Eine PDGL zur Bewertung von Zinsderivaten

Peter Kohl-Landgraf

Universität Bayreuth, 05.02.2007

Drei Aspekte

1. Zusammenhang zwischen Stochastik und PDGL
2. Einblick in die Modellierung der Renditekurve
3. Numerik der Bewertungs-PDGL

Motivation für Modelle

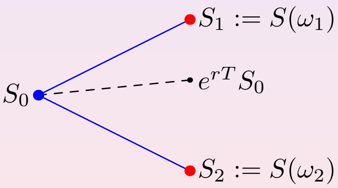
- Verschiedene Finanzmaerkte:
- Aktienmarkt, Zinsmarkt = Wertpapiermaerkte
- Optionen, Futures = Derivative Maerkte
- Option: $\Phi(S) = \max\left[S - K, 0\right]$
  - Standard Strukturen $\Rightarrow$ Preis = Angebot + Nachfrage
  - Exotische Strukturen $\Rightarrow$ Preis = ??
- Ansatzpunkt: Mathematisches Modell = Extrapolation

Grundprinzipien

- Ungewissheit: Stochastisches Modell
- Arbitrage-Freiheit: Risiko-Neutrale Bewertung (Black & Scholes)

Risiko-Neutrale Bewertung durch Replikation

- Betrachte simplifizierten Markt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - subjektiven Wskeiten: $P(\{\omega_1\}) = p$, und $P(\{\omega_2\}) = 1 - p$
  - Zwei Zeitpunkte: $t = 0$ und $t = T$
- Vorhandene Quantitäten: Geld $D(0, T) = e^{-rT}$ mit $D(T, T) = 1$
- Aktie S:



- Option zur Zeit T: $\Phi(S) = \max(S - K, 0) \quad \Rightarrow \quad$ Wert V_0 ?

- Intuitiver Bewertungsansatz:

$$V_0^{\text{Option}} = D(0,T)\mathbb{E}^P[\Phi(.)] = e^{-rT}\left[p\Phi_1 + (1-p)\Phi_2\right]$$

- $\Rightarrow$ Leider falsch, denn ...
- $\Phi(.)$ kann durch geeignetes Portfolio P repliziert werden
- Portfolio (ϕ, ψ) mit:

$$V_t^P = \phi S_t + \psi D(t,T) \quad t = 0, T$$

$$\left.\begin{aligned} \phi S_1 + \psi &= \Phi_1 \\ \phi S_2 + \psi &= \Phi_2 \end{aligned}\right\} \text{Löse LGS } \Rightarrow V_0^P = \bar{\phi} S_0 + \bar{\psi} D(0,T)$$

Risiko-Neutrale Wahrscheinlichkeit

$$V_0^{\text{Option}} = e^{-rT} \underbrace{\left[q\Phi_1 + (1-q)\Phi_2\right]}_{:=\mathbb{E}^{RN}\left[\Phi(.)\right]} \quad \text{mit} \quad q := \frac{S_0 e^{rT} - S_2}{S_1 - S_2}$$

- Betrachte Ws-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Filtration $\{\mathcal{F}_t\}$
- Stochastischer Prozess: $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\quad X_t(\omega) \in \mathbb{R}^n$
- Ito-Prozess X_t ist Lösung einer SDE:

$$dX_t = a(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega) \underbrace{dW}_{\text{Brownsche Bewegung}}$$

Wichtige Klassen von Prozessen:

1. Bedingte Erwartung für zukünftigen Zeitpunkt T:

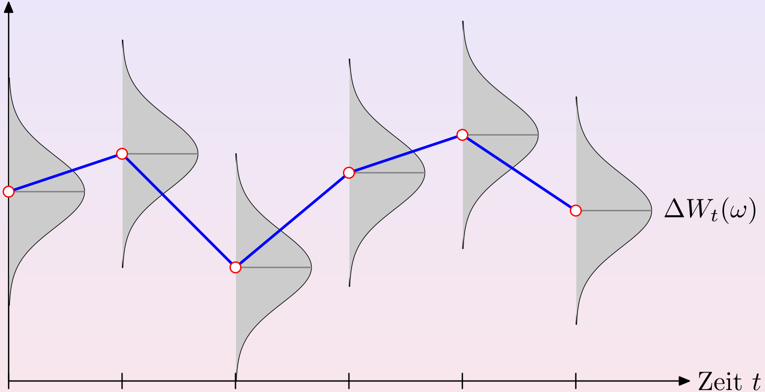
$$V_t := \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] \quad t \leq T$$

2. Markovsche SDEs:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW \quad \Rightarrow \quad \text{Markovsche Ito Prozesse}$$

Brownsche Bewegung

Gegeben: Szenario $\omega \in \Omega$



Markov Eigenschaft

Ein stochastischer Prozeß $\{X_t\}$ ist Markovsch, wenn:

$$\mathbb{E}\Big[X_T\Big|X_1 = x_1 \cap \ldots \cap X_t = x\Big] = \mathbb{E}\Big[X_T\Big|X_t = x\Big]$$

Wichtige Gleichung (Hier: Diskreter Zustandsraum S)

- Rückwärts-Gleichung: Bedingte Erwartungswerte

$$\mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x] = \sum_{y \in S} \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_{t+1} = y]P(X_{t+1} = y|X_t = x)$$

Theorem (Feynman-Kac)

Sei X_t ein n-dim Markovscher Ito Prozess:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW$$

Gegeben: $\Phi, r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sowie

$$V(t,x) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(X_\tau)d\tau\right)\Phi(X_T)\middle| X_t = x\right]$$

Dann löst V:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V = rV, \quad V(T,x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit infinitesimalem Generator $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}V(t,x) = \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_i}$$

Praktische Anwendungen

- PDE in kleinen Dimensionen schneller als MonteCarlo
- Rückwärts-Bewertung (Bedingte Erwartung)

Motivation: Early Excercise Produkte

- $\Rightarrow$ Optimales Steuerungsproblem
- Markovsche Struktur: Dynamisches Optimierungsprinzip
- Gegeben Stoppzeit T_i und $x \in \mathcal{S}$:

$$V(x) = \max\left[\Phi(x), \quad \mathbb{E}^{RN}\left[D(T_i, T_{i+1})\Phi(.)\middle|X_{T_i} = x\right] \quad \right]$$

- $\Rightarrow$ Bellmann'scher Rückwärts-Algorithmus

Definitionen

- Zins-Produkt mit Zins r^*
  Zeitintervall $[0, T]$, n Perioden, Marktzins $R(t)$:

$$\text{Preis} \times \left[1 + \frac{\left[R(t) - r^*\right]T}{n}\right]^n \stackrel{!}{=} 1$$

- Zero-Coupon Bond, Zeitwert $P(t, T)$ mit $P(T, T) = 1$
- Diskontfaktor-Kurve:

$$T \mapsto P(t, T)$$

- Terminzinsen: Zins für Anlage über $T_2 - T_1$, $T_1 \leq t$
- Terminzins $F(t; T_1, T_2)$:

$$\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \left[1 + \Delta_T \mathbf{F}(\mathbf{t}; \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})\right] = 1$$

Definitionen

- Instantaner Termin-Zins $\lim_{T_2 \to T_1} F(t; T_1, T_2)$:

$$f(t,T) := -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} \quad \Rightarrow \quad P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,\tau)d\tau\right]$$

- Rendite-Kurve zur Zeit t:

$$T \mapsto f(t,T)$$

- Kurz-Zins:

$$r(t) := f(t,T)\big|_{T \to t}$$

- Diskontfaktor

$$D(t,T) := \exp\left[-\int_t^T r(\tau)d\tau\right]$$

Stochastische Zinsen

Risiko-Neutrale Bewertung

Wert einer Zahlung $\Phi(.)$ zum Zeitpunkt T:

$$V_t = \mathbb{E}^{RN}\left[\underbrace{\exp\left[-\int_t^T r(X_\tau)d\tau\right]}_{=D(t,T)}\Phi(X_T)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Modell-Ansatz

Modelliere Renditekurve:

$$T \mapsto f(t,T)$$

Risiko-Neutrale Bewertung ist moeglich!

Keine Arbitrage zwischen Bonds $P(t,T_i)$, $P(t,T_j)$, $i \neq j$

Theorem (HJM)

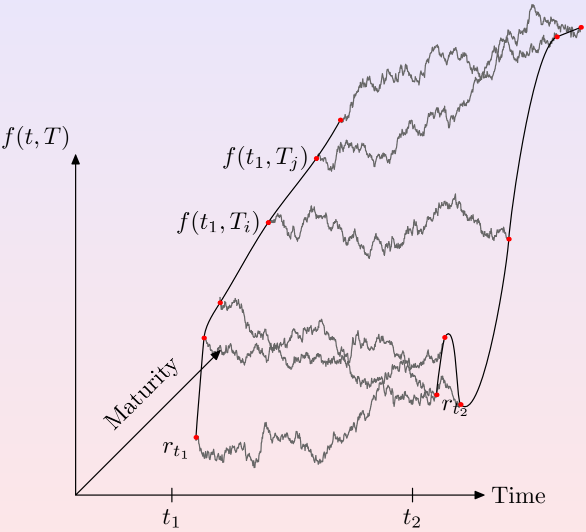
Im risiko-neutralen Mass ist die Dynamik eines Terminzinses $f(t,T)$ gegeben durch:

$$df(t,T) = \left[\sigma_f(t,T)\int_t^T \sigma_f(t,\tau)d\tau\right]dt + \sigma_f(t,T)dW^{RN}$$

mit Anfangsbedingung:

$$f(0,t) = f^{Markt}(0,t)$$

Dynamik der Renditekurve



ZIELE

1. Beschreibung der Dynamik der Renditekurve in möglichst wenig Zustandsvariablen.
2. Implizierte Dynamik für r_t soll Markovsch sein.

Ansatzpunkt

- Framework-Charakter von HJM begründet sich aus $\sigma_f(t, T)$
- Spezifikation von $\sigma_f(t, T)$?

Markovsche Rendite-Kurve

- Sei $\sigma_f(t,T)$ gegeben durch:

$$\boxed{\sigma_f(t,T) = \eta_t \exp\left[-\int_t^T \kappa(\tau)d\tau\right]}$$

- Dann wird die HJM-Dynamik von $f(t,T)$ bestimmt durch das Markovsche System:

$$dX_t = \left[Y_t - \kappa(t)X_t\right]dt + \eta_t dW_t^{RN}$$
$$dY_t = \left[\eta_t^2 - 2\kappa(t)Y_t\right]dt$$

- Der kurzfristige Zins ist dabei Markovsch:

$$r_t = X_t + f(0,T)$$

Zwischenstand

Wir haben ...

- Rendite-Kurven Dynamik = 2-dimensionales SDE System
- Markovscher Kurz-Zins $\Rightarrow D(t,T)$ Markovsch
- Damit:

$$V_t = \mathbb{E}^{RN}\left[D(t,T)\Phi(.)|\mathcal{F}_\mathbf{t}\right] = \mathbb{E}^{RN}\left[D(t,T)\Phi(.)|\mathbf{X_t},\mathbf{Y_t}\right]$$

- $\Rightarrow$ Feynman-Kac anwendbar !!
- 2-dimensionale Dynamik $\Rightarrow$ 2 Raumdimensionen der PDGL
- Modell-Erweiterung $\Rightarrow$ 3 Ortsdimensionen

- Gegeben Payoff $\Phi(.)$
- Wert V zum Zeitpunkt t

$$V(t;x,y) = \mathbb{E}^{RN}\left[\exp(-\int_t^T r_\tau d\tau)\Phi(X_T, Y_T)\middle| X_t = x, Y_t = y\right]$$

- Feynman: V löst folgende PDGL

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[y - \kappa x\right]\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - [\underbrace{f(0,t) + x}_{=r}]V + \left[\eta_t^2 - 2\kappa y\right]\frac{\partial V}{\partial y}$$

- Analytische Lösung ... ?
- $\Rightarrow$ Bond löst PDGL mit $\Phi \equiv 1$

Numerik: Finite Differenzen

1. Diskretisierung
2. Mehrere Dimensionen
3. Randverhalten

Vorgehen

Gegeben N-dim Konvektions-Diffusions-PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} D_{x_i} u = 0 \quad \text{mit} \quad D_{x_i} := a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}{\sigma_i}^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$$

- Bilde Gitter, approximiere

$$u(t, x_1 \ldots, x_n) := U(n\Delta t, m_1 \Delta x_1 \ldots m_N \Delta x_N)$$

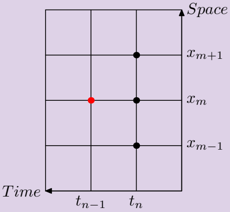
- Differenzenoperatoren $\bar{D}_x$ mittels Taylor-Expansion

FD Matrix-Schema

$$\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^{N} \bar{D}_{x_i} U^{n/n-1} = 0$$

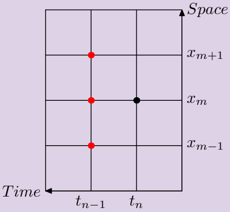
Standard Schemata $N = 1$

Explizit



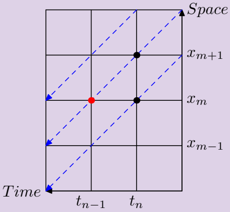
- RückwartsGl.
- Bed. Stabil
- Iteration
- $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$

Implizit



- Stabilität
- 1 LGS / Δt
- Aufwand $O(m)$
- $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$

Upwind $a < 0$

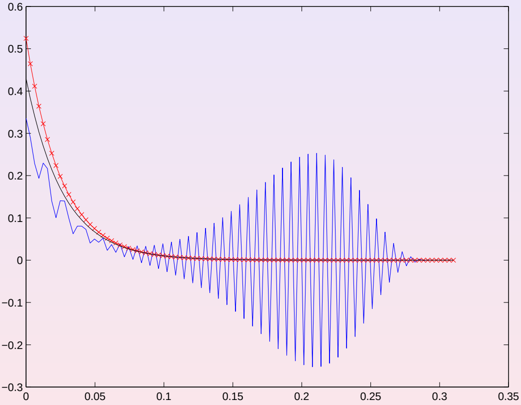


- $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Stabilität
- K. Diffusion
- $O(\Delta t) + O(\Delta x)$

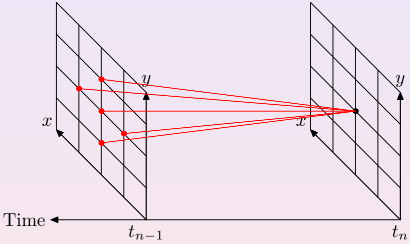
Anwendung auf Bewertungs-PDGL

- 3 Stützpunkte: Quadratische Konvergenz + Schnelligkeit
- Problem: Keine Diffusion in zweiter Ortsrichtung
- $\Rightarrow$ Oszillierendes Verhalten
- Idee: Künstliche Diffusion
- $\Rightarrow$ Upwind-Diskretisierung

Bond Preis - 2. Ortsrichtung



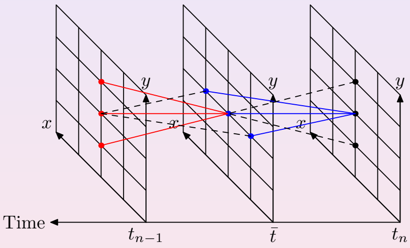
Finite Differenzen für $N = 2$



Intuitiv

- Gitter-Dimension
  $d = m \times n$
- 5-Punkte-Stern mit
- Konvergenz $O(\Delta^2)$
- Aufwand
  $O\big([m \times n]^q\big), \quad q \geq 1$

ADI = Alternating Direction Implicit



Eigenschaften

- Idee: Predictor-Corrector
- Predictor: n TriDiag-LGS der Dimension m
- Corrector: m TriDiag-LGS der Dimension n
- Predictor: Implict in x-Richtung
  Corrector: Implicit in y-Richtung
- Aufwand $O([m \times n])$ und ...
- Quadratische Konvergenz

Craig & Syned [1988]

Schema für $N = 2$

$$\text{Schritt I} \quad \left[\frac{1}{\Delta t} - \theta \hat{D}_x\right] U(\bar{t}) = \left[\frac{1}{\Delta t} + (1-\theta)\hat{D}_x + \hat{D}_y\right] U(t_n)$$

$$\text{Schritt II} \quad \left[\frac{1}{\Delta t} - \theta \hat{D}_y\right] U(t_{n-1}) = \frac{1}{\Delta t} U(\bar{t}) - \theta \hat{D}_y U(t_n)$$

- Erweiterbar auf alle Dimensionen
- Variable Implizität θ

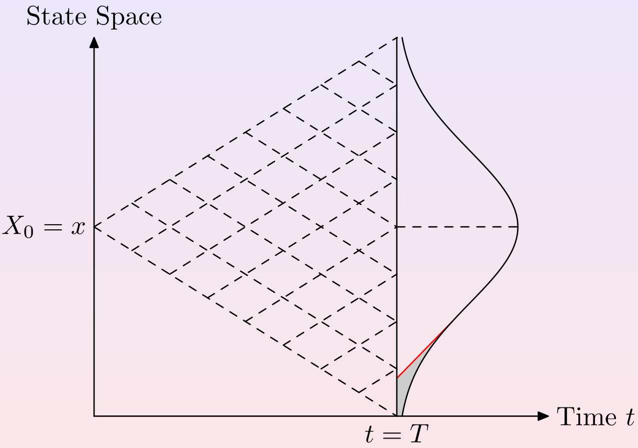
Randbedingungen (1)

- Problem: Feynman-Kac gilt auf $\mathbb{R}^n$
- Geeignetes Abschneiden erforderlich: Wie?
- Standard-BC: Dirichlet, Neumann
- Generisch: Numerische BC = Lineare Extrapolation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Frage: Wo kann diese Bedingung angewendet werden?

Randbedingungen (2)



Produktbewertung

Produkt bestimmt End-Bedingung $\Phi(.)$

Typische Auszahlungsprofile

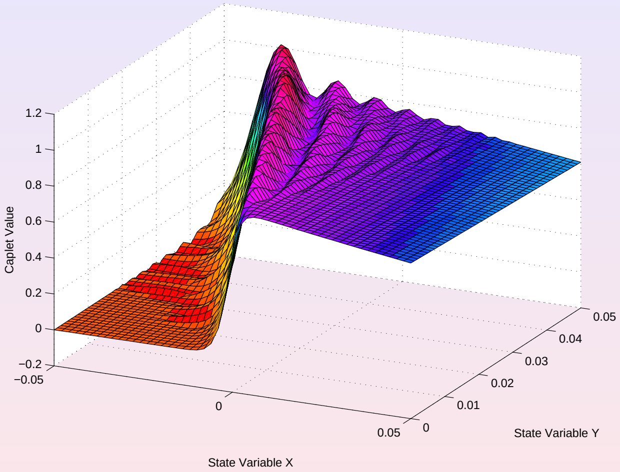
- Caplet:

$$\Phi_{\text{Caplet}}(L_i) = \max\left[L(T_i, T_{i+1}) - K, 0\right]$$

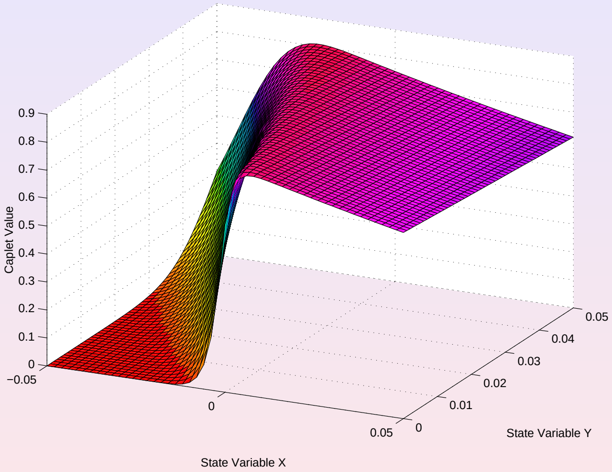
- Digital Caplet:

$$\Phi_{\text{DigitalCaplet}}(L_i) = \begin{cases} 1, & L(T_i, T_{i+1}) > K \\ 0, & L(T_{i-1}, T_{i+1}) \leq K \end{cases}$$

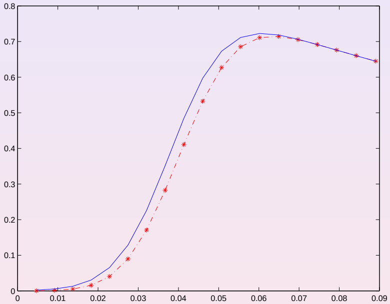
Digital Caplet mit Standard-Diskretisierung

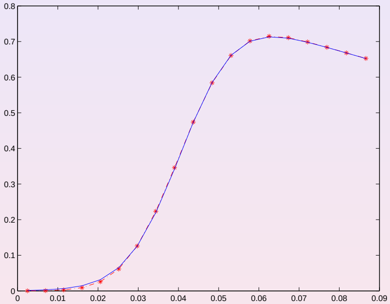


Digital Caplet mit Upwind-Diskretisierung

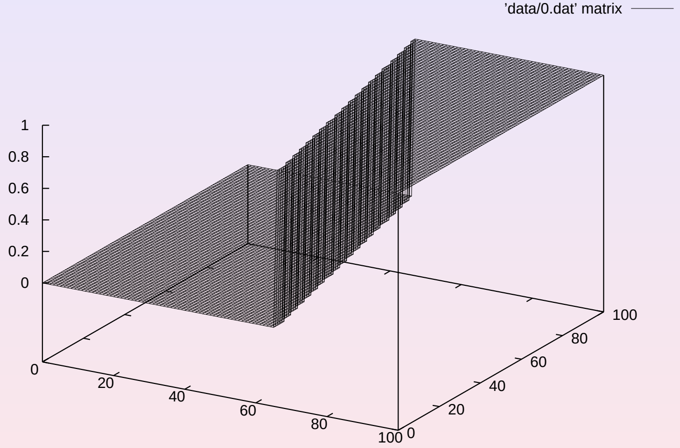


Konvergenz: Digital Caplet



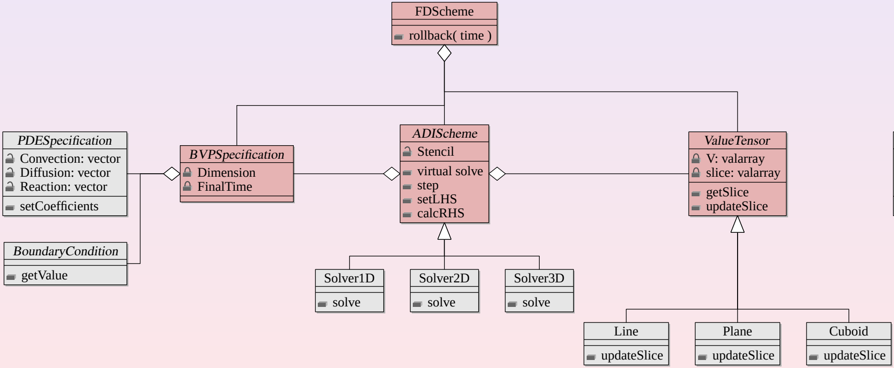


Dynamik der PDGL



C++ Klassen Entwurf

skip



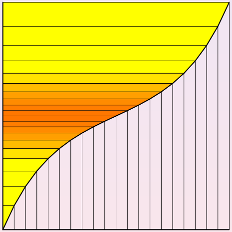
Zusammenfassung

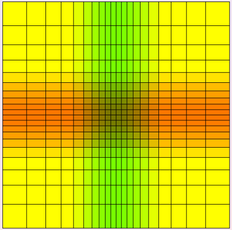
Wir haben ...

1. ... Theoretischer Zusammenhang von SDEs und PDEs
2. ... Cheyette Modell = Markovsche Rendite-Kurve
3. ... einen effizienten FD-Löser für mehrere Dimensionen

Ausblick (1) - Numerik der PDGL

- Upwind-Schemata höherer Ordnung
- Nicht-Equidistante Gitter: Zeit + Ort





Ausblick (2) - Gesamtkontext

- Nutze Modell als Extrapolation !
- Kalibrierung der Modellparameter an:
  1. Zinsmarkt (d.h. Renditekurve)
  2. Standard Derivative Märkte
- Heuristiken, Quadratische Optimierung [...]

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !!!