindimensionale DGL

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

Mit Hilfe der Lyapunov-Funktion  $V(x) = x^2$  sieht man leicht, dass die Menge  $A = \{0\}$  ein globaler Attraktor ist, da  $V$  auf jeder beschränkten Umgebung der Null die nötigen Bedingungen mit  $g(r) = 2r^2$  erfüllt. Beachte, dass das Vektorfeld  $f(x) = -x^3$  nicht global Lipschitz-stetig ist. Betrachtet man nun die Euler-Diskretisierung

$$x(t+h) = x(t) - hx(t)^3$$

so stellt man fest, dass das dadurch erzeugte approximative System  $\tilde{\Phi}_h$  zwar die Mengen  $A_h^* = \{0\}$  als Attraktoren besitzt (hier tritt also kein numerischer Fehler im Attraktor auf), diese nun jedoch keine globalen Attraktoren mehr sind. Genauer wird dies auf dem 9. Übungsblatt untersucht.  $\square$

**Beispiel 4.39** Auch wenn das Vektorfeld global Lipschitz stetig ist, kann es passieren, dass die numerischen Attraktoren nicht global sind, nämlich dann, wenn die Attraktionsrate für

große  $\|x\|$  nur noch sehr langsam abnimmt, also die Attraktion weit entfernt vom Attraktor  $A$  sehr langsam wird. Zur Illustration dieses Phänomens betrachte die zweidimensionale DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_1(t)e^{-\|x(t)\|} \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)e^{-\|x(t)\|}\end{aligned}$$

Mittels der Lyapunov-Funktion  $V(x) = \|x\|^2$  weist man nach, dass  $A = \{0\}$  ein globaler Attraktor ist. Über die Ableitung  $Df(x)$  des Vektorfeldes  $f$  zeigt man, dass  $f$  global Lipschitz stetig ist. Zudem zeigen die Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = -1 \pm i$  von  $Df(0)$ , dass  $A = \{0\}$  ein exponentiell stabiler Attraktor ist. Folglich ist  $A_h^* = \{0\}$  ebenfalls ein exponentiell stabiler Attraktor für das Euler-Verfahren, allerdings ist dies wiederum kein globaler Attraktor, wie numerische Simulationen (vgl. Übungsblatt 9) zeigen.  $\square$

# Kapitel 5

## Berechnung von Attraktoren

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Algorithmen beschäftigen, mit denen man Attraktoren numerisch berechnen kann. Dabei betrachten wir durchweg diskrete dynamische Systeme  $\Phi$  auf  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  mit Zustandsraum  $X = \mathbb{R}^n$ . Diese diskreten Systeme können natürlich auch als Zeit- $h$  Abbildungen von kontinuierlichen Systemen oder als deren numerische Approximationen gegeben sein. Da wir aus Satz 2.18 wissen, dass sich die Attraktoren beim Übergang zur Zeit- $h$  Abbildung nicht ändern, können wir alle Ergebnisse aus diesem Kapitel auch auf Attraktoren kontinuierlicher Systeme anwenden. Zudem betrachten wir in diesem Kapitel stets explizit eine kompakte Teilmenge  $\Omega$  des Zustandsraumes  $X = \mathbb{R}^n$ , auf der wir die Dynamik des gegebenen Systems untersuchen wollen.

Im ersten Schritt werden wir nun einen alternativen Attraktorbegriff einführen, der sich für numerische Berechnungen besser eignet. Für diese Art von Attraktoren formulieren wir dann einen “abstrakten” Algorithmus, den wir danach konkret numerisch umsetzen, indem wir den Zustandsraum  $X = \mathbb{R}^n$  des dynamischen Systems räumlich diskretisieren. Dazu werden wir einen mathematischen Formalismus zur Beschreibung von Zustandsraum-diskretisierungen einführen, den wir zunächst abstrakt formulieren und dann numerisch realisieren.

### 5.1 Relative Attraktoren

Da wir uns in diesem Kapitel von vornherein auf eine kompakte Menge  $\Omega$  einschränken, müssen wir dies auch bei der Attraktordefinition berücksichtigen. Wir wollen dazu einen abgewandelten Attraktorbegriff einführen, der direkt von einer vorgegebenen Menge  $\Omega$  ausgeht und der sich auch für die folgende numerische Behandlung gut eignet.

**Definition 5.1** Gegeben sei eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und ein diskretes (semi-)dynamisches System  $\Phi$  auf  $X = \mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ .

(i) Eine Menge  $A \subseteq \Omega$  heißt *relativ invariant*, falls sie die Bedingung

$$\Phi(h, A) \cap \Omega = A$$

erfüllt.

(ii) Eine Menge  $A \subseteq \Omega$  heißt *relativer globaler Attraktor* von  $\Phi$  bzgl.  $\Omega$ , falls sie die maximale relativ invariante Teilmenge von  $\Omega$  ist, d.h., falls für jede weitere relativ invariante Teilmenge  $\tilde{A}$  von  $\Omega$  die Inklusion  $\tilde{A} \subseteq A$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 5.2** Beachte, dass relative Attraktoren nicht existieren müssen. Als Beispiel betrachte die Funktion

$$f(x) = x + 1$$

mit  $x \in \mathbb{R}$  und das davon erzeugte dynamische System  $\Phi(t, x) = x + t$  für  $t \in \mathbb{Z}$ . Für die Menge  $\Omega = [-1/4, 1/4]$  gilt

$$\Phi(1, \Omega) \cap \Omega = [3/4, 5/4] \cap [-1/4, 1/4] = \emptyset,$$

für jede beliebige nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\Omega$  gilt also

$$\Phi(1, A) \cap \Omega = \emptyset \neq A,$$

weswegen keine relativ invariante Teilmenge existiert.  $\square$

Das folgende Lemma zeigt, dass es gerechtfertigt ist von “dem” relativen globalen Attraktor zu sprechen.

**Lemma 5.3** Falls ein relativer globaler Attraktor existiert, so ist er eindeutig.

**Beweis:** Es seien  $A_1$  und  $A_2$  relativ globale Attraktoren bzgl.  $\Omega$ . Man prüft leicht nach, dass dann auch  $A = A_1 \cup A_2$  eine relativ invariante Menge ist, für die offensichtlich  $A_1 \subseteq A$  und  $A_2 \subseteq A$  gilt. Wegen der Maximalität von  $A_1$  und  $A_2$  folgt  $A \subseteq A_1$  und  $A \subseteq A_2$ . Zusammen ergibt dies  $A = A_1$  und  $A = A_2$  und damit auch  $A_1 = A_2$ .  $\square$

Was haben nun diese relativen Attraktoren mit den bisher betrachteten “normalen” Attraktoren im Sinne von Definition 2.8 zu tun? Die Antwort liegt in dem folgenden Satz.

**Satz 5.4** (i) Jeder Attraktor  $A$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist ein relativer globaler Attraktor bzgl.  $\Omega = \overline{B}$ .

(ii) Falls  $\Omega = \overline{B}$  eine absorbierende Menge ist, so ist der relative globale Attraktor  $A$  ein Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$ .

**Beweis:** (i) Angenommen,  $A$  wäre kein relativer globaler Attraktor bzgl.  $\Omega$ , d.h., es gäbe eine größere relativ invariante Teilmenge  $\tilde{A}$  von  $\overline{B}$ . Insbesondere gilt dann  $H^*(\tilde{A}, A) =: \delta > 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  und der Attraktionseigenschaft von  $A$  gilt mit

$$H^*(\Phi(t, B), A) \rightarrow 0$$

auch

$$H^*(\Phi(t, \overline{B}), A) \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt aber

$$H^*(\Phi(t, \overline{B}), A) \geq H^*(\Phi(t, \tilde{A}), A) \geq H^*(\tilde{A}, A) = \delta > 0,$$

ein Widerspruch.

(ii) Falls  $\Omega$  eine absorbierende Menge enthält, so folgt aus Satz 2.12, dass  $B$  einen Attraktor  $\tilde{A}$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  enthält. Nach (i) muss  $\tilde{A}$  mit  $A$  übereinstimmen.  $\square$

**Bemerkung 5.5** (i) Satz 5.4 besagt mit anderen Worten: Wenn wir einen Attraktor  $A$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  berechnen wollen, so können wir alternativ den relativen globalen Attraktor bzgl.  $\Omega = \overline{B}$  berechnen. Wenn der Attraktor  $A$  existiert (was genau dann der Fall ist, wenn  $\Omega$  absorbierend ist), so wird er mit dieser Methode auch berechnet.

(ii) Aussage (ii) von Satz 5.4 gilt nicht, wenn  $\Omega$  keine absorbierende Menge ist. Für Beispiele vgl. Übungsaufgabe 20 auf Blatt 10.  $\square$

In Satz 2.12 hatten wir gezeigt, dass die Menge

$$A = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \Phi(t, C)}$$

ein Attraktor ist, falls  $C$  eine absorbierende Menge ist. Für relative globale Attraktoren kann diese Konstruktion vereinfacht werden, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 5.6** Für eine kompakte Menge  $\Omega$  konstruiere iterativ die Mengen

$$C_0 = \Omega, \quad C_i = \Phi(h, C_{i-1}) \cap \Omega, \quad i = 1, 2, \dots$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Die Mengen  $C_i$  erfüllen die Inklusion

$$C_{i+1} \subseteq C_i \tag{5.1}$$

für alle  $i \geq 0$ .

(ii) Der relative globale Attraktor bzgl.  $\Omega$  ist gegeben durch

$$A = \bigcap_{i \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq i} C_j} = \bigcap_{i \geq 0} C_i.$$

(iii) Es gilt die Konvergenz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H(C_i, A) = 0$$

**Beweis:** (i) Wir zeigen die Inklusion (5.1) per Induktion über  $i$ . Für  $i = 0$  gilt  $C_1 \subseteq \Omega = C_0$ , also (5.1). Für  $i \rightarrow i + 1$  gilt wegen der Induktionsannahme  $C_i \subseteq C_{i-1}$

$$C_{i+1} = \Phi(h, C_i) \cap \Omega \subseteq \Phi(h, C_{i-1}) \cap \Omega = C_i,$$

also ebenfalls (5.1).

(ii) Aus (i) und der Abgeschlossenheit der  $C_i$  folgt die Gleichheit

$$C_i = \overline{\bigcup_{j \geq i} C_j}. \tag{5.2}$$

Es genügt also zu zeigen, dass  $A = \bigcap_{i \geq 0} C_i$  der relative globale Attraktor ist.

Wiederum aus (i) folgt  $C_0 \cap C_i = C_i$  für alle  $i \geq 0$  und damit

$$A = \bigcap_{i \geq 0} C_i = \bigcap_{i \geq 1} C_i.$$

Hiermit folgt

$$\Phi(h, A) \cap \Omega = \bigcap_{i \geq 0} \Phi(h, C_i) \cap \Omega = \bigcap_{i \geq 0} C_{i+1} = \bigcap_{i \geq 1} C_i = A,$$

also die relative Invarianz von  $A$ .

Es bleibt die Maximalität von  $A$  zu zeigen. Dazu sei  $\tilde{A} \subseteq \Omega$  eine beliebige relativ invariante Menge, also mit  $\Phi(h, \tilde{A}) \cap \Omega = \tilde{A}$ . Zum Beweis der Maximalität von  $A$  müssen wir  $\tilde{A} \subseteq A$  zeigen. Dazu beweisen wir per Induktion, dass  $\tilde{A} \subseteq C_i$  für alle  $i \geq 0$  gilt. Für  $i = 0$  ist die gewünschte Inklusion wegen  $\tilde{A} \subseteq \Omega = C_0$  klar. Für  $i \rightarrow i + 1$  gilt

$$C_{i+1} = \Phi(h, C_i) \cap \Omega \supseteq \Phi(h, \tilde{A}) \cap \Omega = \tilde{A},$$

also gerade die gewünschte Inklusion. Da also  $\tilde{A} \subseteq C_i$  für alle  $i \geq 0$  gilt, folgt auch  $\tilde{A} \subseteq A$ , was die Maximalität von  $A$  zeigt.

(iii) Aus (ii) folgt die Inklusion  $A \subseteq C_i$  für alle  $i \geq 0$  und daher

$$H^*(A, C_i) = 0$$

für alle  $i \geq 0$ . Es bleibt also

$$H^*(C_i, A) \rightarrow 0 \tag{5.3}$$

zu zeigen. Zum Beweis von (5.3) nehmen wir an, dass (5.3) nicht gilt. Es existiere also eine Teilfolge  $C_{i_k}$  mit  $i_k \rightarrow \infty$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$H^*(C_{i_k}, A) \geq \varepsilon$$

für alle  $k$  gilt. Es gibt also eine Folge von Punkten  $x_k \in C_{i_k}$  mit

$$d(x_k, A) \geq \varepsilon.$$

Da alle  $C_i$  in  $\Omega$  enthalten sind, liegen auch die  $x_k$  in  $\Omega$ , weswegen ein Häufungspunkt  $x^* \in \Omega$  dieser Folge existiert, für den

$$x^* \in \overline{\bigcup_{j \geq i} C_j}$$

für alle  $i \geq 0$  gelten muss. Wegen (5.2) folgt daraus  $x^* \in C_i$  für alle  $i \geq 0$  und mit (i) also  $x^* \in A$ . Daraus folgt  $d(x^*, A) = 0$ , weswegen beliebig große  $k \in \mathbb{N}$  existieren mit

$$d(x_k, A) \leq \varepsilon/2.$$

Dies widerspricht der Wahl der  $x_k$ , weswegen (5.3) gelten muss.  $\square$

Die Konstruktion aus Lemma 5.6 wird uns später als Ausgangspunkt für unseren Algorithmus dienen.

## 5.2 Räumliche Diskretisierung

Um den abstrakten Algorithmus numerisch umsetzen zu können, müssen wir den Zustandsraum geeignet diskretisieren. Die folgende Definition liefert dazu den geeigneten mathematischen Rahmen.

**Definition 5.7** Betrachte eine kompakte Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Eine *Zellenüberdeckung*  $\mathcal{Q} = (Q_i)_{i=1,\dots,P}$  von  $\Omega$  ist eine endliche Familie abgeschlossener Mengen  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ ,  $P \in \mathbb{N}$ , mit  $Q_i = \overline{\text{int } Q_i}$ , so dass  $\text{int } Q_i \cap \text{int } Q_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i=1,\dots,P} Q_i = \Omega$  gilt. Die Mengen  $Q_i$  heißen die *Zellen* der Zellenüberdeckung.

(ii) Mit  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  bezeichnen wir die Menge aller möglichen Vereinigungen von Zellen in  $\mathcal{Q}$ , also

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} := \{C \subseteq \Omega \mid C = \bigcup_{i \in I} Q_i \text{ für eine beliebige Indexmenge } I \subseteq \{1, \dots, P\}\}.$$

(iii) Der Wert

$$\text{diam}(Q_i) := \max_{x,y \in Q_i} \|x - y\|$$

heißt *Durchmesser* von  $Q_i$  und der Wert

$$\text{diam}(\mathcal{Q}) := \max_{i=1,\dots,P} \text{diam}(Q_i)$$

heißt *Feinheit* von  $\mathcal{Q}$ . □

Am Rechner werden wir später konkrete Zellenüberdeckungen betrachten, die sich dort leicht darstellen lassen, dabei werden wir die  $Q_i$  als Rechtecke bzw. Quader wählen. Zunächst aber genügt uns diese ganz abstrakte Definition.

Das folgende Lemma zeigt zwei einfache Eigenschaften der Mengen in  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ .

**Lemma 5.8** Betrachte eine Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für je zwei Mengen  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  die Folgerung

$$H(C_1, C_2) < \varepsilon \Rightarrow C_1 = C_2$$

gilt.

(ii) Sei  $C_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  eine Folge von Mengen in  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ . Dann existiert eine Teilfolge  $C_{i_j}$  mit  $i_j \rightarrow \infty$ , so dass

$$C_{i_j} = C_{i_k}$$

gilt für alle  $j, k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Beachte zunächst, dass die Menge  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  nur endlich viele verschiedene Mengen enthält.

(i) Wir setzen

$$\varepsilon := \inf\{H(C_1, C_2) \mid C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}, C_1 \neq C_2\}.$$

Hieraus folgt  $\varepsilon > 0$ , da nur endlich viele Paare  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  mit  $C_1 \neq C_2$  existieren und für jedes dieser Paare  $H(C_1, C_2) > 0$  gilt. Die gewünschte Eigenschaft folgt aus der Definition.

(ii) Es sei  $N \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Mengen in  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , diese Mengen seien mit  $C^1, \dots, C^N$  durchnummeriert. Für jedes  $l = 1, \dots, N$  betrachten wir die Indexmengen

$$I_l = \{i \in \mathbb{N} \mid C_i = C^l\}.$$

Da  $\bigcup_{l=1, \dots, N} I_l = \mathbb{N}$  ist, muss mindestens eine der Mengen  $I_l$  unendlich viele Elemente enthalten; wir wählen  $l^*$  so, dass  $I_{l^*}$  unendlich viele Elemente enthält. Ordnen wir diese unendlich vielen Elemente von  $I_{l^*}$  aufsteigend an, so erhalten wir die gewünschte Folge  $i_j$ .  $\square$

Wir wollen nun Abbildungen auf den Mengen in  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  betrachten. Das Ziel ist hierbei, diese so zu definieren, dass sie später sinnvolle (und numerisch realisierbare) Approximationen von  $\Phi$  darstellen.

**Definition 5.9** (i) Eine Abbildung  $F : \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  heißt *Zellenabbildung* auf  $\mathcal{Q}$ , falls die Bedingung

$$F(Q_i) \cap \Omega \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$$

gilt.

(ii) Für eine Zellenabbildung  $F$  und eine Menge  $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  definieren wir mittels

$$\widehat{\Phi}(h, C) = \bigcup_{Q_i \subseteq C} F(Q_i) \cap \Omega$$

und der Induktion

$$\widehat{\Phi}((i+1)h, C) = \widehat{\Phi}(h, \widehat{\Phi}(ih, C)) \cap \Omega$$

die *Zellendynamik*  $\widehat{\Phi} : h\mathbb{N} \times \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ .  $\square$

Die folgende Definition stellt die Beziehung zwischen der Zellendynamik  $\widehat{\Phi}$  und unserem ursprünglichen dynamischen System  $\Phi$  her.

**Definition 5.10** Betrachte ein dynamisches System  $\Phi : h\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eine Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und eine Zellendynamik  $\widehat{\Phi} : h\mathbb{N} \times \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ .

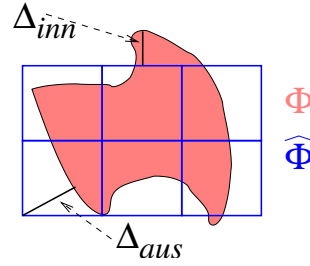
Wir nennen  $\widehat{\Phi}$  eine *räumliche Diskretisierung* von  $\Phi$  mit *äußerem Fehler*  $\Delta_{aus} > 0$  und *innerem Fehler*  $\Delta_{inn} > 0$ , falls die Ungleichungen

$$(i) \quad H^*(\widehat{\Phi}(h, Q_i), \Phi(h, Q_i)) \leq \Delta_{aus}$$

$$(ii) \quad H^*(\Phi(h, Q_i), \widehat{\Phi}(h, Q_i) \cup \Omega^c) \leq \Delta_{inn}$$

für alle Zellen  $Q_i$  aus  $\mathcal{Q}$  erfüllt sind, wobei  $\Omega^c$  das Komplement der Menge  $\Omega$  bezeichnet.  $\square$



Abbildung 5.1: Äußerer und innerer Fehler  $\Delta_{aus}$  und  $\Delta_{inn}$ 

Diese Definition verlangt, dass die Bilder von  $\widehat{\Phi}$  und  $\Phi$  in  $\Omega$  nahe beieinander liegen. Der äußere Fehler misst dabei, in wie weit das Bild der Zeldynamik zu groß ist, während der innere Fehler angibt, wieviel im Bild der Zeldynamik fehlt, wobei die Teile des Bildes, die nahe am Rand von  $\Omega$  liegen, nicht berücksichtigt werden (dies bewirkt das  $\Omega^c$ ). Abbildung 5.1 illustriert die zwei Fehler.

**Bemerkung 5.11** Falls der in  $\Omega$  liegende Teil des Bildes von  $\Phi$  von der Diskretisierung  $\widehat{\Phi}$  komplett überdeckt wird, also

$$\Phi(h, Q_i) \cap \Omega \subseteq \widehat{\Phi}(h, Q_i)$$

gilt, spricht man von einer *rigorosen* Diskretisierung. Beachte, dass in diesem Fall  $\Delta_{inn} = 0$  gilt.  $\square$

**Beispiel 5.12** (i) Die (theoretisch) einfachste Konstruktion einer räumlichen Diskretisierung  $\widehat{\Phi}$  von  $\Phi$  ist die folgende: Wir definieren die Zellenabbildung  $F$  als

$$F(Q_i) := \bigcup_{j \in I_i} Q_j$$

mit

$$I_i = \{j \in \{1, \dots, P\} \mid Q_j \cap \Phi(h, Q_i) \neq \emptyset\}.$$

Dies definiert eine Diskretisierung mit  $\Delta_{aus} = \text{diam}(Q)$  und  $\Delta_{inn} = 0$ .

(ii) Die Konstruktion aus (i) lässt sich so im Allgemeinen nicht implementieren, da sich das Bild  $\Phi(h, Q_i)$  nicht numerisch berechnen lässt. Selbst wenn die Abbildung  $\Phi$  explizit bekannt ist und man numerische Fehler bei der Auswertung von  $\Phi$  vernachlässigen kann, benötigt man zur exakten Berechnung von

$$\Phi(h, Q_i) = \bigcup_{x \in Q_i} \{\Phi(h, x)\}$$

die Werte von  $\Phi$  an allen (unendlich vielen) Punkten  $x \in Q_i$ , was in endlicher Zeit nicht machbar ist. In der Praxis wird man  $\Phi$  daher nicht in allen Punkten  $x \in Q_i$  auswerten, sondern eine endliche Menge  $\{x_i^1, \dots, x_i^{k_i}\}$  von  $k_i \in \mathbb{N}$  *Testpunkten* in jeder Zelle  $Q_i$  auswählen. Mit diesen approximieren wir

$$\Phi(h, Q_i) \approx \Phi_{approx}(h, Q_i) := \bigcup_{l=1, \dots, k_i} \{\Phi(h, x_i^l)\}.$$

Definieren wir nun analog zu (i) die Zellenabbildung

$$F(Q_i) := \bigcup_{j \in I_i} Q_j$$

nun mit

$$I_i = \{j \in \{1, \dots, P\} \mid Q_j \cap \widehat{\Phi}_{approx}(h, Q_i) \neq \emptyset\},$$

so lässt sich die Abbildung  $F$  (und damit die durch  $F$  gemäß Definition 5.9(ii) erzeugte Zellenabbildung  $\widehat{\Phi}$ ) tatsächlich numerisch realisieren. Die bei dieser Konstruktion entstehenden numerischen Fehler untersuchen wir in einer Übungsaufgabe.  $\square$

### 5.3 Berechnung relativer Attraktoren

In diesem Abschnitt leiten wir — ausgehend von dem “theoretischen” Algorithmus aus Lemma 5.6 — einen ersten Algorithmus zur Berechnung relativer Attraktoren. Hierzu definieren wir zunächst die entsprechenden Objekte für die Zellenabbildung  $\widehat{\Phi}$ .

**Definition 5.13** Für eine Zellenabbildung  $\widehat{\Phi}$  auf einer Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega$  ist der *relative globale Attraktor* von  $\widehat{\Phi}$  bzgl.  $\Omega$  definiert als die maximale bzgl.  $\widehat{\Phi}$  invariante Teilmenge  $\widehat{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , d.h., die maximale Menge  $\widehat{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  mit  $\widehat{\Phi}(t, \widehat{A}) = \widehat{A}$  für alle  $t \in h\mathbb{N}$ .  $\square$

Falls  $\widehat{\Phi}$  eine räumliche Diskretisierung eines Systems  $\Phi$  ist, so sollte natürlich ein Zusammenhang zwischen  $\widehat{A}$  und dem relativen globalen Attraktor  $A$  von  $\Phi$  bzgl.  $\Omega$  bestehen. Wir werden diesen später genauer untersuchen. Zunächst wollen wir uns aber mit der Berechnung von  $\widehat{A}$  beschäftigen. Das folgende Lemma ist das “Zellen-Analogon” von Lemma 5.6 und liefert uns die Grundlage des Algorithmus.

**Lemma 5.14** Für eine kompakte Menge  $\Omega$  und eine Zellenabbildung  $\widehat{\Phi}$  auf einer Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  konstruiere iterativ die Mengen

$$C_0 = \Omega, \quad C_i = \widehat{\Phi}(h, C_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Die Mengen  $C_i$  erfüllen die Inklusion

$$C_{i+1} \subseteq C_i$$

für alle  $i \geq 0$ .

(ii) Der relative globale Attraktor  $\widehat{A}$  von  $\widehat{\Phi}$  ist gegeben durch

$$\widehat{A} = \bigcap_{i \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq i} C_j} = \bigcap_{i \geq 0} C_i.$$

(iii) Für alle hinreichend großen  $i \in \mathbb{N}$  gilt

$$C_i = \widehat{A}$$

**Beweis:** Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Lemma 5.6, wobei wir in (iii) zusätzlich Lemma 5.8(i) verwenden.  $\square$

Wenn wir die Zellendynamik  $\widehat{\Phi}$  gemäß Beispiel 5.12(ii) konstruieren, so liefert die Konstruktion aus Lemma 5.14 den folgenden Algorithmus. Hierbei nehmen wir an, dass eine Datenstruktur vorliegt, in der die Zellenüberdeckung gespeichert ist (für die Übungsaufgaben wird eine solche Struktur gemeinsam mit den nötigen Funktionen zur Verfügung gestellt, vgl. den Anhang des Skripts). Um die Mengen  $C_i \in \mathcal{C}_Q$ , also Vereinigungen von Zellen darzustellen, wird für jede Zelle  $Q_j$  der Überdeckung ein “Status”  $s_j$  definiert. Hierbei verwenden wir im Iterationsschritt  $i$  die Konvention:

- $s_j = 0$ : Zelle gehört weder zu  $C_{i-1}$  noch zu  $C_i$
- $s_j \geq 1$ : Zelle gehört zu  $C_{i-1}$
- $s_j = 2$ : Zelle gehört zu  $C_i$

**Algorithmus 5.15** *Eingabe:* kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , diskretes (semi-)dynamisches System  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}^n$ , Zellenüberdeckung  $Q$  von  $\Omega$

- (0) Setze den Status  $s_j := 1$  für alle Zellen  $Q_j$ ; setze  $i := 1$
- (1) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$ 
  - Falls  $s_j \geq 1$  ist
  - Durchlaufe alle Testpunkte  $x_j^l$  der Zelle  $Q_j$
  - Setze den Status der Zelle  $Q_k$  mit  $\Phi(h, x_j^l) \in Q_k$  auf  $s_k := 2$
  - Ende der Schleifen
- (2) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$ 
  - Falls  $s_j = 1$  ist, setze  $s_j := 0$
  - Ende der Schleife
  - Falls kein  $s_j$  mit  $s_j = 1$  existiert hat, beende den Algorithmus
- (3) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$ 
  - Falls  $s_j = 2$  ist, setze  $s_j := 1$
  - Ende der Schleife
  - Setze  $i := i + 1$  und gehe zu (1)

*Ausgabe:* Nach jeder Ausführung von Schritt (2) gilt

$$C_i = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, P \\ s_j=2}} Q_j.$$

Der Algorithmus bricht ab, falls  $C_i = C_{i-1}$  ist.  $\square$

Wir wollen nun den Algorithmus analysieren. Wir nehmen dabei an, dass ein Attraktor  $A$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } \Omega$  existiert.

Der erste Schritt unserer Analyse ist die Einbettung der räumlichen Diskretisierung in die aus den vorhergehenden Kapiteln bekannten gestörten Systeme, analog zur Einbettung der

zeitlichen Diskretisierung im Einbettungslemma 3.5. Wir erinnern daran, dass das zu  $\Phi$  gehörige gestörte System  $\Psi$  durch

$$\Psi(0, x, w) = x, \quad \Psi(t+h, x, w) = \Phi(h, \Psi(t, x, w)) + hw(t),$$

wobei

$$w \in \mathcal{W}_\alpha^h := \{w : h\mathbb{Z} \rightarrow W_\alpha\}$$

und

$$W_\alpha := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \alpha\}$$

ist. Zudem hatten wir

$$\Psi_\alpha(t, x) := \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, x, w)\}$$

definiert.

Für dieses gestörte System gilt das folgende Lemma.

**Lemma 5.16 (Räumliches Einbettungslemma)** Betrachte ein diskretes dynamisches System  $\Phi$  eine räumliche Diskretisierung  $\widehat{\Phi}$  mit äußerem Fehler  $\Delta_{aus}$  sowie das zu  $\Phi$  gehörige gestörte System  $\Psi$ . Dann gilt

$$\widehat{\Phi}(t, C) \subseteq \Psi_\alpha(t, C)$$

mit  $\alpha = \Delta_{aus}/h$  für jedes  $C \in \mathcal{C}_Q$  und alle  $t \in h\mathbb{N}$ .

**Beweis:** (i) Aus der Definition des äußeren Fehlers  $\Delta_{aus}$  und den Eigenschaften des Hausdorff-Abstandes folgt die Inklusion

$$\widehat{\Phi}(t, C) \subset \overline{\mathcal{B}_{\Delta_{aus}}(\Phi(h, C))}.$$

Aus der Definition von  $\Psi_\alpha$  folgt sofort

$$\Psi_\alpha(h, C) = \overline{\mathcal{B}_{h\alpha}(\Phi(h, C))},$$

also folgt die Behauptung für  $t = h$  mit  $h\alpha = \Delta_{aus}$ , also  $\alpha = \Delta_{aus}/h$ . Mittels Induktion über  $t = ih$  folgt die Behauptung für alle  $t \in h\mathbb{N}$ .  $\square$

Für die Analyse des Algorithmus benötigen wir noch die folgenden Mengen.

**Definition 5.17** Gegeben sei eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und ein gestörtes diskretes System  $\Psi$  auf  $X = \mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ .

(i) Eine Menge  $A_\alpha \subseteq \Omega$  heißt *relativ  $\alpha$ -invariant*, falls sie die Bedingung

$$\Psi_\alpha(h, A_\alpha) \cap \Omega = A_\alpha$$

erfüllt.

(ii) Eine Menge  $A_\alpha \subseteq \Omega$  heißt *relativer globaler  $\alpha$ -Attraktor* von  $\Psi$  bzgl.  $\Omega$ , falls sie die maximale relativ  $\alpha$ -invariante Teilmenge von  $\Omega$  ist, d.h., falls für jede weitere relativ  $\alpha$ -invariante Teilmenge  $\tilde{A}_\alpha$  von  $\Omega$  die Inklusion  $\tilde{A}_\alpha \subseteq A_\alpha$  gilt.  $\square$

Analog zu Satz 5.4 gilt nun der folgende Satz, der Grundlage für unseren Konvergenzsatz ist.

**Satz 5.18** (i) Jeder  $\alpha$ -Attraktor  $A_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  ist ein relativer globaler Attraktor bzgl.  $\Omega = \overline{B}$ .

(ii) Falls  $\Omega = \overline{B}$  eine  $\alpha$ -absorbierende Menge ist, so ist der relative globale  $\alpha$ -Attraktor  $A_\alpha$  ein  $\alpha$ -Attraktor mit Stabilitätsumgebung  $B$ .

**Beweis:** (i) Angenommen,  $A_\alpha$  wäre kein relativer globaler  $\alpha$ -Attraktor bzgl.  $\Omega$ , d.h., es gäbe eine größere relativ  $\alpha$ -invariante Teilmenge  $\tilde{A}_\alpha$  von  $\overline{B}$ . Insbesondere gilt dann  $H^*(\tilde{A}_\alpha, A_\alpha) =: \delta > 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $\Phi_\alpha$  und der Attraktionseigenschaft von  $A_\alpha$  gilt mit

$$H^*(\Psi_\alpha(t, B), A_\alpha) \rightarrow 0$$

auch

$$H^*(\Psi_\alpha(t, \overline{B}), A_\alpha) \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt aber

$$H^*(\Phi(t, \overline{B}), A_\alpha) \geq H^*(\Phi(t, \tilde{A}_\alpha), A_\alpha) \geq H^*(\tilde{A}_\alpha, A_\alpha) = \delta > 0,$$

ein Widerspruch.

(ii) Falls  $\Omega$  eine  $\alpha$ -absorbierende Menge enthält, so folgt aus Satz 3.14, dass  $B$  einen  $\alpha$ -Attraktor  $\tilde{A}_\alpha$  mit Stabilitätsumgebung  $B$  enthält. Nach (i) muss  $\tilde{A}_\alpha$  mit  $A_\alpha$  übereinstimmen.  $\square$

Das folgende Resultat ist eine direkte Folgerung aus den beiden vorangehenden Lemmata.

**Korollar 5.19** Betrachte ein diskretes dynamisches System  $\Phi$  auf  $h\mathbb{Z}$  und eine zugehörige räumliche Diskretisierung  $\hat{\Phi}$  mit äußerem Fehler  $\Delta_{aus}$ . Falls  $A_\alpha$  ein  $\alpha$ -Attraktor für das zu  $\Phi$  gehörige gestörte System  $\Psi$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } \Omega$  und  $\alpha \geq \Delta_{aus}/h$  ist, so gilt die Inklusion

$$\hat{A} \subseteq A_\alpha$$

für den relativen globalen Attraktor  $\hat{A}$  von  $\hat{\Phi}$ .

**Beweis:** Nach dem räumlichen Einbettungslemma 5.16 gilt  $\hat{\Phi}(t, C) \subseteq \Psi_\alpha(t, C)$  für jedes  $C \in \mathcal{C}_Q$ . Damit folgt per Induktion über  $i \geq 0$  die Inklusion

$$C_i = \hat{\Phi}(h, C_{i-1}) \subseteq \Psi_\alpha(h, C_{i-1}) \subseteq \Psi_\alpha(ih, \Omega).$$

und damit wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H^*(\Psi_\alpha(t, \Omega), A_\alpha) = 0$$

die Konvergenz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H^*(C_i, A_\alpha) = 0.$$

Für alle hinreichend großen  $i \in \mathbb{N}$  gilt nach Lemma 5.14 aber  $\hat{A} = C_i$  und damit

$$H^*(\hat{A}, A_\alpha) = 0 \Rightarrow \hat{A} \subseteq A_\alpha,$$

also die Behauptung.  $\square$

Mit Hilfe der eben bewiesene Aussagen können wir nun den folgenden Konvergenzsatz für Algorithmus 5.15 beweisen. Wir erinnern daran, dass nach Satz 4.8(i) jeder Attraktor  $\gamma$ -robust mit geeignetem  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  ist.

**Satz 5.20** Betrachte ein diskretes dynamisches System  $\Phi$  auf  $h\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$  und eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Auf  $\Omega$  sei eine Zellenüberdeckung und eine räumliche Diskretisierung  $\widehat{\Phi}$  von  $\Phi$  mit äußerem Fehler  $\Delta_{aus} > 0$  gegeben. Weiterhin existiere ein Attraktor  $A$  von  $\Phi$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } \Omega$ , der  $\gamma$ -robust mit  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  ist. Dann gelten für den relativen globalen Attraktor  $\widehat{A}$  von  $\widehat{\Phi}$  die folgenden Aussagen.

(i) Falls  $\Delta_{aus}$  hinreichend klein ist, so gilt

$$H^*(\widehat{A}, A) \leq \gamma(\Delta_{aus}/h).$$

(ii) Falls die Diskretisierung  $\widehat{\Phi}$  rigoros ist, so gilt  $A \subseteq \widehat{A}$ , insbesondere also

$$H(\widehat{A}, A) \leq \gamma(\Delta_{aus}/h)$$

für alle hinreichend kleinen  $\Delta_{aus}$ .

**Beweis:** (i) Wir nehmen an, dass  $\Delta_{aus}$  so klein ist, dass für  $\alpha = \Delta_{aus}/h$  der  $\alpha$ -Attraktor  $A_\alpha$  aus der  $\gamma$ -Robustheit von  $A$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } \Omega$  existiert. Dann folgt aus Korollar 5.19 die Inklusion

$$\widehat{A} \subseteq A_\alpha$$

und damit

$$H^*(\widehat{A}, A) \leq H^*(A_\alpha, A) \leq \gamma(\alpha) = \gamma(\Delta_{aus}/h).$$

(ii) Im rigorosen Fall gilt  $\Phi(h, C) \subseteq \widehat{\Phi}(h, C)$  für jedes  $C \in \mathcal{C}_Q$ . Wir zeigen per Induktion, dass daraus  $A \subseteq C_i$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  und die  $C_i$  aus Lemma 5.14 sind. Für  $i = 0$  ist  $C_0 = \Omega \supseteq A$ . Für  $i - 1 \rightarrow i$  gilt

$$C_i = \widehat{\Phi}(h, C_{i-1}) \supseteq \Phi(h, C_{i-1}) \supseteq \Phi(h, A) = A.$$

Aus Lemma 5.14(iii) folgt also  $A \subseteq \widehat{A}$ .  $\square$

**Bemerkung 5.21** (i) Für den nicht-rigorosen Fall, also für  $\Delta_{inn} > 0$  kann man tatsächlich i.A. keine Aussage über den Abstand  $H^*(A, \widehat{A})$  machen, dieser Abstand kann beliebig schlecht werden, was bedeutet, dass in  $\widehat{A}$  große Teile von  $A$  fehlen können. In der Praxis erhält man für hinreichend kleines  $\Delta_{inn}$  (also für hinreichend viele Testpunkte) trotzdem typischerweise brauchbare Ergebnisse, weswegen wir uns zunächst auf dieses Vorgehen beschränken wollen. Man kann dabei allerdings nie sicher sein, ob nicht doch größere Teile von  $A$  in der Approximation  $\widehat{A}$  fehlen, weswegen wir später auf dieses Problem zurück kommen werden und untersuchen werden, wie man eine rigorose Diskretisierung numerisch realisieren kann.

(ii) Die Form des Diskretisierungsfehlers  $\gamma(\Delta_{aus}/h)$  legt nahe, dass man den Fehler auf zwei Weisen reduzieren kann: Zum einen kann man naheliegenderweise den äußeren Fehler

$\Delta_{aus}$  reduzieren, indem man die Zellen verkleinert. Andererseits könnte man aber auch die Schrittweite  $h$  vergrößern, indem man das System  $\Phi(\tilde{h}, x)$  für  $\tilde{h} = hk$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  an Stelle von  $\Phi$  verwendet, also von  $h$  zur größeren Schrittweite  $\tilde{h} = hk$  übergeht, um damit den kleineren Fehler  $\gamma(\Delta_{aus}/(hk))$  zu erhalten. Dieses zweite Vorgehen ist aber nur bedingt effizient, denn es ergeben sich zwei Probleme:

(1) Die Lipschitz-Konstante  $L$  wird i.A. wachsen, wenn man zu größeren Schrittweiten übergeht, damit wird (bei gleichbleibender Testpunktzahl) der innere Fehler  $\Delta_{inn}$  größer (vgl. Übungsaufgabe 21) und damit steigt die Gefahr, dass in der Approximation  $\hat{A}$  große Teile von  $A$  fehlen.

(2) Aus der Definition des diskreten gestörten Systems und der Invarianz von  $A$  folgt die Ungleichung

$$H^*(\Psi_\alpha(\tilde{h}, A), A) \geq \tilde{h}\alpha.$$

Die maximale relativ  $\alpha$ -invariante Menge in  $\Omega$  muss aber  $\Psi_\alpha(\tilde{h}, A)$  enthalten (dann man kann auch diese Menge wieder durch eine Iteration der Form  $C_i = \Psi_\alpha(h, C_{i-1}) \cap \Omega$  approximieren), weswegen der Abstand

$$H^*(A_\alpha, A) \geq \tilde{h}\alpha$$

gilt, woraus die Ungleichung  $\gamma(\alpha) \geq \tilde{h}\alpha$  folgt. Das Robustheitsmaß  $\gamma$  hängt also von der "Schrittweite"  $\tilde{h}$  ab (was wir bisher nicht berücksichtigt) hatten, weswegen wir für große  $\tilde{h}$  und dem im Beweis gewählten  $\alpha = \Delta_{aus}/\tilde{h}$  im besten Fall die Abschätzung

$$H^*(\hat{A}, A) \leq \Delta_{aus}$$

erhalten. Ohne die Zellengröße zu reduzieren, lässt sich also i.A. keine Konvergenz des Abstandes  $H^*(\hat{A}, A)$  gegen 0 erzielen. Dies ist auch anschaulich einsichtig, denn wenn  $A$  nicht zufälligerweise eine mittels der Zellen darstellbare Menge ist (also in  $\mathcal{C}_Q$  liegt), so hat die bestmögliche approximierende Menge in  $\mathcal{C}_Q$  typischerweise einen Abstand von  $A$ , der proportional zur Zellengröße ist.

Trotzdem kann es sinnvoll sein, die Größe von  $h$  zu variieren, um damit eine genauere Approximation des Verfahrens zu erzielen. Speziell wenn  $\Phi$  durch eine kontinuierliches System (also z.B. eine gewöhnliche Differentialgleichung) induziert wird, hat man völlige Freiheit in der Wahl von  $h$ , und sollte mit verschiedenen Werten experimentieren, um eine geeignete Größe zu erhalten.  $\square$

## 5.4 Der Subdivisionsalgorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst überlegen, wie viel Rechenaufwand der bisher betrachtete Algorithmus 5.15 benötigt. Da die Anzahl der Iterationsschritte schwer abzuschätzen ist (wir werden darauf später noch einmal zurückkommen) beschränken wir uns hier auf den Aufwand pro Iterationsschritt.

In dem Algorithmus gibt es zwei "teure" Operationen, nämlich (1) die Auswertung von  $\Phi$  und (2) das Auffinden der Zelle  $Q_k$  mit  $\Phi(h, x_j^l) \in Q_k$ . Beide Operationen müssen für jeden Testpunkt  $x_j^l$  unserer Zerlegung durchgeführt werden. Nehmen wir also an, dass wir eine

Zellenüberdeckung mit  $N$  Zellen pro Koordinatenrichtung und  $M$  Testpunkten pro Zelle und Koordinatenrichtung verwenden wollen. Die Verwendung der “Zellen bzw. Testpunkte pro Koordinatenrichtung” als Maß für die Anzahl der Zellen bzw. Testpunkte ist dabei deswegen sinnvoll, da diese Größe proportional zur Feinheit der Überdeckung bzw. zur “Dichte” der Testpunkte ist.

Mit diesen Größen überlegt man sich leicht, dass die obigen Operationen im ersten Iterationsschritt gerade

$$K = (NM)^n$$

mal ausgeführt werden müssen, wobei  $n$  die Dimension des Systems beschreibt. Damit kann bereits der Aufwand des *ersten* Iterationsschrittes leicht so groß ausfallen, dass der Algorithmus praktisch nicht mehr anwendbar ist. In der Übungsaufgabe 22 haben wir z.B. maximal  $N = 256$  Zellen pro Koordinatenrichtung und 25 Testpunkte pro Zelle, also  $M = 5$  Zellen pro Richtung verwendet. Damit kommt man in diesem zweidimensionalen Problem auf

$$K = (256 \cdot 5)^2 = 1\,638\,400$$

Operationen. Wollen wir die gleiche Feinheit für ein dreidimensionales Problem verwenden, so erhalten wir bereits

$$K = (256 \cdot 5)^3 \approx 2.1 \cdot 10^9,$$

oder, anders ausgedrückt, gerade  $1280 = 256 \cdot 5$ -mal so viele Operationen. Wir müssten auf das Resultat des ersten Iterationsschrittes also etwa 1280-mal so lange warten, wobei der höhere Aufwand der Iterationen in den höheren Dimensionen gar nicht eingerechnet wurde. Während die Rechnung in 2d noch in wenigen Sekunden abläuft (auf einem modernen PC in etwa 5 Sekunden), müsste man in 3d hochgerechnet also bereits etwa eine Stunde und 45 Minuten warten — eine sicherlich unrealistisch lange Zeit.

Der Schlüssel zur Behebung dieses Problems — zumindest teilweise — liegt in der Beobachtung, dass sich die Zahl der Zellen mit Status= 1 in den weiteren Iterationsschritten deutlich verringert, weswegen die Anzahl der Operationen entsprechend niedriger ausfällt. Wenn man nun den ersten Iterationsschritt mit einer relativ groben Genauigkeit ausführt, so erhält man eine relativ grobe Approximation  $C_1$  des Attraktors  $A$ , die aber i.A. bereits deutlich kleiner als die Ausgangsmenge  $C_0 = \Omega$  ist. Im nächsten Schritt verwenden wir dann eine feinere Überdeckung zur Berechnung von  $C_2$ , dan wiederum eine feinere Überdeckung von  $C_3$  usw.

Dies führt auf die folgende Iterationsidee:

Wähle eine Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}_0$  einer Menge  $\Omega$  mit zugehöriger Zellendynamik  $\widehat{\Phi}_0$ ; setze  $C_0 = \Omega$  und  $i = 1$ .

Berechne  $C_i = \widehat{\Phi}_{i-1}(h, C_{i-1})$

Wähle eine neue (feinere) Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}_i$  mit  $C_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_i}$  und zugehöriger Zellendynamik  $\widehat{\Phi}_i$  und fahre iterativ fort.

Da wir es hier nicht mit *einer* Zellendynamik  $\widehat{\Phi}$  sondern mit einer Familie von Zellendynamiken  $\widehat{\Phi}_i$  zu tun haben, macht es keinen Sinn, die relativen globalen Attraktoren  $\widehat{A}_i$  von  $\widehat{\Phi}_i$  zu betrachten. Zur Konvergenzanalyse dieses Algorithmus müssen wir statt dessen die erzeugten Mengen direkt mit dem echten relativen globalen Attraktor  $A$  vergleichen.



Hierfür gilt das folgende Resultat, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den rigorosen Fall beschränken.

**Lemma 5.22** Betrachte die obige Iteration, wobei die Zeldynamiken  $\widehat{\Phi}_i$  rigorose räumliche Diskretisierungen eines diskreten (semi-)dynamischen Systems  $\Phi$  mit Fehlern  $\Delta_{aus,i} > 0$  seien. Für die Fehler  $\Delta_{aus,i}$  gelte dabei  $\Delta_{aus,i} \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ , zudem gelte  $\widehat{\Phi}_i(h, C_i) \subseteq \widehat{\Phi}_{i-1}(h, C_i)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen

(i) Die Mengen  $C_i$  erfüllen die Inklusion

$$C_{i+1} \subseteq C_i$$

für alle  $i \geq 0$ .

(ii) Der relative globale Attraktor  $A$  erfüllt

$$A = \bigcap_{i \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq i} C_j} = \bigcap_{i \geq 0} C_i.$$

(iii) Es gilt die Konvergenz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H(C_i, A) = 0.$$

**Beweis:** (i) Wir zeigen diese Eigenschaft per Induktion über  $i$ . Für  $i = 0$  ist die Behauptung wegen  $C_1 \subseteq \Omega = C_0$  klar. Für  $i \rightarrow i + 1$  gilt

$$C_{i+1} = \widehat{\Phi}_i(h, C_i) \subseteq \widehat{\Phi}_{i-1}(h, C_i) \subseteq \widehat{\Phi}_{i-1}(h, C_{i-1}) = C_i.$$

(ii) Die Gleichheit der beiden rechten Ausdrücke folgt direkt aus (i). Zum Beweis der ersten Gleichheit zeigen wir zunächst die Rückwärts-Invarianz von  $C := \bigcap_{i \geq 0} C_i$ . Wegen  $C_{i+1} = \widehat{\Phi}_i(h, C_i)$  und der Definition des äußeren Fehlers folgt

$$H^*(C_{i+1}, \Phi(h, C_i)) = H^*(\widehat{\Phi}_i(h, C_i), \Phi(h, C_i)) \leq \Delta_{aus,i}.$$

Mit (i) folgt  $C \subseteq C_{i+1}$  für jedes  $i \geq 0$ . Wählen wir nun beliebige  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i \geq j$  so folgt

$$H^*(C, \Phi(h, C_j)) \leq H^*(C_{i+1}, \Phi(h, C_j)) \leq H^*(C_{i+1}, \Phi(h, C_i)) \leq \Delta_{aus,i}.$$

Da  $i \geq j$  beliebig war, folgt also  $H^*(C, \Phi(h, C_j)) = 0$  und damit

$$C \subseteq \Phi(h, C_j)$$

für jedes  $j \geq 0$ . Damit folgt auch  $C \subseteq \Phi(h, C)$ , also die Rückwärts-Invarianz von  $C$ .

Als nächstes zeigen wir die relative Vorwärts-Invarianz von  $C$ . Wegen der Rigorosität der Diskretisierung gilt

$$\Phi(h, C_i) \cap \Omega \subseteq \widehat{\Phi}_i(h, C_i) = C_{i+1},$$

und damit wiederum mit (i)

$$\Phi(h, C) \cap \Omega \subseteq C_j$$

für jedes  $j \geq 0$ . Daraus folgt  $\Phi(h, C) \cap \Omega \subseteq C$ .

Zusammen erhalten wir somit  $\Phi(h, C) \cap \Omega = C$ , weswegen  $C$  relativ invariant ist. Da  $A$  die maximale relativ invariante Teilmenge von  $\Omega$  ist, folgt  $C \subseteq A$ . Andererseits folgt aus der Rigorosität per Induktion leicht die Inklusion

$$A \subseteq C_i$$

und damit auch  $A \subseteq C$ . Damit folgt die behauptete Gleichheit.

(iii) Völlig analog zum Beweis von Lemma 5.6(iii).  $\square$

**Bemerkung 5.23** (i) Beachte, dass wir hier im Gegensatz zu vorherigen Konvergenzaussage in Satz 5.20 nicht angenommen haben, dass  $A$  ein echter Attraktor ist; es reicht tatsächlich aus, dass  $A$  ein relativer globaler Attraktor ist.

(ii) Analog zum Konvergenzresultat in Satz 5.20 können die Fehler beliebig groß werden, wenn die Diskretisierung nicht rigoros ist.

(iii) Die Annahme  $\widehat{\Phi}_i(h, C_i) \subseteq \widehat{\Phi}_{i-1}(h, C_i)$  ist in der üblichen Implementierung nicht automatisch erfüllt. Wenn man sie erzwingt führt dies i.A. zu schlechterem Konvergenzverhalten. Tatsächlich benötigen wir sie aber nur, um die Teilaussage (i) zu beweisen und damit den Beweis von (ii) zu vereinfachen. Wir werden diese Annahme später in der Abschätzung des Diskretisierungsfehlers nicht mehr verwenden.  $\square$

Für die auf den Testpunkten beruhende räumliche Diskretisierung können wir dies analog zu Algorithmus 5.15 als formalen Algorithmus aufschreiben. Hierbei verwenden wir wie bisher rechteckige bzw. Quaderförmige Zellen, wobei die Verfeinerung durch Unterteilung bzw. Subdivision der Zellen erhalten wird. Der resultierende Algorithmus wird deswegen auch als *Subdivisionsalgorithmus* bezeichnet und wurde in dieser Form 1997 von M. Dellnitz und A. Hohmann in [4] veröffentlicht.

#### Algorithmus 5.24 (Subdivisionsalgorithmus)

*Eingabe:* kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , diskretes (semi-)dynamisches System  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}^n$ , Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}_0$  von  $\Omega$

(0) Setze den Status  $s_j := 1$  für alle Zellen  $Q_j$ ; setze  $i := 1$

(1) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$

Falls  $s_j \geq 1$  ist

Durchlaufe alle Testpunkte  $x_j^l$  der Zelle  $Q_j$

Setze den Status der Zelle  $Q_k$  mit  $\Phi(h, x_j^l) \in Q_k$  auf  $s_k := 2$

Ende der Schleifen

(2) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$

Falls  $s_j = 1$  ist, setze  $s_j := 0$

Ende der Schleife

(3) Unterteile alle Zellen  $Q_j$  mit  $s_j = 2$

(4) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$

Falls  $s_j = 2$  ist, setze  $s_j := 1$

Ende der Schleife

Setze  $i := i + 1$  und gehe zu (1)

*Ausgabe:* Nach jeder Ausführung von Schritt (2) gilt

$$C_i = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,P \\ s_j=2}} Q_j.$$

Beachte, dass der Algorithmus in dieser Form kein Abbruchkriterium enthält; zweckmäßig ist es, z.B. nach einer gewissen Anzahl von Iterationen oder bei Überschreiten einer vorgegebenen Anzahl von Zellen abzubrechen.  $\square$

Der Schritt (1) des Algorithmus bezeichnen wir als *Auswahlschritt*, weil in diesem die Zellen  $Q_k$  für die neue Menge  $C_i$  ausgewählt werden. Der (im Vergleich zu Algorithmus 5.15 neue) Schritt (3) heißt *Verfeinerungsschritt*. In Schritt (0), (2) und (4) geschieht nichts Wesentliches, diese dienen nur zur Verwaltung der Status-Werte.

Bevor wir in die mathematische Analyse dieses Algorithmus einsteigen, wollen wir einige technische Feinheiten diskutieren.

**Bemerkung 5.25** (i) Beachte, dass in diesem Algorithmus in Schritt (1) auch solche Zellen  $Q_k$  mit  $s_k = 2$  markiert werden können, für die vorher  $s_k = 0$  galt, die also nicht zu  $C_{i-1}$  gehören. Dies kann deswegen passieren, da mit immer kleiner werdenden Zellen auch die Testpunkte immer dichter liegen und damit die innere Genauigkeit der Diskretisierung immer genauer wird. Man könnte dies unterbinden, indem man nur solche Zellen mit  $s_k = 2$  markiert, für die vorher  $s_k = 1$  galt. Damit würden wir zwar die theoretisch schöne Eigenschaft  $C_i \subseteq C_{i-1}$  erhalten, trotzdem ist dies nur bedingt sinnvoll, da wir damit Zellen “wegwerfen”, die mit tatsächlich zur korrekten Approximation  $C_i$  von  $A$  gehören. Die Aufnahme dieser Zellen in  $C_i$  kann also als eine Art “Reparaturmechanismus” angesehen werden, mit dem Fehler auf der gröberen Ebene auf der feineren Ebene korrigiert werden. Zu beachten ist hierbei allerdings, dass diese Zellen in (mindestens einem) vorhergehenden Schritt nicht verfeinert wurden, weswegen sie gröber sind und nachträglich verfeinert werden sollten. In den für die Übungsaufgaben bereit gestellten C-Routinen wird dies in der Routine `set_x_status` automatisch durchgeführt.<sup>1</sup>

(ii) In der oben dargestellten Version des Algorithmus wird nach jeder Berechnung einer neuen Menge  $C_i$  unterteilt. Dies kann man auf verschiedenste Weisen variieren. Beispielsweise könnte nur nach jeweils  $d \in \mathbb{N}$  Iterationen einen Verfeinerungsschritt durchführen. Der Verfeinerungsschritt wird damit zu

(3') Falls  $i$  durch  $d$  teilbar ist, unterteile alle Zellen  $Q_j$  mit  $s_j = 2$

Eine andere Variante erhält man, indem man ein geeignetes Kriterium überprüft und nur dann verfeinert, wenn dieses erfüllt ist. Z.B. könnte man auf einer Verfeinerungsebene so lange iterieren, bis die Iteration stationär wird (also in Schritt (2) kein  $s_j = 1$  mehr auftritt) und erst dann verfeinern. Damit ergibt sich (3) zu

(3'') Falls in (2) kein  $s_j$  mit  $s_j = 1$  aufgetreten ist, unterteile alle Zellen  $Q_j$  mit  $s_j = 2$

<sup>1</sup>Diese Eigenschaft wurde in der `grid.c` Version am 22.1.04 ergänzt, damit dies korrekt funktioniert muss dieses File neu heruntergeladen werden.

In der folgenden Analyse des Algorithmus betrachten wir zunächst die “Grundversion” mit Schritt (3) und im Anschluss die Varianten (3’) und (3”).  $\square$

Wir wollen nun die Konvergenzeigenschaften des Algorithmus und insbesondere seine Konvergenzgeschwindigkeit untersuchen. Als erstes benötigen wir dazu — wieder einmal — ein geeignetes Einbettungsergebnis. Dazu definieren wir zunächst eine Verallgemeinerung der bereits bekannten Abbildung

$$\Psi_\alpha(t, x) := \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\alpha} \{\Psi(t, x, w)\}.$$

**Definition 5.26** Für ein diskretes gestörtes System  $\Psi : h\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{W}_\alpha^h \rightarrow \mathbb{R}^n$  und eine Abbildung  $\bar{\alpha} : h\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definieren wir die Abbildung  $\bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}$  für jede Teilmenge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  induktiv mittels

$$\bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(0, C) := C$$

und

$$\bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(t + h, C) := \Psi_{\alpha(t)}(h, \bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(t, C))$$

für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ .  $\square$

Für diese Abbildung gilt das folgende Lemma.

**Lemma 5.27** Betrachte eine Folge von Zellenüberdeckungen  $\mathcal{Q}_i$  einer Menge  $\Omega$  sowie zugehörige Zellendynamiken  $\hat{\Phi}_i$ , die räumliche Diskretisierungen eines diskreten (semi-)dynamischen Systems  $\Phi$  mit Fehlern  $\Delta_{aus,i} > 0$  seien. Es sei  $\Psi$  das zu  $\Phi$  gehörige gestörte System. Betrachte weiterhin die gemäß der Iteration

$$C_0 := \Omega, \quad C_i := \hat{\Phi}_{i-1}(h, C_{i-1})$$

erzeugte Folge von Mengen, wobei wir annehmen, dass die Überdeckungen  $\mathcal{Q}_i$  so gewählt sind, dass  $C_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_i}$  gilt.

Dann gilt die Inklusion

$$C_i \subseteq \bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(ih, \Omega)$$

für die Abbildung  $\bar{\Psi}$  aus Definition 5.26 und die durch  $\bar{\alpha}(ih) := \Delta_{aus,i}/h$  definierte Abbildung  $\bar{\alpha}$ .

**Beweis:** Der Beweis folgt aus der iterativen Anwendung des räumlichen Einbettungslemmas 5.16. Für  $i = 0$  ist die Behauptung klar, für  $i \rightarrow i + 1$  gilt nach Lemma 5.16

$$\hat{\Phi}_i(h, C) \subseteq \Psi_{\bar{\alpha}(ih)}(h, C)$$

für jede Menge  $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_i}$ , da  $\bar{\alpha}(ih) = \Delta_{aus,i}/h$ . Also folgt

$$C_{i+1} = \hat{\Phi}_i(h, C_i) \subseteq \hat{\Phi}_i(h, \bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(hi, \Omega)) \subseteq \Psi_{\bar{\alpha}(ih)}(h, \bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(hi, \Omega)) = \bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(h(i+1), \Omega)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.28** Aus der Definition von  $\Psi_\alpha$  folgt sofort, dass sich  $\bar{\Psi}$  alternativ direkt mittels  $\Psi$  darstellen lässt, und zwar als

$$\bar{\Psi}_\alpha(t, C) = \bigcup_{x \in C} \bigcup_{w \in \bar{\mathcal{W}}_\alpha^h} \Psi(t, x, w)$$

mit

$$\bar{\mathcal{W}}_\alpha^h := \{w : h\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \|w(t)\| \leq \bar{\alpha}(t) \text{ für alle } t \in h\mathbb{N}\}.$$

□

Diese Darstellung von  $\bar{\Psi}$  erlaubt es uns nun, die ISDS Eigenschaft der Attraktoren auszunutzen, um eine Konvergenzaussage für Algorithmus 5.24 zu erhalten. Wir erinnern daran, dass nach Korollar 4.20 die ISDS-Eigenschaft besitzt, d.h. es existieren  $\alpha_0 > 0$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\mu \in \mathcal{KLD}$ , so dass die Abschätzung

$$d(\Psi(t, x, w), A) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A))), t\}, \nu(w, t)\}$$

für alle  $t \in \mathbb{T}_0^+$ ,  $x \in B$  und alle  $w \in \mathcal{W}_{\alpha_0}^h$  gilt, wobei  $\nu$  definiert ist durch

$$\nu(w, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \nu(w, t) = \sup_{\tau \in [0, t-h] \cap h\mathbb{Z}} \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), t - \tau - h), \quad t \in \mathbb{T}^+.$$

**Satz 5.29** Betrachte ein diskretes dynamisches System  $\Phi$  auf  $h\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$  und eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Für  $\Phi$  existiere ein Attraktor  $A$  von  $\Phi$  mit Stabilitätsumgebung  $B = \text{int } \Omega$ , der die ISDS-Eigenschaft mit  $\alpha_0 > 0$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\mu \in \mathcal{KLD}$  besitzt.

Dann gilt für die in Algorithmus 5.24 erzeugten Mengen und hinreichend feine Anfangsüberdeckung  $\mathcal{Q}_0$  die Abschätzung

$$H^*(C_i, A) \leq \max\{\mu(\sigma(H^*(\Omega, A))), ih\}, \max_{k=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h), kh)\}.$$

**Beweis:** Beachte zunächst, dass in Algorithmus 5.24 die gemäß Beispiel 5.12(ii) konstruierte räumliche Diskretisierung

$$\hat{\Phi}_i(h, Q_k) := \bigcup_{j \in I_k} Q_j$$

mit

$$I_k = \{j \in \{1, \dots, P_i\} \mid \Phi(h, x_k^j) \in Q_j \text{ für einen Testpunkt } x_k^j \text{ in } Q_k\},$$

verwendet wird. Der äußere Fehler dieser Diskretisierung ist nach Übungsaufgabe 21 gerade durch  $\Delta_{aus, i} = \text{diam}(\mathcal{Q}_i)$  gegeben. Wir betrachten nun die Funktion  $\bar{\alpha}(ih) = \text{diam}(\mathcal{Q}_i)/h$  und die zugehörige Menge  $\bar{\mathcal{W}}_\alpha^h$  von Störfunktionen. Für jeden Punkt  $x \in \Omega$  und jedes  $w \in \bar{\mathcal{W}}_\alpha^h$  folgt aus der ISDS-Eigenschaft

$$d(\Psi(ih, x, w), A) \leq \max\{\mu(\sigma(d(x, A))), ih\}, \nu(w, ih)\}.$$

Für den zweiten Term  $\nu(w, ih)$  gilt hierbei

$$\begin{aligned}
\nu(w, ih) &= \max_{\tau \in [0, ih-h] \cap h\mathbb{Z}} \mu(\gamma(\|w(\tau)\|), ih - \tau - h) \\
(jh = \tau) &= \max_{j=0, \dots, i-1} \mu(\underbrace{\gamma(\|w(jh)\|)}_{\leq \bar{\alpha}(jh)}, ih - jh - h) \\
&\leq \max_{j=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\text{diam}(\mathcal{Q}_j)/h), ih - jh - h) \\
(k = i - j - 1) &= \max_{k=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h), kh).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
H^*(\bar{\Psi}_{\bar{\alpha}}(ih, \Omega), A) &\leq \max_{x \in \Omega, w \in \bar{\mathcal{W}}_{\bar{\alpha}}} d(\Psi(ih, x, w), A) \\
&\leq \max_{x \in \Omega} \max\{\mu(\sigma(d(x, A)), ih), \max_{k=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h), kh)\} \\
&= \max\{\mu(\sigma(H^*(\Omega, A)), ih), \max_{k=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h), kh)\}
\end{aligned}$$

und damit mit Lemma 5.27 die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.30** Falls wir die in Algorithmus 5.24 verwendeten räumlichen Diskretisierungen durch rigorose Diskretisierungen mit äußerem Fehler  $\Delta_{aus,i}$  ersetzen, so erhalten wir mit dem gleichen Beweis die Abschätzung

$$H(C_i, A) \leq \max\{\mu(\sigma(H^*(\Omega, A)), ih), \max_{k=0, \dots, i-1} \mu(\gamma(\Delta_{aus,i-k-1}/h), kh)\}$$

für die Hausdorff-Metrik, da aus der Rigorosität und der Invarianz von  $A$  sofort die Inklusion  $A \subseteq C_i$  folgt.  $\square$

**Beispiel 5.31** Wir betrachten ein typisches Beispiel für die Anwendung dieser Abschätzung. Aus Bemerkung 4.10(ii) wissen wir, dass Systeme mit exponentieller Attraktion, also  $\beta(r, t) = ce^{-\lambda t}r$ , ein lineares Robustheitsmaß  $\gamma(r) = Kr$  besitzen. Als Erweiterung dieser Beobachtung kann man zeigen<sup>2</sup>, dass aus der exponentiellen Attraktion auch die ISDS-Eigenschaft mit

$$\mu(r, t) = e^{-\lambda t}, \quad \sigma(r) = cr \quad \text{und} \quad \gamma(r) = Kr$$

folgt (das  $\lambda$  in  $\mu$  stimmt hierbei i.A. nicht mit dem  $\lambda$  in  $\beta$  überein). Wir erhalten damit die Abschätzung

$$H^*(C_i, A) \leq \max\{ce^{-\lambda ih} H^*(\Omega, A), \max_{k=0, \dots, i-1} Ke^{-\lambda kh} \text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h\}.$$

Um den zweiten Term dieses Maximums, also

$$\max_{k=0, \dots, i-1} Ke^{-\lambda kh} \text{diam}(\mathcal{Q}_{i-k-1})/h \tag{5.4}$$

weiter zu vereinfachen, müssen wir uns überlegen, wie groß die Feinheit  $\text{diam}(\mathcal{Q}_i)$  der verwendeten Überdeckungen ist. Für ein  $n$ -dimensionales System gilt hierbei unabhängig

<sup>2</sup>siehe Example 4.4.2 in [5]

von der verwendeten Norm  $\text{diam}(\mathcal{Q}_{i+n}) = \text{diam}(\mathcal{Q}_i)/2$ , da nach je  $n$  Schritten alle Kanten einer Zelle einmal halbiert wurden. Die Feinheiten der dazwischen liegenden Überdeckungen hängen sowohl von der Wahl der Norm als auch vom Verhältnis der Kantenlängen der Zellen ab. Für ein geeignetes  $C > 0$  erhält man aber auf jeden Fall die Abschätzung  $\text{diam}(\mathcal{Q}_i) \leq C2^{-i/n}$ , womit sich (5.4) mittels

$$\max_{k=0, \dots, i-1} CKe^{-\lambda kh} 2^{-(i-k-1)/n} / h = \max_{k=0, \dots, i-1} CK2^{-(i-1)/n} e^{-\lambda kh + \ln(2)k/n} / h$$

abschätzen kann.

Falls nun  $\lambda h > \ln(2)/n$  ist, so wird das Maximum in  $k = 0$  angenommen und der obige Ausdruck ergibt sich zu

$$CK2^{-(i-1)/n} / h.$$

In diesem Fall gilt aber auch

$$e^{-\lambda ih} \leq 2^{-i/n},$$

so dass wir die Abschätzung

$$H^*(C_i, A) \leq \max\{c2^{-i/n} H^*(\Omega, A), CK2^{-(i-1)/n} / h\} \leq K^* 2^{-i/n}$$

für ein geeignetes  $K^* > 0$  erhalten. Der Abstand  $H^*(C_i, A)$  halbiert sich also in etwa alle  $n$  Schritte und ist damit proportional zur Zellengröße, wird also insbesondere direkt durch die Feinheit der Überdeckung bestimmt. Durch Wahl eines hinreichend großen  $h > 0$  kann man diesen Fall immer erzielen, es treten aber die bereits in Bemerkung 5.21(ii)(1) genannten Probleme auf, weswegen dies nicht praktikabel ist.

Falls  $\lambda h < \ln(2)/n$  ist, so wird das Maximum in  $k = i - 1$  angenommen. Wir können (5.4) dann durch

$$CKe^{-\lambda(i-1)h} / h$$

abschätzen und erhalten damit

$$H^*(C_i, A) \leq \max\{ce^{-\lambda ih} H^*(\Omega, A), CKe^{-\lambda(i-1)h} / h\} \leq K^* e^{-\lambda ih}.$$

In diesem Fall wird die Konvergenzgeschwindigkeit also durch die Attraktionsrate  $\mu$  bestimmt.  $\square$

Wir wollen uns nun die Varianten (3') und (3'') des Algorithmus anschauen. Die Variante (3') bewirkt lediglich, dass die Verfeinerung langsamer vor sich geht. Für unseren Subdivisionsalgorithmus ergibt sich dabei

$$\text{diam}(\mathcal{Q}_i) \leq C2^{-i/(dn)}$$

für ein geeignetes  $C > 0$ . Im oben diskutierten exponentiellen Fall erhalten wir also

$$H^*(C_i, A) \leq 2^{-i/(dn)}$$

falls  $\lambda h > \ln(2)/(dn)$  ist und — genau wie oben —

$$H^*(C_i, A) \leq K^* e^{-\lambda ih}$$

sonst. Beachte, dass wir durch die Vergrößerung von  $d$  immer den ersten Fall erreichen können, in dem die Genauigkeit der Approximation gerade durch die Größe der Zellen gegeben ist.

Die Variante (3'') bewirkt, dass die Iteration auf jeder Überdeckung so lange durchgeführt wird, bis sie stationär wird. Ganz analog zum Beweis von Korollar 5.19 erhalten wir damit  $C_i \subset A_\alpha$  für jeden Schritt  $i$ , in dem eine Unterteilung durchgeführt wird. Hieraus folgt sofort die Abschätzung

$$H^*(C_i, A) \leq \gamma(\text{diam}(Q_i)/h).$$

Wenn wir mit einem weiteren Index  $j$  die Anzahl der Verfeinerungen bis zum  $i$ -ten Schritt zählen, so erhalten wir also

$$H^*(C_i, A) \leq \gamma(C2^{-j/n}/h)$$

für ein geeignetes  $C > 0$ .

**Bemerkung 5.32** Für die Effizienz des Algorithmus sind zwei Aspekte besonders wichtig:

- (1) Aufwand des Algorithmus (= Anzahl der nötigen  $\Phi$ -Auswertungen bis zu einer gewünschten Genauigkeit)
- (2) Speicherbedarf des Algorithmus (= Anzahl der benötigten Zellen für eine gewünschte Genauigkeit)

Offenbar wird der Speicherbedarf genau dann minimal, wenn man für eine gegebene Feinheit immer bis zur bestmöglichen (= kleinstmöglichen) Approximation  $C_i$  rechnet, da damit auf jeder Ebene mit möglichst wenig Zellen gerechnet wird. Dies ist gerade der Fall von Schritt (3''), diese Variante ist also optimal im Sinne des Speicherverbrauchs.

Komplizierter ist es, die geschwindigkeitsoptimale Variante zu ermitteln, da man hierbei die Anzahl der nötigen  $\Phi$ -Auswertungen abschätzen muss. Wird  $d$  zu klein gewählt, so erhält man zu viele feine Zellen, wird  $d$  zu groß gewählt, so macht man in den letzten Schritten vor der Verfeinerung nur sehr wenig Fortschritt in der Rechnung. Die richtige "Balance" zu finden, ist i.A. eine nichttriviale Aufgabe, besonders da i.A. weder  $\mu$  noch  $\gamma$  aus der ISDS-Formulierung explizit bekannt sind. In Übungsaufgabe 25 wird dies optimale  $d$  experimentell bestimmt. Ein typisches Verhalten zeigt Abbildung 5.2, in der die Anzahl der  $\Phi$ -Auswertungen abhängig von  $d$  dargestellt ist.

□

## 5.5 Rigorose Diskretisierung

Wir haben in den Konvergenzanalysen der Algorithmen aus dem vorhergehenden Abschnitt immer wieder Aussagen für rigorose Diskretisierungen formuliert und insbesondere betont, dass man i.A. für nichtrigorose Diskretisierungen keine mathematisch fundierten Konvergenzresultate bzgl. der Hausdorff-Metrik  $H$  erhält. Selbst wenn die nicht-rigorosen Verfahren in der Praxis oft gut funktionieren, wenn  $\Delta_{inn}$  hinreichend klein ist, so gibt es doch Situationen, in denen man sicher sein will, ob die numerische Rechnung tatsächlich



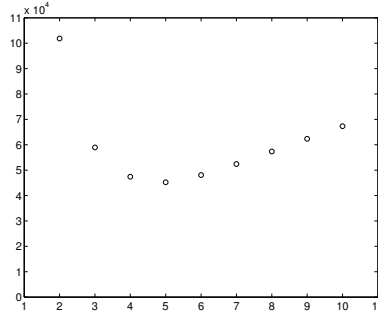


Abbildung 5.2: Anzahl der  $\Phi$ -Auswertungen abhängig von der Häufigkeit der Verfeinerungen  $d$

das richtige Objekt berechnet. In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode beschreiben, mit der man rigorose Diskretisierungen erzeugen kann. Sicherlich gibt es viele verschiedene Methoden zur Konstruktion rigoroser Diskretisierungen, insbesondere wenn man gewisse Eigenschaften des zu betrachtenden Systems kennt und geeignet ausnutzen kann. Die hier vorgestellte Methode ist i.A. nicht die effizienteste Lösung, dafür aber relativ einfach zu implementieren und für jedes beliebige System  $\Phi$  anwendbar.

Die Idee unseres Verfahrens geht auf die Dissertation “Mengenorientierte Methoden zur numerischen Analyse dynamischer Systeme” von O. Junge [7] zurück. Sie liegt darin, dass man das Mengenbild  $\hat{\Phi}(t, Q_i)$  zunächst wie gehabt durch Testpunkte approximiert und dann zu dem so berechneten Bild eine bestimmte Anzahl von Mengen aus der Umgebung des nicht-rigorosen Bildes hinzunimmt. Formal kann man dies wie folgt beschreiben.

**Definition 5.33** Betrachte eine Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  und ein semi-dynamisches System  $\Phi$ . Für jede Zelle  $Q_i$  sei eine Menge  $\{x_i^1, \dots, x_i^k\}$  von Testpunkten definiert, desweiteren sei ein Parameter  $r > 0$  gegeben. Dann definieren wir

$$\hat{\Phi}(h, Q_i) := \bigcup_{j \in I_i} Q_j$$

mit

$$I_i := \{j = 1, \dots, P \mid \mathcal{B}_r(\Phi(t, x_i^l)) \cap Q_j \neq \emptyset \text{ für einen Testpunkt } x_i^l \in Q_i\}.$$

□

In Abbildung 5.3 ist diese Konstruktion dargestellt.

Das folgende Lemma zeigt, unter welchen Voraussetzungen diese Abbildung  $\hat{\Phi}$  tatsächlich rigoros ist.

**Lemma 5.34** Es sei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $\Phi(h, x)$  in  $x$  auf  $\Omega$ . Weiterhin gelte die Abschätzung

$$H(\{x_i^1, \dots, x_i^k\}, Q_i) \leq \varepsilon$$

für alle Zellen  $Q_i$  der Überdeckung  $\mathcal{Q}$ . Dann ist gemäß Definition 5.33 definierte Abbildung  $\hat{\Phi}$  rigoros, falls  $r \geq L\varepsilon$  gewählt wurde. Zudem besitzt sie den äußeren Fehler  $\Delta_{aus} \leq r + \text{diam}(\mathcal{Q})$ .

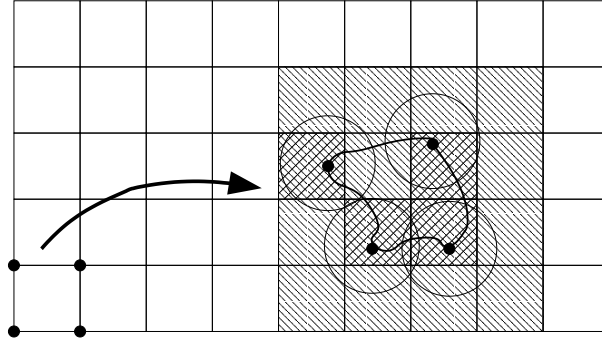


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung von Definition 5.33

**Beweis:** Um die Rigorosität zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass  $\Phi(h, Q_i) \cap \Omega \subseteq \widehat{\Phi}(h, Q_i)$  ist. Sei dazu  $x = \Phi(h, y) \in \Phi(h, Q_i) \cap \Omega$  mit  $y \in Q_i$  beliebig. Aus der Annahme an die Testpunktmenge existiert ein Testpunkt  $x_i^l \in Q_i$  mit  $\|y - x_i^l\| \leq \varepsilon$ . Für die Bilder gilt mit der Lipschitz–Annahme an  $\Phi$  die Abschätzung

$$\|\Phi(h, y) - \Phi(h, x_i^l)\| \leq L\varepsilon = r,$$

anders gesagt also

$$x = \Phi(h, y) \in \mathcal{B}_r(\Phi(h, x_i^l)).$$

Da alle Punkte aus  $\mathcal{B}_r(\Phi(h, x_i^l))$  per Konstruktion in  $\widehat{\Phi}(t, Q_i)$  liegen, muss also auch  $x \in \widehat{\Phi}(t, Q_i)$  gelten, womit die Rigorosität gezeigt ist.

Die Aussage über den äußeren Fehler folgt aus der Tatsache, dass jeder Punkt  $x \in \widehat{\Phi}(h, Q_i)$  in einer Zelle  $Q_j$  liegt, die den Ball  $\mathcal{B}_r(\Phi(h, x_i^l))$  schneidet. Also existiert ein Punkt  $y(x) \in Q_j$  mit  $\|y(x) - \Phi(h, x_i^l)\| \leq r$  und  $d(y(x), \Phi(h, Q_i)) \leq r$ . Damit gilt

$$H^*(\widehat{\Phi}(h, Q_i), \Phi(h, Q_i)) \leq \max_{x \in \widehat{\Phi}(h, Q_i)} \|x - y(x)\| + d(y(x), \Phi(h, Q_i)) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) + r.$$

□

In unseren Algorithmen benötigen wir  $\widehat{\Phi}(t, Q_i)$ , um diejenigen Zellen zu bestimmen, die mit Status=2 markiert werden sollen. In der praktischen Implementierung ist es i.A. einfacher, hierbei nicht beliebige Bälle  $\mathcal{B}_r$  zu verwenden, sondern nur eine gewisse Zahl benachbarter Zellen zu markieren. In der aktuellen Version `grid.c` steht dazu die Routine `set_xngh_status(x, status)` zur Verfügung, mit der die den Punkt  $x$  enthaltende Zelle sowie alle Nachbarzellen markiert werden. Formal wird dadurch die folgende Diskretisierung realisiert.

**Definition 5.35** Betrachte eine Rechteck–Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  und ein semi–dynamisches System  $\Phi$ . Für jede Zelle  $Q_i$  sei eine Menge  $\{x_i^1, \dots, x_i^k\}$  von Testpunkten definiert, zudem sei eine weitere Zellenüberdeckung  $\widehat{\mathcal{Q}}$  gegeben, die auf  $\Omega$  mit  $\mathcal{Q}$  übereinstimmt und zu allen Seiten genau um eine Schicht Zellen größer als  $\mathcal{Q}$  ist. Dann definieren wir

$$\widehat{\Phi}(h, Q_i) := \bigcup_{j \in I_i} Q_j$$

mit

$$I_i := \{j = 1, \dots, P \mid Q_j \cap \tilde{Q}_k \neq \emptyset \text{ für ein } k \text{ mit } \Phi(t, x_i^l) \in \tilde{Q}_k \text{ für einen Testpunkt } x_i^l \in Q_i\}.$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass diese Konstruktion wiederum auf eine rigorosen Diskretisierung führt.

**Lemma 5.36** Gegeben sei eine rechteckige Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  mit minimaler und maximaler Kantenlänge  $k_{\min}$  und  $k_{\max}$ . Dann existiert ein von  $k_{\min}$ ,  $k_{\max}$  und der Lipschitz-Konstante  $L$  von  $\Phi$  abhängiges  $\delta > 0$ , so dass für jede Testpunktmenge  $\{x_i^1, \dots, x_i^k\}$  mit

$$H(\{x_i^1, \dots, x_i^k\}, Q_i) \leq \delta k_{\max}$$

die Diskretisierung  $\hat{\Phi}$  aus Definition 5.35 rigoros ist. Zudem besitzt diese den äußeren Fehler  $\Delta_{aus} \leq 3k_{\max}$ . Hierbei werden alle Abstandsmaße (also auch die zur Berechnung der Lipschitz-Konstante  $L$ ) bzgl. der  $\infty$ -Norm gemessen.

**Beweis:** Die Konstruktion aus Definition 5.35 bewirkt, dass für jeden Testpunkt  $x_i^l$  der Ball  $\mathcal{B}_r(\Phi(h, x_i^l))$  gemessen in der  $\infty$ -Norm mit  $r = k_{\min}$  in  $\hat{\Phi}(h, Q_i)$  enthalten ist. Nach Lemma 5.34 ist die Abbildung also rigoros, falls  $r \geq L\varepsilon = L\delta k_{\max}$  ist, also falls

$$\delta \leq \frac{k_{\min}}{Lk_{\max}}$$

gilt.

Umgekehrt ist für  $r = 2k_{\max}$  jeder Punkt  $x \in \hat{\Phi}(h, Q_i)$  im Ball  $\mathcal{B}_r(\Phi(h, x_i^l))$  um einen Testpunkt enthalten, weswegen wieder nach Lemma 5.34 die Ungleichung

$$\Delta_{aus} \leq r + \text{diam}(\mathcal{Q}) = 2k_{\max} + k_{\max} = 3k_{\max}$$

gilt. □

**Bemerkung 5.37** (i) Beachte, dass die Bedingung an die Testpunktmenge in jedem Fall erfüllt ist, falls diese aus

$$N = \left( \left\lceil \frac{1}{2\delta} \right\rceil + 1 \right)^n$$

gleichmäßig verteilten Testpunkten besteht.

(ii) Falls die Zellen der Ausgangsüberdeckung  $\mathcal{Q}_0$  die Kantenlängen  $k_1, \dots, k_n$  besitzen, so lässt sich die Schranke für  $\delta$  für alle folgenden Überdeckungen  $\mathcal{Q}_i$  mittels

$$\frac{k_{\min}}{Lk_{\max}} \leq \max_{i,j=1,\dots,n} \frac{k_i}{2Lk_j}$$

abschätzen. Der Faktor “1/2” ergibt sich dabei durch die sukzessive Unterteilung der Kantenlängen, wodurch man nach der ersten Unterteilung  $k_1/2, k_2, \dots, k_n$ , nach der zweiten Unterteilung  $k_1/2, k_2/2, k_3, \dots, k_n$  usw. erhält.

(iii) Die hier beschriebene Konstruktion kann auf vielfältige Weise effizienter gestaltet werden, z.B. durch

- Abschätzen der Lipschitz-Konstante in verschiedenen Regionen von  $\Omega$ , um die Anzahl der Testpunkte abhängig von der Region wählen zu können
- koordinatenweise Abschätzung der Lipschitzkonstante, so dass die Anzahl der Testpunkte in jeder Koordinatenrichtung so grob wie möglich gewählt werden kann.

Verschiedene Ansätze hierzu werden in der oben erwähnten Dissertation von O. Junge [7] vorgestellt.

(iv) Wenn die Abbildung  $\Phi$  bereits Fehler enthält, z.B. weil sie die numerische Approximation einer Differentialgleichung darstellt, so kann dies berücksichtigt werden, um eine rigorose Überdeckung der echten Abbildung zu erhalten.  $\square$

## Kapitel 6

# Berechnung instabiler Mannigfaltigkeiten

Wir wollen in diesem abschließenden Kapitel die numerische Berechnung eines weiteren dynamischen Objektes betrachten, nämlich der *instabilen Mannigfaltigkeit*. Diese Objekte können ganz unabhängig von Attraktoren definiert werden, dienen aber insbesondere dazu, das Verhalten im Inneren von Attraktoren genauer zu untersuchen.

Wir verwenden die bereits bekannten Zellenüberdeckungen und werden einen darauf basierenden Algorithmus entwickeln. Wir werden allerdings aus Zeitgründen keine so genaue Konvergenzanalyse wie im Falle der Attraktoren durchführen, sondern uns auf heuristische Argumente beschränken, die anschaulich zeigen, warum dieser Algorithmus funktioniert. Wiederum behandeln wir ausschließlich zeitdiskrete Systeme  $\Phi$  auf  $h\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$ , die — wie im vorhergehenden Kapitel — auch Zeit- $h$  Abbildungen von Differentialgleichungslösungen sein können. Zudem nehmen wir im Folgenden an, dass  $\Phi$  ein dynamisches System ist, also auch für negative Zeiten definiert ist.

### 6.1 Instabile Mannigfaltigkeiten

Instabile Mannigfaltigkeiten können sehr allgemein definiert werden; wir beschränken uns hierbei auf einen etwas einfacheren aber dennoch wichtigen Spezialfall, und zwar auf die instabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes eines dynamischen Systems.

**Definition 6.1** Es sei  $\Phi$  ein diskretes dynamisches System und  $x^* \in \mathbb{R}^n$  ein Fixpunkt, also  $\Phi(t, x^*) = x^*$  für alle  $t \in h\mathbb{Z}$ . Dann definieren wir die *instabile Mannigfaltigkeit* von  $x^*$  als

$$W^u(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(-t, x) \rightarrow x^* \text{ für } t \rightarrow \infty\}.$$

□

**Beispiel 6.2** Betrachte das zweidimensionale System induziert durch die Abbildung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass das zugehörige dynamische System auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$  gegeben ist durch

$$\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^t} x_1 \\ 2^t x_2 \end{pmatrix}.$$

Das System besitzt den Fixpunkt  $x^* = 0$ . Für  $t \rightarrow \infty$  gilt nun

$$2^{-t} x_2 \rightarrow 0$$

und

$$\frac{1}{2^{-t}} x_1 \rightarrow \begin{cases} +\infty, & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 = 0 \\ -\infty, & x_1 < 0 \end{cases}.$$

Es folgt also

$$W^u(0) = \{(0, x_2)^T \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

□

An diesem Beispiel kann man eine wichtige Eigenschaft beobachten: Für alle Punkte  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $d(\Phi(t, x), W^u(0)) \rightarrow 0$ . Für allgemeine nichtlineare Systeme wird diese Eigenschaft nicht für alle Lösungen gelten, immerhin aber noch für alle Lösungen, die in einer geeigneten Umgebung von  $x^*$  liegen. Die instabile Mannigfaltigkeit liefert uns also, genau wie die Attraktoren, Informationen darüber, wo sich die Lösungen des Systems nach langer Zeit aufhalten. Falls  $\Phi$  differenzierbar ist, so kann man beweisen, dass diese Objekte in einer Umgebung von  $x^*$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind; wir werden diese differentialgeometrische Struktur hier allerdings nicht verwenden.

**Bemerkung 6.3** Analog zur instabilen Mannigfaltigkeit kann man die *stabile Mannigfaltigkeit*  $W^s(x^*)$  definieren als Menge aller Punkte, deren zugehörige Lösungen in *Vorwärtszeit* gegen  $x^*$  konvergieren. Im obigen Beispiel ist  $W^s(0) = \{(x_1, 0)^T \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ . □

Genau wie Attraktoren sind die instabilen Mannigfaltigkeiten invariante Mengen.

**Lemma 6.4** Die instabile Mannigfaltigkeit ist invariant, d.h. es gilt

$$\Phi(t, W^u(x^*)) = W^u(x^*)$$

für alle  $t \in h\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Da  $\Phi$  ein dynamisches System ist, genügt es

$$\Phi(\tau, W^u(x^*)) \subseteq W^u(x^*)$$

für alle  $\tau \in h\mathbb{Z}$  zu beweisen. Es sei  $x \in \Phi(\tau, W^u(x^*))$ , also  $x = \Phi(\tau, y)$  für ein  $y \in W^u(x^*)$ . Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(-t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(-t, \Phi(\tau, y)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(-t + \tau, y) = \lim_{s = t - \tau \rightarrow \infty} \Phi(-s, y) = x^*,$$

also  $x \in W^u(x^*)$ . □

Um das Verhältnis dieser Mengen zu den Attraktoren zu klären, hilft das folgende Lemma.

**Lemma 6.5** Es sei  $x^*$  ein Fixpunkt eines diskreten dynamischen Systems  $\Phi$ . Desweiteren existiere ein Attraktor  $A$  von  $\Phi$  mit  $x^* \in A$ . Dann gilt  $W^u(x^*) \subseteq A$ .

**Beweis:** Es sei  $y \in W^u(x^*)$ . Dann gilt  $\Phi(-t, y) \rightarrow x^*$  für  $t \rightarrow \infty$ . Es existiert also ein Folge  $t_i \rightarrow \infty$  mit  $\Phi(-t_i, y) = x_i \rightarrow x^*$  und damit auch

$$\Phi(t_i, x_i) = y.$$

Da  $x^* \in A$  liegt, existiert eine Umgebung von  $x^*$ , die in der Stabilitätsumgebung  $B$  von  $A$  liegt. Für alle hinreichend großen  $i$  gilt also  $x_i \in B$ . Aus der Definition des Attraktors folgt insbesondere

$$H^*(\Phi(t_i, B), A) \rightarrow 0$$

für  $i \rightarrow \infty$ , und damit

$$d(y, A) = d(\Phi(t_i, x_i), A) \leq H^*(\Phi(t_i, B), A) \rightarrow 0,$$

also  $d(y, A) = 0$  und damit  $y \in A$ . □

Falls also ein Attraktor vorliegt, so liefert die instabile Mannigfaltigkeit i.A. eine feinere Struktur innerhalb des Attraktors und damit weitere Informationen über das dynamische Verhalten.

Zur Formulierung eines geeigneten Algorithmus zu kommen, benötigen wir noch die folgende lokale Definition.

**Definition 6.6** Für eine kompakte Umgebung  $\mathcal{N}$  von  $x^*$  definieren wir die *relative instabile Mannigfaltigkeit* von  $x^*$  bzgl.  $\mathcal{N}$  als

$$W_{\mathcal{N}}^u(x^*) := \{x \in W^u(x^*) \mid \Phi(-t, x) \in \mathcal{N} \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

□

Diese Menge besteht also aus allen Punkten  $x \in W^u(x^*)$ , die die Menge  $\mathcal{N}$  in Rückwärtszeit nicht verlassen.

Das folgende Beispiel illustriert das Verhältnis zwischen  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  und  $W^u(x^*)$  in einem nichttrivialen Fall.

**Beispiel 6.7 (Takens–Bogdanov Oszillator)** Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \lambda_1 + \lambda_2 x_1(t) + x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix}$$

mit Parametern  $\lambda_1 = -0.2$  und  $\lambda_2 = -1$ . Die rechte Seite besitzt die Nullstellen

$$x^* = (1.170820393, 0)^T \text{ und } x^{**} = (-0.170820393, 0)^T,$$

die gerade die Fixpunkte der Lösungen sind. Wir wollen das Verhalten in  $x^*$  betrachten.

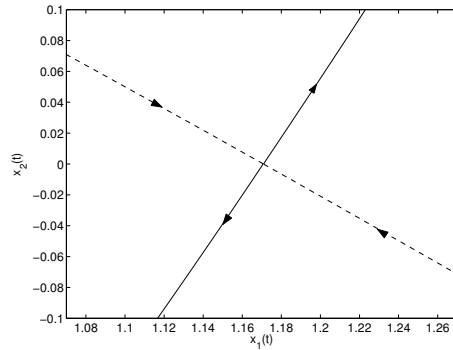


Abbildung 6.1: Lokales Verhalten von Beispiel 6.7

Wenn wir den in Abbildung 6.1 dargestellten Ausschnitt als Umgebung  $\mathcal{N}$  wählen, so stellen wir fest, dass eine eindimensionale Kurve existiert, für die die Lösungen in negativer Zeit monoton gegen  $x^*$  streben. Alle anderen Anfangswerte verlassen diese Umgebung, weswegen diese in Abbildung 6.1 durchgezogen dargestellte Kurve gerade die relative instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  ist. Die (relative) stabile Mannigfaltigkeit ist hier gestrichelt dargestellt.

Wenn wir allerdings das globale Verhalten der in Abbildung 6.1 dargestellten Mannigfaltigkeiten betrachten, so stellen wir fest, dass der linke untere Ast der instabilen Mannigfaltigkeit einen Bogen macht und mit der stabilen Mannigfaltigkeit zusammenstößt, die beiden stimmen in diesem Bereich also überein — was nur auf den ersten Blick widersprüchlich ist. Folglich ist  $W^u(x^*)$  in diesem Beispiel durch die in Abbildung 6.1 durchgezogen gezeichnete Kurve gegeben (wobei der rechte obere Ast in der Grafik abgeschnitten ist). Insbesondere stimmen  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  und  $W^u(x^*)$  auf  $\mathcal{N}$  nicht überein.

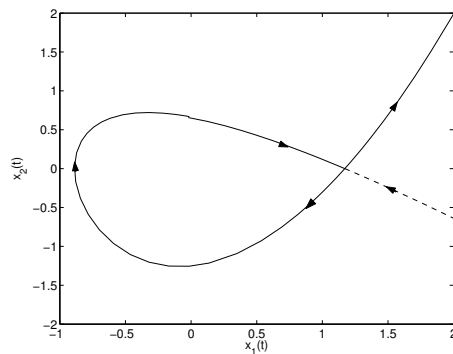


Abbildung 6.2: Globales Verhalten von Beispiel 6.7

Die in diesem Beispiel auftretende Lösung, die sowohl in Vorwärts- wie in Rückwärtstzeit gegen  $x^*$  konvergiert, heißt *homokliner Orbit*.  $\square$

Die Grundidee des Algorithmus zur Berechnung von  $W^u(x^*)$  ist nun wie folgt:



(1) Berechne die Menge  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  für eine kleine kompakte Umgebung  $\mathcal{N}$  von  $x^*$

(2) Berechne  $W^u(x^*)$  mittels

$$\bigcup_{j \geq 0} \Phi(jh, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)).$$

Wir untersuchen zunächst den zweiten Schritt und zeigen, dass die dort angegebene Vereinigung tatsächlich  $W^u(x^*)$  liefert.

**Lemma 6.8** Es sei die relative instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  bzgl. einer kompakten Umgebung  $\mathcal{N}$  von  $x^*$  gegeben. Dann gilt

$$W^u(x^*) = \bigcup_{j \geq 0} \Phi(jh, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)).$$

**Beweis:** “ $\supseteq$ ”: Es sei  $x \in \bigcup_{j \geq 0} \Phi(jh, W_{\mathcal{N}}^u(x^*))$ . Dann existiert ein  $t = jh \geq 0$  und  $y \in W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$ , so dass  $x = \Phi(t, y)$  gilt. Damit folgt

$$\Phi(\tau, x) = \Phi(\tau, \Phi(t, y)) = \Phi(\tau + t, y).$$

Da  $y \in W_{\mathcal{N}}^u(x^*) \subseteq W^u(x^*)$  liegt, folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi(\tau, x) = \lim_{s = \tau + t \rightarrow -\infty} \Phi(s, y) = x^*,$$

weswegen  $x \in W^u(x^*)$  liegt.

“ $\subseteq$ ”: Es sei  $x \in W^u(x^*)$ . Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(-t, x) = x^*.$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt damit

$$\|\Phi(-t, \Phi(-\tau, x)) - x^*\| = \|\Phi(-\tau - t, x) - x^*\| < \varepsilon$$

für ein (von  $\varepsilon$  abhängiges) hinreichend großes  $\tau \in h\mathbb{N}$  und alle  $t \in h\mathbb{N}$ . Da  $\mathcal{N}$  eine Umgebung von  $x^*$  ist, existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $\mathcal{B}_\varepsilon(x^*) \subset \mathcal{N}$ , also existiert  $\tau > 0$  mit

$$\Phi(-t, \Phi(-\tau, x)) \in \mathcal{N}$$

für alle  $t \geq 0$ . Da  $W^u(x^*)$  invariant ist, gilt zudem

$$\Phi(-\tau, x) \in W^u(x^*).$$

Aus der Definition von  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  folgt also

$$y := \Phi(-\tau, x) \in W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$$

und damit auch

$$x = \Phi(\tau, y) \in \Phi(\tau, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)) \subseteq \bigcup_{j \geq 0} \Phi(jh, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)).$$

□

Wenn wir also  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  berechnen können, so können wir — zumindest theoretisch — auch  $W^u(x^*)$  berechnen.

**Bemerkung 6.9** Eine andere Art, die obige Vereinigung zu schreiben, ist die Iteration

$$W_0 = W_{\mathcal{N}}^u(x^*), \quad W_i = \Phi(h, W_{i-1}) \cup W_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Iteration wird die Basis für unseren Algorithmus sein, wobei wir uns in der algorithmischen Umsetzung auf eine weitere kompakte Menge  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  einschränken müssen, die natürlich i.A. deutlich größer als  $\mathcal{N}$  ist. Damit können wir in der obigen Vereinigung nur diejenigen Lösungen von  $\Phi$  betrachten, die in  $\Gamma$  bleiben. Wir berechnen damit die Mengenfolge

$$W_0 = W_{\mathcal{N}}^u(x^*), \quad W_i = \left( \Phi(h, W_{i-1}) \cup W_{i-1} \right) \cap \Gamma, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Analog zu dem obigen Beweis sieht man, dass man auf diese Weise gerade die relative instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\Gamma}^u(x^*)$  erhält.  $\square$

Wir wollen uns nun überlegen, wie man  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  berechnen kann. Hierzu müssen wir die folgende Annahme an das Verhalten des Systems in  $\mathcal{N}$  machen.

**Annahme 6.10** Für jedes  $x \in \mathcal{N} \setminus W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  existiert ein  $t \geq 0$  mit

$$\Phi(-t, x) \notin \mathcal{N}.$$

$\square$

Anschaulich besagt Annahme 6.10, dass alle Lösungen, die nicht ohne Verlassen von  $\mathcal{N}$  in Rückwärtszeit gegen  $x^*$  konvergieren (also nicht in  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  liegen), die Umgebung  $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x^*)$  verlassen (wobei eine spätere “Rückkehr” nicht ausgeschlossen ist). Es gibt also für die Lösungen, die in  $\mathcal{N}$  starten in Rückwärtszeit genau die zwei Alternativen: (i) Konvergenz gegen  $x^*$  oder (ii) Verlassen von  $\mathcal{N}$ .

Sicherlich ist dies eine einschränkende Annahme, sie ist aber in vielen praktischen Beispielen erfüllt und lässt sich zudem leicht mittels einer hinreichenden Bedingung überprüfen: Wenn die Jacobi-Matrix

$$A = \frac{d}{dx} \Phi(h, x)$$

nur Eigenwerte  $\lambda$  mit  $|\lambda| \neq 1$  besitzt, so ist Bedingung 6.10 für jede hinreichend kleine Umgebung  $\mathcal{N}$  erfüllt. In diesem Fall spricht man von einem *hyperbolischen* Gleichgewicht. Im Beweis hierfür zeigt man zunächst, dass das mittels

$$\Phi_{lin}(h, x) = A(x - x^*)$$

definierte *linearisierte* System diese Eigenschaft besitzt und dass sich die Lösungen  $\Phi$  und  $\Phi_{lin}$  in einer kleinen Umgebung  $\mathcal{N}$  nur wenig unterscheiden. Der formale Beweis dieses Satzes, der als Satz von Hartman und Grobman bekannt ist, ist allerdings etwas komplizierter.

Unter der Annahme 6.10 gilt der folgende Satz.

**Satz 6.11** Betrachte ein diskretes dynamisches System  $\Phi$ , das einen Fixpunkt  $x^*$  besitzt, der die Annahme 6.10 für eine Umgebung  $\mathcal{N}$  erfüllt. Dann gilt

$$W_{\mathcal{N}}^u(x^*) = A,$$

wobei  $A$  der relative globale Attraktor von  $\Phi$  bzgl.  $\Omega = \mathcal{N}$  ist.

**Beweis:** “ $A \subseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$ ”: Da  $A$  relativ invariant ist, gilt  $\Phi(h, A) \cap \Omega = A$ . Daraus folgt

$$\Phi(-h, A) = \Phi(-h, \Phi(h, A) \cap \Omega) \subseteq \Phi(-h, \Phi(h, A)) = A$$

und per Induktion

$$\Phi(-t, A) \subseteq A$$

für jedes  $t \in h\mathbb{N}$ . Falls  $x \notin W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  ist, so gilt nach Annahme 6.10

$$\Phi(-t, x) \notin \mathcal{N}$$

für ein geeignetes  $t \in h\mathbb{N}$  und damit wegen

$$A \subseteq \Omega = \mathcal{N}$$

auch

$$\Phi(-t, x) \notin A.$$

Falls also  $x \in A$  wäre, so gälte

$$\Phi(-t, A) \not\subseteq A,$$

ein Widerspruch. Damit gilt  $x \notin W_{\mathcal{N}}^u(x^*) \Rightarrow x \notin A$  und folglich  $A \subseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$ .

“ $A \supseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$ ”: Zum Beweis dieser Inklusion zeigen wir zunächst

$$\Phi(h, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)) \cap \Omega \supseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*). \quad (6.1)$$

Zum Beweis von (6.1) beachte, dass jeder Punkt  $x \in W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  gerade durch die Bedingungen  $x \in W^u(x^*)$  und  $\Phi(-t, x) \in \mathcal{N}$  für alle  $t \in h\mathbb{N}$  charakterisiert ist. Wegen der Invarianz von  $W^u(x^*)$  folgt also

$$\Phi(-h, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)) \subseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$$

und damit

$$\Phi(h, W_{\mathcal{N}}^u(x^*)) \supseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*).$$

Da zudem  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*) \subseteq \mathcal{N} = \Omega$  gilt, folgt (6.1). Zum Beweis von  $A \supseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  verwenden wir nun die Darstellung

$$A = \bigcap_{i \geq 0} C_i$$

mit

$$C_0 = \Omega, \quad C_i = \Phi(h, C_{i-1}) \cap \Omega, \quad i = 1, 2, \dots,$$

aus Lemma 5.6. Aus (6.1) folgt per Induktion über  $i \in \mathbb{N}_0$  die Inklusion

$$W_{\mathcal{N}}^u(x^*) \subseteq C_i$$

und damit  $A \supseteq W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$ , also die Behauptung.  $\square$

## 6.2 Der Fortsetzungsalgorithmus

Wir wollen die im vorangehenden Abschnitt skizzierte Idee des Algorithmus nun mit Hilfe unserer räumlichen Diskretisierung numerisch umsetzen. Wir wählen uns dazu zwei Mengen: Eine Menge  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , auf der wir  $W_\Gamma^u(x^*)$  berechnen wollen und eine (kleine) Menge  $\Omega = \mathcal{N} \subset \Gamma$ , auf der wir die lokale Approximation  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  berechnen wollen. Dazu wählen wir uns eine Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Gamma$ .

In Schritt (1) des Algorithmus müssen wir nun den relativen globalen Attraktor  $A$  bzgl.  $\Omega$  berechnen, da dieser nach Satz 6.11 gerade die Menge  $W_{\mathcal{N}}^u(x^*)$  ist. Hierfür muss der Algorithmus 5.24 nur minimal abgeändert werden, nämlich so, dass im Algorithmus nur diejenigen Zellen und Testpunkte berücksichtigt werden, die in  $\Omega$  liegen. Beachte, dass die Anfangsüberdeckung fein genug sein muss, damit solche Punkte überhaupt existieren.

In Schritt (2) des Algorithmus müssen wir nun die dort angegebene Vereinigung umsetzen. Dies leistet der folgende sogenannte *Fortsetzungsalgorithmus*, der eine Folge von Mengen  $W_i$  mit  $W_i \subseteq W_{i+1}$  konstruiert und bei dem wir für die Status-Kennzeichnung die folgende Konvention machen:

- $s_j = 0$ : Zelle gehört zu keinem  $W_j$ ,  $j \leq i$
- $s_j = 2$ : Zelle gehört zu  $W_{i-2}$
- $s_j = 1$ : Zelle gehört zu  $W_{i-1} \setminus W_{i-2}$
- $s_j = 3$ : Zelle gehört zu  $W_i \setminus W_{i-1}$ .

(Diese Kennzeichnung erscheint etwas durcheinander; dies liegt daran, dass das Endergebnis wie in den vorhergehenden Algorithmen mit “Status=2” repräsentiert werden soll.)

**Algorithmus 6.12 (Fortsetzungsalgorithmus)** *Eingabe:* kompakte Menge  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , diskretes dynamisches System  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}^n$ , Zellenüberdeckung  $\mathcal{Q}$  von  $\Gamma$  mit markierter Menge  $W_0 = \bigcup_{s_j=2} Q_j$ .

(0) Setze  $s_j := 1$  für alle Zellen mit  $s_j = 2$ , setze  $i := 1$

(1) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$

Falls  $s_j = 1$  ist

Durchlaufe alle Testpunkte  $x_j^l$  der Zelle  $Q_j$

Setze den Status der Zelle  $Q_k$  mit  $\Phi(h, x_j^l) \in Q_k$  und  $s_k = 0$  auf  $s_k := 3$

Ende der Schleifen

(2) Durchlaufe alle Zellen  $Q_j$

Falls  $s_j = 1$  ist, setze  $s_j := 2$

Falls  $s_j = 3$  ist, setze  $s_j := 1$

Ende der Schleife

Falls kein  $s_j$  mit  $s_j = 3$  existiert hat, beende den Algorithmus; ansonsten gehe zu (1)

*Ausgabe:* Die Menge

$$W_i = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, P \\ s_j=2}} Q_j.$$

□

Wann kann man nun erwarten, dass dieser Algorithmus eine gute Approximation  $W_i$  von  $W_\Gamma^u(x^*)$  liefert? Sicherlich gerade dann, wenn die Menge  $W_\Gamma^u(x^*)$  robust gegenüber kleinen Störungen ist, also wenn sie eine  $\gamma$ -Robustheitseigenschaft analog zu den asymptotisch stabilen Mengen erfüllt. Bei diesen hatten wir gesehen, dass diese Robustheit aus der Attraktionseigenschaft folgt. Das Gleiche gilt hier: Wenn alle Lösungen aus einer Umgebung gegen  $W_\Gamma^u(x^*)$  konvergieren, so kann man ein gutes Approximationsergebnis erwarten. Leider ist dies keine Eigenschaft, die instabile Mannigfaltigkeiten automatisch besitzen. Unter Annahme (6.10) gilt diese Attraktionseigenschaft für  $W_\Gamma^u(x^*)$ , falls die Menge  $\Gamma$  hinreichend klein ist. Für große Mengen  $\Gamma$ , also insbesondere wenn wir das globale Verhalten untersuchen wollen, kann die Attraktion und damit die Robustheit verloren gehen.

Ein Beispiel dafür ist die DGL aus Beispiel 6.7. Hier ist der homokline Orbit nicht attrahierend, da alle Lösungen, die im Inneren der ‘‘Schleife’’ starten, gegen das zweite Gleichgewicht  $x^{**}$  konvergieren und sich damit vom homoklinen Orbit entfernen. Damit ist die instabile Mannigfaltigkeit nicht robust und folglich berechnet der Algorithmus eine wesentlich größere Menge (Abb. 6.3, links; alle hier dargestellten Berechnungen wurden mit Zeitschritt  $h = 1$  und 25 Testpunkten pro Zelle durchgeführt). Es ist allerdings nicht so, dass homokline Orbits prinzipiell nicht robust sind. Betrachten wir Beispiel 6.7 in Rückwärtszeit, so wird der homokline Orbit robust und durch den Algorithmus gut approximiert (Abb. 6.3, rechts).

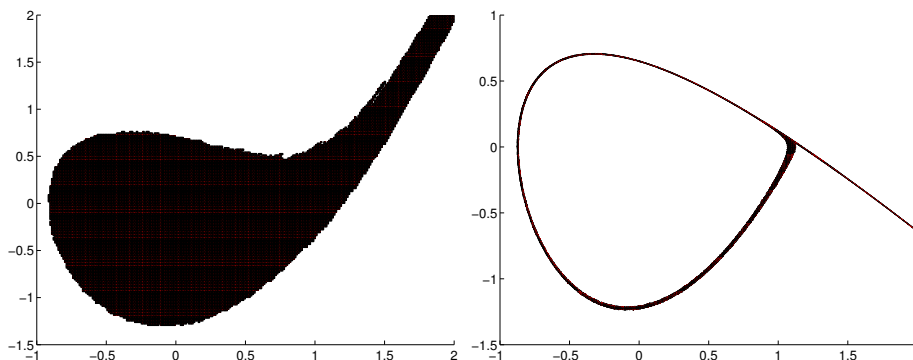


Abbildung 6.3: Ergebnis von Algorithmus 6.12 für Beispiel 6.7 in Vorwärts- und Rückwärtszeit

Im Falle der Nichtrobustheit hilft eine Variante des Algorithmus weiter, bei der man die Iteration nicht bis zum Eintreten der Konvergenz  $W_i = W_{i-1}$  durchführt, sondern nach einer vorgegebenen Anzahl von Schritten abbricht. In diesem Fall erhält man für festes  $i$  und abnehmende Zellengröße die Konvergenz

$$H^* \left( W_i, \bigcup_{j=0, \dots, i} \Phi(jh, W_N^u(x^*)) \right),$$

im Falle einer rigoroser Diskretisierung gilt dies sogar in der Hausdorff-Metrik  $H$  (vgl. Proposition 3.2 in [3]).

In Abbildung 6.4 ist diese Variante für 7 Schritte mit zwei verschiedenen Feinheiten für

Beispiel 6.7 durchgeführt. Beachte, dass die Konvergenzgeschwindigkeit auch bei dieser Variante von geeigneten Robustheitseigenschaften abhängt.

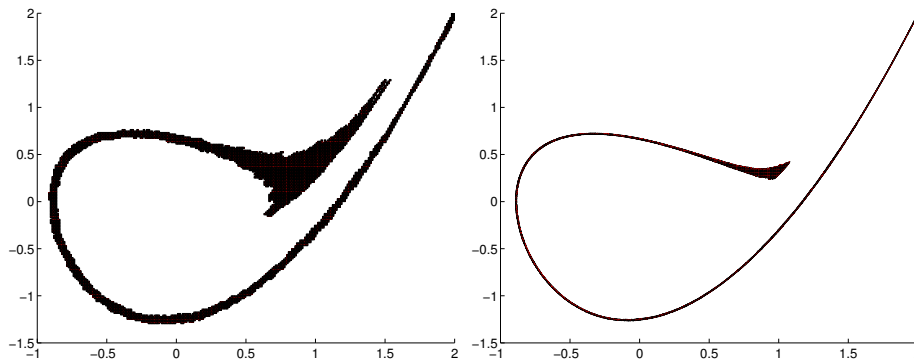


Abbildung 6.4: Ergebnis von Algorithmus 6.12 für Beispiel 6.7 mit 7 Fortsetzungsschritten und verschiedener Zellengröße

Einige schöne Beispiele für die Anwendung dieses Algorithmus finden sich im WWW, z.B. unter <http://math-www.upb.de/~agdellnitz/papers/vismas7.ps.gz> oder unter <http://math-www.upb.de/~agdellnitz/gaio/halo.html>.

# Anhang A

## Implementierung der Zellenüberdeckung

In diesem Anhang beschreiben wir die für die Übungen zur Verfügung gestellten C-Routinen zur Implementierung der Zellenüberdeckung.

### A.1 Implementierung

Bevor wir zur Bedienung der Routinen kommen, wollen wir kurz die Datenstruktur beschreiben. Speziell im Hinblick auf die flexible Verfeinerung von Zellen, die in den späteren Algorithmusversionen hilfreich ist, ist die Zellenüberdeckung als Baumstruktur angelegt. Abbildung A.1 stellt diese Datenstruktur schematisch dar.

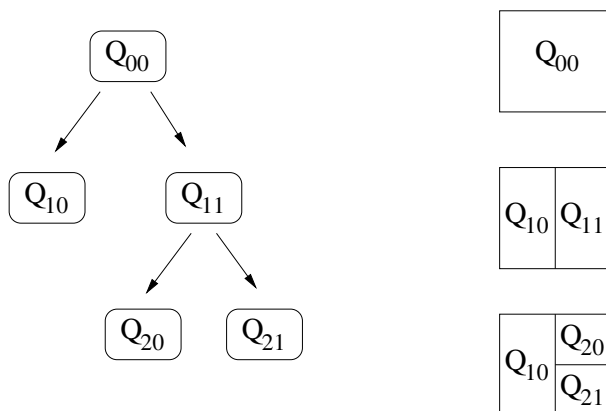


Abbildung A.1: Schematische Darstellung der Baumstruktur

Die tatsächlich verwendete Überdeckung ist dabei immer die Überdeckung auf der untersten Ebene, sie besteht also gerade aus denjenigen Zellen, die die sogenannten *Blätter* des Baums darstellen. In der in Abbildung A.1 dargestellten Struktur besteht die verwendete Überdeckung also aus den drei Zellen  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$  und  $Q_{21}$ .

## A.2 Bedienung der Routinen

Bei der Verwendung der Routinen ist diese Datenstruktur unsichtbar, sie erklärt aber die auf den ersten Blick etwas ungewöhnliche Handhabung der Routinen, die sich einfach daher ergibt, dass die Zellen nicht in einem Array sondern in einem Baum abgespeichert sind.

Im Folgenden werden die Routinen im Einzelnen beschrieben.

### A.2.1 C-Routinen

```
double make_grid(double *xu, double *xo, int dim, int r);
```

Erzeugt eine Zellenüberdeckung im  $\mathbb{R}^{dim}$  auf der rechteckigen Menge  $\Omega$  mit "linker unterer" Ecke  $xu$  und "rechter oberer" Ecke  $xo$ . In jeder Koordinatenrichtung werden  $r$  Zellen erzeugt, also  $r^{dim}$  Zellen insgesamt. Falls  $r$  keine Zweierpotenz ist wird automatisch abgerundet. Als Rückgabewert gibt die Funktion den Durchmesser der Zellen (in der 2-Norm) zurück. Jede Zelle wird mit Status=2 vorbelegt.

Beispiel (2d):

```
double k, xu[2], xo[2];
```

```
xu[0] = -1; xu[1] = -1;
```

```
xo[0] = 1; xo[1] = 1;
```

```
k=make_grid(xu,xo,2,4);
```

□

```
int write_grid(char *filename);
```

Schreibt die aktuelle Zellenüberdeckung in das File mit Namen `filename`. Für jede Zelle wird eine Zeile mit linker unterer und rechter oberer Ecke sowie dem Status ausgegeben. In 2d und 3d können die Files mit den unten beschriebenen MATLAB-Routinen grafisch ausgegeben werden.

Beispiel:

```
write_grid("test.grd");
```

□

```
void refine_grid(void);
```

Verfeinert jede Zelle des Gitters mit Status=2. Hierbei wird immer in eine Koordinatenrichtung verfeinert, wobei sich die Richtungen zyklisch abwechseln, in 3d also  $x - y - z - x - y - z - \dots$

□

```
int first_cell(void);
```

Setzt den internen Zeiger auf die erste Zelle der Überdeckung. Gibt  $-1$  zurück, falls noch kein Gitter erzeugt wurde, sonst 0. Die Zelle, auf die der interne Zeiger zeigt, wird im Folgenden als *aktuelle Zelle* bezeichnet.

□



```
int next_cell(void);
```

Setzt den internen Zeiger auf die nächste Zelle der Überdeckung. Gibt eine fortlaufenden positiven Nummer (Index der Zelle) zurück und  $-1$ , falls die letzte Zelle der Überdeckung bereits erreicht war.

Beispiel für `first_cell` und `next_cell`: Schleife über alle Zellen

```
int index;
```

```
...
```

```
index = first_cell();
```

```
do
```

```
{
```

```
...
```

```
/* Hier kann die aktuelle Zelle bearbeitet werden */
```

```
...
```

```
    index = next_cell();
```

```
}
```

```
while (index!=-1);
```

□

```
void get_corner(int i, double *x);
```

Gibt den  $i$ -ten Eckpunkt der aktuellen Zelle (siehe `first_cell`) aus. Der Index  $i$  muss zwischen  $0$  und  $2^{dim} - 1$  liegen, die Variable  $x$  muss entsprechend der Dimension deklariert sein.

Beispiel (2d):

```
double x[2];
```

```
int i;
```

```
...
```

```
for (i=0; i<4; i++)
```

```
{
```

```
    get_corner(i, x);
```

```
    printf("Eckpunkt %d: %f %f\n", i, x[0], x[1]);
```

```
}
```

□

```
void get_testpoint(int i, int tnum, double *x);
```

Gibt den  $i$ -ten Testpunkt (von insgesamt  $tnum$ ) in der aktuellen Zelle aus. Der Index  $i$  muss zwischen  $0$  und  $tnum - 1$  liegen, die Variable  $x$  muss entsprechend der Dimension deklariert sein. Die Testpunktanzahl muss  $\geq 2^{dim}$  sein und sollte von der Form  $m^{dim}$  für ein

$m \in \mathbb{Z}$  sein, falls dies nicht der Fall ist, wird automatisch intern abgerundet. Die Testpunkte werden gleichmäßig in der Zelle platziert; dabei sind die Eckpunkte immer Testpunkte.

Beispiel (2d):

```
double x[2];
int i,j;

...

j = 9;

for(i=0; i<j; i++)
{
    get_testpoint(i,j,x);
    printf("Testpunkt %d: %f %f\n", i, x[0], x[1]);
}
```

□

```
int get_status(void);
```

Gibt den Status der aktuellen Zelle zurück bzw.  $-1$ , falls der interne Zeiger nicht gesetzt wurde. □

```
int set_status(int status);
```

Setzt den Status der aktuellen Zelle auf `status`; dieser Wert muss dabei  $\geq 0$  sein. Gibt bei Erfolg  $0$  zurück, sonst  $-1$ . □

```
int get_x_status(double *x);\verb
```

Gibt den Status der Zelle zurück, in der der Punkt `x` liegt bzw.  $-1$ , falls `x` nicht in  $\Omega$  liegt oder keine Überdeckung erzeugt wurde. □

```
int set_x_status(double *x, int status);
```

Setzt den Status der Zelle, in der `x` liegt auf `status`; dieser Wert muss dabei  $\geq 0$  sein. Gibt bei Erfolg  $0$  zurück, sonst  $-1$ .

```
int set_xngh_status(double *x, int status);
```

Wie `int set_x_status`, wobei zudem alle benachbarten Zellen markiert werden (auch wenn `x` außerhalb von  $\Omega$  liegt). □

## A.2.2 MATLAB-Routinen zur grafischen Darstellung

Zusätzlich gibt es die MATLAB-Routinen `gridplot2d.m` und `gridplot3d.m` zur grafischen Darstellung der Ergebnisse. Wenn die Überdeckung wie oben beschrieben mit der C-Anweisung `write_grid("test.grd")`; in das File "test.grd" geschrieben wurde, so zeigt `gridplot2d('test.grd',1)` (bzw. `3d`) die Überdeckung an; hierbei werden die Zellen mit `Status=2` in Rot und die restlichen Zellen durchsichtig gezeichnet.

Die Anweisung `gridplot2d('test.grd',0)` (bzw. `3d`) macht das Gleiche, allerdings werden die Zellen mit `Status≠2` hierbei gar nicht gezeichnet.

### A.2.3 Technische Hinweise

Zur Verwendung der oben beschriebenen C-Routinen müssen drei Schritte durchgeführt werden.

#### (1) Herunterladen der nötigen Routinen

Zur Verwendung der C-Routinen müssen Sie dazu die Files `grid.c`, `grid.h` und `defs.h` von der Vorlesungs-Webpage<sup>1</sup> herunterladen. Hier finden sich auch die MATLAB-Routinen zur grafischen Darstellung.

#### (2) Einbinden der Header-Datei

Um die Routinen in Ihrem Programm verwenden zu können, müssen Sie im Kopf die Zeile `#include "grid.h"` einfügen.

#### (3) Compilieren und Linken

Nehmen wir an, Ihr Programm ist im File `meinprogramm.c` gespeichert, und Sie wollen daraus ein ausführbares Programm mit Namen `meintest` erzeugen. Dazu müssen Sie die folgenden Befehle ausführen

(a) Übersetzung der Routinen:

```
gcc -c grid.c
```

(Dies muss nach dem Herunterladen nur einmal durchgeführt werden.)

(b) Übersetzen Ihres Programms:

```
gcc -c meinprogramm.c
```

(c) Zusammenbinden (Linken) der Programme:

```
gcc main.o grid.o -lm -o meintest
```

Wenn alles fehlerfrei geklappt hat, können Sie Ihr Programm nun mit `meintest` starten.

Auf der Vorlesungshomepage finden Sie unter `beispiel.c` ein Programm, mit dem Sie diese Schritte testen können.

---

<sup>1</sup>[www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/numdyn0304/](http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/numdyn0304/)



# Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997.
- [2] F. COLONIUS AND W. KLIEMANN, *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [3] M. DELLNITZ AND A. HOHMANN, *The computation of unstable manifolds using subdivision and continuation*, in *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, H. W. Broer et al., eds., Birkhäuser, Boston, 1996, pp. 449–459.
- [4] ———, *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*, *Numer. Math.*, 75 (1997), pp. 293–317.
- [5] L. GRÜNE, *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1783, Springer–Verlag, 2002.
- [6] ———, *Numerische Mathematik II: Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, [www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/](http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/), 2003.
- [7] O. JUNGE, *Mengenorientierte Methoden zur numerischen Analyse dynamischer Systeme*. Shaker Verlag, Aachen, 2000. Dissertation, Universität Paderborn.
- [8] P. E. KLOEDEN AND J. LORENZ, *Stable attracting sets in dynamical systems and their one-step discretizations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23 (1986), pp. 986–995.
- [9] E. D. SONTAG, *Comments on integral variants of ISS*, *Syst. Contr. Lett.*, 34 (1998), pp. 93–100.

# Index

- absorbierende Menge, 16
- Abstand, 11
- $\alpha$ -absorbierende Menge, 35
- $\alpha$ -asymptotische Stabilität, 33
- $\alpha$ -Attraktor, 33
  - relativ global, 94
- $\alpha$ -invariante Menge, 32
  - relativ, 94
- Anfangswert, 4
- asymptotische Gleichmäßigkeit, 70
- asymptotische Stabilität, 12
- Attraktionsrate, 41
- Attraktor, 13
  - der Zeldendynamik, 92
  - global, 82
  - relativ global, 85
- äußerer Fehler, 90
  
- Diskretisierungsfehler, 6
- dissipative Systeme, 82
- Dreiecksungleichung, 12, 50
- Durchmesser, 89
- dynamisches System, 4
  - gestört, 27
  
- Einbettungslemma
  - räumlich, 94
  - zeitlich, 29
  - zeitlich mit Störung, 69
- exponentielle Stabilität, 13, 47
  - Zusammenhang mit Robustheit, 58
  
- Feinheit, 89
- Fortsetzungsalgorithmus, 118
  
- $\gamma$ -Robustheit, 52
  - monoton, 65
- Gitter, 50
- Gleichgewicht, 10, 79
- Gronwall-Lemma, 52
  
- Hausdorff-Abstand, 11
- Hausdorff-Metrik, 49
- Hénon-Attraktor, 14
- homokliner Orbit, 114
  
- innerer Fehler, 90
- instabile Mannigfaltigkeit, 111
- invariante Menge, 9
  - relativ, 85
- ISDS-Eigenschaft, 61
  
- $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion, 18
- $\mathcal{KL}$ -Funktion, 41
- $\mathcal{KLD}$ -Funktion, 44
- Konsistenz, 28
- Kozykluseigenschaft, 4
  - gestörter Systeme, 28
  
- Langzeitverhalten, 6
- Lipschitz-Bedingung, 28
- Lösungskurve, 4
- Lyapunov-Funktion
  - asymptotische Stabilität, 18
  - Attraktionsrate, 46
  - ISDS, 62
  
- oberhalbstetige Konvergenz, 77
  
- periodische Lösung, 77
  
- räumliche Diskretisierung, 90
- rigorose Diskretisierung, 91
  - Konstruktion, 107
- Robustheitsmaß, 52
  - linear, 58
  
- Schrittweitensteuerung, 6
- semi-dynamisches System, 4
  - gestört, 27
- semiglobal, 83

stabile Mannigfaltigkeit, 112  
Stabilitätsumgebung, 12  
Subdivisionsalgorithmus, 100

Takens–Bogdanov Oszillator, 113  
totale Stabilität, 57  
Trajektorie, 4  
transientes Verhalten, 16

Zeit

    diskret, 3  
    kontinuierlich, 3  
Zeit-h-Abbildung, 5  
Zeitachse, 3  
Zellen, 89  
Zellenabbildung, 90  
Zellendynamik, 90  
Zellenüberdeckung, 89