Autonome
und
Nichtautonome
Dynamische Systeme

Diplomarbeit

Udo Schmidt

Juni 2002

eingereicht am
Fachbereich Mathematik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Zusammenfassung:
In der vorliegenden Arbeit werden Aspekte autonomer und nichtautonomer dynamischer Systeme behandelt, wobei Attraktoren und verwandte Objekte eine wichtige Rolle spielen werden. Zunächst findet man in einem Kapitel über dynamische Systeme die Definition der grundlegenden Begriffe Attraktor, Repeller und Schiefproduktfluss, gefolgt von zwei hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Attraktoren. Mit den Attraktoren und Repellern können dann im nächsten Kapitel Morsemengen eingeführt werden. Dadurch kann das Verhalten eines dynamischen Systems qualitativ beschrieben werden. Des weiteren wird auf die Bedeutung der Kettenrekurrenzmenge für die Morsemengen eingegangen. Im Kapitel über Kontrolltheorie wird, nach einer kurzen Einführung in dieses Gebiet, gezeigt, dass der dort definierte Lift einer Kettenkontrollmenge unter gewissen Voraussetzungen eine Morsemenge ist. Im letzten Kapitel geht es um Pullback-Attraktoren, die unter den angegebenen Bedingungen als Attraktoren für den Schiefproduktfluss interpretiert werden können.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Dynamische Systeme **5**

2.1 Definition des dynamischen Systems . . . 5
2.2 Die Hausdorffmetrik . . . 6
2.3 Invarianz . . . 7
2.4 Limesmengen . . . 8
2.5 Chaos im Sinne von Devaney . . . 10
2.6 Attraktoren und Repeller . . . 11
2.7 Der Schiefproduktfluss . . . 15

3 Morsetheorie **19**

3.1 Die Morsezerlegung . . . 19
3.2 (ε, T)-Ketten und Morsemengen . . . 23

4 Kontrolltheorie **32**

4.1 Der Rechtsshift als chaotisches dynamisches System . . . 32
4.2 Kontrollsysteme und Kontrollmengen . . . 33
4.3 Der Lift einer Kontrollmenge . . . 35
4.4 Die Kettenkontrollmenge . . . 37

5 Pullback-Attraktoren **39**

5.1 Definition des Pullback-Attraktors . . . 40
5.2 Pullback-Attraktoren als globale Attraktoren des Schiefproduktflusses . . . 41
5.3 Die $\Omega-$Limesmenge . . . 45
5.4 Der lokale Pullback-Attraktor . . . 47
5.5 Der globale Pullback-Attraktor als lokaler Attraktor . . . 51
5.6 Der lokale Pullback-Attraktor als lokaler Attraktor . . . 57
5.7 Ausblick und Rückschau . . . 59

Kapitel 1

Einleitung

Der Begriff des dynamischen Systems ist ein sehr allgemeiner. Mit ihm lassen sich Zustandsänderungen in der Zeit beschreiben. Dies geschieht bei einem sogenannten autonomen dynamischen System mittels einer Abbildung, die als Argumente ein Element des vorliegenden Raumes und ein Element der Zeitmenge hat. Der Raum kann z.B. ein metrischer oder ein topologischer Raum sein. Die Abbildung bildet wieder in den Raum ab und kann, mit den entsprechenden algebraischen Eigenschaften versehen, als zeitliche Verschiebung der Elemente des Raumes interpretiert werden. Als Beispiel kann die Lösungsabbildung einer autonomen Differentialgleichung dienen. Eine Lösungsabbildung einer nichtautonomen Differentialgleichung, bei der neben der verflossenen Zeit auch der Startzeitpunkt eine Rolle spielt, führt uns zum nichtautonomen dynamischen System, das in der vorliegenden Arbeit mit dem Konstrukt des Kozykels beschrieben wird.

Die folgenden beiden Kapitel beinhalten fast ausschließlich autonome dynamische Systeme. Jedoch wird schon im Kapitel 2 die Grundlage dafür gelegt, die autonomen und nichtautonomen dynamischen Systeme zu verbinden. Dies geschieht über den sogenannten Schiefproduktfluss, ein durch ein nichtautonomes dynamisches System generiertes autonomes dynamisches System. Hiervon wird im Kapitel 4 Gebrauch gemacht. Dieses Kapitel hat also nichtautonome und autonome Aspekte. Beide Aspekte sind Inhalt auch des letzten Kapitels über Pullback-Attraktoren.

In dieser Arbeit werden Verbindungen zwischen autonomen und nichtautonomen dynamischen Systemen aufgezeigt. Dabei sind zwei selbst eng miteinander verwandte Objekte zu nennen: Zum einen der Attraktor, zum anderen die Morsemenge. Vereinfacht gesagt, ist ein Attraktor eine Menge, die eine Umgebung anzieht. Das Gegenstück, der Repeller, ist eine Menge, die eine Umgebung abstößt. Kapitel 3 führt in die Theorie der Morsemengen, die geeignete Schnitte von Attraktoren mit Repellern sind, ein. Man kann unter der oben genannten Abbildung von einer Morsemenge zu einer oder mehreren anderen gelangen. Präziser ausgedrückt, ist mit Morsemengen eine Halbordnung auf dem vorliegenden Raum gegeben - man kann von im Sinne der Halbordnung größeren Morsemengen zu kleineren gelangen, aber nicht umgekehrt. Im Kapitel 4 wird man die Morsemengen wiederfinden. Die Morsemenge ist dort unter bestimmten Voraussetzungen der Lift einer Kettenkontrollmenge, die ein (nichtautonomes) Konzept der Kontrolltheorie ist.

Auch den Attraktor finden wir zusammen mit dem nichtautonomen dynamischen System, denn in Kapitel 5 wird für Kozykel der Pullback-Attraktor eingeführt, der unter bestimmten Voraussetzungen als Attraktor für den Schiefproduktfluss interpretiert werden kann. Dabei ist ein Ergebnis für die globalen Attraktoren und die globalen Pullback-Attraktoren wiedergegeben und zwei hinreichende Bedingungen für die Entsprechung von lokalen Attraktoren und lokalen Pullback-Attraktoren dargelegt. Zum Schluss werden Gedanken zur Definition des Pullback-Repellers angestellt.

Meine Hauptbeiträge zur vorliegenden Arbeit befinden sich im Kapitel 3 und Kapitel 5. Das Abschlussergebnis von Kapitel 3, das die Charakterisierung der Kettenrekurrenzkomponenten zum Inhalt hat, ist wesentlich ausführlicher als in der zitierten Literatur bewiesen worden, wozu auch die entsprechenden Vorüberlegungen angestellt worden sind. Im Kapitel 2 und Kapitel 3 wurden bestehende Beweise ergänzt oder nichtaufgeführte Beweise ausformuliert. In Kapitel 5 habe ich den lokalen Pullback-Attraktor definiert und Eigenschaften desselben bewiesen, zusammen mit einer hinreichenden Bedingung dafür, wann dieser ein lokaler Attraktor ist. Des weiteren sind die angeführten Beispiele, die Ansätze zur Definition des Pullback-Repellers und die abschließende tabellarische Übersicht zu nennen.

In der gesamten Arbeit sei (X, d) ein Heine-Borell'scher vollständiger metrischer Raum. Falls zusätzlich Kompaktheit verlangt wird, ist dies jeweils in den Voraussetzungen genannt. Eine Ausnahme bildet Kapitel 3, wo X durchgängig kompakt sein soll.

Mein Dank gilt Herrn Professor Kloeden und Herrn Privatdozent Dr. Grüne für die vielen Anregungen und alles, was sie für mich mit der Betreuung aufgewendet haben. Auch meinen Eltern möchte ich an dieser Stelle für ihren Beitrag zu meinem Studium herzlich danken.

Kapitel 2

Dynamische Systeme

Das Konstrukt, das uns in dieser Arbeit beschäftigen wird, ist das autonome dynamische bzw. semidynamische System. Nichtautonome dynamische Systeme sollen in der Arbeit mit Kozykeln beschrieben werden. Ist im Folgenden von dynamischen Systemen die Rede, so sind immer die autonomen gemeint. Anschaulich gesprochen handelt es sich dabei um eine Menge von Zuständen - z.B. ein Raumbereich, wo sich ein Objekt befinden kann - und um eine Abbildung, die den zeitlichen Übergang von einem Zustand zum anderen beschreibt. Zwei Eigenschaften, die sich in der Definition wiederfinden, sind zu nennen. Zum einen ist darauf zu achten, dass keine Zustandsänderung stattgefunden haben soll, wenn keine Zeit verflossen ist. Zum anderen soll, um anschaulich zu bleiben, der Ort, an den ein Objekt gebracht wird, nur von dem Ursprungsort und von der Zeit, die der Übergang in Anspruch genommen hat, abhängen - nicht jedoch von dem Startzeitpunkt des Übergangs. Auch letzteres verdient es, untersucht zu werden, wozu auch schon am Schluss dieses Kapitels die mathematischen Grundlagen gelegt werden sollen.

Bei einem semidynamischen System wird nur die Bewegung in positive Zeitrichtung betrachtet, bei dynamischen Systemen kann die Bewegungsrichtung umgekehrt werden - unter Beibehaltung der beiden oben genannten Eigenschaften. Als Zeitmenge sei $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+\}$ gewählt.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, sei in diesem Kapitel (X, d) ein Heine-Borell'scher vollständiger metrischer Raum. An den Stellen, an denen Kompaktheit gefordert wird, ist dies jedesmal explizit genannt.

2.1 Definition des dynamischen Systems

Es sollen nun die Begriffe dynamisches System, Orbit und periodischer Punkt definiert werden.

Definition 2.1 *Für $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+\}$ sei eine stetige Abbildung*

$$\phi : \mathbb{T} \times X \to X$$

gegeben, so dass für alle $x \in X, s, t \in \mathbb{T}$ *gilt:*

$$\phi(s+t,x) = \phi(s,\phi(t,x)) \quad \textit{und} \tag{2.1}$$

$$\phi(0,x) = x. \tag{2.2}$$

Dann spricht man für $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *von einem zeitdiskreten dynamischen System, für* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *von einem zeitkontinuierlichen dynamischen System oder auch von einem Fluss. Für* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ *bzw.* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *ist die Bezeichnung semidynamisches System üblich, im letzteren Fall auch die Bezeichnung Halbfluss.*

Statt $\phi(t,x)$ notiert man auch $\phi_t(x)$, $\phi_t x$ oder kurz $x \cdot t$.

Nicht bei jedem semidynamischen System ist $\phi_t(\cdot)$ für alle $t \in \mathbb{Z}_+$ bzw. $t \in \mathbb{R}_+$ invertierbar. Bei dynamischen Systemen ist jedoch für $t \in \mathbb{Z}$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ die zu $\phi_t(\cdot)$ inverse Abbildung immer durch $\phi_{-t}(\cdot)$ gegeben.

Jede autonome Differentialgleichung, deren Lösungen für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ definiert sind, generiert ein dynamisches System. Gibt es einen Anfangswert, dessen Lösungsabbildung nicht für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ existiert, spricht man von einem lokalen Fluss. Dass nichtautonome dynamische Systeme durch nichtautonome Differentialgleichungen generiert werden können, wird später beschrieben.

Definition 2.2 *Für ein dynamisches System oder semidynamisches System* ϕ *heiße eine Abbildung* $\gamma^x : \mathbb{T} \to X$, $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$, *Orbit durch* $x \in X$, *falls* $\gamma^x(0) = x$ *und für alle* $t \in \mathbb{T}^+$, $\tau \in \mathbb{T}$

$$\phi_t(\gamma^x(\tau)) = \gamma^x(t+\tau)$$

gilt.

Statt $\gamma^x(\mathbb{T}^+)$ schreibt man auch $\gamma^+(x)$ (positiver Orbit), statt $\gamma^x(\mathbb{T}^-)$ auch $\gamma^-(x)$ (negativer Orbit) und statt $\gamma^x(\mathbb{T})$ auch $\gamma(x)$.

Definition 2.3 *Sei* $x \in X$. *Ein Orbit* γ^x *heiße kompakt, wenn* $\gamma(x)$ *kompakt ist. Für ein dynamisches System heiße* x *periodischer Punkt und der Orbit* γ^x *periodisch, falls es ein* $T > 0$ *gibt mit* $\gamma^x(T) = x$. *Das nichtnegative Infimum von strikt positiven Zeiten mit dieser Eigenschaft heiße Periode.*

2.2 Die Hausdorffmetrik

Nicht nur die Konvergenz einzelner Punkte, sondern auch die Konvergenz von Mengen gegen Mengen wird sich später als nützlich erweisen. Dafür braucht man die in diesem Abschnitt bereitgestellte Hausdorff'sche Halbmetrik, mit der sich dann auf den kompakten nichtleeren Teilmengen von X eine Metrik, die Hausdorffmetrik, definieren lässt. Auch wenn mit der Hausdorff'schen Halbmetrik keine Metrik vorliegt, so reicht sie doch für die meisten Fälle als Abstandsbegriff zwischen Mengen aus. Bei der Definition des Attraktors in Abschnitt 2.6 wird sie verwendet.

Definition 2.4 *Seien $A, B \subset X$ nichtleer. Dann bezeichne*

$$H^*(A,B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b)$$

die Hausdorff'sche Halbmetrik.

Falls A, B zusätzlich kompakt sind, heiße

$$H(A,B) := \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\}$$

die Hausdorffmetrik zwischen A und B.

H kann man auch für nichtkompakte Mengen definieren. Grob gesprochen gibt also die Hausdorff'sche Halbmetrik die Antwort auf die Frage, wie weit A von B entfernt ist. Verschwindet $H^*(A,B)$, so liegt A im Abschluss von B.

Für $x \in X, A \subset X$ schreibt man statt $H^*(\{x\}, A)$ auch $H^*(x, A)$ oder $\operatorname{dist}(x, A)$.

Definition 2.5 *$K(X)$ bezeichne die Menge aller kompakten nichtleeren Teilmengen von X.*

Die in Kuratowski [8, S. 214f] bewiesene Aussage, dass die Hausdorffmetrik wirklich eine Metrik auf $K(X)$ darstellt, ist Teil der Aussage des folgenden Satzes.

Satz 2.6 (Blaschke) *Sei X zusätzlich kompakt. Dann ist auch $(K(X), H)$ kompakter metrischer Raum.*

2.3 Invarianz

Eine wichtige Eigenschaft, die Mengen im Zusammenhang mit einem semidynamischen System ϕ haben können, ist die der Invarianz. Wendet man $\phi_t, t \geq 0$, auf eine Menge an und diese bleibt unverändert, so spricht man von einer invarianten Menge. Invarianz ist eine der Eigenschaften, die für Attraktoren gefordert werden.

Definition 2.7 *Sei ϕ semidynamisches System auf X. Eine Menge $B \subset X$ heiße positiv invariant, falls $\phi_t(B) \subset B$ für alle $t \geq 0$ gilt, negativ invariant, falls $\phi_t(B) \supset B$ für alle $t \geq 0$ gilt und invariant, falls $\phi_t(B) = B$ für alle $t \geq 0$ gilt.*

Für $\delta > 0$ bezeichne $B_\delta(A) := \{x \in X : H^*(x, A) < \delta\}$ die offene δ-Umgebung einer Menge $A \subset X$. Der Rand von A wird mit ∂A und der Abschluss mit $\overline{A}$ bezeichnet und das Innere von A mit $\overset{\circ}{A}$, bzw. für längere Ausdrücke mit $\overset{\circ}{\widehat{A}}$.

Definition 2.8 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Dann heiße eine kompakte Menge $K \subset X$ isoliert invariant, wenn sie invariant ist und es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: $A \subset B_\delta(K)$ ist invariant und kompakt. $\Rightarrow A \subset K$.*

Wenn es also in einer hinreichend kleinen Umgebung einer kompakten invarianten Menge keine invariante kompakte echte Obermenge gibt, so liegt eine isoliert invariante Menge vor.

2.4 Limesmengen

Mit der Einführung der Limesmengen nähern wir uns dem Begriff des Attraktors, denn unter gewissen Zusatzbedingungen (siehe Satz 2.19 und Satz 2.21) ist der Attraktor gerade durch eine Limesmenge gegeben. In Colonius, Kliemann [5, Definition B.2.9.] wird die Limesmenge auch zur Definition des lokalen Attraktors herangezogen. Aber noch aus einem anderen Grund ist die Limesmenge ein interessantes Objekt. In Abschnitt 5.3 wird ebenfalls eine Limesmenge eingeführt, dort jedoch nicht für dynamische Systeme, sondern für eine Verallgemeinerung derselben. Man vergleiche dazu auch den Satz 2.10 in diesem Abschnitt und den Satz 5.10.

Definition 2.9 *Sei $B \subset X$. Dann heiße für ein dynamisches System oder semidynamisches System ϕ*

$$\omega(B) := \{x \in X : \text{ es gibt Folgen } (t_n) \to \infty, (y_n) \subset B \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y_n) = x\}$$

die ω-Limesmenge von B.

Analog definiert man die ω^*-Limesmenge für ein dynamisches System:

$$\omega^*(B) := \{x \in X : \text{ es gibt Folgen } (t_n) \to -\infty, (y_n) \subset B \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y_n) = x\}.$$

Für ein semidynamisches System und einen Orbit γ^x durch $x \in X$ sei die ω^*-Limesmenge von γ^x definiert durch

$$\omega^*(\gamma^x) := \{x \in X : \text{es gibt eine Folge } (t_n) \to -\infty \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \gamma^x(t_n) = x\}.$$

Die ω^*-Limesmenge ist die ω-Limesmenge für den zeitinvertierten Fluss $\phi_t^*(x) := \phi_{-t}(x)$, $t \in \mathbb{R}, x \in X$.

Grundlegende Eigenschaften der ω-Limesmenge führt der folgende Satz (siehe Stuart, Humphries [11, Theorem 2.2.8]) an. Wir werden ihn für Satz 2.19 verwenden, um zu zeigen, dass die ω-Limesmenge ein Attraktor, für den die Eigenschaften der Abgeschlossenheit und Invarianz gefordert werden, sein kann.

Satz 2.10 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Sei $B \subset X$ beschränkt. Dann gilt:*

(i) *$\omega(B)$ ist abgeschlossen und positiv invariant.*

(ii) *$\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(B)$ ist beschränkt. $\Rightarrow$ $\omega(B)$ ist invariant und, falls $B \neq \emptyset$, nichtleer.*

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt: $\omega(x)$ ist beschränkt. $\Rightarrow$ $\omega(x)$ ist zusammenhängend. Falls ϕ ein dynamisches System ist, gilt für alle $x \in X$: $\omega^*(x)$ ist beschränkt. $\Rightarrow$ $\omega^*(x)$ ist zusammenhängend.*

Beweis:

(i) Zum Nachweis der Abgeschlossenheit von $\omega(B)$ sei $(x_k) \subset \omega(B)$ mit $(x_k) \to x \in X$. Für jedes $k > 0$ gibt es Folgen $(v_i^k) \subset B$ und $(t_i^k) \to \infty$ mit $\lim_{i\to\infty} \phi_{t_i^k}(v_i^k) = x_k$. Ohne Einschränkung gelte für $i \geq k$

$$d(x_k, \phi_{t_i^k}(v_i^k)) \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad t_i^k \geq k.$$

Dann gilt für $(t_i^i) \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} d(x, \phi_{t_i^i}(v_i^i)) &\leq \lim_{i\to\infty} d(x, x_i) + \lim_{i\to\infty} d(\phi_{t_i^i}(v_i^i), x_i) \\ &\leq \lim_{i\to\infty} d(x, x_i) + \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit folgt $x \in \omega(B)$.

Für die positive Invarianz sei $y \in \omega(B)$ und $t \geq 0$. Dann gibt es Folgen $(t_i) \to \infty$ und $(x_i) \subset B$ mit $\lim_{i\to\infty} \phi_{t_i}(x_i) = y$. Wegen der Stetigkeit von ϕ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \phi_{t+t_i}(x_i) = \lim_{i\to\infty} \phi_t(\phi_{t_i}(x_i)) = \phi_t(y).$$

Also liegt $\phi_t(y)$ in $\omega(B)$, d.h. $\omega(B)$ ist positiv invariant.

(ii) Die negative Invarianz ist noch zu zeigen. Sie ist für $\omega(B) = \emptyset$ klar. Sei also zum Nachweis der Invarianz ohne Einschränkung $x \in \omega(B)$ und $t \geq 0$ beliebig. Es ist die Existenz eines $y \in \omega(B)$ zu zeigen mit $\phi_t(y) = x$. Seien wieder Folgen $(v_i) \subset B$ und $(t_i) \to \infty$ gegeben mit $(\phi_{t_i}(v_i)) \to x$, wobei o.B.d.A. $t_i \geq t$ für alle $i \in \mathbb{N}$ angenommen werden kann. Betrachte nun die Folge $(\phi_{t_i - t}(v_i))$. Da $\overline{\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(B)}$ nach Voraussetzung beschränkt ist und $t_i - t \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es eine konvergente Teilfolge $(\phi_{t_{i_j} - t}(v_{i_j})) \to y \in \omega(B)$. Folglich gilt

$$x = \lim_{j\to\infty} \phi_{t_{i_j}}(v_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} \phi_t(\phi_{t_{i_j}-t}(v_{i_j})) = \phi_t(\lim_{j\to\infty} \phi_{t_{i_j}-t}(v_{i_j})) = \phi_t(y).$$

Also ist auch die negative Invarianz gezeigt. Falls B nichtleer ist, hat jede Folge $(\phi_{t_n}(x_n))$ mit $(t_n) \to \infty$, $(x_n) \subset B$, einen Häufungspunkt in der kompakten Menge $\overline{\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(B)}$. Damit folgt $\omega(B) \neq \emptyset$.

(iii) Sei $\omega(x)$ beschränkt. Annahme: $\omega(x)$ ist nicht zusammenhängend, zerfällt also in zwei disjunkte Komponenten P und Q mit $B_\varepsilon(P) \cap B_\varepsilon(Q) = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Folgen $(t_i) \to \infty$ und $(\tau_i) \to \infty$ mit $\lim_{i\to\infty} \phi_{t_i}(x) \in P$ und $\lim_{i\to\infty} \phi_{\tau_i}(x) \in Q$. O.B.d.A. sei $\phi_{t_i}(x) \in B_\varepsilon(P)$, $\phi_{\tau_i}(x) \in B_\varepsilon(Q)$ und $t_i < \tau_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da ϕ stetig ist, gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $T_i \in (t_i, \tau_i)$ mit $\phi_{T_i}(x) \in \partial B_\varepsilon(P)$. $\partial B_\varepsilon(P)$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Somit gibt es eine Teilfolge (T_{i_j}) mit $(\phi_{T_{i_j}}(x)) \to z \in \partial B_\varepsilon(P)$. Dies ist aber ein Widerspruch, da $z \in \omega(x)$ gemäß der Definition der ω-Limesmenge, aber $z \notin P \cup Q$ gilt. Also ist $\omega(x)$ zusammenhängend. Wegen der möglichen Zeitumkehr beweist man die zweite Aussage analog zur ersten.

□

Insbesondere ist die ω-Limesmenge einer nichtleeren Menge $B \subset X$ immer invariant und nichtleer, falls X kompakt ist.

2.5 Chaos im Sinne von Devaney

In diesem, Colonius, Kliemann [5] entnommenen Abschnitt wird es darum gehen, den Begriff des chaotischen Flusses einzuführen. Eine der drei Eigenschaften, die einen chaotischen Fluss kennzeichnen, ist die der sensitiven Abhängigkeit von den Startwerten: Zwei Punkte des Zustandsraumes, wie gering der Abstand zwischen ihnen auch sein mag, entfernen sich voneinander.

Mit dem Shiftfluss auf einem Raum von Kontrollfunktionen werden wir im Abschnitt 4.1 ein Beispiel für einen chaotischen Fluss kennenlernen.

Jetzt wird definiert, was es heißt, dass ein Fluss topologisch mischend und topologisch transitiv ist. Beide Eigenschaften werden wir in Kapitel 4 für einen Kontrollfluss wiederfinden. (Siehe Korollar 4.12.)

Definition 2.11 *Ein Fluss ϕ auf X heiße topologisch transitiv, wenn es ein $x \in X$ gibt mit $\omega(x) = X$. ϕ heiße topologisch mischend, falls es für alle offenen Mengen $V_1, V_2 \subset X$ ein $T > 0$ gibt mit*

$$\phi_{-T}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Definition 2.12 *Ein Fluss ϕ auf X habe sensitive Abhängigkeit von den Startwerten, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U von x ein $y \in U$ und ein $T > 0$ gibt mit $d(\phi_T(y), \phi_T(x)) > \delta$.*

Definition 2.13 *Ein Fluss ϕ auf X heiße chaotisch im Sinne von Devaney, falls*

(i) ϕ topologisch transitiv ist,

(ii) die periodischen Punkte dicht in X liegen,

(iii) sensitive Abhängigkeit von den Startwerten vorliegt.

Wie der nächste Satz zeigt, kann in Definition 2.13 auf die sensitive Abhängigkeit von den Startwerten verzichtet werden, denn topologische Transitivität und die Tatsache, dass die periodischen Punkte dicht liegen, sind für diese Eigenschaft hinreichend.

Satz 2.14 *Sei ϕ ein Fluss auf X, wobei X nicht nur aus einem einzigen periodischen Orbit bestehen soll. Falls ϕ topologisch transitiv ist und die periodischen Punkte dicht in X liegen, liegt sensitive Abhängigkeit von den Startwerten vor, d.h. ϕ ist schon chaotisch im Sinne von Devaney.*

Beweis: Seien $q_1, q_2 \in X$ beliebige periodische Punkte mit disjunkten Orbits. Definiere

$$\delta_0 := \inf\{d(a, b) : a \in \gamma(q_1), b \in \gamma(q_2)\}.$$

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung, dass jeder Punkt $x \in X$ mindestens den Abstand $\delta_0/2$ von einem der beiden Orbits hat. Es soll gezeigt werden, dass man $\delta := \delta_0/8$ als das in der Definition der sensitiven Abhängigkeit geforderte δ wählen kann.

Sei $x \in X$ und N eine Umgebung von x. Da die periodischen Punkte dicht liegen, gibt es einen periodischen Punkt p in $U = N \cap B_\delta(x)$. Sei T die Periode von p. Oben wurde gezeigt, dass es einen periodischen Punkt $q \in X$ gibt, dessen Orbit mindestens einen Abstand 4δ von x hat. Für $t \in [0,T]$ setze $M_t := \phi_{-t}(B_\delta(\phi_t(q)))$ und $V := \bigcap_{0 \le t \le T} M_t$. Die Mengen M_t, $t \in [0,T]$, sind offen da ϕ stetig ist. Dass V offen ist, zeigt man folgendermaßen: Sei $x \in V$. Dann gilt $x \in M_t$ für alle $t \in [0,T]$. Da die Abbildung $[0,T] \ni t \mapsto M_t \in \mathrm{Pot}(X)$ stetig bzgl. der Hausdorffmetrik ist, gibt es für jedes t ein $\rho_t > 0$ und $\sigma_t > 0$ mit $B_{\rho_t}(x) \subset M_\tau$ für alle $\tau \in I_t :=]t - \sigma_t, t + \sigma_t[$. Endlich viele Intervalle $I_{t_1}, \ldots, I_{t_n}$ überdecken $[0,T]$ und für $\rho := \min\{\rho_{t_1}, \ldots, \rho_{t_n}\} > 0$ gilt $B_\rho(x) \subset M_\tau$ für alle $\tau \in [0,T]$. Somit gilt $B_\rho(x) \subset V$, d.h. V ist offen. Wegen $q \in V$ ist V nichtleer. Da ϕ topologisch transitiv ist, gibt es ein $y \in U$ und $\tau > 0$ mit $\phi_\tau(y) \in V$.

Setze nun $j := \lfloor(\tau/T + 1)\rfloor$. Es gilt also $0 \le jT - \tau \le T$ und man erhält

$$\phi_{jT}(y) = \phi_{jT-\tau}(\phi_\tau(y)) \in \phi_{jT-\tau}(V) \subset B_\delta(\phi_{jT-\tau}(q)).$$

Da p periodisch ist, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(\phi_{jT}(p), \phi_{jT}(y)) &= d(p, \phi_{jT}(y)) \\ &\ge d(x, \phi_{jT-\tau}(q)) - d(\phi_{jT-\tau}(q), \phi_{jT}(y)) - d(p,x). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit $\phi_{jT}(y) \in B_\delta(\phi_{jT-\tau}(q))$

$$d(\phi_{jT}(p), \phi_{jT}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Wir haben also den gesuchten Punkt in N gefunden, der nach der Zeit jT einen Abstand von mindestens δ vom Bild von x hat, denn es gilt entweder $d(\phi_{jT}(x), \phi_{jT}(y)) > \delta$ oder $d(\phi_{jT}(x), \phi_{jT}(p)) > \delta$. □

2.6 Attraktoren und Repeller

Die nötigen Grundlagen für die Definition des Attraktors und Repellers sind nun gelegt und nachdem diese Objekte definiert sind, werden in diesem Abschnitt zwei hinreichende Bedingungen für die Existenz von lokalen bzw. globalen Attraktoren wiedergegeben. Außerdem wird auf die Verbindung zwischen Attraktor und Repeller eingegangen.

Die beiden Begriffe Attraktor und Repeller sind unabdingbar für die Morsetheorie, denn die im nächsten Kapitel einzuführenden Morsemengen sind Schnitte von Attraktoren und Repellern. Die Eigenschaften, die die Morsemengen so interessant machen, stammen von den Eigenschaften von Attraktoren und Repellern, die sich im jetzigen Abschnitt finden. Über die Morsemengen im Kapitel 4 finden wir also indirekt auch die Attraktoren und Repeller wieder. Selbst im letzten Kapitel wird der Attraktor eine wichtige Rolle spielen und ist unter gewissen Bedingungen mit dem dort einzuführenden Pullback-Attraktor, einem Attraktor für nichtautonome dynamische Systeme, eng verwandt.

Definition 2.15 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Eine kompakte invariante Menge $A \subset X$ heiße (lokaler) Attraktor, falls es eine Umgebung U von A gibt mit*

$$\lim_{t \to \infty} H^*(\phi_t(U), A) = 0.$$

Ein globaler *Attraktor ist eine kompakte invariante Menge $B \subset X$, die alle kompakten Teilmengen von X attrahiert, d.h.*

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(D), B) = 0 \quad \textit{für alle } D \in K(X).$$

Falls X zusätzlich kompakt und ϕ ein dynamisches System ist, ist ein Repeller eine kompakte invariante Menge $A^* \subset X$, für die es eine Umgebung U^* gibt mit

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_{-t}(U^*), A^*) = 0.$$

U bzw. U^* heißt Attraktor- bzw. Repellerumgebung.

Der lokale Attraktor soll also eine Umgebung attrahieren, der globale Attraktor alle kompakte Teilmengen von X.

Jeder globale Attraktor ist auch ein lokaler Attraktor. Für ein dynamisches System ist der Begriff des globalen Attraktors natürlich nur in dem Fall eines nichtkompakten X sinnvoll, da sonst wegen der Invarianz von X der ganze Raum Attraktor wäre.

Die nächste Definition (siehe Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2]) stellt die grundlegenden Begriffe Stabilität, punktweise Attraktion und asymptotische Stabilität bereit. Gebraucht werden sie für die Aussagen im letzten Kapitel, die den wichtigen Satz 5.22, der sich auf die Kontrolltheorie anwenden lässt, vorbereiten.

Definition 2.16 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Eine Menge $M \subset X$ heiße stabil (im Sinne von Lyapunov), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $\phi_t(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M)$ für alle $t \geq 0$. Definiere $W^s(M) := \{x \in X : \lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(x), M) = 0\}$. M heiße punktweise attrahierend, falls es eine Umgebung U von M gibt mit $U \subset W^s(M)$. Wenn eine Menge M stabil und punktweise attrahierend ist, heiße sie asymptotisch stabil.*

Der nächste Satz gibt eine Charakterisierung der Attraktionseigenschaft an.

Satz 2.17 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Sei $A \subset X$ kompakt und invariant und $U \subset X$ mit $U \supset A$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(U), A) = 0$.

(ii) $\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(U)$ *ist beschränkt und es gilt* $\omega(U) = A$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Angenommen, $\omega(U)$ sei nicht mit A identisch. Wegen $U \supset A$ und der Invarianz von A ist dann A echt in $\omega(U)$ enthalten. Es gibt also ein $x \in \omega(U)$ und Folgen $(x_i) \subset U$ und $(t_i) \to \infty$ mit $(\phi_{t_i}(x_i)) \to x \in \omega(U)\backslash A$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es somit ein $\varepsilon > 0$ mit $\phi_{t_i}(x_i) \in \omega(U)\backslash B_\varepsilon(A)$ für alle hinreichend großen $i > 0$. Dies widerspricht (i). Des weiteren gibt es wegen (i) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T > 0$ mit $\phi_t(U) \subset B_\varepsilon(A)$ für alle $t \geq T$. Somit ist $\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(U) = \bigcup_{t\leq T} \phi_t(U) \cup \bigcup_{t\geq T} \phi_t(U)$ beschränkt.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$ und Folgen $(t_i) \to \infty$, $(x_i) \subset U$ mit $H^*(\phi_{t_i}(x_i), A) \geq \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Teilfolgen $(t_{i_j}), (x_{i_j})$, so dass $(\phi_{t_{i_j}}(x_{i_j}))$ in der kompakten

Menge $\overline{\bigcup_{t\geq 0}\phi_t(U)}$ konvergiert. Der Grenzwert liegt natürlich in $\omega(U)$, aber nicht in $B_\varepsilon(A)$, was $\omega(U) = A$ widerspricht. □

Falls Kompaktheit des Raumes vorliegt, kann man die ω-Limesmenge direkt zur Definition des Attraktors heranziehen. Eben diese Formulierung (für eine offene Umgebung U von A) findet sich in Colonius, Kliemann [5, Definition B.2.9.].

Korollar 2.18 *Sei X zusätzlich kompakt und ϕ ein semidynamisches System auf X. Sei $A \subset X$ kompakt und invariant und $U \subset X$ mit $U \supset A$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(U), A) = 0$.

(ii) $\omega(U) = A$.

Beweis: Die Aussage folgt sofort mit Satz 2.17, denn $\bigcup_{t\geq 0}\phi_t(U)$ ist beschränkt. □

Mit den folgenden beiden Sätzen werden sowohl hinreichende Bedingungen für die Existenz von globalen und lokalen Attraktoren als auch eine explizite Darstellung dieser Attraktoren angeben. In beiden Fällen stellt sich die ω-Limesmenge als Attraktor dar. Der erste Satz orientiert sich an Stuart, Humphries [11, Theorem 2.7.2], es wird jedoch nicht der ganze Beweis gebraucht, da mit Satz 2.17 schon einige Vorarbeit geleistet worden ist. Satz 2.19 ist Teil der Aussage von Satz 5.14, wo es um die Entsprechung der Attraktoren für autonome und nichtautonome dynamische Systeme geht.

Satz 2.19 *Sei ϕ ein semidynamisches System auf X. Sei $B \subset X$ eine beschränkte offene Menge, so dass ein $T > 0$ existiert mit $\phi_t(\overline{B}) \subset B$ für alle $t \geq T$. Dann ist $\omega(B)$ ein Attraktor mit B als Attraktorumgebung. Außerdem gilt*

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0}\phi_t(B).$$

Beweis: Aus $\phi_t(\overline{B}) \subset B$ für alle $t \geq T$ folgt

$$\omega(B) \subset \overline{B}. \tag{2.3}$$

Also ist $\omega(B)$ beschränkt und, da $\bigcup_{t\geq 0}\phi_t(B) = B \cup \bigcup_{0\leq t\leq T}\phi_t(B)$ beschränkt ist, wegen Satz 2.10 auch abgeschlossen und invariant. Somit ist $\omega(B)$ kompakt und invariant.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass als Verschärfung von (2.3) auch $\omega(B) \subset B$ gilt. Angenommen, es gibt ein $y \in \omega(B) \cap \partial B$. Da $\omega(B)$ invariant ist, gibt es für jedes $t > T$ ein $x \in \omega(B)$ mit $\phi_t(x) = y$. Wegen (2.3) haben wir aber $x \in \overline{B}$ und somit nach Voraussetzung $y = \phi_t(x) \in B$. Dies ist der gesuchte Widerspruch. Zusammen mit der Beschränktheit von $\bigcup_{t\geq 0}\phi_t(B)$ und Satz 2.17 ist also gezeigt, dass $\omega(B)$ ein Attraktor ist mit Attraktorumgebung B.

Wegen $\omega(B) \subset B$ und der Invarianz von $\omega(B)$ haben wir $\omega(B) = \phi_t(\omega(B)) \subset \phi_t(B)$ für alle $t \geq 0$. Also folgt die eine Inklusion

$$\omega(B) \subset \bigcap_{t\geq 0}\phi_t(B).$$

Angenommen, $\bigcap_{t\geq 0} \phi_t(B)$ wäre eine echte Obermenge von $\omega(B)$. Dies würde aber der aus Satz 2.17 folgenden Konvergenz $\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(B), \omega(B)) = 0$ widersprechen. □

Nach dem lokalen Fall wird jetzt die hinreichende Bedingung von Stuart, Humphries [11, Theorem 2.8.13] für die Existenz von globalen Attraktoren bewiesen. Doch zunächst wird die dafür benötigte absorbierende Menge eingeführt.

Definition 2.20 *Ein semidynamisches System ϕ auf X heiße dissipativ, falls es eine beschränkte positiv invariante Menge $B \subset X$ gibt, so dass es für jede kompakte Menge $K \subset X$ ein $T > 0$ gibt mit $\phi_t(K) \subset B$ für alle $t \geq T$. B heiße absorbierende Menge.*

Ein dissipatives dynamisches System besitzt einen Attraktor, wie der nächste Satz aufzeigt. Auch dieser Satz wird im Zusammenhang mit den nichtautonomen dynamischen Systemen für Satz 5.6 verwendet.

Satz 2.21 *Sei ϕ ein dissipatives dynamisches System auf X mit absorbierender Menge B. Dann gibt es einen globalen Attraktor A mit*

$$A = \omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \phi_t(B).$$

Beweis: Sei U eine beschränkte offene Umgebung von B. Dann gibt es ein $T > 0$ mit $\phi_t(\overline{U}) \subset B \subset U$ für alle $t \geq T$. Also ist $A = \omega(U) = \omega(B)$ wegen Satz 2.19 lokaler Attraktor mit $\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \phi_t(B)$ und Attraktor-Umgebung B. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann gibt es ein $\tau > 0$ mit $\phi_t(K) \subset B$ für alle $t \geq \tau$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(K), \omega(B)) &= \lim_{t\to\infty} H^*(\phi_{t+\tau}(K), \omega(B)) \\ &\leq \lim_{t\to\infty} H^*(\phi_t(B), \omega(B)) \;=\; 0.\end{aligned}$$

□

Die folgenden Aussagen über Attraktoren und Repeller orientieren sich an Colonius, Kliemann [5, Anhang B.2]. Sie stellen Ergebnisse bereit, die unter anderem im Kapitel über Morsemengen Verwendung finden. Bis zum Ende dieses Abschnittes wird deshalb für X, wie im genannten Kapitel, Kompaktheit gefordert.

Lemma 2.22 *Sei X zusätzlich kompakt, ϕ ein Fluss auf X und $A \subset X$ kompakt und invariant. Dann ist A genau dann ein Attraktor, wenn es eine kompakte Umgebung U von A gibt mit $\gamma^-(x) \not\subset U$ für alle $x \in U\backslash A$.*

Beweis: Sei A Attraktor, U eine kompakte Umgebung von A und $x \in U\backslash A$. Angenommen, es gelte $\gamma^-(x) \subset U$. Dann folgt $x \in \omega(U)$ und mit Korollar 2.18, wenn U hinreichend klein gewählt ist, der Widerspruch $x \in A$. Für die andere Richtung sei U eine kompakte Umgebung von A, so dass $\gamma^-(x) \not\subset U$ für alle $x \in U\backslash A$ gilt. Dann gibt es ein $T > 0$ mit $\phi([-T, 0], x) \not\subset U$ für alle $x \in U \cap \overline{X\backslash U}$. Wähle nun eine Umgebung V von A mit $\phi([0, T], V) \subset U$. Dann gilt $\phi([0, \infty), V) \subset U$ und somit $\omega(V) = A$. Also ist A ein Attraktor. □

Bei einem Attraktor führt der Fluss also jeden Punkt in Rückwärtszeit aus einer Umgebung heraus, sofern dieser nicht im Attraktor liegt.

Lemma 2.23 *Sei X zusätzlich kompakt und ϕ ein dynamisches System auf X. Für jede Attraktorumgebung U eines Attraktors A gibt es eine Zeit $T > 0$ mit $\overline{\phi([T,\infty), U)} \subset \overset{\circ}{U}$.*

Beweis: Die Aussage folgt sofort mit Satz 2.17. □

Wenn ein Attraktor vorliegt, kann man leicht einen Repeller konstruieren.

Lemma 2.24 *Sei X zusätzlich kompakt und ϕ ein dynamisches System auf X. Sei A ein Attraktor. Dann ist*

$$A^* := \{x \in X : \omega(x) \cap A = \emptyset\} \tag{2.4}$$

ein Repeller. A und A^* sind disjunkt. (A, A^*) nennt man Attraktor-Repeller-Paar.

Beweis: Sei U eine kompakte Attraktorumgebung von A. Wähle $T > 0$ so, dass $\overline{\phi([T,\infty), U)} \subset U$ gilt und definiere die offene Menge

$$V := X \backslash \overline{\phi([T,\infty), U)}.$$

Dann gilt $X = U \cup V$ und $\phi((-\infty, -T], V) \subset X\backslash U$. Also ist V eine Umgebung von $\omega^*(V) \subset X\backslash U \subset V$. Gemäß der Definition 2.15 ist $\omega^*(V)$ ein Repeller. Außerdem ist $\omega^*(V)$ invariant, weshalb man mit $\omega^*(V) \subset V$ und $V \cap A = \emptyset$ auf $\omega^*(V) \subset A^*$ schließen kann.

Die andere Inklusion folgt so: Sei $x \in A^*$. Also gilt $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Aus $x \notin U$ und $\omega(x) \cap \overset{\circ}{U} = \emptyset$ folgt $\omega(x) \subset V$. Wähle nun $(t_n) \to \infty$ mit $(\phi_{t_n}(x)) \to y \in V$ und setze $y_n := \phi_{t_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Da V offen ist, kann man o.B.d.A. $(y_n) \subset V$ annehmen und man erhält schließlich $(\phi_{-t_n}(y_n)) \to x \in \omega^*(V)$. Die Disjunktheit ist klar wegen der Abgeschlossenheit und Invarianz von A. □

Satz 2.25 *Sei X zusätzlich kompakt und ϕ ein dynamisches System auf X. Sei (A, A^*) ein Attraktor-Repeller-Paar und $x \in X$ mit $x \notin A \cup A^*$. Dann gilt $\omega^*(x) \subset A^*$ und $\omega(x) \subset A$.*

Beweis: Wegen (2.4) gilt $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Dann gibt es, wenn U eine Attraktorumgebung von A ist, ein $t_0 > 0$ mit $\phi_{t_0}(x) \in U$ und es folgt $\omega(x) = \omega(\phi_{t_0}(x)) \subset \omega(U) = A$. Zum Nachweis von $\omega^*(x) \subset A^*$ sei angenommen, dass es ein $y \in \omega^*(x)\backslash A^*$ gibt. Dann gilt $\omega(y) \cap A \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von ϕ gibt es eine Folge $(t_n) \to \infty$ mit $\lim_{n\to\infty} H^*(\phi_{-t_n}(x), A) = 0$ und es gilt $\phi_{-t_n}(x) \in U$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Mit $(\phi_{t_n}(\phi_{-t_n}(x))) \to x$ und $\omega(U) = A$ folgt $x \in A$, ein Widerspruch zur Wahl von x. □

A und A^* verhalten sich in gewisser Hinsicht wie zwei Pole - die Limesmenge von Punkten außerhalb A und A^* in positiver Zeitrichtung liegt in A, die Limesmenge in negativer Zeitrichtung in A^*. Ähnliches werden wir in Kapitel 3 bei Morsemengen wiederfinden.

2.7 Der Schiefproduktfluss

In Hinblick auf die Kapitel 4 und 5 sollen schon an dieser Stelle die Begriffe Kozykel und Schiefproduktfluss eingeführt werden. Man wird sie im Kapitel 5 wiederfinden, wo sie eigentlich auch definiert worden wären. Aber da sie schon bei den Kontrollsystemen vorkommen, und beim Schiefproduktfluss wirklich ein Halbfluss im Sinne von Definition 2.1 vorliegt, sollen beide Begriffe schon in diesem Kapitel definiert werden. (Obwohl nur ein Halbfluss vorliegt, ist die Bezeichnung Schiefprodukthalbfluss nicht üblich.) Der Kozykel ist gewissermaßen eine Verallgemeinerung des dynamischen Systems. Liegt zum Beispiel eine nichtautonome Differentialgleichung vor, so lässt sich die Lösungsabbildung nicht mehr wie gewohnt mit einem dynamischen System beschreiben, jedoch mit einem Kozykel. Trotzdem gibt es einen sinnvollen Weg - und nicht den der Setzung $\dot{t} = 1$ - ein nichtautonomes dynamisches System in ein dynamisches System umzuformen. Dies führt zum Schiefproduktfluss, der also die Verbindung zwischen dynamischen Systemen und Kozykeln herstellt und der uns im Kapitel 4 und besonders im Kapitel 5 begegnen wird.

Definition 2.26 *Sei θ ein Fluss auf dem topologischen Raum P. Für $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+\}$ heiße eine stetige Abbildung $\phi : \mathbb{T} \times P \times X \to X$ Kozykel auf X bzgl. (P, θ), falls für alle $t,\ s \in \mathbb{T}$, $p \in P$ und $x \in X$ gilt:*

(i) $\phi(0, p, \cdot) = \mathrm{id}_X$.

(ii) $\phi(s + t, p, x) = \phi(s, \theta_t p, \phi(t, p, x))$.

Der Fluss auf P wird Basisfluss genannt. Für $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ heiße ϕ zeitinvertierbarer Kozykel.

Die für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ definierte Lösungsabbildung einer nichtautonomen Differentialgleichung kann als Beispiel für einen zeitinvertierbaren Kozykel dienen. Zu diesem Zweck sei P der Raum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die in der zweiten Variablen lipschitzstetig sind und gleichmäßig stetig bzgl. der ersten Variablen. Als Topologie kann die durch die auf P gewählte Metrik induzierte Topologie verwendet werden. Betrachte nun für $f \in P$ das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Der Basisfluss auf P wird dann als Shift definiert: $\theta_t(f(\cdot, \cdot)) := f(\cdot + t, \cdot), t \in \mathbb{R}$. Wegen der globalen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist die Lösungsabbildung $y : \mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (2.5) ein zeitinvertierbarer Kozykel, denn es gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y(0, f, x_0) &= x_0 \quad \text{und} \\ y(\sigma + \tau, f, x_0) &= y(\sigma, f(\cdot + \tau, \cdot), y(\tau, f, x_0)) \\ &= y(\sigma, \theta_\tau f, y(\tau, f, x_0)). \end{aligned}$$

Über einen Kozykel auf X und einen Basisfluss auf einem topologischen Raum P lässt sich ein Halbfluss definieren - jedoch nicht auf dem Zustandsraum X, sondern auf $P \times X$. Spätere Untersuchungen werden sich auf Attraktoren in diesem Raum beziehen.

Lemma 2.27 *Sei θ ein Fluss auf dem topologischen Raum P. Für $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ sei ϕ Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Dann definiert die Abbildung*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}_+ \times P \times X &\to P \times X \\ \pi(t, p, x) &:= (\theta_t p, \phi(t, p, x)) \end{aligned}$$

einen Halbfluss auf $P \times X$, den sogenannten Schiefproduktfluss.

Beweis: Als Komposition stetiger Abbildungen ist π stetig. Sei nun $x \in X$, $p \in P$ und $s, t \in \mathbb{R}_+$. Dann folgt Gleichung (2.2) sofort aus Definition 2.26. Die in (2.1) geforderte Eigenschaft ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
\pi(s+t, p, x) &= (\theta_{s+t}p, \phi(s+t, p, x)) \\
&= (\theta_s \theta_t p, \phi(s, \theta_t p, \phi(t, p, x))) \\
&= \pi(s, \theta_t p, \phi(t, p, x)) \\
&= \pi(s, \pi(t, p, x)).
\end{aligned}$$

□

Ähnlich wie bei Halbflüssen soll jetzt auch für Kozykel Invarianz – die ϕ-Invarianz – definiert werden. Das anschließende Lemma zeigt die Verbindung der beiden Invarianz-Begriffe. Ebenso, wie die Invarianz für Attraktoren gefordert wird, wird die ϕ-Invarianz für Pullback-Attraktoren gefordert. Das anschließende Lemma zeigt dann die direkte Verwandtschaft der Invarianz-Begriffe – und damit in diesem Punkt die Verwandtschaft der beiden Attraktor-Begriffe.

Definition 2.28 *Sei θ ein Fluss auf dem topologischen Raum P und ϕ ein Kozykel bzgl. (P, θ). Eine Familie $(B_p)_{p \in P}$ mit $B_p \subset X$ für alle $p \in P$ heiße ϕ-invariant, falls für alle $t \in \mathbb{T}^+, p \in P$*

$$\phi(t, p, B_p) = B_{\theta_t p}$$

gilt.

Lemma 2.29 *Sei θ ein Fluss auf dem topologischen Raum P und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Sei $(B_p)_{p \in P}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Familie (B_p) ist ϕ-invariant.

(ii) $\bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p$ ist invariant für den Schiefproduktfluss π.

Beweis: Sei $t \in \mathbb{T}^+$. $(i) \Rightarrow (ii)$:

$$\begin{aligned}
\pi_t(\bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p) &= \bigcup_{p \in P} \{\theta_t p\} \times \phi(t, p, B_p) \\
&= \bigcup_{p \in P} \{\theta_t p\} \times B_{\theta_t p} \\
&= \bigcup_{p \in \theta_t(P)} \{p\} \times B_p \\
&= \bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{p \in P} \{\theta_t p\} \times B_{\theta_t p} &= \bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p \\
&= \pi_t(\bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p) \\
&= \bigcup_{p \in P} \{\theta_t p\} \times \phi(t, p, B_p)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $B_{\theta_t p} = \phi(t, p, B_p)$ für alle $p \in P$, $t \in \mathbb{T}^+$ und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Kapitel 3

Morsetheorie

Die Morsetheorie ist nach dem amerikanischen Mathematiker M. Morse, der auf dem Gebiet der Geometrie gearbeitet hat, benannt. Die Ausführungen in diesem Kapitel, die für den Abschnitt 3.1 Rybakowski [10] und für den Abschnitt 3.2 Colonius, Kliemann [5] folgen, beinhalten die Definition von Morsemengen und den Nachweis von Eigenschaften hinsichtlich der Beschreibung eines Flusses auf einem vollständigen metrischen Heine-Borell'schen Raum (X, d). Der erste Abschnitt greift auf Ausführungen hinsichtlich Attraktoren und Repellern im vorangegangenen Kapitel zurück. Dass eine Verbindung der Morsetheorie zur Kontrolltheorie besteht, wird im nächsten Kapitel aufgezeigt.

Im zweiten Abschnitt wird eine Charakterisierung von Morsemengen hergeleitet. Vereinfacht ausgedrückt, kann ein (dann kettenrekurrent genannter) Punkt des Zustandsraumes die Eigenschaft haben, dass er unter einem Fluss zu sich selbst zurückkehrt, wenn kleine Sprünge erlaubt sind. Wenn die Menge dieser Punkte endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, bilden die Zusammenhangskomponenten die feinste Morsezerlegung des Zustandsraumes.

Nur in diesem Kapitel soll die Kompaktheit durchweg vorausgesetzt werden.

3.1 Die Morsezerlegung

Etwas allgemeiner als hier dargelegt, kann auf die Kompaktheit des Zustandsraumes verzichtet werden und dafür eine kompakte invariante Teilmenge betrachtet werden. In diesem Sinne bietet dieser Abschnitt eine Beschreibung der inneren Struktur von Attraktoren in einem nicht notwendigerweise kompakten Raum. Die Einführung nicht nur des Attraktors, sondern auch des Repellers erweist sich jetzt als nützlich, denn Morsemengen werden als Schnitte dieser Objekte definiert. Die Schnitte liefern die Möglichkeit, über eine Halbordnung einen Fluss zu beschreiben. In diesem Abschnitt wird Rybakowski [10] gefolgt.

Definition 3.1 *Sei ϕ Fluss auf X. Eine Familie $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ von Teilmengen von X heiße Morsezerlegung von X, falls es in X echt ineinander enthaltene Attraktoren $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = X$ mit entsprechenden Repellern $X = A_0^* \supset A_1^* \supset \dots \supset A_n^* = \emptyset$ gibt mit*

$$M_j = A_j \cap A_{j-1}^*, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Die Definition lässt schon vermuten, dass es Punkte aus X gibt, die von einer Morsemenge angezogen werden, und andere Punkte, die abgestoßen werden. Dies wird in diesem Abschnitt weiter ausgebaut. Zunächst jedoch sei bemerkt, dass die Attraktorsequenz in obiger Definition nicht eindeutig sein muss, weshalb dies auch bei einer Morsezerlegung nicht der Fall sein muss.

Definition 3.2 *Eine Morsezerlegung $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ von X heiße feiner als eine Morsezerlegung $(M'_j)_{j=1,\ldots,n'}$ von X, falls es für alle $j \in \{1,\ldots,n'\}$ ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ gibt mit $M_i \subset M'_j$.*

Im Zusammenhang mit dem ersten Punkt gibt der zweite Punkt des nächsten Satzes eine wichtige Eigenschaft von Morsemengen an: Entweder befindet sich ein Punkt schon in einer Morsemenge, oder seine beiden Limesmengen liegen in genau zwei Morsemengen.

Satz 3.3 *Sei ϕ Fluss auf X und $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Morsezerlegung von X mit zugehörigen Attraktoren $A_0,\ldots,A_n$. Dann gilt*

(i) Die Mengen (M_i) sind paarweise disjunkt.

(ii) Für $x \in X$ gilt entweder $\gamma(x) \subset M_i$ für ein $i \leq n$ oder es gibt Indizes $i < j$ mit $\omega^*(x) \subset M_j$ und $\omega(x) \subset M_i$.

(iii) Für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt

$$A_k = \{x \in X : \omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k\},$$

d.h. die Attraktorsequenz, die eine vorgegebene Morsezerlegung erzeugt, ist eindeutig.

(iv) Für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ ist (A_{i-1}, M_i) ein Attraktor-Repeller-Paar im kompakten metrischen Raum $(A_i, d_{|A_i})$.

Beweis:

(i) Für $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $i < j$ folgt mit Lemma 2.24

$$M_i \cap M_j = A_i \cap A^*_{i-1} \cap A_j \cap A^*_{j-1} = A_i \cap A^*_{j-1} \subset A_{j-1} \cap A^*_{j-1} = \emptyset.$$

(ii) Sei $x \in X$. Aus $A_n = X$ und $A^*_0 = X$ folgt die Existenz eines kleinsten Indizes $i > 0$ mit $\omega(x) \subset A_i$ und eines größten Indizes $j < n$ mit $\omega^*(x) \subset A^*_j$. Aus der Minimalität von i folgt $\omega(x) \not\subset A_{i-1}$, woraus man mit Satz 2.25 und der Abgeschlossenheit von A_{i-1} auf $x \in A^*_{i-1}$ schließen kann. Da A^*_{i-1} invariant bzw. abgeschlossen ist, gilt

$$\gamma(x) \subset A^*_{i-1} \quad \text{bzw.} \quad \omega(x) \subset A^*_{i-1}. \tag{3.1}$$

Andererseits gilt wegen der Maximalität von j

$$\omega^*(x) \not\subset A^*_{j+1}, \tag{3.2}$$

weswegen mit der Invarianz von A^*_{j+1} der Fall $x \in A^*_{j+1}$ und mit Satz 2.25 der Fall $x \notin A^*_{j+1} \cup A_{j+1}$ ausscheidet. Also gilt $x \in A_{j+1}$ und wegen der Invarianz von A_{j+1} auch $\gamma(x) \subset A_{j+1}$.

Außerdem gilt $j \geq i-1$, denn die Annahme $j+1 \leq i-1$ würde $A_{j+1} \subset A_{i-1}$ implizieren, was aber mit (3.1) $\gamma(x) \subset A_{i-1} \cap A^*_{i-1} = \emptyset$ zur Folge hätte. Für $j = i-1$ erhält man $\gamma(x) \subset A^*_{i-1} \cap A_i = M_i$, für $j > i-1$ gilt $\omega(x) \subset A^*_{i-1} \cap A_i = M_i$ und $\omega^*(x) \subset A^*_j \cap A_{j+1} = M_{j+1}$, womit (ii) gezeigt ist.

(iii) Sei $x \in A_k$. Da A_k abgeschlossen und invariant ist, gilt $\omega^*(x) \subset A_k$. Sei $i \leq k$ der kleinste Index mit $\omega^*(x) \subset A_i$. Also ist $i > 0$ und $\omega^*(x) \not\subset A_{i-1}$ und man erhält mit Satz 2.25 $\omega^*(x) \subset A^*_{i-1}$. Mit $\omega^*(x) \subset A_i \cap A^*_{i-1} = M_i \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$ ist die eine Inklusion abgeschlossen, für die andere sei $x \in X$ mit $\omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$. Es folgt $\omega^*(x) \subset M_j$ für ein $j \leq k$ und somit $\omega^*(x) \subset A_j \subset A_k$. Mit Satz 2.25 schließt man auf $x \in A_k$.

(iv) Die Behauptung folgt direkt aus Definition 3.1 und Lemma 2.24. □

Jetzt wird gezeigt, dass beim Vorliegen einer Familie nichtleerer kompakter invarianter Teilmengen von X die Eigenschaften (i) und (ii) von Satz 3.3 nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, dass die Familie (M_i) eine Morsezerlegung bildet.

Satz 3.4 *Sei ϕ Fluss auf X. Seien $(M_i)_{i=1,\ldots,n}, M_i \subset X$ für alle $i \leq n$, nichtleer, kompakt, invariant und paarweise disjunkt. Für jedes $x \in X$ gelte entweder $\gamma(x) \subset M_j$ für ein $j \leq n$ oder es existieren Indizes $i < j$ mit $\omega^*(x) \subset M_j$ und $\omega(x) \subset M_i$. Dann ist $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Morsezerlegung.*

Beweis: Wir haben die Existenz von echt ineinander enthaltenen Attraktoren $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = X$ zu zeigen mit

$$M_k = A_k \cap A^*_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.3}$$

Definiere $A_0 := \emptyset$ und $A_k := \{x \in X : \omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k\}$, $1 \leq k \leq n$. Da die Mengen (M_i) nichtleer sind, liegt echte Inklusion der A_k, $1 \leq k \leq n$, vor. Nachgewiesen werden soll jetzt die Invarianz, Kompaktheit und Attraktionseigenschaft von $A_0, A_1, \ldots, A_n$ und dass (3.3) gilt.

Die Mengen (A_k) sind invariant, denn für $x \in A_k$, $1 \leq k \leq n$, und $t \in \mathbb{R}$ erhält man $\omega^*(x) = \omega^*(\phi_t(x)) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$ und damit $\phi_t(x) \in A_k$.

Jetzt soll die Abgeschlossenheit der Mengen $(A_k)_{k=1,\ldots,n}$ gezeigt werden. Offensichtlich ist $A_n = X$ abgeschlossen. Induktiv zeigt man die Abgeschlossenheit der übrigen Mengen.

Sei hierzu A_{k+1} abgeschlossen für $k < n$ und sei $(x_m) \subset A_k$ mit $(x_m) \to x \in X$. Wegen $A_k \subset A_{k+1}$ und der Abgeschlossenheit von A_{k+1} gilt $x \in A_{k+1}$, also auch $\omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_{k+1}$. Um $x \in A_k$ zu verifizieren, müssen wir $\omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$ zeigen. Da die Mengen (M_i) disjunkt sind und $\omega^*(x)$ zusammenhängend ist, lautet die gegenteilige Annahme $\omega^*(x) \subset M_{k+1}$, die man wie folgt zum Widerspruch führt. Sei $V \supset M_{k+1}$ eine offene Umgebung von M_{k+1} mit

$$\overline{V} \cap M_j = \emptyset \quad \text{für } j \neq k+1. \tag{3.4}$$

Dann gibt es eine Folge $(t_\nu) \to \infty$ und ein $z \in M_{k+1}$ mit $\phi_{-t_\nu}(x) \in V$ und $d(\phi_{-t_\nu}(x), z) \leq 1/\nu$ für alle $\nu \geq 1$. Also gibt es für jedes ν ein $m_\nu \geq \nu$ mit $\phi_{-t_\nu}(x_{m_\nu}) \in V$ und $d(\phi_{-t_\nu}(x_{m_\nu}), z) \leq 2/\nu$. Wegen $\omega^*(x_m) \cup \omega(x_m) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$ für alle $m \geq 1$ gibt es Folgen (τ_μ) und (s_μ) mit $\tau_\nu < t_\nu < s_\nu$ und $\phi_{-s_\nu}(x_{m_\nu}), \phi_{-\tau_\nu}(x_{m_\nu}) \in \partial V$ und

$$\phi_{-t}(x_{m_\nu}) \in \overline{V} \quad \text{für} \quad \tau_\nu \leq t \leq s_\nu. \tag{3.5}$$

Sei nun $y_\nu := \phi_{-s_\nu}(x_{m_\nu})$. Da X kompakt ist und ∂V abgeschlossen, können wir, nach evtl. Übergang zu einer Teilfolge, die Folge (y_ν) als konvergent ansehen mit $(y_\nu) \to y \in \partial V$. Aus der Invarianz von M_{k+1} folgt $(t_\nu - \tau_\nu) \to \infty$. Zusammen mit (3.5) folgt $\phi_t(y) \in \overline{V}$ für alle $t \geq 0$ und somit $\omega(y) \in \overline{V}$. Nach Voraussetzung liegt $\omega(y)$ in einer Menge $M_i, i \leq n$. Wegen (3.4) ist dies M_{k+1}. Da A_{k+1} invariant und nach Induktionsannahme abgeschlossen ist, folgt $y \in A_{k+1}$ und damit auch $\omega^*(y) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_{k+1}$. Hieraus schließen wir mit $\omega(y) \subset M_{k+1}$ und den Voraussetzungen an die Mengen (M_i) auf $\gamma(y) \subset M_{k+1}$ und letztlich auf $y \in M_{k+1}$. Dies widerspricht aber $y \in \partial V$, da V Umgebung von M_{k+1} ist. Somit ist die Abgeschlossenheit von A_k für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gezeigt.

Jetzt soll nachgewiesen werden, dass die Mengen (A_k), $1 \leq k \leq n$, Attraktoren sind. Angenommen, es existiere ein $k \leq n$, so dass A_k kein Attraktor ist. Dann folgt mit Lemma 2.22, dass es für jede Umgebung U von A_k ein $x \in U \backslash A_k$ gibt mit $\gamma^-(x) \subset U$. Die Mengen (M_j) sind invariant, abgeschlossen und disjunkt. Somit ist klar, dass $M_1 \cup \ldots \cup M_k \subset A_k$ und $M_j \cap A_k = \emptyset$ für $j > k$ gilt. Falls obiges U hinreichend klein gewählt wird, lässt sich damit folgern, dass es ein $i \leq k$ gibt mit $\omega^*(x) \subset M_i$. Dies widerspricht aber $x \notin A_k$ bzw. $\omega^*(x) \not\subset M_1 \cup \ldots \cup M_k$. Also ist die Attraktionseigenschaft gezeigt.

Es verbleibt, den Nachweis von (3.3) zu erbringen. Für ein $j \leq n$ sei zunächst $x \in M_j$. Dann gilt $\omega(x) \subset M_j$ und damit für $y \in \omega(x) \subset M_j$ die Inklusion $\omega^*(y) \subset M_j$. Des weiteren gilt $\omega^*(x) \subset M_j$ und damit $x \in A_j$. Nehmen wir nun $x \notin A^*_{j-1}$ an, folgt $\omega(x) \subset A_{j-1}$. Für $y \in \omega(x) \subset A_{j-1}$ erhalten wir dann $\omega^*(y) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}$. Dies ist ein Widerspruch zu $\omega^*(y) \subset M_j$, denn die Mengen (M_j) sind disjunkt. Sei jetzt $x \in A_j \cap A^*_{j-1}$. Dann folgt $\omega^*(x) \subset M_1 \cup \ldots \cup M_j$ und wegen $x \in A^*_{j-1}$ bzw. $\omega(x) \subset A^*_{j-1}$ und der Disjunktheit von A_{j-1} und A^*_{j-1} auch $\omega(x) \cap M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1} = \emptyset$ und damit $\omega(x) \subset M_l$ für ein $l \geq j$. Mit den Voraussetzungen an die Familie (M_i) erhalten wir $l = j$, also auch $\gamma(x) \subset M_j$, und somit $x \in M_j$. Der Beweis ist also abgeschlossen. □

Die folgende Charakterisierung von Morsemengen wird in Colonius, Kliemann [5, Definition B.2.7.] als Definition der Morsezerlegung genommen. Dass dadurch keine anderen Objekte wie in Definition 3.1 entstehen, zeigt der nächste Satz.

Satz 3.5 *Sei ϕ Fluss auf X. Seien $(M_i)_{i=1,\ldots,n}, M_i \subset X$ für alle $i \leq n$, nichtleer, kompakt, invariant und paarweise disjunkt. Dann sind äquivalent:*

(i) (M_i) *ist Morsezerlegung.*

(ii) *(a) Für alle $x \in X$ gilt $\omega(x), \omega^*(x) \subset \bigcup_{i=1}^n M_i$.*

(b) Existieren für $M_{j_0}, \ldots, M_{j_l}$ Punkte $x_1, \ldots, x_l \in X \backslash \bigcup_{i=1}^n M_i$ mit $\omega^*(x_i) \subset M_{j_{i-1}}$ und $\omega(x_i) \subset M_{j_i}$, $1 \leq i \leq l$, so folgt $j_0 > j_l$, insbesondere also auch $M_{j_0} \neq M_{j_l}$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x \in X$. Dann folgt mit Satz 3.3 entweder $\gamma(x) \subset M_j$ für ein $j \leq n$ oder die Existenz von Indizes $i < j$ mit $\omega^*(x) \subset M_j$ und $\omega(x) \subset M_i$. Sowohl im ersten Fall, da M_j abgeschlossen ist, als auch im zweiten Fall erhalten wir $\omega(x), \omega^*(x) \subset \bigcup_{i=1}^n M_i$. Damit ist (a) gezeigt. Für (b) seien nun Mengen $M_{j_0}, \ldots, M_{j_l}$ und $x_1, \ldots, x_l \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i$ gegeben mit $\omega^*(x_i) \subset M_{j_{i-1}}$ und $\omega(x_i) \subset M_{j_i}$, $1 \leq i \leq l$. Dann erhält man $j_0 > j_1 > \ldots > j_l$ aus Satz 3.3 (ii) und somit auch $M_{j_0} \neq M_{j_l}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $x \in X$. Mit Satz 3.4 genügt es zu zeigen, dass mit $\gamma(x) \not\subset M_j$ für alle $j \leq n$ schon die Existenz von $i < j$ folgt mit $\omega^*(x) \subset M_j$ und $\omega(x) \subset M_i$. Da die Mengen (M_i) invariant sind, kann man wegen $\gamma(x) \not\subset M_j$, $j \leq n$, auf $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i$ schließen. Mit (a) findet man $i, j \leq n$ mit $\omega^*(x) \subset M_j$ und $\omega(x) \subset M_i$. Aus (b) folgt sofort $i < j$. □

Inwiefern eine Morsezerlegung Einblick in die Struktur eines Flusses gibt, ist Inhalt des nächsten Korollars.

Korollar 3.6 *Sei ϕ Fluss auf X. Auf einer Morsezerlegung $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ von X kann man eine Halbordnung einführen durch*

$$M_i \leq M_k \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{Es gibt } M_i = M_{j_0}, \ldots, M_{j_l} = M_k \textit{ und } x_1, \ldots, x_l \in X \textit{ mit} \\ \omega^*(x_m) \subset M_{j_m} \textit{ und } \omega(x_m) \subset M_{j_{m-1}} \textit{ für } m = 1, \ldots, l. \end{array}$$

Beweis: Für die Reflexivität $M_i \leq M_i$, $i \leq n$, wähle man $x_1 \in M_i$ und erhält mit der Abgeschlossenheit und Invarianz der Morsemengen $\omega^*(x_1) \subset M_i$ und $\omega(x_1) \subset M_i$. Die Antisymmetrie folgt aus der Eigenschaft (b) in Satz 3.5. Die Transitivität ist klar. □

Zwischen den Morsemengen stellt der Fluss also eine gerichtete Verbindung her, wobei nicht alle Morsemengen verbunden sein müssen - möglicherweise sogar keine.

Man kann zeigen, dass es nur abzählbar viele Attraktoren gibt. Dies stellt sicher, dass nur abzählbar viele Mengen in X als Morsemengen überhaupt in Frage kommen.

3.2 (ε, T)-Ketten und Morsemengen

Das Endresultat dieses Abschnittes wird eine Charakterisierung der (feinsten) Morsezerlegung sein.

In diesem Abschnitt, der in Teilen Colonius, Kliemann [5] folgt, wird es darum gehen, (ε, T)-Ketten einzuführen und mit ihnen die Kettenrekurrenzmenge. Die Zusammenhangskomponenten dieser Menge - falls es endlich viele sind - generieren die feinste Morsezerlegung von X. Diese Aussage (siehe Satz 3.23) ist das Hauptergebnis des Abschnittes.

Dieser Abschnitt lässt sich grob in drei Teile unterteilen: Zunächst wird es darum gehen, Eigenschaften der Kettenrekurrenzmenge aufzuzeigen. Dann folgt eine Passage über die Kettenlimesmenge, die für den letzten Teil, der das Hauptergebnis dieses Abschnittes enthält, nützlich ist.

Definition 3.7 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon, T > 0$. Dann ist eine (ε, T)-Kette von x nach y gegeben durch ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte*

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y \in X \textit{ und } \textit{ Zeiten } T_0, \ldots, T_{n-1} \geq T,$$

mit

$$d(\phi_{T_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \;\; \textit{für } i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.6}$$

Es wird also nicht gefordert, dass es ein $t > 0$ gibt mit $\phi_t(x) = y$. Vielmehr dürfen zwischendurch Sprünge kleiner ε gemacht werden, zwischen den Sprüngen muss jedoch mindestens die Zeit T verflossen sein. Sind jeweils zwei Punkte einer Menge (in beide Richtungen) in dieser Weise für beliebige $\varepsilon, T > 0$ zu verbinden, spricht man von einer kettentransitiven Menge. Kettenrekurrenz ist eine Abschwächung davon: Hier muss nur jeder Punkt mit sich selbst zu verbinden sein. Alle diese Punkte bilden die Kettenrekurrenzmenge.

Definition 3.8 *Eine Teilmenge $Y \subset X$ heiße kettentransitiv, falls es für alle $x, y \in Y$ und alle $\varepsilon, T > 0$ eine (ε, T)-Kette von x nach y gibt.*

Ein Punkt $x \in X$ heiße kettenrekurrent, wenn es für alle $\varepsilon, T > 0$ eine (ε, T)-Kette von x nach x gibt. Eine Menge, die aus kettenrekurrenten Punkten besteht, heiße kettenrekurrent.

Als Kettenrekurrenzmenge $\mathcal{R}$ wird die Menge aller kettenrekurrenten Punkte bezeichnet.

Lemma 3.9 *Sei ϕ Fluss auf X. Dann ist $\mathcal{R} \subset X$ abgeschlossen und invariant.*

Beweis: Sei $x \in \partial\mathcal{R}$. Gezeigt wird $x \in \mathcal{R}$, womit die Abgeschlossenheit folgt. Seien $\varepsilon, T > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon^* > 0$ und ein $x^* \in \mathcal{R}$ mit $B_{\varepsilon^*}(x^*) \subset B_\varepsilon(x)$ und $B_{\varepsilon^*}(\phi_T(x^*)) \subset B_\varepsilon(\phi_T(x))$. Wenn jeweils mit Zeiten $T > 0$ eine (ε^*, T)-Kette von x^* nach x^* gegeben ist durch Punkte $x^*, x_1, \ldots, x_{n-1}, x^* \in X$, dann ist jeweils mit Zeiten $T > 0$ eine (ε, T)-Kette von x nach x gegeben durch Punkte $x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x \in X$. Also gilt $x \in \mathcal{R}$.

Zum Beweis der Invarianz sei $t \geq 0$. Es ist $\phi_t(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ zu zeigen. Nachgewiesen wird $\mathcal{R} \subset \phi_t(\mathcal{R})$, die andere Inklusion beweist man analog. Sei $y \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon, T > 0$. Der Beweis ist abgeschlossen, wenn die Existenz einer (ε, T)-Kette von $\phi_{-t}(y)$ nach $\phi_{-t}(y)$ gezeigt ist, denn dann gilt $\phi_{-t}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Da ϕ als Fluss stetig ist, gibt es ein $\varepsilon' > 0$ mit $\phi_{-t}(B_{\varepsilon'}(y)) \subset B_\varepsilon(\phi_{-t}(y))$. Es existiert eine $(\varepsilon', T+t)$-Kette $y = y_0,\ y_1,\ \ldots, y_n = y \in X$ von y nach y mit Zeiten $T_0,\ \ldots, T_{n-1} \geq T+t$. Wegen $\phi_{T_{n-1}}(y_{n-1}) \in B_{\varepsilon'}(y)$ gilt $\phi_{T_{n-1}-t}(y_{n-1}) \in B_\varepsilon(\phi_{-t}(y))$. Dann ist

$$\phi_{-t}(y),\ y_1,\ y_2,\ \ldots, y_{n-1},\ \phi_{-t}(y) \in X$$

eine (ε, T)-Kette von $\phi_{-t}(y)$ nach $\phi_{-t}(y)$ mit Zeiten $T_0 + t,\ T_1,\ T_2,\ \ldots, T_{n-1} - t \geq T$. □

Lemma 3.10 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Sei $y \in \mathcal{R},\ x \in X$ und $\tau > 0$. Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine (ε, τ)-Kette von x nach y gibt, dann gibt es für jedes $\varepsilon, T > 0$ eine (ε, T)-Kette von x nach y.*

Beweis: Die Aussage ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(\varepsilon, 2\tau)$-Kette von x nach y gibt. Man ersetze dann in den Voraussetzungen τ durch 2τ etc. und erreicht schließlich jedes beliebige $\tau > 0$, das mit gegebenem $T > 0$ die Ungleichung

$T < \tau$ erfüllt. Dann sind wir fertig, denn die Zeiten der (ε, τ)-Kette sind dann auch größer als T.

Wegen der Kompaktheit von X ist ϕ gleichmäßig stetig auf $[0, 3\tau] \times X$. Also gibt es ein $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, so dass für alle $a, b \in X$ und $t \in [0, 3\tau]$ gilt:

$$d(a, b) < \delta \ \Rightarrow\ d(\phi_t(a), \phi_t(b)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Nach Voraussetzung findet man eine (δ, τ)-Kette $x_0 = x,\ x_1, \ldots, x_m = y$ mit Zeiten $\tau_0, \ldots, \tau_{m-1} \geq \tau$. Sei o.B.d.A. $\tau_i \in [\tau, 2\tau],\ i \in \{0, \ldots, m-1\}$ – was eine schwächere Aussage ist – und $m \geq 2$. Das letztere können wir annehmen, da man diese Kette mit einer Kette von y nach y verbinden kann, denn y liegt in $\mathcal{R}$. Also existieren $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{2, 3\}$ mit $m = 2q + r$. Somit erhalten wir eine $(\varepsilon, 2\tau)$-Kette von x nach y:

$$y_0 = x,\ y_1 = x_2,\ y_2 = x_4,\ \ldots, y_q = x_{2q},\ y_{q+1} = x_m = y$$

mit Zeiten

$$T_0 = \sum_{i=0}^{1} \tau_i,\ T_1 = \sum_{i=2}^{3} \tau_i, \ldots, T_q = \sum_{i=2q}^{m} \tau_i.$$

Bei dem letzten Schritt, von x_{2q} nach x_{2q+r}, kann wegen $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ die Implikation (3.7) zweimal angewendet werden. □

Der nächste Satz zeigt, dass bei einer maximalen kettentransitiven Teilmenge Y von $\mathcal{R}$ für die Punkte, die für die (ε, T)-Ketten zwischen den Punkten gebraucht werden, keine Punkte außerhalb Y gebraucht werden. Die analoge Aussage bzgl. Kettenrekurrenz gilt auch für $\mathcal{R}$.

Satz 3.11 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Sei Y maximale kettentransitive Teilmenge von $\mathcal{R}$. Dann ist Y auch für $\phi_{|Y}$ kettentransitiv. Außerdem ist $\mathcal{R}$ kettenrekurrent für die Einschränkung von ϕ auf $\mathcal{R}$.*

Beweis: Seien $y, y' \in Y$. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gibt es eine $(\frac{1}{p}, 1)$-Kette $x_0 = y,\ x_1, \ldots, x_{n_p} = y'$ in X von y nach y' mit Zeiten $T_0^p, \ldots, T_{n_p-1}^p \in [1, 2]$. Setze $K_p := \bigcup_{i=0}^{n_p} \{\phi([0, T_i^p], x_i)\}$. Aus Satz 2.6 folgt die Existenz einer Teilfolge von (K_p), die in der Hausdorffmetrik gegen ein kompaktes nichtleeres $K \subset X$ konvergiert mit $y, y' \in K$. Seien $x, z \in K$ und $q \in \mathbb{N}$. Wenn man zeigt, dass es in K eine $(\frac{1}{q}, 1)$-Kette von x nach z mit Zeiten $T_0, \ldots, T_{n_q-1} \in [1, 2]$ gibt, folgt mit Lemma 3.10 $K \subset Y$ und obige Behauptung.

Sei nun $\delta \in (0, \frac{1}{3q})$ hinreichend klein, so dass für den auf $[0, 2] \times X$ gleichmäßig stetigen Fluss ϕ für alle $a, b \in X,\ t \in [0, 2]$ gilt

$$d(a, b) < \delta \ \Rightarrow\ d(\phi_t(a), \phi_t(b)) < \frac{1}{3q}.$$

Wähle $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{p} < \delta$ und

$$H(K_p, K) < \delta. \tag{3.8}$$

Dann findet man eine $(\frac{1}{p}, 1)$-Kette $x = x_0, \ldots, x_{n_p} = z \in X$ von x nach z mit Zeiten $T_0^p, \ldots, T_{n_p-1}^p \in [1, 2]$. Setze $n_q := n_p$ und $T_i := T_i^p,\ i = 0, \ldots, n_p - 1$. Wegen (3.8) gibt es für alle $i = 1, \ldots, n_q - 1$ ein $\tilde{x}_i \in K$ mit $d(\tilde{x}_i, x_i) < \delta$. Dann ist $x, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{n_q-1}, z \in K$ eine $(\frac{1}{q}, 1)$-Kette in K von x nach z mit Zeiten $T_0, \ldots, T_{n_q-1}$, wenn man $\frac{1}{p} + \delta < \frac{1}{q}$ für $\tilde{x}_1$, $\frac{1}{3q} + \frac{1}{p} + \delta < \frac{1}{q}$ für $\tilde{x}_i,\ i = 2, \ldots, n_q - 1$, und $\frac{1}{3q} + \frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ für z beachtet.

Für die zweite Aussage sei $(Y_i)_{i \in I}$ die Familie aller maximalen kettentransitiven Teilmengen von $\mathcal{R}$. Dann gilt $\bigcup_{i \in I} Y_i = \mathcal{R}$, denn für alle $x \in \mathcal{R}$ ist $\{x\}$ kettentransitiv und es gibt ein $i_0 \in I$ mit $x \in Y_{i_0}$. Da aus Kettentransitivität Kettenrekurrenz folgt, ergibt sich für alle $i \in I$, dass Y_i auch für $\phi_{|Y_i}$ kettenrekurrent ist. Also ist $\mathcal{R} = \bigcup_{i \in I} Y_i$ kettenrekurrent für $\phi_{|\mathcal{R}}$. □

Satz 3.12 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Sei $Y \subset X$ abgeschlossen, kettenrekurrent und zusammenhängend. Dann ist Y kettentransitiv. Ist X kettentransitiv, so ist X zusammenhängend.*

Beweis: Seien $x, y \in Y$ und $\varepsilon, T > 0$. Wegen der Kompaktheit von Y gibt es für eine Überdeckung von Y mit Kugeln vom Radius $\frac{\varepsilon}{4}$ endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_{n-1} \in Y$, so dass es für alle $z \in Y$ ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt mit $d(z, y_i) < \frac{\varepsilon}{4}$. Definiere $y_0 := x$ und $y_n = y$. Da Y zusammenhängend ist, gilt $d(y_i, y_j) < \frac{3}{4}\varepsilon$ für $i, j \leq n-1$ mit $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_i) \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_j) \neq \emptyset$. Wegen der Kettenrekurrenz gibt es eine $(\frac{\varepsilon}{4}, T)$-Kette von y_i nach y_i für alle $i = 0, \ldots, n-1$. Die gesuchte (ε, T)-Kette von x nach y ergibt sich aus geeigneter Zusammensetzung dieser Ketten. Also liegt Kettentransitivität vor.

Sei nun X kettentransitiv. Angenommen, X sei nicht zusammenhängend. Dann kann X als Vereinigung zweier offener, disjunkter Mengen V und W geschrieben werden, die auch kompakt sein müssen mit

$$\varepsilon_0 := \inf\{d(v, w) : v \in V, w \in W\} > 0.$$

Also kann es für $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ keine (ε, T)-Kette von $v \in V$ nach $w \in W$ geben - ein Widerspruch zur Kettentransitivität. □

Anschaulich gesprochen, springt man beim Beweis der ersten Aussage nach einer $(\frac{\varepsilon}{4}, T)$-Kette zu einem anderen Punkt, von diesem nach einer weiteren $(\frac{\varepsilon}{4}, T)$-Kette zu einem weiteren Punkt. Setzt man dies fort, garantiert die Kompaktheit der Menge Y, dass sich so alle Punkte verbinden lassen.

Der nächste Satz liefert eine Charakterisierung der Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$. Diese werden auch Kettenrekurrenzkomponenten genannt.

Satz 3.13 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ sind gerade die maximalen kettentransitiven Teilmengen von $\mathcal{R}$. Außerdem ist eine Zusammenhangskomponente kettentransitiv für die Einschränkung von ϕ auf diese Zusammenhangskomponente.*

Beweis: Sei Y eine maximale kettentransitive Teilmenge von $\mathcal{R}$. Wegen Satz 3.11 und der zweiten Aussage von Satz 3.12 liegt Y in einer Zusammenhangskomponente von $\mathcal{R}$. Andererseits entnimmt man Satz 3.12, dass jede Zusammenhangskomponente von $\mathcal{R}$, die natürlich kettenrekurrent, zusammenhängend und mit Lemma 3.9 abgeschlossen ist, auch kettentransitiv ist. Die zweite Aussage ist dann klar. □

Die Definition der Kettenlimesmenge, zusammen mit den nachfolgenden Aussagen, bereiten das Endresultat dieses Abschnittes hinsichtlich der Charakterisierung von Morsemengen als Kettenrekurrenzkomponenten vor.

Definition 3.14 *Sei $Y \subset X$. Setze für $\varepsilon, T > 0$*

$$\Omega(Y, \varepsilon, T) := \{z \in X : \text{ es gibt ein } y \in Y \text{ und eine } (\varepsilon, T) - \text{Kette von } y \text{ nach } z\}$$

und

$$\Omega(Y) := \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \Omega(Y, \varepsilon, T).$$

$\Omega(Y)$ wird Kettenlimesmenge von Y genannt.

Schreibt man $\Omega(x)$ für $\Omega(\{x\})$, $x \in X$, so gilt $\mathcal{R} = \{x \in X : x \in \Omega(x)\}$, denn $\Omega(x)$ ist die Menge aller Punkte von X, die für beliebige $\varepsilon, T > 0$ mit einer (ε, T)-Kette von x aus erreichbar sind.

Lemma 3.15 *Sei ϕ ein Fluss auf X und $Y \subset X$. Dann gilt $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$.*

Beweis: Sei $x \in \omega(Y)$ und $\varepsilon, T > 0$. Dann gibt es Folgen $(y_n) \subset Y$ und $(t_n) \to \infty$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y_n) = x$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass $t_m > T$ und $\phi_{t_m}(y_m) \in B_\varepsilon(x)$ gilt. Dann ist y_m, x eine (ε, T)-Kette von $y_m \in Y$ nach $x \in \Omega(Y)$. □

Lemma 3.16 *Sei $Y \subset X$ und $\varepsilon, T > 0$. Dann ist $\omega(\Omega(Y, \varepsilon, T))$ ein Attraktor mit Attraktorumgebung $\Omega(Y, \varepsilon, T)$.*

Beweis: $\omega(\Omega(Y, \varepsilon, T))$ ist kompakt und invariant, und $\Omega(Y, \varepsilon, T)$ ist wegen (3.6) offen. Es bleibt nur noch

$$\omega(\Omega(Y, \varepsilon, T)) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T)$$

zu zeigen. Sei also $z \in \omega(\Omega(Y, \varepsilon, T))$. Dann gibt es Folgen $(t_n) \to \infty$ und $(x_n) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T)$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x_n) = z$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ und $p \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$ mit

$$d(p, x_{n_0}) < \delta, \quad t_{n_0} > T, \quad d(\phi_{t_{n_0}}(x_{n_0}), z) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$
$$d(\phi_{t_{n_0}}(z_{n_0}), \phi_{t_{n_0}}(x_{n_0})) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } z_{n_0} \text{ mit } d(z_{n_0}, x_{n_0}) < \delta.$$

Aufgrund der Wahl von p gibt es eine (ε, T)-Kette von einem $y \in Y$ nach p und man erhält

$$d(\phi_{t_{n_0}}(p), z) \leq d(\phi_{t_{n_0}}(p), \phi_{t_{n_0}}(x_{n_0})) + d(\phi_{t_{n_0}}(x_{n_0}), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gibt es auch eine (ε, T)-Kette von y nach z, und es folgt $z \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$. □

Wir haben in Lemma 3.15 die Inklusion $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$ aufgezeigt. Jetzt wird bewiesen, dass der Durchschnitt über alle Attraktoren, die $\omega(Y)$ enthalten, gerade $\Omega(Y)$ ist.

Satz 3.17 *Sei ϕ ein Fluss auf X. Sei $Y \subset X$ und sei $(A_i)_{i \in I}$ die Familie der Attraktoren in X mit $\omega(Y) \subset A_i$, $i \in I$. Dann gilt*

$$\Omega(Y) = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Beweis: Zum Nachweis von

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subset \Omega(Y) \tag{3.9}$$

bezeichne

$$A_{\varepsilon,T} := \omega(\Omega(Y,\varepsilon,T)) \subset \Omega(Y,\varepsilon,T), \quad \varepsilon, T > 0,$$

den Attraktor gemäß Lemma 3.16. Mit der Invarianz von $\Omega(Y)$ erhalten wir

$$\omega(Y) \subset \Omega(Y) \subset A_{\varepsilon,T} \subset \Omega(Y,\varepsilon,T)$$

und mit

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\varepsilon,T>0} \Omega(Y,\varepsilon,T)$$

folgt

$$\bigcap_{\varepsilon,T>0} A_{\varepsilon,T} = \Omega(Y),$$

was (3.9) impliziert.

Dass andererseits der Schnitt in (3.9) nicht echt in $\bigcap_{\varepsilon,T>0} A_{\varepsilon,T}$ enthalten ist, d.h. die Inklusion $\Omega(Y) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$ nicht verletzt ist, zeigt man so: Sei $A_i \subset X,\ i \in I$, ein beliebiger Attraktor mit $\omega(Y) \subset A_i$. Sei $V \subset X$ eine abgeschlossene Umgebung von A_i mit $V \cap A_i^* = \emptyset$ und sei $T_0 > 0$ hinreichend groß mit

$$\phi_T(V) \subset \overset{\circ}{V} \ \text{ und } \ \phi_T(Y) \subset \phi_{T_0}(V) \text{ für alle } T \geq T_0.$$

Für die zweite Inklusion beachte man, dass es wegen $\omega(Y) \subset A_i$ solch ein T_0 gibt. Wähle $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\varepsilon_0 < \inf\{d(a,b) : a \notin V,\ b \in \phi_{T_0}(V)\}.$$

Dann enden alle in Y beginnenden (ε_0, T_0)-Ketten in V. Hiermit folgt mit

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\substack{\varepsilon<\varepsilon_0\\ T\geq T_0}} \Omega(Y,\varepsilon,T)$$

für ein $x \in Y$ die Inklusion $\Omega(x) \subset V$. Da V beliebig klein gewählt werden konnte, gilt $\Omega(x) \subset A_i$, und der Beweis ist wegen $\Omega(Y) = \bigcup_{x\in Y} \Omega(x)$ abgeschlossen. □

Der verbleibende Teil des Abschnittes hat wieder die Kettenrekurrenzmenge zum Inhalt. Zunächst wird bewiesen, dass $\mathcal{R}$ der Durchschnitt über alle Attraktor-Repeller-Paare (eigentlich Attraktor-Repeller-Paar-Vereinigungen) ist.

Satz 3.18 *Sei ϕ ein Fluss auf X und $(A_i)_{i\in I}$ die Familie aller Attraktoren in X. Dann gilt*

$$\mathcal{R} = \bigcap_{i\in I} A_i \cup A_i^*. \tag{3.10}$$

Beweis: Sei $x \in \mathcal{R}$ und $i \in I$. Dann gilt entweder $\omega(x) \subset A_i$ oder $\omega(x) \subset A_i^*$. Im zweiten Fall sind wir fertig, denn dann gilt $x \in A_i^*$. Sei also $\omega(x) \subset A_i$. Dann folgt $x \in A_i$, denn wegen Satz 3.17 und $x \in \Omega(x)$ ist x in jedem Attraktor enthalten, der $\omega(x)$ enthält.

Ist andererseits $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \cup A_i^*$, so liegt x im Durchschnitt über alle Attraktoren, die $\omega(x)$ enthalten. Also gilt mit Satz 3.17 $x \in \Omega(x)$ und damit $x \in \mathcal{R}$. $\square$

Das nächste Lemma besagt unter anderem, dass der Durchschnitt aller Attraktor-Repeller-Paare, die zu einer Attraktorsequenz wie in Definition 3.1 gehören, die Vereinigung der zugehörigen Morsemengen ist – die mit Satz 3.18 eine Obermenge von $\mathcal{R}$ ist.

Lemma 3.19 *Sei ϕ Fluss auf X und seien $A_0 \subset \ldots \subset A_n$ echt ineinander enthaltene Attraktoren in X. Dann gilt*

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i \cap A_{i-1}^* \quad = \quad A_0^* \cap \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} A_i \cup A_i^* \quad \cap A_n, \tag{3.11}$$

insbesondere also auch

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i \cap A_{i-1}^* \quad = \quad \bigcap_{i \in \{0,\ldots,n\}} A_i \cup A_i^*, \tag{3.12}$$

falls $A_0 = \emptyset$ und $A_n = X$ gilt.

Beweis: Die Aussage beweist man induktiv. Für $n = 1$ ist die Aussage in (3.11) trivial. Von n auf $n+1$ schließt man mit einem Gesetz von de Morgan folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n+1\}} A_i \cap A_{i-1}^* \quad &= \quad (A_0^* \cap \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} A_i \cup A_i^* \quad \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap A_n^*) \\
&= \quad A_{n+1} \cap ((A_0^* \cap \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} A_i \cup A_i^* \quad \cap A_n) \cup A_n^*) \\
&= \quad A_{n+1} \cap (A_0^* \cap \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} A_i \cup A_i^* \quad \cap (A_n \cup A_n^*)) \\
&= \quad A_0^* \cap \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i \cup A_i^* \quad \cap A_{n+1}
\end{aligned}$$

Die Aussage in (3.12) folgt mit $A_0 = A_n^* = \emptyset$. $\square$

Jetzt stellt sich die Frage, ob es Attraktorsequenzen gibt, die nicht nur eine Obermenge von $\mathcal{R}$ erzeugen, sondern gerade $\mathcal{R}$. Die Frage ist positiv zu beantworten, wenn es eine feinste Morsezerlegung gibt.

Definition 3.20 *Sei ϕ Fluss auf X. Eine Morsezerlegung $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ von X heiße feinste Morsezerlegung, falls jede Morsezerlegung, die feiner als (M_i) ist, bis auf Umnummerierung der Morsemengen die gleiche Morsezerlegung ist.*

Lemma 3.21 *Sei ϕ Fluss auf X und $(M_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Morsezerlegung von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) (M_i) *ist feinste Morsezerlegung.*

(ii) Auf den Räumen $M_1, \dots, M_n$ *mit Flüssen* $\phi_{|M_1}, \ \dots, \phi_{|M_n}$ *gibt es jeweils nur die triviale Morsezerlegung, nämlich jeweils der ganze Raum.*

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$: Angenommen, (M_i) ist keine feinste Morsezerlegung. Dann gibt es eine feinere, die nicht, auch nicht bis auf Umnummerierung der Morsemengen, die gleiche ist. Dann gibt es ein $i_0 \leq n$ und ein $x \in M_{i_0}$, so dass x nicht in der feineren Morsezerlegung liegt. Mit Satz 3.3 (ii) und der Invarianz der Morsemengen folgt, dass es nicht nur die triviale Morsezerlegung von M_{i_0} mit Fluss $\phi_{|M_{i_0}}$ gibt.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Angenommen, es gibt ein $i_0 \leq n$, so dass es auf M_{i_0} mit Fluss $\phi_{|M_{i_0}}$ nicht nur die triviale Morsezerlegung gibt. Dann gibt es eine feinere Morsezerlegung, die nicht, auch nicht bis auf Umnummerierung, die gleiche ist. Hierbei beachte man, dass, wenn man in der Halbordnung der (M_i) M_{i_0} durch die Morsezerlegung auf M_{i_0} ersetzt, wieder eine Halbordnung entsteht, denn Zykel sind nicht möglich. (Siehe Satz 3.5(ii)(b).) □

Mit anderen Worten: Feinste Morsezerlegungen sind genau die Morsezerlegungen, deren Morsemengen sich nicht in kleinere Morsemengen unterteilen lassen. Dass sogar, bis auf Umnummerierung der Morsemengen, von *der* feinsten Morsezerlegung gesprochen werden kann, besagt das folgende Korollar.

Korollar 3.22 *Eine feinste Morsezerlegung ist bis auf Umnummerierung der Morsemengen eindeutig und ihre Morsemengen sind jeweils zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, es gibt zwei feinste Morsezerlegungen, die nicht, auch nicht bis auf Umnummerierung, die gleichen sind. Dann lässt sich wie im Beweis der Notwendigkeit in Lemma 3.21 zeigen, dass eine Morsezerlegung nicht eine feinste war.

Für die zweite Aussage sei angenommen, dass es eine Morsemenge M_i gibt, die nicht zusammenhängend ist, sich also in zwei nichtleere disjunkte Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten zerlegen lässt. Diese zwei Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten sind mit Satz 3.5 eine (nichttriviale) Morsezerlegung von M_i mit dem Fluss $\phi_{|M_i}$. Dies widerspricht Lemma 3.21. □

Ähnlich wie in diesem Beweis überlegt man sich, dass die Vereinigung der Morsemengen der feinsten Morsezerlegung in der Vereinigung der Morsemengen einer beliebigen Morsezerlegung enthalten ist.

Die in der Einleitung zu diesem Kapitel angekündigte Interpretation der Morsemengen ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3.23 *Sei* ϕ *ein Fluss auf* X*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert eine feinste Morsezerlegung $(M_i)_{i=1,\dots,n}$*.*

(ii) Die Kettenrekurrenzmenge besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten.

In diesem Fall sind die Morsemengen gerade die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ *und jede Morsemenge ist kettentransitiv und kettenrekurrent für die Einschränkung von* ϕ *auf diese Morsemenge.*

Beweis: Sei $(A_i)_{i\in I}$ die Familie aller Attraktoren in X.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\emptyset = A_0 \subset \ldots \subset A_n = X$ die Attraktorsequenz, die (M_i) erzeugt. Da (M_i) feinste Morsezerlegung ist, die Morsemengen sich also nicht weiter in kleinere Morsemengen unterteilen lassen, gilt wegen Lemma 3.19 für eine beliebige Sequenz $\emptyset = \tilde{A}_0 \subset \ldots \subset \tilde{A}_k = X$ von echt ineinander enthaltenen Attraktoren:

$$\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} M_i = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i \cap A_{i-1}^* \subset \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \tilde{A}_i \cap \tilde{A}_{i-1}^* = \bigcap_{j\in\{0,\ldots,k\}} \tilde{A}_j \cup \tilde{A}_j^*$$

Da jeder Attraktor in solch einer Sequenz liegt, gilt mit Satz 3.18 und Lemma 3.19

$$\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} M_i = \bigcap_{i\in I} A_i \cup A_i^* = \mathcal{R}, \tag{3.13}$$

denn I enthält auch die Indizes für die Attraktorsequenz, die (M_i) erzeugt. Da eine feinste Morsezerlegung vorliegt, sind nach Korollar 3.22 die einzelnen Morsemengen zusammenhängend. Also besteht $\mathcal{R}$ aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$. Angenommen, es existiere keine feinste Morsezerlegung. Dann gibt es ein $l > k$ und eine Morsezerlegung $(M_i)_{i=1,\ldots,l}$. Wenn $\emptyset = A_0 \subset \ldots \subset A_l = X$ die Attraktorsequenz ist, die (M_i) erzeugt, gilt wegen (3.10) und (3.12)

$$\mathcal{R} \subset \bigcap_{i\in\{0,\ldots,l\}} A_i \cup A_i^* = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,l\}} M_i.$$

Da die Morsemengen disjunkt sind, gibt es ein $i_0 \in \{1,\ldots,l\}$ mit

$$M_{i_0} \cap \mathcal{R} = \emptyset. \tag{3.14}$$

Sei $(j_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von I und definiere für $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{R}_m := \bigcap_{j\in\{j_1,\ldots,j_m\}} A_j \cup A_j^*.$$

Da M_{i_0} nichtleer, invariant und abgeschlossen ist, erhalten wir mit Satz 2.25

$$M_{i_0} \cap \mathcal{R}_1 = M_{i_0} \cap (A_{j_1} \cup A_{j_1}^*) \neq \emptyset.$$

Diese Menge ist außerdem invariant und abgeschlossen. Mit der gleichen Überlegung wie oben (ersetze M_{i_0} durch $M_{i_0} \cap \mathcal{R}_1$ u.s.w.) folgt sukzessive für jedes $m \in \mathbb{N}$, dass $M_{i_0} \cap \mathcal{R}_m$ nichtleer, invariant und abgeschlossen ist. Wegen $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_{\widetilde{m}}$ für $m \geq \widetilde{m}$ ergibt sich

$$\emptyset \neq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} M_{i_0} \cap \mathcal{R}_m = M_{i_0} \cap \mathcal{R},$$

ein Widerspruch zu (3.14). Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

Mit (3.13) und Korollar 3.22 folgt, dass die Morsemengen die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ sind. Mit Satz 3.13 ergibt sich die Aussage, dass jede Morsemenge kettentransitiv (und damit auch kettenrekurrent) für die Einschränkung von ϕ auf diese Morsemenge ist. $\square$

Kapitel 4

Kontrolltheorie

Wir haben bereits in Kapitel 3 eine Charakterisierung der Morsemengen einer feinsten Morsezerlegung hergeleitet. Diese Charakterisierung soll in diesem Kapitel dazu genutzt werden, eine weitere Interpretation dieser Mengen aufzuzeigen. Nach der Definition einer Metrik und eines Flusses auf einem Raum von Kontrollfunktionen soll, nach einem Einschub über die Kontrollmenge und deren Lift, der Frage nachgegangen werden, wie sich Morsemengen einer feinsten Morsezerlegung über Kettenkontrollmengen charakterisieren lassen. Mit den Kettenkontrollmengen greifen wir das Konzept der (ε, T)-Kette aus Kapitel 3 auf. Des weiteren sei an den Schiefproduktfluss aus Kapitel 2 erinnert, denn die Morsemengen aus Abschnitt 4.4 beziehen sich auf eben diesen (hier echten) Fluss. Dabei nimmt der Raum der Kontrollfunktionen den Platz des topologischen Raumes P aus Kapitel 2 ein. Der Inhalt dieses Kapitels ist Colonius, Kliemann [4] entnommen, worauf auch für die jeweiligen Beweise, die in diesem Kapitel nicht aufgeführt sind, verwiesen werden soll.

4.1 Der Rechtsshift als chaotisches dynamisches System

Auf dem Zustandsraum M (siehe Abschnitt 4.2) wird in diesem Kapitel kein Fluss definiert sein, sondern ein Kozykel. Hierfür benötigen wir einen topologischen Raum, der in diesem Abschnitt definiert wird. Genauer gesagt, handelt es sich sogar um einen metrischen Raum. Des weiteren benötigen wir einen Fluss auf diesem Raum. Er wird durch einen Shift auf dem metrischen Raum (von Funktionen) definiert. Dieser Shift ist ein Beispiel für einen im Sinne von Devaney chaotischen Fluss.

Im Folgenden sei U eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^m, m \geq 1$, die mindestens zwei Punkte enthält. Definiere

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R} \to U : u \text{ ist lokal integrierbar}\}.$$

Lokal integrierbar bedeutet Lebesgue-integrierbar auf beschränkten Intervallen. Man kann $\mathcal{U}$ mit einer Metrik versehen und weiter einen, wie sich herausstellen wird, im Sinne von Devaney chaotischen Fluss auf $\mathcal{U}$ definieren.

Für das nächste Lemma sei bemerkt, dass $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ separabel ist, sich also eine abzählbare dichte Teilmenge findet.

Lemma 4.1 *Sei $(x_n) \subset L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ abzählbar und dicht und bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^m$. Dann wird $\mathcal{U}$ mit*

$$d_{\mathcal{U}}(u, v) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\int_{\mathbb{R}} \langle u(t) - v(t), x_n(t) \rangle dt|}{1 + |\int_{\mathbb{R}} \langle u(t) - v(t), x_n(t) \rangle dt|}, \quad u, v \in \mathcal{U},$$

zu einem kompakten, vollständigen und separablen metrischen Raum.

Obige Metrik wird schwach*-Metrik genannt.

Auf $\mathcal{U}$ kann man einen Rechtsshift definieren durch

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} \times \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U} \\ \theta_t(u(\cdot)) &:= u(\cdot + t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Satz 4.2 *Der Rechtsshift definiert einen Fluss auf $\mathcal{U}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Die periodischen Punkte liegen dicht in $\mathcal{U}$.

(ii) Das dynamische System θ auf $\mathcal{U}$ ist topologisch mischend und topologisch transitiv.

Mit Satz 2.14 besagt Satz 4.2 also, dass das dynamische System θ auf $\mathcal{U}$ chaotisch im Sinne von Devaney ist, wobei zu beachten ist, dass $\mathcal{U}$ nicht nur aus einem periodischen Orbit besteht, denn U enthält mindestens zwei Punkte.

4.2 Kontrollsysteme und Kontrollmengen

In diesem Abschnitt soll etwas zum Zustandsraum M und zum Kozykel, der im weiteren benötigt wird, gesagt werden. Außerdem wird der Schiefproduktfluss auf $\mathcal{U} \times M$ eingeführt, den wir für die Charakterisierung der Morsemengen im Abschnitt 4.4 brauchen, denn die Morsemengen werden diesmal Teilmengen von $\mathcal{U} \times M$ und nicht von M sein.

Eine bestimmte Klasse nichtlinearer Kontrollsysteme soll im Folgenden zugrunde liegen. Für $d < \infty$ seien M eine d-dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $f_0, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^d)$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{U}$ beliebig. Betrachte nun das System

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(x(t)). \tag{4.1}$$

Hierbei soll vorausgesetzt werden, dass für alle $u \in \mathcal{U}, x \in M$ die Gleichung (4.1) eindeutig lösbar ist mit (stetiger) Lösungsabbildung $\phi(t, u, x)$, $t \in \mathbb{R}$ und $\phi(0, u, x) = x$. Es liegt ein nichtautonomes dynamisches System, also ein Kozykel, vor.

Des weiteren soll vorausgesetzt werden, dass die durch die Lie-Algebra $\mathcal{L} = \mathcal{LA}\{f_0 + \sum_{i=1...m} u_i f_i, (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{U}\}$ erzeugte Distribution $\Delta_{\mathcal{L}}$ integrierbar ist, d.h.

$$\dim \Delta_{\mathcal{L}}(x) = d \quad \text{für alle } x \in M \tag{4.2}$$

gilt. Diese Bedingung garantiert, dass die in der nächsten Definition eingeführte Menge $O_t^+(x)$ für alle $x \in M$ nichtleeres Inneres hat.

Definition 4.3 *Für das Kontrollsystem (4.1) wird der positive bzw. negative Orbit von $x \in M$ zur Zeit $t \geq 0$ definiert durch*

$$O_t^+(x) := \{y \in M : \text{ es gibt ein } u \in \mathcal{U} \text{ mit } y = \phi(t,u,x)\}$$

bzw.

$$O_t^-(x) := \{y \in M : \text{ es gibt ein } u \in \mathcal{U} \text{ mit } x = \phi(t,u,y)\}.$$

Die positive und negative Erreichbarkeitsmenge von $x \in M$ wird folgendermaßen definiert:

$$O^+(x) := \bigcup_{t \geq 0} O_t^+(x)$$

bzw.

$$O^-(x) := \bigcup_{t \geq 0} O_t^-(x).$$

Jetzt folgt die Definition der Kontrollmenge. Diese Menge ist eine maximale Menge mit der Eigenschaft, dass man von jedem Punkt approximativ zu jedem anderen Punkt der Kontrollmenge gelangt und dass es eine Kontrollfunktion gibt, so dass man für alle Zeiten in der Kontrollmenge bleibt.

Definition 4.4 *Für das Kontrollsystem (4.1) heiße eine Menge $D \subset M$ Kontrollmenge, wenn gilt*

(i) $D \subset \overline{O^+(x)}$ *für alle* $x \in D$,

(ii) für alle $x \in D$ *gibt es ein* $u \in U$ *mit* $\phi(t,u,x) \in D$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$,

(iii) D *ist maximal (bzgl. Inklusion) mit den Eigenschaften (i) und (ii).*

Definition 4.5 *Das System (4.1) heiße vollständig kontrollierbar, falls für alle $x \in M$ $O^+(x) = M$ gilt.*

Auch bei den Kontrollsystemen lässt sich ein (Kontrollfluss genannter) Schiefproduktfluss auf dem Produktraum, hier $\mathcal{U} \times M$, einführen.

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times M \to \mathcal{U} \times M, \ \pi(t,u,x) := (\theta_t u, \phi(t,u,x)) \tag{4.3}$$

θ ist der in Abschnitt 4.1 definierte Rechtsshift. Natürlich interessiert jetzt, ob mit π ein dynamisches System auf $\mathcal{U} \times M$ vorliegt. Die einzige hierfür noch zu zeigende Eigenschaft ist die Stetigkeit von π:

Lemma 4.6 *Die Abbildung π gemäß (4.3) ist stetig auf $\mathcal{U} \times M$.*

4.3 Der Lift einer Kontrollmenge

In diesem Abschnitt wird der Lift einer Kontrollmenge eingeführt und Eigenschaften dieser Teilmenge von $\mathcal{U} \times M$ bewiesen. Es wird sich herausstellen, dass der Fluss π auf dieser Teilmenge chaotisch im Sinne von Devaney ist. Außerdem wird eine Charakterisierung des Liftes aufgezeigt.

Definition 4.7 *Sei $D \subset M$ eine Kontrollmenge des Systems (4.1) mit $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$. Dann heiße*

$$\mathcal{D} := \overline{\{(u,x) \in \mathcal{U} \times M : \phi(t,u,x) \in \overset{\circ}{D} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}} \tag{4.4}$$

der Lift von D, wobei sich der Abschluss auf die Produkttopologie der schwach**-Topologie auf $\mathcal{U}$ und der gegebenen Topologie auf M bezieht.*

Der nächste Satz besagt, dass eine Kontrollmenge über den Lift eine Menge generiert, auf der der Fluss π chaotisch im Sinne von Devaney ist. Wie man leicht sieht, ist der Lift invariant unter π.

Satz 4.8 *Sei D eine Kontrollmenge des Systems (4.1) mit $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ und sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{U} \times M$ gemäß (4.4) definiert. Dann gilt:*

(i) Die periodischen Punkte von π liegen dicht in $\mathcal{D}$.

(ii) $\pi_{|\mathcal{D}}$ ist topologisch mischend und topologisch transitiv.

(iii) Auf $\mathcal{D}$ liegt sensitive Abhängigkeit von den Startwerten vor.

Der Lift einer Kontrollmenge wird in Satz 4.11 als maximal topologisch mischende Menge charakterisiert werden. Außerdem wird in diesem Satz der Begriff der Projektion verwendet.

Definition 4.9 *Sei S ein topologischer Raum, π ein dynamisches System auf S und $W \subset S$ eine abgeschlossene, π-invariante Menge, so dass $\pi_{|W}$ topologisch mischend ist. Dann heiße W maximal topologisch mischend, falls für jede abgeschlossene, π-invariante Menge $W' \supset W$, so dass $\pi_{|W'}$ topologisch mischend ist, schon $W' = W$ gilt.*

Definition 4.10 *Für eine Menge $Y \subset \mathcal{U} \times M$ bezeichne $\mathcal{P}_M Y := \{x \in M : \text{ es gibt ein } u \in \mathcal{U} \text{ mit } (u,x) \in Y\}$ die Projektion von Y auf M.*

Satz 4.11 *Es liege das System (4.1) vor und (4.2) sei gegeben. Für $\mathcal{D} \subset \mathcal{U} \times M$ mit $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \neq \emptyset$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{D}$ ist maximal topologisch mischend.

(ii) $\mathcal{D}$ ist Lift einer Kontrollmenge $D \subset M$.

Falls einer dieser Fälle eintritt, ist D eindeutig und es gilt

$$\overset{\circ}{D} = \widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \quad \textit{und} \quad \overline{D} = \mathcal{P}_M \mathcal{D}. \tag{4.5}$$

Beweis: Zunächst sollen die Aussagen in (4.5) bewiesen werden. Wegen Satz 4.8 ist die wie in (4.4) definierte Menge $\mathcal{D}$ topologisch mischend. Zum Beweis der ersten Aussage beachte man, dass $\overline{D} = \overline{\overset{\circ}{D}}$ gilt und dass es - siehe Colonius, Kliemann [4, Beweis von Proposition 3.5(i)] - für jedes $x \in \overset{\circ}{D}$ ein $u \in \mathcal{U}$ gibt, so dass $\phi(\cdot, u, x)$ periodisch ist mit Bildern in $\overset{\circ}{D}$. Die zweite Aussage folgt aus (4.4).

Nun zum Beweis der Äquivalenz. Es soll mit $(ii) \Rightarrow (i)$ begonnen werden.

$\mathcal{D}$ ist topologisch mischend, weswegen nur noch die Maximalität gezeigt werden muss. Falls $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ topologisch mischend ist, gibt es ein $(u, x) \in \mathcal{D}'$ mit $\omega(u, x) = \mathcal{D}'$ (siehe Mañé [9, Proposition I.11.4], zitiert nach Colonius, Kliemann [4, Beweis von Theorem 3.9]). Also existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\phi(t, u, x) \in \overset{\circ}{D}$ für alle $t \geq t_0$. Aus $y := \phi(t_0, u, x) \in \overset{\circ}{D}$ folgt die Existenz eines $v \in \mathcal{U}$ mit $\phi(t, v, y) \in \overset{\circ}{D}$ für alle $t < 0$. Definiere

$$u_0(t) := \begin{cases} u(t) & : \quad t \geq t_0 \\ v(t - t_0) & : \quad t < t_0. \end{cases}$$

Dann gilt $(u_0, y) \in \mathcal{D}$, $\phi(t, u_0, y) \in \overset{\circ}{D}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega(u_0, y) = \omega(u, x) = \mathcal{D}'$. Da $\mathcal{D}$ abgeschlossen ist, gilt $\mathcal{D}' = \omega(u_0, y) \subset \mathcal{D}$. Somit ist $\mathcal{D}$ maximal.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathcal{D}$ maximal topologisch mischende Menge mit $\widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \neq \emptyset$. Jetzt soll gezeigt werden, dass für $x_1, x_2 \in \widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}}$ ein $u \in \mathcal{U}$ und ein $t > 0$ existieren mit $\phi(t, u, x_1) = x_2$. Sei hierzu $y_1 \in \widehat{\overset{\circ}{O^+(x_1)}} \cap \widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}}$ und $y_2 \in \widehat{\overset{\circ}{O^-(x_2)}} \cap \widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}}$. Sei V_1 Umgebung von y_1 mit $V_1 \subset \widehat{\overset{\circ}{O^+(x_1)}}$ und V_2 Umgebung von y_2 mit $V_2 \subset \widehat{\overset{\circ}{O^-(x_2)}}$. Da $\mathcal{D}$ topologisch transitiv ist, gibt es ein $(u, x) \in \mathcal{U} \times M$ mit $\omega(u, x) = \mathcal{D}$. Also sind die Punkte aus V_2 durch Punkte von V_1 erreichbar, womit die obige Aussage folgt. Daraus ergibt sich die Existenz einer Kontrollmenge D mit $\widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \subset \overset{\circ}{D}$. Sei $\tilde{\mathcal{D}}$ der Lift von D. Dieser ist maximal topologisch mischend. Wegen $\omega(u, x) = \mathcal{D}$ und $\widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \subset \overset{\circ}{D} = \widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \tilde{\mathcal{D}}}}$ findet man wie oben ein $(u_0, y) \in \tilde{\mathcal{D}}$ mit $\omega(u_0, y) = \mathcal{D}$. Aus der Invarianz von $\tilde{\mathcal{D}}$ folgt $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$. Wenn man jetzt noch die Maximalität von $\tilde{\mathcal{D}}$ ausnutzt, folgt schließlich $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}$, was den Beweis abschließt. □

Kontrollmengen $D \subset M$ mit $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ entsprechen also über (4.4) eindeutig maximal topologisch transitiven Mengen $\mathcal{D}$ mit $\widehat{\overset{\circ}{\mathcal{P}_M \mathcal{D}}} \neq \emptyset$.

Korollar 4.12 *Es liege das System (4.1) vor und (4.2) sei gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Das Kontrollsystem (4.1) ist vollständig kontrollierbar.

(ii) Das durch (4.3) definierte dynamische System $(\mathcal{U} \times M, \pi)$ *ist topologisch mischend.*

(iii) Das dynamische System $(\mathcal{U} \times M, \pi)$ *ist topologisch transitiv.*

4.4 Die Kettenkontrollmenge

Wie lassen sich also Morsemengen einer feinsten Morsezerlegung über Kettenkontrollmengen charakterisieren? Eine Antwort wird in diesem Abschnitt gegeben.

Die jetzt einzuführende Kettenkontrollmenge ist gewissermaßen eine Kontrollmenge, bei der die approximierte Erreichbarkeit in Definition 4.4 (Punkt (i)) ersetzt ist durch eine Kettentransitivitätsbedingung unter Zuhilfenahme von Kontrollfunktionen.

In diesem Abschnitt sei d eine Metrik auf der in Abschnitt 4.2 eingeführten Menge M.

Definition 4.13 *Für das System (4.1) heiße eine Menge* $E \subset M$ *Kettenkontrollmenge, falls gilt:*

(i) Für alle $x, y \in E$ *und alle* $\varepsilon, T > 0$ *gibt es ein* $k \in \mathbb{N}$ *und Punkte* $x = x_0, \ldots, x_k = y \in M$ *und Zeiten* $t_0, \ldots, t_{k-1} \geq T$ *und Kontrollfunktionen* $u_0, \ldots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$ *mit*

$$d(\phi(t_j, u_j, x_j), x_{j+1}) < \varepsilon \quad \text{für alle } j = 0, \ldots, k-1.$$

(ii) Für alle $x \in E$ *gibt es ein* $u \in \mathcal{U}$*, so dass* $\phi(t, u, x) \in E$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt.*

(iii) E *ist maximal mit den Eigenschaften* (i) *und* (ii).

Lemma 4.14 *Kettenkontrollmengen sind abgeschlossen, zusammenhängend und paarweise disjunkt.*

Beweis: Abgeschlossenheit und Zusammenhang folgen aus der Definition. Die Disjunktheit zeigt man so: Sei $x \in E_1 \cap E_2$, $y_1 \in E_1$ und $y_2 \in E_2$. Für alle $\varepsilon, T > 0$ gibt es dann $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_{k_1}$, $z_0, \ldots, z_{k_2} \in M$, $u_0, \ldots, u_{k_1-1}, v_0, \ldots, v_{k_2-1} \in \mathcal{U}$ und Zeiten $t_0, \ldots, t_{k_1-1}, s_0, \ldots, s_{k_2-1} \geq T$ mit $x_0 = y_1, x_k = x = z_0$, $z_{k_2} = y_2$ und

$$\begin{aligned} d(\phi(t_j, u_j, x_j), x_{j+1}) &< \varepsilon \quad \text{für } j = 0, \ldots, k_1 - 1, \\ d(\phi(s_j, v_j, z_j), z_{j+1}) &< \varepsilon \quad \text{für } j = 0, \ldots, k_2 - 1. \end{aligned}$$

Wegen der Maximalitätseigenschaft von Kettenkontrollmengen folgt $E_1 = E_2$. □

Im letzten Teil dieses Abschnittes werden wir wieder auf die Morsemengen – die hier Teilmengen von $\mathcal{U} \times M$ sein werden – zurückkommen. Dazu brauchen wir den Lift einer Kettenkontrollmenge.

Definition 4.15 *Sei* $E \subset M$ *eine Kettenkontrollmenge des Systems (4.1). Analog zur Definition 4.7 setzt man den Lift von* E*:*

$$\mathcal{E} := \{(u, x) \in \mathcal{U} \times M : \phi(t, u, x) \in E \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

Der nächste Satz besagt, dass der Lift einer Kontrollmenge eine maximale invariante Teilmenge von $\mathcal{U} \times M$ generiert und die Projektion einer solchen Teilmenge von $\mathcal{U} \times M$ eine Kettenkontrollmenge liefert.

Satz 4.16 *(i) Sei $E \subset M$ eine Kettenkontrollmenge des Systems (4.1). Dann ist $\mathcal{E}$ maximale invariante kettentransitive Teilmenge von $\mathcal{U} \times M$ für das dynamische System π auf $\mathcal{U} \times M$.*

(ii) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{U} \times M$ eine maximale invariante kettentransitive Menge für das dynamische System π auf $\mathcal{U} \times M$. Dann ist $\mathcal{P}_M(\mathcal{E})$ eine Kettenkontrollmenge.

Wie man sich überlegt, gilt beim ersten Punkt von Satz 4.16 zusätzlich $E = \mathcal{P}_M(\mathcal{E})$. Dies folgt aus der Tatsache, dass für $u \in \mathcal{U}$ wegen $\phi(0, u, \cdot) = \mathrm{id}_M$ die Inklusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{U} \times E$ gilt und dass Kettenkontrollmengen die Maximalitätseigenschaft besitzen. Des weiteren ist beim zweiten Punkt von Satz 4.16 $\mathcal{E}$ der Lift von $\mathcal{P}_M(\mathcal{E})$: $\mathcal{E}$ ist wegen der Invarianz nach Definition des Liftes im Lift von $\mathcal{P}_M(\mathcal{E})$ enthalten und wegen dem ersten Punkt und der Maximalität sind beide Mengen identisch.

Zum Schluss folgt die Interpretation der Morsemenge einer feinsten Morsezerlegung als Lift einer Kettenkontrollmenge.

Korollar 4.17 *(i) Sei $E \subset M$ eine Kettenkontrollmenge des Systems (4.1). Falls eine feinste Morsezerlegung existiert, ist $\mathcal{E}$ eine Morsemenge dieser feinsten Morsezerlegung für das dynamische System π auf $\mathcal{U} \times M$.*

(ii) Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{U} \times M$ eine Morsemenge einer feinsten Morsezerlegung für das dynamische System π auf $\mathcal{U} \times M$. Dann ist $\mathcal{P}_M(\mathcal{M})$ eine Kettenkontrollmenge.

Beweis:

(i) $\mathcal{E}$ ist wegen Satz 4.16 maximale invariante kettentransitive Teilmenge von $\mathcal{U} \times M$ für das dynamische System π auf $\mathcal{U} \times M$. Aus Satz 3.13 folgt, dass $\mathcal{E}$ eine Kettenrekurrenzkomponente ist. Daraus folgt mit Satz 3.18, denn es existiert eine feinste Morsezerlegung, dass $\mathcal{E}$ eine Morsemenge einer feinsten Morsezerlegung ist.

(ii) Wegen Satz 3.18 ist $\mathcal{M}$ eine Kettenrekurrenzkomponente und mit Satz 3.13 maximale kettentransitive Teilmenge von $\mathcal{R}$ und somit auch von $\mathcal{U} \times M$. Da $\mathcal{R}$ invariant ist, folgt daraus mit Satz 4.16, dass $\mathcal{P}_M(\mathcal{M})$ eine Kettenkontrollmenge ist.

$\square$

Falls es also auf $\mathcal{U} \times M$ für den Kontrollfluss eine feinste Morsezerlegung gibt, gelangt man über die Projektion von Morsemengen zu Kettenkontrollmengen und über den Lift von Kettenkontrollmengen zu Morsemengen.

Kapitel 5

Pullback-Attraktoren

Es sei an Definition 2.26 erinnert, wo der Kozykel eingeführt wurde. Der Pullback-Attraktor eines Kozykels ist eine Familie von Teilmengen des Heine-Borell'schen vollständigen metrischen Raumes X. Die Familie ist mit den Elementen eines topologischen Raumes P indiziert, kann also auch, wie wir sehen werden, als Teilmenge von $P \times X$ aufgefasst werden, die auf Eigenschaften wie Invarianz und Attraktion von Teilmengen von $P \times X$ untersucht werden kann. In diesem Sinn ist, siehe Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2], ein Hauptergebnis dieses Kapitels, dass bei kompaktem P jeder globale Pullback-Attraktor ein lokaler Attraktor ist. Dies lässt sich sofort auf die Kontrolltheorie übertragen, denn dort ist der Basisraum $\mathcal{U}$ kompakt.

Wegen der Indizierung mit den Elementen von P kann der Raum $P \times X$ auch als ein Faserbündel aufgefasst werden. Die indizierten Mengen des Pullback-Attraktors sind dann Teilmengen der einzelnen Fasern. Bei der Pullback-Attraktion lässt man nicht einfach bei fester Startmenge die Zeit gegen ∞ streben, sondern startet, was den Basisfluss anbelangt, immer früher und betrachtet die Konvergenz in jeweils einer festen Faser. Siehe für diese Überlegungen Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2].

Wir haben schon gesehen, dass die Invarianz bei den Halbflüssen mit der ϕ-Invarianz ihre Entsprechung bei den Kozykeln hat. Weitere solcher Analogien sind in diesem Kapitel enthalten: Der Attraktor, die absorbierende Menge und die ω-Limesmenge finden jeweils ihr Pendant im Pullback-Attraktor, in der absorbierenden Menge für Kozykel (siehe jeweils Kloeden, Schmalfuß [7]) und in der Ω-Limesmenge. Für letztere siehe auch Crauel, Flandoli [6].

Analog zu obigen Überlegungen hinsichtlich des globalen Pullback-Attraktors wird in Abschnitt 5.6 hergeleitet, dass unter zusätzlichen Bedingungen jeder lokale Pullback-Attraktor ein lokaler Attraktor für den Schiefproduktfluss ist.

Das Kapitel schließt mit Überlegungen hinsichtlich der Definition eines Pullback-Repellers und einer knappen Übersicht hinsichtlich Beziehungen zwischen Attraktoren und Pullback-Attraktoren.

Falls nichts anderes gesagt ist, bezeichne in diesem Kapitel θ einen Fluss auf dem topologischen Raum P. Wenn P metrisierbar ist und im Folgenden von Konvergenz von Mengen in $P \times X$ gesprochen wird, so soll $d + d_P$ als Metrik auf dem Produktraum verwendet werden, wobei d_P die Metrik auf P ist. Dass $d + d_P$ eine Metrik ist, rechnet man leicht nach.

5.1 Definition des Pullback-Attraktors

An die Stelle des kompakten invarianten globalen Attraktors, der kompakte Teilmengen von X attrahiert, tritt jetzt der ϕ-invariante (globale) Pullback-Attraktor kompakter nichtleerer Teilmengen von X, für den die Pullback-Attraktion gegeben ist:

Definition 5.1 *Sei P topologischer Raum und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Eine ϕ-invariante Familie $(A_p)_{p \in P}$ kompakter nichtleerer Teilmengen von X heiße Pullback-Attraktor, falls $\overline{\bigcup_{p \in P} A_p}$ kompakt ist und die* Pullback-Attraktion *gegeben ist:*

$$\lim_{t \to \infty} H^* \left(\phi(t, \theta_{-t}p, D), A_p \right) = 0 \qquad \text{für alle} \quad D \in K(X),\ p \in P. \tag{5.1}$$

Nicht von allen Autoren wird die Kompaktheit von $\overline{\bigcup_{p \in P} A_p}$ gefordert (vgl. z.B. Kloeden, Schmalfuß [7]). Abbildung 5.1 veranschaulicht die Pullback-Attraktion oder -Konvergenz.

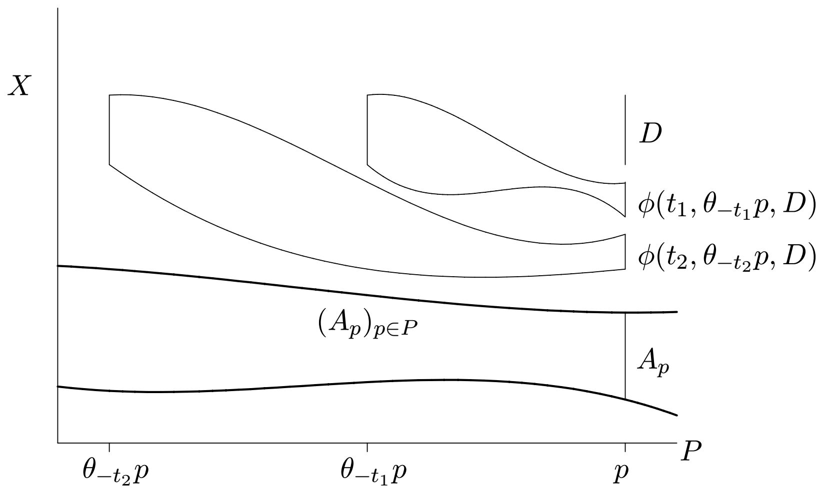

Abbildung 5.1: Die Pullback-Konvergenz von $D \subset X$ in einer Faser.

Auch für einen Kozykel soll eine absorbierende Menge definiert werden. Wir werden sie in den Voraussetzungen in Satz 5.6 wiederfinden.

Definition 5.2 *Sei P topologischer Raum und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Eine kompakte Teilmenge $B \subset X$ heiße absorbierende Menge für ϕ, falls es für jedes $p \in P$ und $D \subset K(X)$ eine Zeit $t_{p,D} \in \mathbb{T}^+$ gibt mit*

$$\phi(t, \theta_{-t}p, D) \subset B \qquad \text{für alle } t \geq t_{p,D}. \tag{5.2}$$

Eine kompakte Teilmenge $B \subset X$ heiße gleichmäßig in P absorbierende Menge für ϕ, falls es für jedes $D \subset K(X)$ eine Zeit $t_D \in \mathbb{T}^+$ gibt mit

$$\phi(t, p, D) \subset B \qquad \text{für alle } t \geq t_D, p \in P. \tag{5.3}$$

5.2 Pullback-Attraktoren als globale Attraktoren des Schiefproduktflusses

In diesem Abschnitt wird ein Resultat wiedergegeben, das den Zusammenhang zwischen Pullback-Attraktoren und Attraktoren des Schiefproduktflusses herstellt. Zunächst wird aber bewiesen, dass sich aus einem Pullback-Attraktor sofort eine maximale kompakte unter dem Schiefproduktfluss invariante Menge konstruieren lässt - eine Aussage, die für globale Attraktoren leicht einzusehen ist. Lemma 5.3 und Korollar 5.5 folgen Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2, Lemma 2.7. und Corollary 2.8.].

Lemma 5.3 *Sei P kompakter topologischer Raum, ϕ Kozykel auf X bzgl. (P,θ) und sei $(A_p)_{p\in P}$ Pullback-Attraktor. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup_{p\in P}\{p\} \times A_p$ die maximale kompakte π-invariante Teilmenge von $P\times X$ für den Schiefproduktfluss π. Insbesondere ist der Pullback-Attraktor für kompaktes P eindeutig.*

Beweis: Die Invarianz von $\mathcal{A}$ folgt aus Lemma 2.29.

Wir zeigen jetzt die Kompaktheit von $\mathcal{A}$. Dass Beschränktheit vorliegt, folgt aus der Kompaktheit von P und der Beschränktheit von $\bigcup_{p\in P} A_p$, denn $\mathcal{A}$ ist Teilmenge der kompakten Menge $P \times \overline{\bigcup_{p\in P} A_p}$. Also ist $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ kompakt und damit $\bigcup_{p\in P} B_p$, die Vereinigung der Fasern von $\mathcal{B}$, beschränkt. Außerdem ist $\mathcal{B}$ π-invariant:

$$\pi_t(\mathcal{B}) = \pi_t(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\pi_t(\overline{\mathcal{A}})} = \overline{\pi_t(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{B} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+.$$

Wegen Lemma 2.29 ist $(B_p)_{p\in P}$ ϕ-invariant. Nach Konstruktion gilt $B_p \supset A_p$ für alle $p \in P$. Dass sogar Gleichheit vorliegt, folgt zusammen mit der Abgeschlossenheit der Mengen A_p, $p \in P$, und mit der ϕ-Invarianz von (B_p) aus der Pullback-Attraktion

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, D), A_p) = 0 \quad \text{für alle } p \in P,$$

wenn man $D = \overline{\bigcup_{p\in P} B_p} \in K(X)$ wählt. Folglich ist $\mathcal{A}$ kompakt.

Jetzt soll noch die Maximalität von $\mathcal{A}$ gezeigt werden. Sei $\mathcal{A}' \subset P\times X$ eine weitere kompakte π-invariante Teilmenge mit $\mathcal{A}' = \bigcup_{p\in P}\{p\} \times A'_p \supset \mathcal{A}$. (Ohne Einschränkung kann $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ gesetzt werden - ansonsten ersetze man $\mathcal{A}'$ durch $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$.) Wir erhalten dann mit Lemma 2.29

$$\begin{aligned} H^*(A'_p, A_p) &= \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, A'_{\theta_{-t}p}), A_p) \\ &\le \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, D), A_p) \ = \ 0 \end{aligned}$$

für die kompakte Menge $D = \overline{\bigcup_{p\in P} A'_p}$. Also gilt $A'_p \subset A_p$ für alle $p \in P$ und somit $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.
□

Bei Pullback-Attraktoren findet man eine oberhalbstetige Struktur, was das Korollar nach der folgenden Definition näher ausführt.

Definition 5.4 *Bezeichne Pot(X) die Potenzmenge von X. Eine Abbildung $P \ni p \mapsto B_p \in Pot(X)$ heiße oberhalbstetig bzw. unterhalbstetig, falls*

$$\begin{aligned} \lim_{p \to p_0} H^*(B_p, B_{p_0}) &= 0 \text{ bzw.} \\ \lim_{p \to p_0} H^*(B_{p_0}, B_p) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $p_0 \in P$ gilt.

Korollar 5.5 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 5.3 ist die Abbildung $P \ni p \mapsto A_p \in Pot(X)$ oberhalbstetig.*

Beweis: Die Aussage folgt mit Lemma 5.3 sofort aus der Tatsache, dass, siehe Aubin, Frankowska [1, Proposition 1.4.9], eine mengenwertige Abbildung oberhalbstetig ist, wenn ihr Graph abgeschlossen ist und ihre Bilder kompakt sind. □

Die enge Verwandtschaft des Pullback-Attraktors mit dem globalen Attraktor zeigt der nächste Satz. Ähnlich wie in Satz 2.21 wird die Existenz einer absorbierenden Menge vorausgesetzt. Der Beweis zu (i) ist Kloeden, Schmalfuß [7, Kapitel 5.1] entnommen. Für die Aussage von (ii) siehe Cheban, Schmalfuß, Kloeden [3, Theorem 2].

Die folgenden Aussagen sind in sofern interessant, als dass sie zeigen, dass das Konzept der Pullback-Attraktoren für nichtautonome dynamische Systeme mit den bekannten Attraktoren für autonome dynamische Systeme harmoniert. Mit den angegebenen Voraussetzungen entsprechen Pullback-Attraktoren den Attraktoren für den Schiefproduktfluss über (5.6) in natürlicher Weise. Das folgende Resultat bezieht sich auf globale Attraktoren. Später wird ein ähnlicher Satz für lokale Attraktoren bewiesen.

Satz 5.6 *Sei P metrischer Raum und ϕ Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Sei $B \subset X$ absorbierende Menge für ϕ mit*

$$\phi(t, p, B) \subset B \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+, p \in P.$$

Dann gilt:

(i) Der Kozykel ϕ besitzt den Pullback-Attraktor $(A_p)_{p \in P}$ mit

$$A_p = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t} p, B\right)}. \tag{5.4}$$

(ii) Für kompaktes P und in P gleichmäßig absorbierender Menge B besitzt der Schiefproduktfluss π auf $P \times X$ den globalen Attraktor $\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi\left(t, P \times B\right) \tag{5.5}$$

und

$$\mathcal{A} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p, \tag{5.6}$$

und mit $A(P) := \bigcup_{p\in P} A_p$ *folgt für alle kompakten Mengen* $D \subset X$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{p\in P} H^*\left(\phi(t,p,D), A(P)\right) = 0. \tag{5.7}$$

Beweis:

(i) Definiere

$$A_p := \bigcap_{\tau\in\mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t>\tau \\ t\in\mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t}p, B\right)},\ p \in P.$$

Für alle $p \in P$ ist A_p kompakt und nichtleer, da wegen (5.2) der Abschluss der jeweiligen Vereinigung in $\overline{B}$ enthalten ist und somit kompakt ist und da der Schnitt ineinander enthaltener kompakter nichtleerer Mengen nichtleer und kompakt ist.

(a) Zunächst soll für alle $p \in P$ die Pullback-Konvergenz für $B \subset X$ gezeigt werden, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} H^*\left(\phi(t,\theta_{-t}p,B), A_p\right) = 0. \tag{5.8}$$

Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es Folgen $(t_j) \to \infty$ und $(x_j) \subset X$ mit $x_j \in \phi(t_j, \theta_{-t_j}p, B) \subset B$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$H^*\left(x_j, A_p\right) > \varepsilon \quad \text{für alle } j > 0. \tag{5.9}$$

Da B kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $(x_{j_k}) \subset (x_j)$ gegen ein $x_0 \in B$. Für alle $\tau \geq 0$ und $t_{j_k} \geq \tau$ gilt $x_{j_k} \in \bigcup_{t\geq\tau} \phi(t,\theta_{-t}p,B)$ und damit liegt x_0 für alle $\tau > 0$ in $\overline{\bigcup_{t\geq\tau} \phi(t,\theta_{-t}p,B)}$, also auch im Durchschnitt über alle $\tau > 0$, was aber gerade A_p darstellt. Dies ist ein Widerspruch zu (5.9).

(b) Wegen (5.8) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und $p \in P$ ein $t_{\varepsilon,p} \geq 0$ mit

$$H^*(\phi(t_{\varepsilon,p}, \theta_{-t_{\varepsilon,p}}p, B), A_p) < \varepsilon.$$

Sei $D \subset X$ kompakt. Wegen $\theta_{-t_{\varepsilon,p}}p \in P$ folgt mit (5.2) für alle hinreichend großen $t \in \mathbb{T}^+$ die Inklusion $\phi(t, \theta_{-t-t_{\varepsilon,p}}p, D) \subset B$ und damit

$$\begin{aligned} \phi(t+t_{\varepsilon,p}, \theta_{-t-t_{\varepsilon,p}}p, D) &= \phi(t_{\varepsilon,p}, \theta_{-t_{\varepsilon,p}}p, \phi(t, \theta_{-t-t_{\varepsilon,p}}p, D)) \\ &\subset \phi(t_{\varepsilon,p}, \theta_{-t_{\varepsilon,p}}p, B). \end{aligned}$$

Damit ist auch die Pullback-Konvergenz für jedes kompakte $D \subset X$ gezeigt.

(c) Zum Beweis der $\phi-$Invarianz definiere für $\tau \in \mathbb{T}^+$, $p \in P$ die Menge $F_\tau(p) := \bigcup_{r\geq\tau} \phi(r, \theta_{-r}p, B)$. Für jedes $p \in P$ gilt wegen $\overline{\phi(t,p,B)} \subset B$ die Inklusion $F_\tau(p) \subset B$ und wegen (5.4) die Beziehung $A_{\theta_{-t}p} = \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau\left(\theta_{-t}p\right)}$. Zunächst soll

$$\phi(t, \theta_{-t}p, \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}) = \bigcap_{\tau\geq 0} \phi(t, \theta_{-t}p, \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}) \tag{5.10}$$

gezeigt werden. Dass das Bild des Schnittes im Schnitt des Bildes enthalten ist, ist bekannt. Sei nun $x \in \bigcap_{\tau\geq 0} \phi(t, \theta_{-t}p, \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)})$.

Dann gibt es für jedes $\tau \geq 0$ ein $x^\tau \in \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)} \subset B$ mit $x = \phi(t, \theta_{-t}p, x^\tau)$. Da $\overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}$ kompakt ist und $\overline{F_\tau(\theta_{-t}p)} \subset \overline{F_{\tilde\tau}(\theta_{-t}p)}$ für $\tau > \tilde\tau$ gilt, gibt es ein $\hat x \in \overline{\{x^\tau : \tau \geq 0\}}$ mit $\hat x \in \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}$. Wegen der Stetigkeit von $\phi(t, \theta_{-t}p, \cdot)$ folgt $x = \phi(t, \theta_{-t}p, \hat x)$, und damit $x \in \phi(t, \theta_{-t}p, \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}) = \phi(t, \theta_{-t}p, A_{\theta_{-t}p})$.

Mit (5.10), der Kompaktheit von $\overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}$ und der Stetigkeit von $\phi(t, \theta_{-t}p, \cdot)$ folgt

$$\begin{aligned}
\phi(t, \theta_{-t}p, A_{\theta_{-t}p}) &= \bigcap_{\tau\geq 0} \phi(t, \theta_{-t}p, \overline{F_\tau(\theta_{-t}p)}) \\
&\supset \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\phi(t, \theta_{-t}p, F_\tau(\theta_{-t}p))} \\
&= \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\bigcup_{r\geq\tau} \phi(t, \theta_{-t}p, \phi(r, \theta_{-t-r}p, B))} \\
&= \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\bigcup_{r\geq\tau} \phi(t+r, \theta_{-t-r}p, B)} \\
&= \bigcap_{\tau\geq t} \overline{\bigcup_{r\geq\tau} \phi(r, \theta_{-r}p, B)} \supset A_p,
\end{aligned}$$

also

$$A_p \subset \phi(t, \theta_{-t}p, A_{\theta_{-t}p}) \tag{5.11}$$

für alle $t \geq 0$ und $p \in P$.

Ersetzt man p durch $\theta_{-\tau}p$ in (5.11) und verwendet die Kozykel-Eigenschaft, so erhält man

$$\begin{aligned}
\phi(\tau, \theta_{-\tau}p, A_{\theta_{-\tau}p}) &\subset \phi(\tau, \theta_{-\tau}p, \phi(t, \theta_{-\tau-t}p, A_{\theta_{-\tau-t}p})) \\
&= \phi(t, \theta_{-t}p, \phi(\tau, \theta_{-\tau-t}p, A_{\theta_{-\tau-t}p})) \\
&\subset \phi(t, \theta_{-t}p, \phi(\tau, \theta_{-\tau-t}p, B)) \\
&\subset \phi(t, \theta_{-t}p, B).
\end{aligned}$$

Da dies für alle $t \geq 0$ gilt, erhält man wegen (5.8) und der Abgeschlossenheit von A_p für alle $\tau \geq 0$ und $p \in P$

$$\phi(\tau, \theta_{-\tau}p, A_{\theta_{-\tau}p}) \subset \overline{A_p} = A_p. \tag{5.12}$$

Ersetzt man nun τ durch t und p durch $\theta_t p$, so ergibt sich mit (5.11)

$$\phi(t, p, A_p) = A_{\theta_t p}.$$

Dies ist die gesuchte ϕ-Invarianz.

(ii) Der Schiefproduktfluss π ist dissipativ, denn $P \times B$ ist absorbierende Menge: Sei dafür $\mathcal{K} \subset P \times X$ kompakt. Dann gibt es ein kompaktes $D \subset X$ mit $\mathcal{K} \subset \bigcup_{p\in P}\{p\} \times D$.

Da B gleichmäßig in P absorbierende Menge ist, gibt es ein $T_D > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\pi_t(\mathcal{K}) &\subset \pi_t(\bigcup_{p\in P}\{p\}\times D) \\
&= \bigcup_{p\in P}\{\theta_t p\}\times\phi(t,p,D) \\
&\subset P\times B
\end{aligned}$$

für alle $t > T_D$. Also liegt Dissipativität vor, woraus mit Satz 2.21 die Existenz des in (5.5) angegebenen globalen Attraktors $\mathcal{A}$ folgt. Da $\mathcal{A}$ maximale π-invariante Teilmenge von $P \times X$ ist, folgt Gleichung (5.6) sofort aus Lemma 5.3. Zum Beweis von (5.7) sei angenommen, dass es ein kompaktes $D \subset X$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit Folgen $(t_n) \to \infty$ und $(p_n) \subset P$ und

$$H^*(\phi(t_n, p_n, D), A(P)) > \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies widerspricht

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to\infty} H^*(\pi_t(P\times D), \mathcal{A}) \\
&\geq \lim_{t\to\infty} H^*(\bigcup_{p\in P}\{\theta_t p\}\times\phi(t,p,D), P\times A(P)) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} H^*(\{\theta_{t_n} p_n\}\times\phi(t_n,p_n,D), P\times A(P)) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} H^*(\phi(t_n,p_n,D), A(P)).
\end{aligned}$$

□

5.3 Die $\Omega-$Limesmenge

Wie Korollar 2.18 zeigt, kann für kompaktes X die ω-Limesmenge zur Definition des lokalen Attraktors herangezogen werden. Mit dem Ziel der Einführung des lokalen Pullback-Attraktors, wird, siehe Crauel, Flandoli [6], die Ω-Limesmenge von Familien von Teilmengen von X definiert und Eigenschaften derselben bewiesen. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Ω-Limesmenge eine Familie von Teilmengen von X ist, die auf einer Familie $(B_p)_{p\in P}$ von Teilmengen von X definiert ist. Für die Ω-Limesmenge soll dann die Notation $(\Omega(B_p))_{p\in P}$ verwendet werden. Der Zusammenhang mache also klar, dass es sich dann nicht um die Kettenlimesmenge handelt.

Definition 5.7 *Sei P topologischer Raum, ϕ Kozykel auf X bzgl. (P, θ) und $(B_p)_{p\in P}$ eine Familie von Teilmengen von X. Die Ω-Limesmenge $(\Omega(B_p))_{p\in P}$ von $(B_p)_{p\in P}$ sei definiert durch*

$$\begin{aligned}
\Omega(B_p) := \{&x\in X:\ \textit{es gibt Folgen } (t_n)\to\infty \textit{ und } (y_n)\subset X \textit{ mit } y_n\in B_{\theta_{-t_n}p} \\
&\textit{für alle } n\in\mathbb{N} \textit{ und } \lim_{n\to\infty}\phi(t_n,\theta_{-t_n}p,y_n) = x\}, \quad p\in P.
\end{aligned}$$

Ersetzt man in der Definition p durch $\theta_t p$, $t \geq 0$, erhält man die später verwendete Formulierung

$$\begin{aligned}\Omega(B_{\theta_t p}) \quad = \quad & \{x \in X : \text{ es gibt Folgen } (t_n) \to \infty \text{ und } (y_n) \subset X \text{ mit } y_n \in \\ & B_{\theta_{-t_n+t}p} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \phi(t_n, \theta_{-t_n+t}p, y_n) = x\}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Die Ω-Limesmenge kann man anders darstellen:

Lemma 5.8 *Sei P topologischer Raum, ϕ Kozykel auf X bzgl. (P, θ) und $(B_p)_{p\in P}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann gilt für die Ω-Limesmenge $(\Omega(B_p))_{p\in P}$ von $(B_p)_{p\in P}$ für alle $p \in P$*

$$\Omega(B_p) = \bigcap_{\tau\in\mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t>\tau \\ t\in\mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t}p, B_{\theta_{-t}p})}. \tag{5.14}$$

Beweis: Sei $p \in P$. Für die eine Inklusion sei $x \in \Omega(B_p)$. Dann gibt es Folgen $(t_n) \to \infty$ und $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in B_{\theta_{-t_n}p}$ für alle $n > 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t_n, \theta_{-t_n}p, y_n) = x. \tag{5.15}$$

Sei $\tau \in \mathbb{T}^+$. Wegen (5.15) gilt $x \in \overline{\bigcup_{\substack{t>\tau \\ t\in\mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t}p, B_{\theta_{-t}p})}$. Für die andere Inklusion sei

$$x \in \bigcap_{\tau\in\mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t>\tau \\ t\in\mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t}p, B_{\theta_{-t}p})}.$$

Für jedes $\tau \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $t_\tau > \tau$ und ein $y_\tau \in B_{\theta_{-t_\tau}p}$ mit $H(\{x\}, \{\phi(t_\tau, \theta_{-t_\tau}p, y_\tau)\}) < \frac{1}{\tau}$. Somit folgt $\lim_{\tau\to\infty} \phi(t_\tau, \theta_{-t_\tau}p, y_\tau) = x$ und damit $x \in \Omega(B_p)$. □

Die bewiesene Darstellung der Ω-Limesmenge liefert uns eine elegante Darstellung der ω-Limesmenge, die in Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2] als Definition der ω-Limesmenge verwendet wird. Eigentlich gehört das folgende Resultat zu den autonomen dynamischen Systemen, wurde für diese Arbeit aber nicht verwendet und wird jetzt als Korollar des allgemeineren nichtautonomen Falls notiert.

Korollar 5.9 *Sei $B \subset X$ und ϕ ein semidynamisches System auf X. Dann gilt*

$$\omega(B) = \bigcap_{\tau\in\mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t>\tau \\ t\in\mathbb{T}^+}} \phi(t, B)}. \tag{5.16}$$

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Lemma 5.8, wenn man $\theta = \mathrm{id}_P$ und $B_p = B$ für alle $p \in P$ setzt und bedenkt, dass der Kozykel in Lemma 5.8 dann ein semidynamisches System auf X ist. □

Einige Eigenschaften der Ω-Limesmenge sind in Satz 5.10, der einen Vergleich mit Satz 2.10 lohnt, angeführt. Die Aussage bzgl. der positiven Invarianz ist Crauel, Flandoli [6, Lemma 3.2] entnommen.

Satz 5.10 *Sei X zusätzlich kompakt, P kompakter topologischer Raum und $(B_p)_{p\in P}$ eine Familie nichtleerer Teilmengen von X. Falls mit ϕ ein zeitinvertierbarer Kozykel auf X bzgl. (P,θ) vorliegt, ist die Ω-Limesmenge $(\Omega(B_p))$ ϕ-invariant und die Fasern $\Omega(B_p)$ sind für alle $p \in P$ kompakt und nichtleer.*

Beweis: Lemma 5.8 zeigt, dass die Fasern Schnitte ineinander enthaltener nichtleerer kompakter Mengen sind, die folglich kompakt und nichtleer sind. Sei $t \geq 0$ und $p \in P$. Es ist $\phi(t,p,\Omega(B_p)) = \Omega(B_{\theta_t p})$ zu zeigen. Zunächst soll $\phi(t,p,\Omega(B_p)) \subset \Omega(B_{\theta_t p})$ nachgewiesen werden. Sei dazu $y \in \Omega(B_p)$. Also existieren Folgen $(t_n) \to \infty$ und $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in B_{\theta_{-t_n}p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $y = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n, \theta_{-t_n}p, y_n)$ und

$$\begin{aligned}\phi(t,p,y) &= \lim_{n\to\infty} \phi(t+t_n, \theta_{-t_n}p, y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \phi(t+t_n, \theta_{-t_n-t}\theta_t p, y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \phi(\tilde{t}_n, \theta_{-\tilde{t}_n}\theta_t p, y_n)\end{aligned}$$

gilt mit $(\tilde{t}_n) = (t+t_n) \to \infty$ und $y_n \in B_{\theta_{-t_n}p} = B_{\theta_{-\tilde{t}_n}\theta_t p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (5.13) folgt $\phi(t,p,y) \in \Omega(B_{\theta_t p})$.

Für die andere Inklusion sei $y \in \Omega(B_{\theta_t p})$ mit Folgen $(s_n) \to \infty$, $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in B_{\theta_{-s_n+t}p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n, \theta_{-s_n+t}p, y_n)$. Dann gibt es wegen der Invertierbarkeit von ϕ ein $z \in X$ mit

$$z = \lim_{n\to\infty} \phi(-t, \theta_t p, \phi(s_n, \theta_{-s_n+t}p, y_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n - t, \theta_{-s_n+t}p, y_n) \in \Omega(B_p).$$

Aus $y = \phi(t,p,z) \in \phi(t,p,\Omega(B_p))$ folgt $\Omega(B_{\theta_t p}) \subset \phi(t,p,\Omega(B_p))$. □

5.4 Der lokale Pullback-Attraktor

Der globale Attraktor und sein Gegenstück, der globale Pullback-Attraktor, sind bereits definiert. Auch der lokale Attraktor ist über die Attraktion einer Umgebung in Kapitel 2 schon definiert worden. In Korollar 2.18 wurde für kompaktes X die Äquivalenz der Attraktionseigenschaft zur Formulierung $\omega(U) = A$, U Attraktorumgebung des Attraktors A, gezeigt. Jetzt soll der umgekehrte Weg beschritten werden: Zuerst wird der lokale Pullback-Attraktor über die Ω-Limesmenge einer Pullback-Umgebung definiert und dann die Äquivalenz zur faserweisen Pullback-Attraktion einer δ-Umgebung nachgewiesen.

Definition 5.11 *Sei P topologischer Raum und $(A_p)_{p\in P}$ und $(U_p)_{p\in P}$ zwei Familien von Teilmengen von X. Dann heiße (U_p) Pullback-Umgebung von (A_p), falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass es für alle $p \in P$ ein $t_p \in \mathbb{T}^+$ gibt mit*

$$B_\delta(A_{\theta_{-t}p}) \subset U_{\theta_{-t}p} \quad \textit{für alle } t \geq t_p.$$

Definition 5.12 *Sei P topologischer Raum und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P,θ). Eine Familie $(A_p)_{p\in P}$ von Teilmengen von X heiße lokaler Pullback-Attraktor, falls sie eine Pullback-Umgebung (U_p) besitzt mit $(A_p) = (\Omega(U_p))$.*

Satz 5.13 *Sei X zusätzlich kompakt, P kompakter topologischer Raum und ϕ ein zeitinvertierbarer Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Sei $(A_p)_{p \in P}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann sind äquivalent:*

(i) (A_p) ist lokaler Pullback-Attraktor.

(ii) Die Familie (A_p) ist ϕ-invariant, faserweise kompakt und nichtleer, und es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$\lim_{t \to \infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, B_\delta(A_{\theta_{-t}p})), A_p) = 0 \quad \text{für alle } p \in P. \tag{5.17}$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Neben der ϕ-Invarianz wurde in Satz 5.10 auch bewiesen, dass die Fasern A_p, $p \in P$, kompakt und nichtleer sind. Sei $(U_p)_{p \in P}$ Pullback-Umgebung von (A_p) mit einem $\delta > 0$, so dass es für alle $p \in P$ ein $t_p \in \mathbb{T}^+$ gibt mit

$$B_\delta(A_{\theta_{-t}p}) \subset U_{\theta_{-t}p} \quad \text{für alle } t \geq t_p. \tag{5.18}$$

Wegen Lemma 5.8 gilt für alle $p \in P$

$$A_p = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t}p, U_{\theta_{-t}p})}.$$

Wegen der ϕ-Invarianz von (A_p) und (5.18) gilt für alle $p \in P$ auch

$$A_p = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t}p, B_\delta(A_{\theta_{-t}p}))},$$

wenn man beachtet, dass beim obigen Schnitt über $\tau \in \mathbb{T}^+$ für $p \in P$ der Zusatz $\tau \geq t_p$ hinzugefügt werden darf. Schließlich folgt für alle $p \in P$

$$\lim_{t \to \infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, B_\delta(A_{\theta_{-t}p})), A_p) = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: $(B_\delta(A_p))_{p \in P}$ ist eine Pullback-Umgebung von (A_p). Dass (A_p) in der Ω-Limesmenge enthalten ist, folgt mit Lemma 5.8 und mit der $\phi-$Invarianz von (A_p). Die andere Inklusion erhält man aus (5.17). □

Es folgt jetzt die lokale Version von Satz 5.6: Analog der Entsprechung ′globaler Attraktor — globaler Pullback-Attraktor′, sind unter den angeführten Voraussetzungen der lokale Attraktor und der lokale Pullback-Attraktor eng miteinander verwandt. In Kapitel 2 sind zwei Sätze angegeben, die hinreichende Bedingungen für Attraktoren beinhalten: Satz 2.21 für globale Attraktoren, der somit für Satz 5.6 verwendet wird und Satz 2.19, der jetzt verwendet werden wird.

Satz 5.14 *Sei X zusätzlich kompakt, P kompakter metrischer Raum und ϕ ein zeitinvertierbarer Kozykel auf X bzgl. (P, θ). Sei $\mathcal{B} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p \subset P \times X$ offen mit $B_p \neq \emptyset$ für alle $p \in P$. Weiterhin existiere ein $T > 0$, so dass für den Schiefproduktfluss $\pi_t(\overline{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{B}$ für alle $t \geq T$ gilt. Auf dem Produktraum $P \times X$ sei als Metrik die Summe der Metriken auf X und P gewählt.*

Dann gilt:

(i) Das semidynamische System π besitzt auf $P \times X$ einen lokalen Attraktor $\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi_t(\mathcal{B}).$$

(ii) Der Kozykel ϕ besitzt einen lokalen Pullback-Attraktor $(A_p)_{p \in P}$ mit

$$\mathcal{A} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p$$

und für alle $p \in P$ gilt

$$A_p = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t} p, B_{\theta_{-t} p}\right)}. \tag{5.19}$$

Insbesondere gilt

$$\omega\Big(\bigcup_{p \in P} \{p\} \times B_p\Big) = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times \Omega(B_p).$$

Beweis:

(i) Die Aussage wurde bereits in Satz 2.19 bewiesen.

(ii) Die Behauptung ist, dass die Fasern $(\tilde{A}_p)_{p \in P}$ des lokalen Attraktors $\mathcal{A}$ schon den gesuchten Pullback-Attraktor definieren und von der Gestalt (5.19) sind. Die Kompaktheit der einzelnen Fasern ist klar, die ϕ-Invarianz wegen Lemma 2.29 auch. Da $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $p \in P, x \in X$ mit $\{p\} \times \{x\} \in \{p\} \times \tilde{A}_p$ die Inklusion $B_\delta(\{p\} \times \{x\}) \subset \mathcal{B}$ gilt. Es gilt $\{p\} \times B_\delta(x) \subset B_\delta(\{p\} \times \{x\})$ und damit $B_\delta(x) \subset B_p$, bzw. $B_\delta(\tilde{A}_p) \subset B_p$. Zusammen mit der ϕ-Invarianz der Familie $(\tilde{A}_p)$ erhält man für alle $p \in P$

$$\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t} p, B_{\theta_{-t} p}\right)} \supset \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi(t, \theta_{-t} p, B_\delta(\tilde{A}_{\theta_{-t} p}))} \supset \tilde{A}_p. \tag{5.20}$$

Jetzt soll für alle $p \in P$

$$\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t} p, B_{\theta_{-t} p}\right)} \subset \tilde{A}_p \tag{5.21}$$

gezeigt werden. Angenommen, es existiere ein $p \in P$ mit

$$\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^+} \overline{\bigcup_{\substack{t > \tau \\ t \in \mathbb{T}^+}} \phi\left(t, \theta_{-t} p, B_{\theta_{-t} p}\right)} \not\subset \tilde{A}_p.$$

Dann gibt es ein $x \in X$ und eine Folge $(t_n) \to \infty$ mit $x_n \in B_{\theta_{-t_n} p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \phi(t_n, \theta_{-t_n} p, x_n) = x \notin \tilde{A}_p. \tag{5.22}$$

Damit gilt $\{p\} \times \{x\} \not\subset \mathcal{A}$. Da aber $\{p\} \times \{x\}$ und $\mathcal{A}$ kompakt sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\{p\} \times \{x\} \not\subset \overline{B_\varepsilon(\mathcal{A})} \tag{5.23}$$

und eine Zeit $T > 0$ mit $\pi_t(\mathcal{B}) \subset B_\varepsilon(\mathcal{A})$ für alle $t \geq T$. Wegen $\{\theta_{-t_n}p\} \times B_{\theta_{-t_n}p} \subset \mathcal{B}$ für alle $n > 0$ gilt

$$\pi_{t_n}(\{\theta_{-t_n}p\} \times B_{\theta_{-t_n}p}) = \{p\} \times \phi(t_n, \theta_{-t_n}p, B_{\theta_{-t_n}p}) \subset B_\varepsilon(\mathcal{A})$$

für alle $t_n \geq T$. Zusammen mit (5.22) widerspricht dies (5.23). Damit ist (5.21) gezeigt, so dass in (5.20) sogar Gleichheit vorliegt. Also sind die Fasern $(\tilde{A}_p)$ nichtleer und wir erhalten auch die lokale Pullback-Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, B_\delta(\tilde{A}_{\theta_{-t}p})), \tilde{A}_{\theta_{-t}p}) = 0 \quad \text{für alle } p \in P.$$

Damit ist obige Behauptung bewiesen. □

Was in obigem Beweis schon gezeigt wurde, soll jetzt nochmal explizit notiert werden.

Korollar 5.15 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.14 sind alle Fasern des lokalen Attraktors $\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \pi_t(\mathcal{B})$ nichtleer.*

Wenn man unter den genannten Voraussetzungen den lokalen Attraktor auf P projeziert, erhält man also ganz P.

Dass nicht jeder lokale Pullback-Attraktor auch ein lokaler Attraktor für den Schiefproduktfluss ist, macht das folgende Gegenbeispiel klar.

Beispiel 5.16 Sei $X = [0, 2]$ und $P = [0, 2] \times [0, 2]$. Auf X bzw. $P \times X$ soll die euklidische Metrik verwendet werden. Definiere auf P den Basisfluss θ als Lösungsabbildung von

$$\dot{p}(t) = (0, p_2(t)(2 - p_2(t))), \quad p(0) = (p_{1,0}, p_{2,0}) \in P.$$

Betrachte weiter für $x \in X$, $p \in P$ die (von p unabhängige) Funktion

$$f(p, x) := \min\{0, x(x-1)\} + \min\{0, (1-x)(2-x)\}, \tag{5.24}$$

die mit der Lösungsabbildung von $\dot{x} = f(p, x)$ auf X den Kozykel ϕ generiert, der in unserem Beispiel wegen der Unabhängigkeit von p sogar ein Fluss ist.

Dann ist $(A_p)_{p\in P}$, $A_p \subset X$ für alle $p \in P$, mit

$$A_p := \begin{cases} [0, 1] & : \; p_1 \leq 1 \\ \{0\} & : \; p_1 > 1 \end{cases}$$

ein lokaler Pullback-Attraktor. Die Familie (A_p) ist natürlich ϕ-invariant, faserweise kompakt und nichtleer. Außerdem gilt mit $\delta = \frac{1}{2}$ für alle $p \in P$

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, B_\delta(A_{\theta_{-t}p})), A_p) \;=\; 0, \tag{5.25}$$

denn für $p \in P$ mit $p_1 \leq 1$ erhalten wir $B_\delta(A_{\theta_{-t}p}) = [0, \frac{3}{2}]$ und mit (5.24) wegen $\lim_{t\to\infty} \phi(t, \theta_{-t}p, \frac{3}{2}) = 1$ ist (5.25) erfüllt. Analog zeigt man die lokale Pullback-Attraktion auch für $p \in P$ mit $p_1 > 1$. Es liegt also mit Satz 5.13 ein lokaler Pullback-Attraktor vor.

Sei nun $\delta^* \in (0, 1]$ beliebig. Für $p \in P$ mit $p_1 = 1 + \frac{\delta^*}{2}$ und $p_2 > 0$ gilt dann $(p, 1 + \frac{\delta^*}{2}) \in B_{\delta^*}(\bigcup_{p\in P}\{p\} \times A_p)$ und für den Schiefproduktfluss π

$$\lim_{t\to\infty} \pi_t(p, 1 + \frac{\delta^*}{2}) = (1 + \frac{\delta^*}{2}, 2, 1) \notin \bigcup_{p\in P} \{p\} \times A_p.$$

Ein lokaler Attraktor liegt also nicht vor. Abbildung 5.2 deutet den Schiefproduktfluss mit dem lokalen Pullback-Attraktor an.

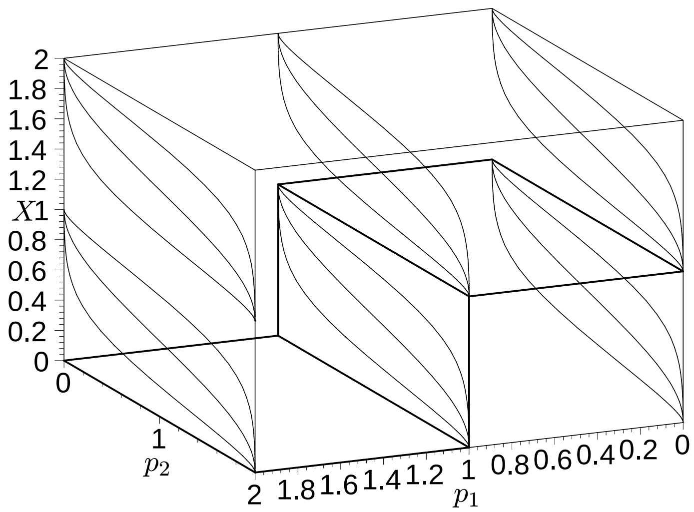

Abbildung 5.2: Ein lokaler Pullback-Attraktor, der kein lokaler Attraktor ist.

5.5 Der globale Pullback-Attraktor als lokaler Attraktor

In diesem Abschnitt soll hergeleitet werden, dass sich jeder globale Pullback-Attraktor, falls P kompakt ist, als ein lokaler Attraktor des Schiefproduktflusses interpretieren lässt. Nach den Vorarbeiten für dieses Hauptergebnis in Satz 5.22 wird dieses Resultat auf die Kontrolltheorie angewendet. Anschließend wird ein Beispiel dafür gegeben, dass man, falls P kompakt ist, nur einen lokalen, aber keinen globalen Attraktor erhält. Inhaltlich wird Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2] gefolgt, wobei hier nur die Implikationen wiedergegeben werden.

Satz 5.17 *Sei π semidynamisches System auf X. Sei die kompakte Menge $M \subset X$ isoliert invariant. Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Orbits γ^x eines beliebigen Punktes $x \in B_\delta(M)\backslash M$*

$$\omega^*(\gamma^x) \cap M = \emptyset \tag{5.26}$$

gilt, dann ist M stabil.

Beweis: Die Aussage soll erst für den zeitdiskreten Fall $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ verifiziert werden. Sei $\delta > 0$, so dass für alle Orbits γ^x eines beliebigen Punktes $x \in B_\delta(M) \backslash M$ $\omega^*(\gamma^x) \cap M = \emptyset$ gilt. Wähle für M ein $\delta_0 > 0$ gemäß Definition 2.8. O.B.d.A. gelte $\delta_0 < \delta$. Angenommen, M sei nicht stabil. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $(\delta_n) \to 0$, $(x_n) \subset X$ mit $x_n \in B_{\delta_n}(M)$ für alle $n \geq 1$ und $(k_n) \to \infty$ mit

$$\pi_k(x_n) \in B_{\varepsilon_0}(M) \quad \text{für } 0 \leq k \leq k_n - 1 \tag{5.27}$$

und $\pi_{k_n}(x_n) \notin B_{\varepsilon_0}(M)$. Wähle ε_0 so, dass

$$H^*(\pi_1(B_{\varepsilon_0}(M)), M) < \frac{\delta_0}{2} \tag{5.28}$$

gilt. Da X Heine-Borell'sch ist, gibt es eine Folge $(n_j) \to \infty$ mit $\overline{x} := \lim_{j\to\infty} \pi_{k_{n_j}-1}(x_{n_j})$ und

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{k_{n_j}}(x_{n_j}) = \pi_1(\overline{x}) =: \tilde{x} \in X \backslash B_{\varepsilon_0}(M).$$

Also existiert mit (5.27) für $m \in \mathbb{Z}$ und

$$\gamma(n,m) := \begin{cases} \pi_{k_n+m}(x_n) & : \quad 0 \leq k_n + m \\ x_n & : \quad 0 > k_n + m \end{cases}$$

und einer geeigneten Folge $(n_k) \to \infty$ der Grenzwert $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}(m) := \lim_{k\to\infty} \gamma(n_k, m)$. $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}$ ist ein Orbit des zeitdiskreten semidynamischen Systems mit $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ und $\overline{\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}(\mathbb{Z}^-)} \subset \overline{B_{\varepsilon_0}(M)}$. (Diese Konstruktion trägt der Tatsache Rechnung, dass nur ein semidynamisches System vorliegt, $\pi_m(\tilde{x})$ für $m \in \mathbb{Z}^-$ also nicht definiert ist.) Somit ist $\omega^*(\tilde{\gamma}^{\tilde{x}})$ nichtleer, kompakt und invariant. Mit

$$\omega^*(\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}) = \pi_1(\omega^*(\tilde{\gamma}^{\tilde{x}})) \subset \pi_1(\overline{B_{\varepsilon_0}(M)}) \subset B_{\delta_0}(M)$$

folgt, da M isoliert invariant ist, $\omega^*(\tilde{\gamma}^{\tilde{x}}) \subset M$. Dies widerspricht aber (5.26), denn mit (5.28) und $\delta_0 < \delta$ gilt $\tilde{x} \in B_\delta(M) \backslash M$.

Gilt nun für den zeitkontinuierlichen Fall $\omega^*(\gamma^x) \cap M = \emptyset$ für ein $x \notin M$, so trifft dies auch für die Einschränkung des semidynamischen Systems auf $\mathbb{Z}^+ \times X$ zu, denn jeden Orbit γ^x des zeitdiskreten dynamischen Systems kann man erweitern zu einem Orbit des zeitkontinuierlichen dynamischen Systems mittels

$$\gamma^x(t) := \pi_\tau(\gamma^x(n)),\ n \in \mathbb{Z},\ t = n + \tau,\ 0 \leq \tau < 1.$$

Für das zeitdiskrete semidynamische System ist M also stabil. Da M kompakt ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ mit $H^*(\pi_t(x), M) < \varepsilon$ für alle $0 \leq t \leq 1$, $x \in B_\mu(M)$. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$H^*(\pi_n(x), M) < \min\{\mu, \varepsilon\}$$

für alle $x \in B_\delta(M)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Zusammen mit der Flusseigenschaft von π ergibt sich die Stabilität von M für den zeitkontinuierlichen Fall. □

Lemma 5.18 *Sei $M \subset X$ kompakt und positiv invariant unter dem semidynamischen System π. Wenn $\omega(M)$ isoliert invariant und asymptotisch stabil ist, dann ist auch M asymptotisch stabil.*

Beweis: Wegen der Kompaktheit und positiven Invarianz von M gilt mit (5.16) $\omega(M) = \bigcap_{t \geq 0} \pi_t(M)$. Also gibt es ein $\mu > 0$ und $\tau \in \mathbb{T}^+$ mit

$$\pi_\tau(M) \subset B_\mu(\omega(M)) \subset W^s(\omega(M)).$$

Das Urbild $\pi_\tau^{-1}(B_\mu(\omega(M)))$ ist eine offene Umgebung von M mit $\pi_\tau(\pi_\tau^{-1}(B_\mu(\omega(M)))) \subset W^s(\omega(M))$. Dann folgt $\lim_{t\to\infty} H^*(\pi_t(x), \omega(M)) = 0$ für jedes $x \in \pi_\tau^{-1}(B_\mu(\omega(M))) \subset W^s(\omega(M))$ und somit auch $\lim_{t\to\infty} H^*(\pi_t(x), M) = 0$ wegen $\omega(M) \subset M$.

Jetzt soll die Stabilität von M gezeigt werden. Angenommen, M sei nicht stabil. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, Folgen $(\delta_n) \to 0$, $(t_n) \to \infty$ und $(x_n) \subset X$, $x_n \in B_{\delta_n}(M)$ für alle $n > 0$, mit

$$H^*(\pi_{t_n}(x_n), M) \geq \varepsilon_0. \tag{5.29}$$

Für ein hinreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\overline{\{x_n : n \geq n_0\}} \subset \pi_\tau^{-1}(B_\mu(\omega(M))).$$

Mit M ist auch die Menge $\overline{\{x_n : n \geq n_0\}}$ kompakt, weshalb sie von $\omega(M) \subset M$ attrahiert würde, was (5.29) widerspräche. □

Lemma 5.19 *Sei $M \subset X$ kompakt und positiv invariant unter dem semidynamischen System π. Wenn $\omega(M)$ isoliert invariant und stabil ist, dann ist M asymptotisch stabil.*

Beweis: Wegen Satz 2.10 ist $\omega(M)$ invariant. Es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\pi_t(B_\delta(\omega(M))) \subset B_\varepsilon(\omega(M))$$

für alle $t \geq 0$. $\omega(B_\delta(\omega(M)))$ ist also nichtleer und kompakt und mit Satz 2.10 invariant. Falls $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt wurde, gilt, da $\omega(M)$ isoliert invariant ist, $\omega(B_\delta(\omega(M))) \subset \omega(M)$, bzw. wegen der Invarianz von $\omega(M)$ auch $\omega(B_\delta(\omega(M))) = \omega(M)$. Mit Satz 2.17 folgt

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\pi_t(B_\delta(\omega(M))), \omega(B_\delta(\omega(M)))) = 0$$

und somit die asymptotische Stabilität von $\omega(M)$. Die Aussage folgt jetzt mit Lemma 5.18. □

Korollar 5.20 *Sei $M \subset X$ kompakt und invariant unter dem semidynamischen System π auf X. Wenn M isoliert invariant und stabil ist, dann ist M asymptotisch stabil.*

Beweis: Dies folgt mit $M = \omega(M)$ aus Lemma 5.19. □

Satz 5.21 *Sei π ein semidynamisches System auf X und $M \subset X$ kompakt und invariant. Wenn M isoliert invariant ist und es ein $\delta > 0$ gibt mit $\omega^*(\gamma^x) \cap M = \emptyset$ für jeden Orbit γ^x eines beliebigen Punktes $x \in B_\delta(M) \backslash M$, dann ist M asymptotisch stabil.*

Beweis: Die Aussage ergibt sich sofort aus Satz 5.17 und Korollar 5.20. □

Liegt ein Pullback-Attraktor $(A_p)_{p\in P}$ auf X bzgl. (P,θ) vor, so ist, wie der nachfolgende Satz besagt, der Graph in $P\times X$ der Funktion $P\ni p\mapsto A_p\in \mathrm{Pot}(X)$ asymptotisch stabil für den Schiefproduktfluss, wobei $d+d_P$ als Metrik auf $P\times X$ verwendet werden kann, wenn d_P Metrik auf P ist.

Satz 5.22 *Sei P kompakter metrischer Raum. Sei ϕ Kozykel auf X bzgl. (P,θ) und $(A_p)_{p\in P}$ Pullback-Attraktor. Für $\mathcal{A}:=\bigcup_{p\in P}\{p\}\times A_p$ gilt dann:*

(i) $\omega^*(\gamma^y)=\emptyset$ für alle Orbits γ^y eines beliebigen Punktes $y\in P\times X\backslash\mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ ist asymptotisch stabil für den Schiefproduktfluss π.

Beweis:

(i) Angenommen, es existiere ein $y=(p,x)\in P\times X\backslash\mathcal{A}$ mit $\omega^*(\gamma^y)\neq\emptyset$ für einen Orbit γ^y durch y. Dann gibt es eine Folge $(\tau_n)\to\infty$, so dass $(\gamma^y(-\tau_n))$ konvergent ist. Sei K die Projektion von $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma^y(-\tau_n)}$ auf X. Die Kompaktheit von K folgt aus der Kompaktheit von $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma^y(-\tau_n)}$. Da (A_p) Pullback-Attraktor ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} H^*(\phi(\tau_n,\theta_{-\tau_n}p,K),A_p)=0.$$

Wegen $x\in\phi(\tau_n,\theta_{-\tau_n}p,K)$ für alle $n>0$ erhalten wir $x\in A_p$, was $(p,x)\in\mathcal{A}$ mit sich zieht. Dies widerspricht $y\in P\times X\backslash\mathcal{A}$.

(ii) Wegen Lemma 5.3 ist $\mathcal{A}$ maximale kompakte invariante Teilmenge von $P\times X$. Die Aussage folgt dann aus Satz 5.21 und (i). □

Vereinfacht gesagt, ist jeder globale Pullback-Attraktor ein lokaler Attraktor, falls P kompakt ist. Da diese Bedingung bei den Kontrollsystemen erfüllt ist, kann Satz 5.22 auf Pullback-Attraktoren für die in Abschnitt 4.2 eingeführten Lösungsabbildungen angewendet werden.

Korollar 5.23 *Sei ϕ eine für $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ definierte stetige eindeutige Lösungsabbildung des Kontrollsystems 4.1, d.h. ein Kozykel bzgl. $(\mathcal{U},\theta)$ auf einer d-dimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit M der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $(A_u)_{u\in\mathcal{U}}$ Pullback-Attraktor auf M. Dann ist $\mathcal{A}:=\bigcup_{u\in U}\{u\}\times A_u$ ein lokaler Attraktor für den Schiefproduktfluss π auf $\mathcal{U}\times M$, wobei als Metrik auf dem Produktraum die Summe der Metriken auf den beiden Faktoren verwendet werden soll.*

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Satz 5.22, wenn man beachtet, dass die asymptotische Stabilität nur eine Umformulierung der Tatsache ist, dass $\mathcal{A}$ ein lokaler Attraktor ist - vorausgesetzt, Invarianz und Kompaktheit sind gegeben, was aber wegen Lemma 2.29 und der Oberhalbstetigkeit der Funktion $\mathcal{U}\ni u\mapsto A_u\in\mathrm{Pot}(M)$ der Fall ist. □

Die Verschärfung von Satz 5.22, dass jeder globale Pullback-Attraktor auch ein globaler Attraktor ist, gilt tatsächlich nicht, was nachfolgendes Beispiel deutlich macht.

Beispiel 5.24 Definiere für $t \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(t) := -\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right)^2,$$

sei

$$P := \bigcup_{h\in\mathbb{R}} \{f(\cdot + h)\} \cup \{0\}$$

und θ der Rechtsshift auf P. Mit

$$\beta(p) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+h^2} & : \quad p = \theta_h(f) \\ 0 & : \quad p = 0 \end{cases}$$

kann man nun folgenden Kozykel auf $X = \mathbb{R}_+$ bzgl. (P, θ) definieren:

$$\phi(t,p,x) := \begin{cases} \frac{1}{e^t(1/x-\beta(p))+\beta(\theta_t p)} & : \quad 0 < x\beta(p) \leq 1 \\ x + \frac{1}{\beta(\theta_t p)} - \frac{1}{\beta(p)} & : \quad 1 < x\beta(p) \\ e^{-t}x & : \quad x\beta(p) = 0 \end{cases}.$$

Die drei aufgeführten Fälle beschreiben die Funktion ϕ auf ganz $\mathbb{R}_+ \times P \times \mathbb{R}_+$ und die Stetigkeit von ϕ ist gegeben aufgrund der Stetigkeit der drei angegebenen Terme - zusammen mit der Überlegung, dass ϕ auch in Punkten $(t,p,x) \in \mathbb{R}_+ \times P \times \mathbb{R}_+$ mit $x\beta(p) = 1$ oder $x\beta(p) = 0$ stetig ist.

Es verbleibt, die algebraischen Kozykeleigenschaften von ϕ nachzuweisen.

Die Identität $\phi(0,p,\cdot) = \mathrm{id}_X,\ p \in P$, ist sofort klar. Sei nun $s,t \in \mathbb{R}_+$ und $x \in X$. Zunächst stellt man fest, dass mit $0 < x\beta(p) \leq 1$ (woraus $\beta(\theta_s p) > 0$ und $1/x - \beta(p) \geq 0$ folgt) auch $0 < \phi(s,p,x) \cdot \beta(\theta_s p) \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{e^s(1/x-\beta(p))+\beta(\theta_s p)}\beta(\theta_s p) \\ &= \frac{1}{e^s(1/x-\beta(p))/\beta(\theta_s p)+1} \leq 1. \end{aligned}$$

Weiterhin stellt man fest, dass mit $1 < x\beta(p)$ (woraus $\beta(\theta_s p) > 0$ und $x - 1/\beta(p) > 0$ folgt) auch $1 < \phi(s,p,x) \cdot \beta(\theta_s p)$ gilt:

$$(x + \frac{1}{\beta(\theta_s p)} - \frac{1}{\beta(p)})\beta(\theta_s p) \ = \ (x - \frac{1}{\beta(p)})\beta(\theta_s p) + 1 \ > \ 1.$$

Schließlich folgt mit $x\beta(p) = 0$ auch $\phi(s,p,x) \cdot \beta(\theta_s p) = 0$.

Wir können nun die zweite algebraische Kozykeleigenschaft nachweisen: Für $0 < x\beta(p) \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(t,\theta_s p,\phi(s,p,x)) &= \frac{1}{e^t(e^s(1/x-\beta(p))+\beta(\theta_s p)-\beta(\theta_s p))+\beta(\theta_{s+t}p)} \\ &= \frac{1}{e^{s+t}(1/x-\beta(p))+\beta(\theta_{s+t}p)} \\ &= \phi(s+t,p,x); \end{aligned}$$

für $1 < x\beta(p)$ gilt

$$\begin{aligned}\phi(t,\theta_s p,\phi(s,p,x)) &= x + \frac{1}{\beta(\theta_s p)} - \frac{1}{\beta(p)} + \frac{1}{\beta(\theta_{s+t}p)} - \frac{1}{\beta(\theta_s p)}\\ &= \phi(s+t,p,x);\end{aligned}$$

und für $x\beta(p) = 0$ erhält man

$$\phi(t,\theta_s p,\phi(s,p,x)) = e^{-s}e^{-t}x = \phi(s+t,p,x).$$

Die Behauptung ist, dass $(A_p)_{p\in P}$ mit $A_p = \{0\}$ für alle $p \in P$ ein globaler Pullback-Attraktor, aber $\mathcal{A} := \bigcup_{p\in P}\{p\} \times A_p$ kein globaler Attraktor des Schiefproduktflusses ist.

Die Familie (A_p) ist ϕ-invariant und die Mengen $A_p, p \in P$, sind kompakt und nichtleer. Außerdem ist $\overline{\bigcup_{p\in P} A_p}$ kompakt. Sei $D \subset X$ kompakt und $m := \max(D)$, o.B.d.A. $m > 0$. Dann gilt für $p = 0$

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p,D),A_p) \;=\; \lim_{t\to\infty} H^*(e^{-t}m,A_p) \;=\; 0$$

und, wegen $m\beta(\theta_{-t}p) \le 1$ für alle hinreichend großen t, auch für $p \neq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p,D),A_p) &= \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p,m),A_p)\\ &= \lim_{t\to\infty} H^*(\frac{1}{e^t(1/m - \beta(\theta_{-t}p)) + \beta(p)},A_p) = 0.\end{aligned}$$

Wird $d+d_P$ als Metrik auf $P\times X$ verwendet, wenn d_P eine beliebige Metrik auf P und d der kanonische Abstand auf X ist, so ist $\mathcal{A}$ kein globaler Attraktor, denn für $p \in P$, $x \in X$ mit $x\beta(p) > 1$ gilt $\lim_{t\to\infty}\phi(t,p,x) = \infty$, d.h. die kompakte Menge $\{p\}\times\{x\}$ wird nicht von $\mathcal{A}$ attrahiert. Abbildung 5.3 vermittelt einen Eindruck vom Schiefproduktfluss in $P\times X$, in Abbildung 5.4 ist der Schiefproduktfluss auf dem Torus dargestellt.

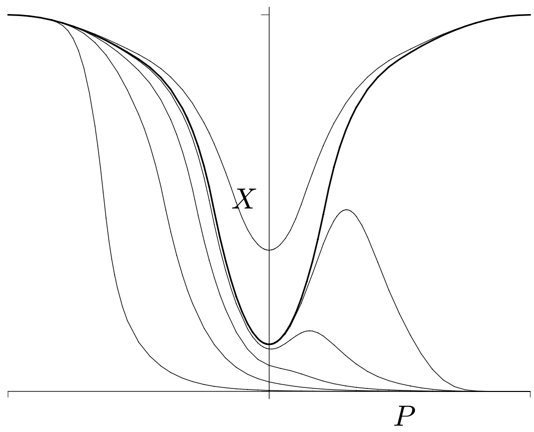

Abbildung 5.3: Der Schiefproduktfluss in $P \times X$.

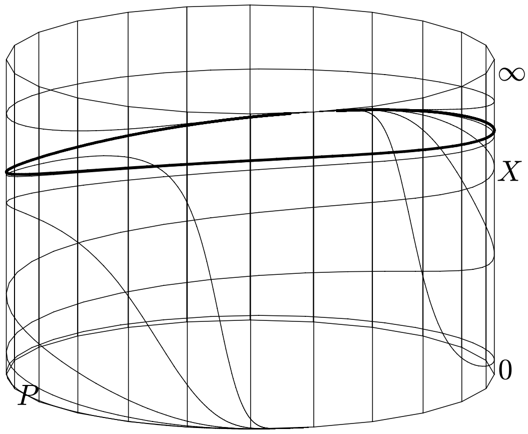

Abbildung 5.4: Der Schiefproduktfluss auf dem Torus.

5.6 Der lokale Pullback-Attraktor als lokaler Attraktor

Im letzten Abschnitt wird bewiesen, dass unter Zusatzbedingungen jeder lokale Pullback-Attraktor $(A_p)_{p\in P}$ in X ein lokaler Attraktor auf $P\times X$ ist. Dies stellt einen der in Abschnitt 5.7 angedeuteten Ansätze zur Definition des Pullback-Repellers dar. Dann wird anhand eines Beispiels gezeigt, dass für Attraktoren auf dem Produktraum nicht für jede Faser die in Definition 3.1 geforderte echte Inklusion gelten muss.

Satz 5.25 *Sei P kompakter metrischer Raum. Sei ϕ ein zeitinvertierbarer Kozykel bzgl. (P,θ) auf dem zusätzlich kompakten Raum X und $(A_p)_{p\in P}$ ein lokaler Pullback-Attraktor mit Pullback-Umgebung (U_p). Wenn mit $\bigcup_{p\in P}\{p\}\times U_p$ eine Umgebung von $\mathcal{A} := \bigcup_{p\in P}\{p\}\times A_p$ vorliegt, ist $\mathcal{A}$ ein lokaler Attraktor für den Schiefproduktfluss π.*

Beweis: Wegen Lemma 2.29 ist $\mathcal{A}$ invariant unter dem Schiefproduktfluss, denn (A_p) ist mit Satz 5.13 ϕ-invariant. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ folgert man wie im Beweis von Lemma 5.3 (siehe Cheban, Kloeden, Schmalfuß [2]): $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ ist kompakt und wegen

$$\pi_t(\mathcal{B}) = \pi_t(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\pi_t(\overline{\mathcal{A}})} = \overline{\pi_t(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{B} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^+$$

π-invariant.

Wegen Lemma 2.29 ist $(B_p)_{p\in P}$, die Familie der Fasern von $\mathcal{B}$, ϕ-invariant. Nach Konstruktion gilt $B_p \supset A_p$ für alle $p \in P$. Dass sogar Gleichheit vorliegt, folgt mit (5.14), der ϕ-Invarianz von (B_p) und der Abgeschlossenheit von A_p, $p \in P$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p, U_{\theta_{-t}p}), \Omega(U_p)) \\ &= \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p, U_{\theta_{-t}p}), A_p) \\ &\geq \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t,\theta_{-t}p, B_{\theta_{-t}p}), A_p) \\ &= H^*(B_p, A_p) \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{A}$ kompakt.

Dass wirklich ein Attraktor vorliegt, zeigt man jetzt mit Lemma 2.22: Sei dazu $\mathcal{B} = \bigcup_{p\in P}\{p\} \times B_p \subset \bigcup_{p\in P}\{p\} \times U_p$ eine kompakte Umgebung von $\mathcal{A}$ und $x \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{A}$. Angenommen, es gelte $\gamma^-(x) \subset \mathcal{B}$. Dann ergibt sich der Widerspruch

$$0 = \lim_{t\to\infty} H^*(\phi(t, \theta_{-t}p, B_{\theta_{-t}p}), A_p) \geq H^*(x, A_p) > 0.$$

□

Trivialerweise gibt Satz 5.25 eine Antwort auf die Frage, wie bzw. unter welchen Bedingungen die Morsetheorie und die Theorie der Pullback-Attraktoren in Verbindung gebracht werden können. Unter den genannten Voraussetzungen findet man zu einem lokalen Pullback-Attraktor (A_p) einen Repeller, nämlich den Repeller zum Attraktor $\bigcup_{p\in P}\{p\}\times A_p$. Für solche Pullback-Attraktoren sind damit für den Schiefproduktfluss auf $P \times X$ alle Ergebnisse aus Kapitel 3 anwendbar - unter Berücksichtigung einer Besonderheit: Der lokale Pullback-Attraktor soll nichtleere Fasern haben. Beim Repeller ist dies jedoch nicht der Fall, wenn eine Faser des Pullback-Attraktors der ganze Raum ist.

Jetzt soll ein Beispiel untersucht werden, bei dem lokale Attraktoren auf den Produktraum vorliegen. Und zwar soll der Frage nachgegangen werden, ob die in Definition 3.1 geforderte echte Inklusion automatisch nach sich zieht, dass die Attraktoren in jeder Faser echt ineinander enthalten sind. Dass diese Frage negativ zu beantworten ist, macht das folgende Beispiel klar. Nicht jede Faser einer Morsemenge muss nichtleer sein, selbst wenn dies bei den vorliegenden Attraktoren der Fall sein sollte.

Beispiel 5.26 Sei $X = [0, 6]$ und $\mathcal{U}_{[0,1]}$ die Menge der konstanten Funktionen mit Werten in $U = [0, 1]$. Dann gilt $\theta_{|\mathcal{U}_{[0,1]}} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}_{[0,1]}}$ für den Shiftfluss θ auf $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Man kann $\mathcal{U}_{[0,1]}$ mit $[0, 1]$ identifizieren und $\mathrm{id}_{\mathcal{U}_{[0,1]}}$ mit $\mathrm{id}_{[0,1]}$. Setze weiterhin

$$f(x) := x(6 - x) \text{ und } g(x) := x(x - 2)(x - 4)(6 - x), \quad x \in X.$$

Es soll

$$\dot{x} = (1 - u)f(x) + ug(x) \tag{5.30}$$

untersucht werden. Die rechte Seite (siehe Abbildung 5.5) ist eine Konvexkombination von f und g und besitzt ein $u_0 = 1/2 \in [0, 1]$, so dass es für alle $u > u_0$ genau vier Nullstellen $0 = x_1 < x_2(u) < x_3(u) < x_4 = 6$ gibt, für $u = u_0$ genau drei Nullstellen $0 = x_1 < x_2(u) = x_3(u) = 3 < x_4 = 6$ und für $u < u_0$ genau zwei Nullstellen $x_1 = 0 < x_4 = 6$.

Dann findet man folgende Attraktoren für den Schiefproduktfluss auf $U \times X$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \emptyset \\
\mathcal{A}_1 &= \bigcup_{u\in U}\{u\} \times \{6\} = [0, 1] \times \{6\} \\
\mathcal{A}_2 &= \bigcup_{u<u_0}\{u\} \times \{6\} \cup \bigcup_{u\geq u_0}\{u\} \times [x_2(u), 6] \\
\mathcal{A}_3 &= U \times X
\end{aligned}$$

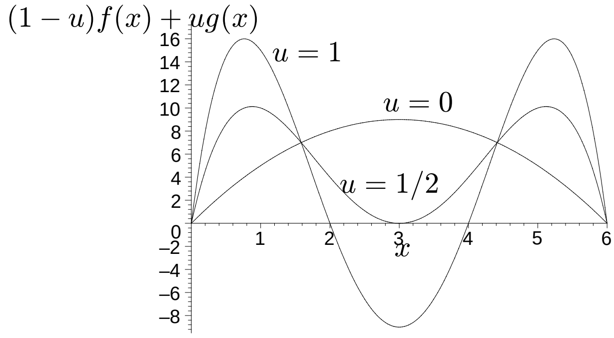

Abbildung 5.5: Die rechte Seite von (5.30) für $u = 0$, $u = 1/2$ und $u = 1$.

Was die Fasern betrifft, finden wir für die Attraktoren: $A_{u,1} = A_{u,2}$ für $u < u_0$.

Außerdem findet man folgende Repeller:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0^* &= U \times X \\
\mathcal{A}_1^* &= \bigcup_{u<u_0} \{u\} \times \{0\} \cup \bigcup_{u \geq u_0} \{u\} \times [0, x_3(u)] \\
\mathcal{A}_2^* &= \bigcup_{u \in U} \{u\} \times \{0\} = [0,1] \times \{0\} \\
\mathcal{A}_3^* &= \emptyset
\end{aligned}$$

Auch die Morsemengen lassen sich angeben:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_0^* = [0,1] \times \{6\} \\
M_2 &= \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_1^* = \bigcup_{u \geq u_0} \{u\} \times [x_2(u), x_3(u)] \\
M_3 &= \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_2^* = [0,1] \times \{0\}
\end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Morsemengen linear geordnet, nämlich $M_3 \geq M_2 \geq M_1$. Man beachte ferner, dass es im Sinne von Korollar 3.6 *ein* $x \in U \times X$ gibt mit $\omega^*(x) \subset M_3$ und $\omega(x) \subset M_1$. Abbildung 5.6 veranschaulicht den Schiefproduktfluss und macht außerdem klar, dass die Fasern von M_2 für $u < \frac{1}{2}$ leer sind.

5.7 Ausblick und Rückschau

In dieser Arbeit sind bis jetzt der Attraktor, der Repeller und der Pullback-Attraktor definiert. Jetzt sollen einige Überlegungen dazu angestellt werden, ob in vernünftiger Weise ein Pullback-Repeller definiert werden kann. Drei Ansätze werden skizziert. Zum Abschluss wird eine tabellarische Übersicht von vier Sätzen aus Kapitel 5 gegeben.

Eine triviale Definition des Pullback-Repellers, die schon dargelegt wurde, soll kurz angerissen werden. Wir haben in dieser Arbeit gesehen, dass, selbst wenn P kompakt ist, nicht

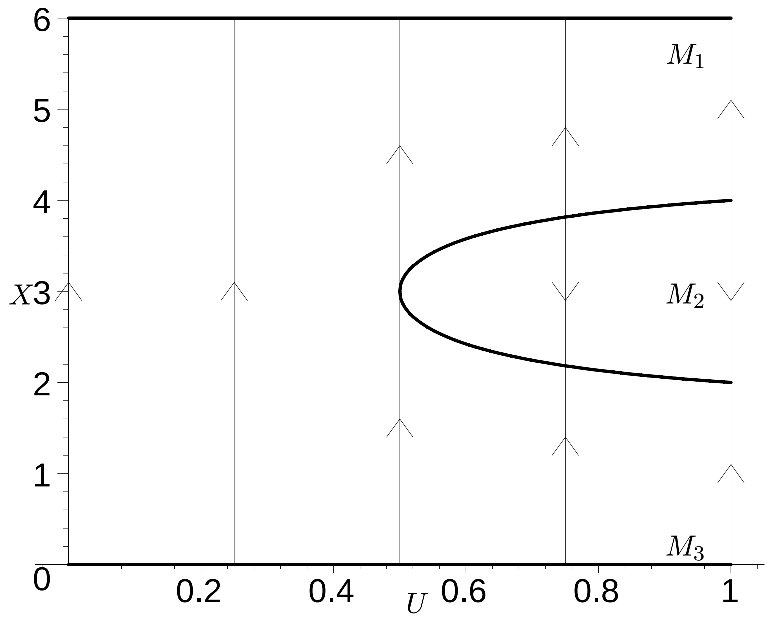

Abbildung 5.6: Der Schiefproduktfluss auf $U \times X$ mit den Nullstellen der rechten Seite von (5.30).

jeder lokale Pullback-Attraktor ein lokaler Attraktor sein muss. Falls jedoch ein lokaler Pullback-Attraktor ein lokaler Attraktor sein sollte, kann der Pullback-Repeller natürlich über die Fasern des Repellers definiert werden. Jedoch ist hierbei zu bedenken, dass keine faserweise Rückwärtskonvergenz vorliegen muss. Dies ergibt sich mit der Tatsache, dass bei einem Attraktor keine faserweise Vorwärtskonvergenz vorliegen muss. Dieser Ansatz, der sowieso nur in speziellen Fällen anzuwenden ist, ist also nur ein Sonderfall des autonomen Falls – nämlich wenn der Zustandsraum der Produktraum $P \times X$ ist. Auf die Möglichkeit, dass der Pullback-Repeller leere Fasern haben kann, sei nochmal hingewiesen. Dies tritt ein, wenn Fasern des Pullback-Attraktors der ganze Raum sind.

Die Fasern eines lokalen Attraktors $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p$ und des zugehörigen Repellers $\mathcal{A}^* = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p^*$ sind disjunkt: Angenommen, es existiere ein $\tilde{p} \in P$ mit $A_{\tilde{p}} \cap A_{\tilde{p}}^* \neq \emptyset$. Dann ergibt sich der Widerspruch wie folgt:

$$\emptyset = \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p \cap \bigcup_{p \in P} \{p\} \times A_p^* \supset \{\tilde{p}\} \times A_{\tilde{p}} \cap \{\tilde{p}\} \times A_{\tilde{p}}^* = \{\tilde{p}\} \times (A_{\tilde{p}} \cap A_{\tilde{p}}^*) \neq \emptyset$$

Ein zweiter Ansatz verzichtet auf die Voraussetzung, dass der Pullback-Attraktor, von dem ausgehend der Pullback-Repeller definiert wird, ein lokaler Attraktor ist. Zunächst sei die Frage aufgeworfen, welche Eigenschaften ein Pullback-Repeller haben sollte? Erst einmal wäre an die ϕ-Invarianz zu denken und daran, dass die Fasern nichtleer und kompakt sein sollten. Auch die Forderung, dass Pullback-Attraktor und -Repeller faserweise leeren Schnitt haben, scheint hinsichtlich der Morsetheorie sinnvoll zu sein. Wie sieht es aber mit der Pullback-Attraktion bzw. -Repulsion aus? Ob Pullback-Konvergenz vorliegt, entscheidet sich „in $-\infty$“ und es erscheint sinnvoll, dass es auch bei dem Pullback-Repeller dort entschieden werden soll, ob Pullback-Repulsion vorliegt. Dass dies nicht die einzige Möglichkeit ist, werden wir später sehen.

Pullback-Repulsion soll jetzt als faserweise Attraktion „nach $-\infty$“ definiert werden.

Definition 5.27 *Sei P ein metrischer Raum und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P,θ). Eine ϕ-invariante Familie $(A_p^*)_{p\in P}$ kompakter nichtleerer Teilmengen von X heiße Pullback-Repeller zum Pullback-Attraktor $(A_p)_{p\in P}$, falls der Schiefproduktfluss π auf X zeitinvertierbar ist und für alle $p \in P$ und $x \notin A_p$*

$$\lim_{t\to\infty} H^*\left(\phi(-t,p,x), A^*_{\theta_{-t}p}\right) = 0 \tag{5.31}$$

gegeben ist und

$$A_p \cap A_p^* = \emptyset \quad \text{für alle } p \in P \tag{5.32}$$

gilt.

Neben der hier nicht beantworteten Frage der Existenz ergibt sich hier auch das Problem der Eindeutigkeit. Diese ist nämlich nicht gegeben, wie nachfolgendes Beispiel deutlich macht. Außerdem wird auf mögliche Maximalitäts- bzw. Minimalitätsforderungen (bzgl. Inklusion) in obiger Definition eingegangen.

Setze $X = [0,2]$ und $\dot{x}(t) = -x(t)(x(t)-1)(x(t)-2)$, $x(t) \in X$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Setze weiter $P = [0,2]$ und $\dot{p}(t) = p(t)(2-p(t))$, $p(t) \in P$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichungen generieren einen Fluss auf X bzw. P. Der resultierende Fluss auf X kann als Kozykel aufgefasst werden, der von den Argumenten aus P unabhängig ist. Auf $P \times X$ erhalten wir mit $(p(t), x(t)), t \in \mathbb{R}$, den Schiefproduktfluss, der diesmal aus zwei autonomen dynamischen Systemen besteht und von Abbildung 5.7 ungefähr wiedergegeben wird. Ein lokaler Pullback-Attraktor ist $[0,2]\times\{0\}$, für die Pullback-Umgebung (U_p) kann $U_p = [0,\delta]$, $p \in P$, $0 < \delta < 1$, gewählt werden. Ein Pullback-Repeller ist nach obiger Definition jede ϕ-invariante, faserweise kompakte und nichtleere Familie (A_p^*), die (5.32) erfüllt und die auf dem Produktraum die Menge $\{0\} \times [1,2] \cup]0,2[\times\{2\} \cup \{2\} \times [1,2]$ echt enthält. Hierbei beachte man, dass jetzt *faserweise* Rückwärtskonvergenz betrachtet wird und nicht Rückwärtskonvergenz im Produktraum. Das Beispiel wurde so gewählt, dass weder durch die Forderung nach Maximalität noch nach Minimalität der $A_p^*, p \in P$, Eindeutigkeit zu erreichen ist, denn es gibt keine maximale oder minimale ϕ-invariante, faserweise kompakte und nichtleere Familie mit den Eigenschaften (5.31) und (5.32). Außerdem sollte, wenn mit dem Pullback-Attraktor, von dem ausgehend der Pullback-Repeller definiert wird, ein lokaler Attraktor vorliegt, der Pullback-Repeller mit dem Repeller übereinstimmen. Dies ist im Allgemeinen nicht gegeben, denn bei einem Repeller muss im Allgemeinen keine faserweise Rückwärtskonvergenz vorliegen.

Um zum letzten Ansatz zu kommen, sei die Idee aufgezeigt, einen Pullback-Repeller für den Kozykel ϕ als Pullback-Attraktor des zeitinvertierten Kozykels $\phi^*(t,p,x) := \phi(-t,p,x), t \in \mathbb{T}, p \in P, x \in X$, zu definieren. Leicht lässt sich zeigen, dass ϕ^* ein Kozykel bzgl. (P,θ^*), mit $\theta_t^*(p) := \theta_{-t}(p), t \in \mathbb{T}, p \in P$, ist.

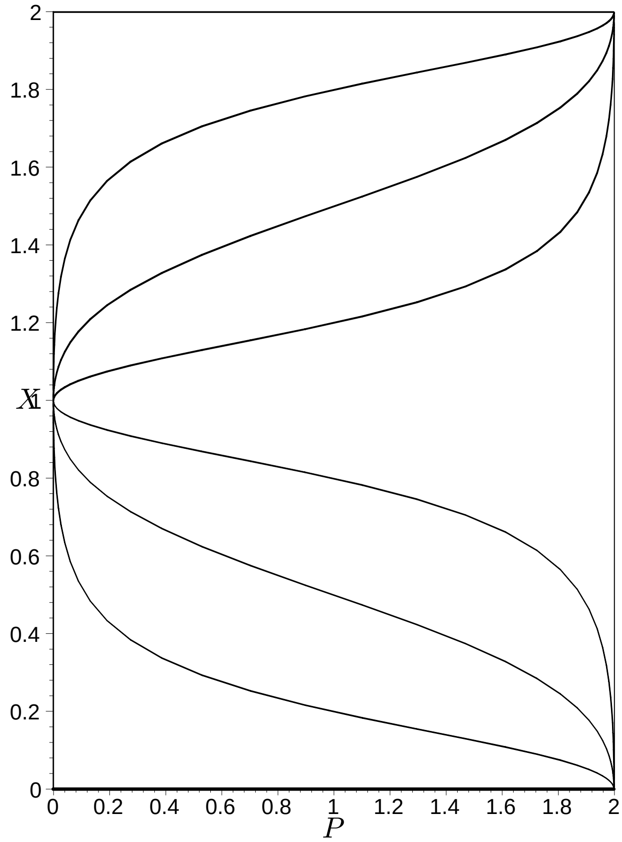

Abbildung 5.7: Zur Definition des Pullback-Repellers.

Lemma 5.28 *Für einen zeitinvertierbaren Kozykel ϕ bzgl. (P, θ) ist die Abbildung*

$$\phi^* : \mathbb{T} \times P \times X \ni (t, p, x) \to \phi(-t, p, x) \in X$$

ein Kozykel bzgl. (P, θ^*).

Beweis: Sei $p \in P$ und $x \in X$. Dann gilt $\phi^*(0, p, \cdot) = \mathrm{id}_X$ und für $t, \tau \in \mathbb{T}$ auch

$$\begin{aligned} \phi^*(\tau + t, p, x) &= \phi(-\tau - t, p, x) \\ &= \phi(-\tau, \theta_{-t}p, \phi(-t, p, x)) \\ &= \phi^*(\tau, \theta^*_t p, \phi^*(t, p, x)). \end{aligned}$$

□

Sei also (A^*_p) ein Pullback-Attraktor für ϕ^* bzgl. (P, θ^*). Dann gibt es mit Satz 5.13 ein $\delta > 0$ mit

$$\lim_{t\to\infty} H^*(\phi(-t, \theta_t p, B_\delta(A^*_{\theta_t p})), A^*_p) = 0$$

für alle $p \in P$. Während bei einem Pullback-Attraktor gewissermaßen faserweise Vorwärtskonvergenz „von $-\infty$“ bis zu einer festen Faser vorliegt, kann man bei einem Pullback-Repeller im obigen Sinn von faserweiser Rückwärtskonvergenz „von $+\infty$“ bis zu einer festen Faser sprechen. Jetzt ist jedoch zu bemerken, dass sich beides nicht ausschließt, ein Pullback-Attraktor somit auch ein Pullback-Repeller sein kann, was im Sinne der Morsetheorie nicht als wünschenswert erscheint, weswegen es sich anbietet, auch hier die Bedingung (5.32) zu fordern. Mit diesen Worten soll die Darstellung der drei Ansätze abgeschlossen sein.

Als Abschluss dieser Arbeit wird eine vereinfachende Übersicht von wichtigen Sätzen von Kapitel 5 gegeben. Dabei ist P kompakter metrischer Raum und ϕ ein Kozykel auf X bzgl. (P, θ).

Satz	**Voraussetzungen**	**Aussage**
5.6	B gleichmäßig in P absorbierende Menge mit $\phi(t, p, B) \subset B$ für alle $t \in \mathbb{T}^+, p \in P$	globaler Attraktor $\mathcal{A}$ existiert und entspricht globalem Pullback-Attraktor (A_p) über $\mathcal{A} = \bigcup\{p\} \times A_p$
5.14	X kompakt, ϕ zeitinvertierbar, $\pi_t(\overline{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{B}$ für alle $t \geq T$	lokaler Attraktor existiert und entspricht lokalem Pullback-Attraktor über $\omega(\bigcup\{p\} \times B_p) = \bigcup\{p\} \times \Omega(B_p)$
5.22	(A_p) globaler Pullback-Attraktor	(A_p) entspricht lokalem Attraktor $\bigcup\{p\} \times A_p$ (nicht globalem Attraktor, siehe Beispiel 5.24), für die Anwendung auf die Kontrolltheorie siehe Korollar 5.23
5.25	X kompakt, ϕ zeitinvertierbar, (A_p) lokaler Pullback-Attraktor mit Pullback-Umgebung (U_p), $\bigcup\{p\} \times U_p$ Umgebung von $\bigcup\{p\} \times A_p$	$\bigcup\{p\} \times A_p$ ist lokaler Attraktor

Literaturverzeichnis

[1] J.-P. Aubin und H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] D. N. Cheban und P. E. Kloeden und B. Schmalfuss, *The Relationship between Pullback, Forward and Global Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2 (2002), S. 9–28.

[3] D. N. Cheban und B. Schmalfuss und P. E. Kloeden, *Pullback attractors in dissipative nonautonomous differential equations under discretization*, Journal of Dynamics and Differential Equations, 13 (2001), S. 185–213.

[4] F. Colonius und W. Kliemann, *Some Aspects of Control Systems as Dynamical Systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations, 5 (1993), S. 469–494.

[5] F. Colonius und W. Kliemann, *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[6] H. Crauel und F. Flandoli, *Attractors for random dynamical systems*, Probability Theory and Related Fields, 100 (1994), S. 365–393.

[7] P. E. Kloeden und B. Schmalfuss, *Cocycle Attractors of Variable Time–Step Discretizations of Lorenzian Systems*, Journal of Difference Equations and Applications, 3 (1997), S. 125–145.

[8] K. Kuratowski, *Topology, Vol.I*, Academic Press, New York, 1966.

[9] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer–Verlag, New York, 1987.

[10] K. P. Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, Berlin, 1987.

[11] A. M. Stuart und A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.