



UNIVERSITÄT  
BAYREUTH

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK  
MATHEMATISCHES INSTITUT

# Diskontierte dynamische Spiele und ihre Anwendung

Diplomarbeit

von

Igor Kornienko

Datum: 29. Mai 2007

Aufgabenstellung und Betreuung:  
Prof. Dr. Lars Grüne

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Lars Grüne für die ausgezeichnete Betreuung während dieser Arbeit besonders bedanken.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Willi Semmler für seine zahlreichen Hinweise.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Kontrollsysteme</b>	<b>5</b>
2.1 Definition . . . . .	6
2.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	6
2.3 Ein numerisches Verfahren . . . . .	9
<b>3 Dynamische Spiele</b>	<b>15</b>
3.1 Optimale Steuerung mit einem Parameter . . . . .	15
3.2 Dynamisches Spiel, optimale Kontrollfunktionen und Strategien . . . . .	17
3.3 Eigenschaften der Spielwerte . . . . .	23
3.4 Das Bellman'sche Optimalitätsprinzip . . . . .	26
<b>4 Diskretisierung des dynamischen Spiels</b>	<b>33</b>
4.1 Diskretisierung in der Zeit . . . . .	33
4.1.1 Diskretisierungsfehler . . . . .	34
4.1.2 Ein Iterationsverfahren . . . . .	38
4.2 Diskretisierung im Raum . . . . .	41
4.2.1 Zustandsraumbeschränkung . . . . .	41
4.2.2 Funktionen auf Gittern . . . . .	41
4.2.3 Die vollständige Diskretisierung . . . . .	45
4.2.4 Diskretisierungsfehler . . . . .	49
<b>5 Numerik des dynamischen Spiels</b>	<b>53</b>
5.1 Berechnung approximativ optimaler Trajektorien . . . . .	53
5.1.1 Zeitdiskrete optimale Trajektorien . . . . .	53
5.1.2 Numerische Berechnung optimaler Kontrollen . . . . .	55
5.2 Alternatives Iterationsverfahren . . . . .	56
5.2.1 Das kontrollierte Gauß-Seidel-Verfahren . . . . .	56
5.2.2 Strategie-Iteration . . . . .	59

5.3	Fehlerschätzung . . . . .	60
5.3.1	Fehlerschätzer . . . . .	60
5.3.2	Konstruktion der Fehlerschätzer . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Dynamisches Spiel in der Praxis</b>	<b>65</b>
6.1	Die Modellannahmen . . . . .	65
6.2	Das modellierte System . . . . .	67
6.3	Verwendete Funktionen und Parameterwerte . . . . .	70
6.4	Die Rahmenbedingungen . . . . .	71
6.5	Numerische Ergebnisse mit Diskontrate $\delta = 0.02$ . . . . .	72
6.5.1	Spieler 1 maximiert, Spieler 2 minimiert . . . . .	72
6.5.2	Spieler 1 minimiert, Spieler 2 maximiert . . . . .	80
6.6	Numerische Ergebnisse mit Diskontrate $\delta = 0.5$ . . . . .	85
6.6.1	Spieler 1 maximiert, Spieler 2 minimiert . . . . .	85
6.6.2	Spieler 1 minimiert, Spieler 2 maximiert . . . . .	90
6.7	Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick . . . . .	96
<b>A</b>	<b>Einige Begriffe aus der Stabilitätstheorie</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Programm</b>	<b>101</b>
B.1	Der Programmaufruf . . . . .	101
B.2	Die Programmausgabe . . . . .	102
B.3	Wichtige Funktionen und Variablen im Programm . . . . .	103
B.3.1	Globale Variablen . . . . .	104
B.3.2	Strukturen . . . . .	104
B.3.3	Hilfsfunktionen . . . . .	105
B.3.4	Funktionen des Algorithmus . . . . .	106
B.3.5	Funktionen des ökonomischen Modells . . . . .	110
<b>C</b>	<b>Inhalt der beiliegenden CD</b>	<b>111</b>
	<b>Notation</b>	<b>113</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>115</b>

# Abbildungsverzeichnis

4.1	Ein Rechteckgitter im Fall $d = 2$ . . . . .	42
4.2	Ein Intervallgitter im Fall $d = 1$ . . . . .	43
5.1	Testpunkte für die Auswertung von $\eta(x)$ . . . . .	64
6.1	Die Spielwerte (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	73
6.2	Trajektorien mit $A = [0, 4], B = [0, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	75
6.3	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	76
6.4	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	78
6.5	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ), Fortsetzung . . . . .	79
6.6	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.02$ ), mit höher diskretisiertem $B$ . . . . .	80
6.7	Die Spielwerte (S1 min, S2 max, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	81
6.8	Trajektorien mit $A = [0, 4], B = [0, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	83
6.9	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	84
6.10	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.02$ ) . . . . .	85
6.11	Die Spielwerte (S1 max, S2 min, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	86
6.12	Trajektorien mit $A = [0, 4], B = [0, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	87
6.13	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	88
6.14	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 max, S2 min, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	89
6.15	Die Spielwerte (S1 min, S2 max, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	90
6.16	Trajektorien mit $A = [0, 4], B = [0, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	92
6.17	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	94
6.18	Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ (S1 min, S2 max, $\delta = 0.5$ ) . . . . .	95



# Kapitel 1

## Einleitung

Konfliktsituationen sind Teil unseres täglichen Lebens. Wir finden sie in verschiedenen Formen in Wirtschaft, Politik und anderen Gesellschaftsbereichen. Eine Person hat eine Entscheidung zu treffen und jede mögliche Entscheidung führt zu einem anderen Ergebnis. Diese Person muss nicht die Einzige sein, die den Ausgang der Entscheidungssituation bestimmt: Es sind womöglich mehrere Personen beteiligt und es ist eine Reihe von Entscheidungen zu treffen. Sobald die Beteiligten Ergebnisse unterschiedlich bewerten, führt dies bereits zu Interessenkonflikten.

Die Theorie der dynamischen Spiele hat die Aufgabe, diesen Entscheidungsprozess zu beschreiben. Sie kombiniert Prinzipien der Spieltheorie und der Theorie der optimalen Steuerung, welche dynamische Optimierungsprobleme, die von einem Kontrollparameter abhängig sind, beinhaltet. Ähnlich wie in der optimalen Steuerung wird das System mit einer oder mehreren Zustandsvariablen beschrieben, die Zustandsänderung wird mit Hilfe einer gewöhnlichen, parameterabhängigen Differentialgleichung dargestellt. So wurde anfangs der Begriff eines Differentialspiels geprägt. Wir sprechen jedoch in dieser Arbeit meist von dynamischen Spielen, weil dieser Begriff allgemeiner ist und neben den kontinuierlichen Differentialspielen auch ihre zeitdiskrete Variante umfasst.

Das Hauptinstrument eines dynamischen Spiels ist ein diskontiertes Kostenfunktional, das den erwarteten Nutzen eines Spielers über die gesamte Spieldauer darstellt. Dieses wird von jedem der Spieler über die Wahl seines Kontrollparameters zum jeweiligen Vorteil beeinflusst, d.h. minimiert oder maximiert. Das dynamische Spiel ist also vom spieltheoretischen Standpunkt zu jeder Zeit eine strategische Entscheidungssituation, bei der eine wesentliche Bedeutung dem Informationsaustausch zwischen den beteiligten Personen, den Spielern, zukommt. Die Art und Weise, auf welche ein Spieler mit den anderen kommuniziert und sich in seiner Entscheidung den anderen Spielern anpasst, hat also wichtigen Einfluss auf das System. Die von uns in dieser Arbeit betrachteten Zwei-Personen-Spiele zählen zu den Nullsummenspielen, bei denen eine Änderung des Kostenfunktionals stets den Gewinn des einen und zugleich den Verlust des anderen Spielers bedeutet. Sofern sich die Spieler optimal

verhalten, ist das Ergebnis des Spiels eine Wertefunktion, die nur vom Zustand des Systems zu Spielbeginn abhängt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ausgehend von den bisherigen theoretischen Überlegungen ein numerisches Verfahren zu entwickeln, das die Wertefunktion eines dynamischen Spiels und die optimalen Kontrollfunktionen der Spieler approximativ berechnet. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

In Kapitel 2 definieren wir Kontrollsysteme als ein formales Mittel, das den dynamischen Zustand eines Systems mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung in Abhängigkeit von einem Parametersatz beschreibt. Danach betrachten wir im Ansatz ein numerisches Verfahren, das uns erlaubt, von einem kontinuierlichen zu einem zeitdiskreten System zu übergehen.

In Kapitel 3 leiten wir das Konzept eines dynamischen Spiels her: Nach einem Exkurs in die optimale Steuerung betrachten wir das dynamische Spiel als Optimierungsproblem aus der Sicht des einzelnen Spielers und definieren zwei optimale Wertefunktionen mit den zugehörigen Kontrollfunktionen und Strategien. Als Grundlage für das spätere numerische Verfahren stellen wir das Bellman'sche Optimalitätsprinzip vor.

In Kapitel 4 leisten wir zunächst einige vorbereitende Arbeit: Falls uns ein kontinuierliches dynamisches Spiel vorliegt, wird es im ersten Schritt durch ein geeignetes zeitdiskretes Spiel ersetzt. Im zweiten Schritt wird auf einer Teilmenge des Zustandsraumes ein diskretes, regelmässiges Gitter definiert. Mit Hilfe einer vom Bellman'schen Optimalitätsprinzip abgeleiteten Iterationsvorschrift berechnen wir daraufhin auf der diskretisierten kompakten Teilmenge den approximativen Spielwert und schätzen den dabei entstehenden Fehler ab.

In Kapitel 5 erweitern wir unser Verfahren um die Möglichkeit, mittels eines Zustandfeedbacks die optimalen Kontrollfunktionen der beiden Spieler und die von ihnen gewählten Kontrollwerte in Abhängigkeit von der Zeit zu gewinnen. Somit können wir neben dem eigentlichen Spielwert den Trajektorienverlauf, d.h. die zeitliche Zustandsänderung direkt mitverfolgen. Dies gibt uns die Möglichkeit einer weiterreichenden Analyse: Wir können erkennen, wenn das System nach einer Zeit einen Gleichgewichtszustand erreicht hat und wir können seine genaue Position bestimmen. Anschließend stellen wir ein modifiziertes, schneller konvergierendes Verfahren vor, das wir tatsächlich in einem C++ Programm implementieren werden.

Im sechsten und letzten Kapitel übernehmen wir das von M. Kato und W. Semmler in [10] eingeführte Modell eines Oligopols, in dem zwei Unternehmen, ein Marktführer und ein Marktfolger miteinander konkurrieren. Während die klassischen Mechanismen des Wettbewerbs eine Preis- und Innovationspolitik sind, spielt sich der Wettbewerb hier im Auf- und Abbau eines Kapitalstocks ab: Der Marktführer agiert gegen eine Marktöffnung und investiert Kapital in Markteintrittsschranken, während der Marktfolger auf eine Deregulierung



des Marktes setzt und nach seinen Möglichkeiten zu einer Entwertung des aufgebauten Kapitalstocks beiträgt. Probleme aus der Wirtschaft werden oft in Form eines dynamischen Spiels modelliert, oft sind sie jedoch keine Nullsummenspiele. Das Besondere an diesem Modell ist, dass wir es zunächst in ein Nullsummenspiel transformieren. Daraufhin wenden wir exemplarisch unser numerisches Verfahren an und diskutieren die Ergebnisse ausführlich.

Zum Schluss wollen wir einen kurzen bibliografischen Überblick geben. Die Arbeit folgt in ihrem Aufbau der Vorlesung über die optimale Steuerung von L. Grüne [8]. Die Theorie der dynamischen Spiele wird grundlegend von Başar und Olsder in [2] behandelt. Eine interessante Einführung ist das Buch [3] von Dockner, Jørgensen, Long, und Sorger, das sich von Anbeginn der Anwendungsseite in Wirtschaftswissenschaften, aber auch bei der Modellierung von Ökosystemen zuwendet. [1] ist ein Standardwerk von Bardi und Capuzzo Dolcetta, das die optimale Steuerung und die dynamischen Spiele ausführlich als Bestandteil einer weiterführenden Theorie der sogenannten Viskositätslösungen der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichungen behandelt. Diese Theorie ist insbesondere hilfreich für das tiefere Verständnis des Bellman'schen Optimalitätsprinzips. Wir werden jedoch aus Zeitgründen in dieser Arbeit nicht darauf eingehen und, falls erforderlich, weiter verweisen.



# Kapitel 2

## Kontrollsysteme

Ein Kontrollsystem ist ein dynamisches System, das darüber hinaus von einem oder mehreren Parametern abhängt. Unter einem dynamischen System verstehen wir wiederum die Modellierung eines bestimmten, in der Wirklichkeit stattfindenden oder denkbar möglichen Prozesses, also der Aufeinanderfolge von Zuständen eines gegebenen Systems, mit Hilfe einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Anders ausgedrückt, das dynamische System beschreibt einen zeitlich veränderlichen – also dynamischen Zustand.

Kontrollsysteme existieren in kontinuierlicher und diskreter Zeit, was bereits bei dynamischen Systemen der Fall ist. Wir werden beide Arten, soweit es geht, nebeneinander behandeln und später sehen, inwieweit ein gegebenes kontinuierliches Kontrollsystem durch ein zeitdiskretes System approximiert werden kann.

Im Mittelpunkt der Untersuchung steht die Trajektorie, d.h. die Zeit-Zustand-Abbildung des Kontrollsystems. Das zeitliche Verhalten hängt, wie bereits erwähnt, neben der Systemumgebung von den zusätzlichen Steuerparametern ab, die ihrerseits selbst in Abhängigkeit von der Zeit und/oder dem Zustand des Systems sind. Dieses Modell lässt mehrere Sichtweisen zu: eine Parameteränderung kann die passive Änderung einer Basisgröße wiedergeben, d.h. deren Ursache außerhalb unserer Beobachtung und nicht weiter von Bedeutung ist, oder sie steht für die aktive Einflussnahme eines Beobachters mit dem Ziel, ein bestimmtes Langzeitverhalten der Trajektorien zu erreichen.

Wir behandeln in dieser Arbeit Kontrollsysteme, bei denen zwei "Entscheider" je über einen Steuerparameter verfügen, über die sie den Zustand des Systems, geleitet von gewissen Optimalitätskriterien, verändern und auf diese Weise gegeneinander agieren. Diese Optimalitätskriterien werden wir im nächsten Kapitel über dynamische Spiele betrachten.

## 2.1 Definition

**Definition 2.1** (i) Ein *Kontrollsystem in kontinuierlicher Zeit*  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  im  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , ist gegeben durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), a(t), b(t)), \quad (2.1)$$

wobei  $f : \mathbb{R}^d \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein parameterabhängiges stetiges Vektorfeld ist.

(ii) Ein *Kontrollsystem in diskreter Zeit*  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk \mid k \in \mathbb{Z}\}$  für ein  $h > 0$  im  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , ist gegeben durch die Differenzgleichung

$$x(t+h) = f_h(x(t), a(t), b(t)), \quad (2.2)$$

wobei  $f : \mathbb{R}^d \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine stetige Abbildung ist.

(iii) Die Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  heissen *Kontrollwertebereiche*, und definieren die Werte, die  $a(t)$  bzw.  $b(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  annehmen dürfen.  $A$  und  $B$  sind üblicherweise kompakt.

(iv) Mit  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}_h$  und  $\mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{B}_h$  bezeichnen wir den Raum der zulässigen Kontrollfunktionen,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{a : \mathbb{R} \rightarrow A \mid a \text{ zulässig}\} & \text{bzw.} & \quad \mathcal{A}_h := \{a_h : h\mathbb{Z} \rightarrow A \mid a_h \text{ zulässig}\}, \\ \mathcal{B} &:= \{b : \mathbb{R} \rightarrow B \mid b \text{ zulässig}\} & \text{bzw.} & \quad \mathcal{B}_h := \{b_h : h\mathbb{Z} \rightarrow B \mid b_h \text{ zulässig}\}. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 2.2** Statt " $\frac{d}{dt}x(t)$ " werden wir oft kurz " $\dot{x}(t)$ " schreiben.

## 2.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Kontrollfunktionenräume  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{A}_h, \mathcal{B}_h$  eingeführt, ohne sie genau festzulegen, also wollen wir es jetzt nachholen. Die Wahl von  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  bringt mit sich zwei Überlegungen: sie soll garantieren, dass eine Lösung von (2.1) bzw. (2.2) existiert und eindeutig ist, und zur gleichen Zeit die Menge der Funktionen, die als Kontrollfunktion in Frage kommen, nicht unnötig einschränken.

Im Fall eines zeitdiskreten Kontrollsystems setzen wir einfach

$$\mathcal{A}_h := \{a_h \mid h\mathbb{Z} \rightarrow A\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_h := \{b_h \mid h\mathbb{Z} \rightarrow B\}.$$

Das bedeutet, dass wir alle möglichen Funktionen von  $h\mathbb{Z}$  nach  $A$  bzw.  $B$  zulassen: für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und jedes Paar von Funktionen  $a_h \in \mathcal{A}_h, b_h \in \mathcal{B}_h$  existiert eine eindeutige Lösung  $\Phi : h\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{A}_h \times \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R}^d$  von (2.2) (in positiver Zeitrichtung). Es gilt die Anfangswertbedingung

$$\Phi_h(0, x_0, a_h, b_h) = x_0$$

und weiter folgt per Induktion für jedes  $t = \{kh \mid k = 0, 1, \dots\}$  die Gleichheit

$$\Phi_h(t + h, x_0, a_h, b_h) = f_h(\Phi_h(t, x_0, a_h, b_h), a_h(t), b_h(t)).$$

Im Fall eines kontinuierlichen Systems könnten wir von der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen Gebrauch machen: wählen wir für  $A$  und  $B$  den Raum der stetigen Kontrollfunktionen, können wir zwar zusammen mit der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $x$  eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Lösungen von (2.1) daraus ableiten. Die Forderung nach stetigen Kontrollfunktionen  $a, b$  wäre jedoch zu restriktiv in der numerischen Anwendung: in der optimalen Steuerung mit nur einem Parameter führen bereits einfache Probleme zu optimalen Steuerungsstrategien, die in  $t$  unstetig sind.

Wir müssen deshalb eine allgemeinere Klasse von Kontrollfunktionen zulassen und benötigen dafür die folgende Definition.

**Definition 2.3** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall.

- (i) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst *stückweise konstant*, falls eine Zerlegung von  $I$  in endlich viele Teilintervalle  $I_j, j = 1, \dots, n$  existiert, so dass  $g$  auf  $I_j$  konstant ist für alle  $j = 1, \dots, n$ .
- (ii) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst (*Lebesgue-*) *messbar*, falls eine Folge von stückweise konstanten Funktionen  $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N}$ , existiert mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = g(x)$  für fast alle<sup>1</sup>  $x \in I$ .
- (iii) Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst (*Lebesgue-*) *messbar*, falls für jedes abgeschlossene Teilintervall  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  die Einschränkung  $g|_I$  messbar im Sinne von (ii) ist.
- (iv) Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow I$  heisst *essentiell beschränkt*, falls sie mit einem Lebesgue-Maß  $|\cdot|$  messbar ist und für jede Nullmenge  $J \subset \mathbb{R}$

$$\inf_{J \subset \mathbb{R}, |J|=0} \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus J} \{|f(x)|\} < \infty$$

gilt. Den *Raum aller messbaren und essentiell beschränkten Funktionen*  $g : \mathbb{R} \rightarrow I$  bezeichnen wir mit  $L_\infty(\mathbb{R}, I)$ . □

<sup>1</sup>d.h. für alle  $x$  aus einer Menge  $J \subseteq I$  mit der Eigenschaft, dass  $I \setminus J$  eine Lebesgue-Nullmenge ist

Im folgenden Existenz- und Eindeigkeitssatz sehen wir, dass die Wahl messbarer, essentiell beschränkter Kontrollfunktionen eine sinnvolle Lösung von (2.1) garantiert.

**Satz 2.4 (Satz von Carathéodory)** Betrachte ein Kontrollsystem (2.1) mit folgenden Eigenschaften

- (i) Die Räume der Kontrollfunktionen sind gegeben durch

$$\mathcal{A} := L_\infty(\mathbb{R}, A) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := L_\infty(\mathbb{R}, B)$$

- (ii) Das Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^d \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist stetig.

- (iii) Für jedes  $R > 0$  existiert eine Konstante  $L_R > 0$ , so dass die Abschätzung

$$\|f(x_1, a, b) - f(x_2, a, b)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  und alle  $a \in A$ , alle  $b \in B$ , für die  $\|x_1\|, \|x_2\|, \|a\|, \|b\| \leq R$  erfüllt ist.

Dann gibt es für jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und jedes Paar von Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$  und  $b \in \mathcal{B}$  ein (maximales) offenes Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  und genau eine absolut stetige Funktion  $x(t)$ , die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), a(\tau), b(\tau)) d\tau$$

für alle  $t \in I$  erfüllt. □

**BEWEIS:** Der Beweis des Satzes verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes für gewöhnliche Differentialgleichungen. Er ist z.B. in [13, Anhang C] zu finden. ■

**Definition 2.5** Wir bezeichnen die eindeutige Funktion  $x(t)$  aus Satz 2.4 mit  $\Phi(t, x_0, a, b)$  und nennen sie die *Lösung*, oder auch die *Trajektorie* von (2.1) zum *Anfangswert*  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und zu den *Kontrollfunktionen*  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . □

Beachte: Da  $\Phi(t, x_0, a, b)$  absolut stetig ist, ist diese Funktion für fast alle  $t \in I$  nach  $t$  differenzierbar. Insbesondere erfüllt  $\Phi(t, x_0, a, b)$  die Differentialgleichung (2.1) für fast alle  $t \in I$ , d.h. es gilt

$$\dot{\Phi}(t, x_0, a, b) = f(\Phi(t, x_0, a, b), a(t), b(t))$$

für fast alle  $t \in I$ .

**Bemerkung 2.6** Im Weiteren nehmen wir stets an, dass die Voraussetzungen (i)-(iii) von Satz 2.4 erfüllt sind.

## 2.3 Ein numerisches Verfahren

Falls uns ein kontinuierliches Kontrollsystem (2.1) vorliegt, benötigen wir für eine Computersimulation ein numerisches Verfahren, mit dem das gegebene Kontrollsystem durch ein diskretes System (2.2) approximiert werden kann.

Dafür eignen sich z.B. die sogenannten *Einschrittverfahren*, die normalerweise zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen eingesetzt werden. Ein solches Verfahren verwendet eine diskrete *Gitterfunktion*, die die kontinuierliche Lösungsfunktion  $\Phi(t, x_0, a, b)$  eines gegebenen Systems (2.1) zu einer Schrittweite  $h > 0$  approximiert.

Wir wollen nun ein diskretes Kontrollsystem konstruieren, dessen Übergangsfunktion numerisch auswertbar ist und die gesuchte Gitterfunktion definiert. Beim Beweis, dass das neue zeitdiskrete System das kontinuierliche System wie gewünscht approximiert, wollen wir uns mit einer speziellen Art von Kontrollsystemen mit einer Konvexitätseigenschaft behelfen, die wir zunächst definieren.

**Definition 2.7** Wir nennen ein Kontrollsystem (2.1) *konvex*, falls die Menge

$$f(x, A_R, B_R) := \{f(x, a, b), a \in A_R, b \in B_R\} \subset \mathbb{R}^d \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} A_R &:= \{a \in A \mid \|a\| \leq R\}, \\ B_R &:= \{b \in B \mid \|b\| \leq R\} \end{aligned}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und jedes hinreichend große  $R > 0$  konvex ist.  $\square$

**Definition 2.8 (Euler-Verfahren für Kontrollsysteme)** Für einen Zeitschritt  $h > 0$  und zwei Kontrollwerte  $a \in A$ ,  $b \in B$  definieren wir das *Euler-Verfahren* als das durch die Abbildung

$$f_h(x, a, b) := x + hf(x, a, b)$$

definierte zeitdiskrete Kontrollsystem (2.2). Die Lösungen bezeichnen wir mit  $\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h)$ .  $\square$

Die Konvergenzeigenschaften dieses Verfahrens untersuchen wir im nachfolgenden Satz.

**Satz 2.9** Betrachte ein Kontrollsystem, für das die Voraussetzungen (i)-(iii) von Satz 2.4 gelten. Sei  $R > 0$  eine frei wählbare Konstante und  $\bar{B}_R(0)$  die dadurch definierte abgeschlossene Kugel mit Radius  $R$  um den Nullpunkt in  $\mathbb{R}^d$ . Dann gilt für das Verfahren aus Definition 2.8

- (i) Es existiert eine (von  $R$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , so dass für jedes Paar von Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$  mit  $\|a\|_\infty \leq R$ ,  $\|b\|_\infty \leq R$  und jeden Anfangswert  $x_0 \in \overline{B}_R(0)$  diskrete Kontrollfunktionen  $a_h \in \mathcal{A}_h$ ,  $b_h \in \mathcal{B}_h$  existieren, mit der die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| \leq K\sqrt{h}e^{Lt}$$

gilt für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ , für die die Lösungen in  $\overline{B}_R(0)$  liegen.

Ist das Kontrollsystem konvex, so gilt die schärfere Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| \leq Kh(e^{Lt} - 1).$$

- (ii) Umgekehrt existiert eine von  $R$  abhängige Konstante  $K > 0$  derart, dass für jedes  $x_0 \in \overline{B}_R(0)$ , jedes Paar von diskreten Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$  mit  $\|a\|_\infty \leq R$ ,  $\|b\|_\infty \leq R$  und die durch

$$a(\tau) := a_h(t), \quad b(\tau) := b_h(t), \quad \tau \in [t, t+h], \quad t \in h\mathbb{N}_0$$

definierten stückweise konstanten (also messbaren) Kontrollfunktionen die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| \leq Kh(e^{Lt} - 1).$$

gilt für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$ , für die die Lösungen in  $\overline{B}_R(0)$  liegen. □

BEWEIS: Mit  $L = L_R$  bezeichnen wir die Lipschitz-Konstante aus Satz 2.4(iii). Zudem sei  $M > 0$  eine Konstante, für die die Abschätzung

$$\|f(x, a, b)\| \leq M \text{ für alle } \|x\| \leq R, \|a\| \leq R, \|b\| \leq R$$

gilt. Dieses  $M$  existiert wegen der Stetigkeit von  $f$ .

Wir beweisen zuerst (i) und betrachten hier nur den konvexen Fall. Der Beweis des allgemeinen Falls deutlich komplizierter und findet sich z.B. in [6]. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $R$  so groß ist, dass die Konvexität gemäß Definition 2.7 gilt.

Zunächst betrachten wir zu jedem Paar von Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}_R := \{a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \|a\| \leq R\}$  und  $b \in \mathcal{B}_R := \{b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \|b\| \leq R\}$ , und jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  den Wert

$$\bar{f}(x, a, b) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x, a(t), b(t)) dt.$$



Aus der Konvexität von  $f(x, A_R, B_R)$  folgt, dass  $\bar{f}(x, a, b)$  in  $f(x, A_R, B_R)$  liegt (tatsächlich ist die Konvexität auch notwendig). Daher gibt es Kontrollwerte

$$\bar{a}(x, a) \in A_R \text{ und } \bar{b}(x, b) \in B_R \text{ mit } f(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b)) = \bar{f}(x, a, b) \quad (2.2)$$

Für diese Werte zeigen wir zunächst die Abschätzung

$$\|\Phi(h, x, a, b) - f_h(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b))\| \leq \frac{M}{2} Lh^2 \quad (2.3)$$

für  $f_h$  aus Definition 2.8, unter der Annahme, dass  $\Phi(\tau, x, a, b) \in \bar{B}_R(0)$  gilt für  $\tau \in [0, h]$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \Phi(h, x, a, b) &= x + \int_0^h f(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) dt \\ &= x + \int_0^h f(x, a(t), b(t)) dt + R(h) = x + h\bar{f}(x, a, b) + R(h) \\ &= x + hf(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b)) + R(h) = f_h(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b)) + R(h) \end{aligned}$$

mit dem Restterm

$$R(h) = \int_0^h f(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) - f(x, a(t), b(t)) dt.$$

Also folgt

$$\|\Phi(h, x, a, b) - f_h(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b))\| \leq \|R(h)\|.$$

Der Restterm  $R(h)$  lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|R(h)\| &\leq \int_0^h L \|\Phi(t, x, a, b) - x\| dt \\ &\leq \int_0^h L \int_0^t \|f(\Phi(\tau, x, a, b), a(\tau), b(\tau))\| d\tau dt \\ &\leq \int_0^h L \int_0^t M d\tau dt = \frac{M}{2} Lh^2, \end{aligned}$$

womit (2.3) gezeigt ist.

Aus der Reihendarstellung  $e^{Lh} = 1 + Lh + L^2h^2 + \dots$  folgt  $e^{Lh} \geq 1 + Lh$ , damit  $Lh^2 \leq h(e^{Lh} - 1)$  und folglich aus (2.3)

$$\|\Phi(h, x, a, b) - f_h(x, \bar{a}(x, a), \bar{b}(x, b))\| \leq \frac{M}{2} h(e^{Lh} - 1). \quad (2.0)$$

Betrachte nun Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$  und einen Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Für jedes  $t \in h\mathbb{N}_0$  betrachte die Funktionen  $\hat{a}_t \in \mathcal{A}$ ,  $\hat{b}_t \in \mathcal{B}$  gegeben durch  $\hat{a}_t(\tau) = a(t + \tau)$  bzw.  $\hat{b}_t(\tau) = b(t + \tau)$ . Mit dem Existenz- und Eindeigkeitssatz folgt, dass für diese  $\hat{a}_t$  und  $\hat{b}_t$  die Identität

$$\Phi(t + h, x_0, a, b) = \Phi(h, \Phi(t, x_0, a, b), \hat{a}_t, \hat{b}_t) \quad (2.1)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  gilt. Wir definieren nun die diskreten Kontrollfunktionen  $a_h : h\mathbb{N}_0 \rightarrow A_R$  und  $b_h : h\mathbb{N}_0 \rightarrow B_R$  für  $t \in h\mathbb{N}_0$  als

$$a_h(t) = \bar{a}(\Phi(t, x_0, a, b), \hat{a}_t) \text{ und } b_h(t) = \bar{b}(\Phi(t, x_0, a, b), \hat{b}_t)$$

mit  $\bar{a}, \bar{b}$  aus (2.2).

Aus (2.0) und (2.1) folgt damit für alle  $t \in h\mathbb{N}_0$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t + h, x_0, a, b) - f_h(\Phi(t, x_0, a, b), a(t), b(t))\| \leq \frac{M}{2} h(e^{Lh} - 1). \quad (2.2)$$

Die Ungleichung aus (i) zeigen wir nun mit der Induktion über  $t \in h\mathbb{N}_0$ . Für  $t = 0$  ist die Behauptung offensichtlich. Nehmen wir an, die gesuchte Abschätzung sei für ein  $t \in h\mathbb{N}_0$  erfüllt, d.h. es gelte

$$\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| \leq h(e^{Lt} - 1). \quad (2.3)$$

Aus der Annahme (iv) von Satz 2.4 und der obigen Reihendarstellung von  $e^{Lh}$  folgt die Lipschitz-Abschätzung

$$\|f_h(x_1, a, b) - f_h(x_2, a, b)\| \leq (1 + Lh)\|x_1 - x_2\| \leq e^{Lh}|x_1 - x_2| \quad (2.4)$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  und alle  $a \in A$ , alle  $b \in B$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\Phi}(t + h, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t + h, x_0, a, b)\| \\ &= \|f_h(\tilde{\Phi}(t, x_0, a_h, b_h), a_h(t), b_h(t)) - \Phi(t + h, x_0, a, b)\| \\ &\leq \|f_h(\tilde{\Phi}(t, x_0, a_h, b_h), a_h(t), b_h(t)) - f_h(\Phi(t, x_0, a, b), a_h(t), b_h(t))\| \\ &\quad + \|f_h(\Phi(t, x_0, a, b), a_h(t), b_h(t)) - \Phi(t + h, x_0, a, b)\| \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} e^{Lh}\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| + \|f_h(\Phi(t, x_0, a, b), a_h(t), b_h(t)) - \Phi(t + h, x_0, a, b)\| \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} e^{Lh}\|\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a_h, b_h) - \Phi(t, x_0, a, b)\| + \frac{M}{2}h(e^{Lh-1}) \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} e^{Lh}\frac{M}{2}h(e^{Lhi-1} - 1) + \frac{M}{2}h(e^{Lh-1}) \\ &= \frac{M}{2}h(e^{Lh(i+1)} - e^{Lh} + e^{Lh} - 1) = \frac{M}{2}h(e^{Lh(i+1)} - 1) \end{aligned}$$

und damit die gewünschte Abschätzung aus (i).

Zum Beweis von (ii) betrachte diskrete Kontrollfunktionen  $a_h : h\mathbb{Z} \rightarrow A$ ,  $b_h : h\mathbb{Z} \rightarrow B$  und die in (i) konstruierten stückweise konstanten Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Wenn wir nun eine neue diskrete Kontrollfunktion  $\tilde{a}_h$  bzw.  $\tilde{b}_h$  wie im Beweis von (i) aus diesem  $a$  bzw.  $b$  konstruieren, so gilt offenbar  $\tilde{a}_h = a_h$  bzw.  $\tilde{b}_h = b_h$ , d.h. wir erhalten gerade wieder die Ausgangsfunktionen  $a_h, b_h$  (beachte, dass für die stückweise konstanten Funktionen  $a, b$  die Konstruktion aus (i) auch ohne die Konvexitätsbedingung funktioniert). Also folgt (ii), indem wir (i) auf diese  $a, b$  anwenden. ■

**Bemerkung 2.10** Beachte, dass die diskreten Kontrollfunktionen  $a_h, b_h$  implizit definiert sind und daher i.A. keine einfache Formel zu ihrer Berechnung haben. Tatsächlich ist jedoch, wie es sich in den nächsten Kapiteln zeigt, die explizite Kenntnis von  $a_h, b_h$  bei der Behandlung von dynamischen Spielen nicht notwendig.

**Bemerkung 2.11** Das Euler-Verfahren für Kontrollsysteme besitzt die Konvergenzordnung  $O(\sqrt{h})$  bzw.  $O(h)$ .

**Bemerkung 2.12** Es ist praktisch, die Werte  $a_h(t)$  und  $b_h(t)$  der diskreten Kontrollfunktionen  $a_h, b_h$  aus endlichen Mengen  $\tilde{A} \subset A$ ,  $\tilde{B} \subset B$  zu wählen.



# Kapitel 3

## Dynamische Spiele

In diesem Kapitel wollen wir das Konzept eines dynamischen Spiels erläutern und dabei einen Bezug zur klassischen Optimalen Steuerung herstellen.

### 3.1 Optimale Steuerung mit einem Parameter

In der "klassischen" optimalen Steuerung, die als Grundlage ein Kontrollsystem (2.1) oder (2.2) jedoch mit nur einem Kontrollparameter  $a$  hat (d.h.  $b(t) \equiv \text{const}$ ), benötigt man zuerst eine *Kosten- oder Ertragsfunktion*  $g$ , die jedem Punkt  $(x, a, b) \in \mathbb{R}^d \times A \times B$  im kombinierten Zustands-Kontrollwerterraum einen Wert zuweist. Integriert bzw. summiert man diese Funktion entlang einer Trajektorie  $\Phi(t, x_0, a, b)$  bzw.  $\Phi_h(t, x_0, a, b)$  und der dazugehörigen Kontrollfunktionen  $a, b$ , so erhält man einen Wert, der vom Anfangswert  $x_0$  und den Kontrollfunktionen  $a, b$  abhängt. Wir werden ihn in der nachfolgenden Definition formal präzisieren.

**Definition 3.1** Betrachte ein Kontrollsystem (2.1) bzw. (2.2). Für eine Funktion  $g : \mathbb{R}^d \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  und einen Parameter  $\delta > 0$  definieren wir das *diskontierte Funktional auf unendlichem Zeithorizont* in kontinuierlicher Zeit als

$$J(x, a, b) := \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) dt \quad (3.1)$$

und in diskreter Zeit als

$$J_h(x, a_h, b_h) := h \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \delta h)^j g(\Phi_h(jh, x, a_h, b_h), a_h(jh), b_h(jh)) \quad (3.2)$$

□

**Bemerkung 3.2** Das Modell des diskontierten Funktional  $J$  mit dem exponentiellen *Diskontfaktor*  $e^{-\delta t}$  und positiver *Diskontrate*  $\delta > 0$  stammt ursprünglich aus der Ökonomie und trägt der Tatsache Rechnung, dass der Ertrag in naher Zukunft wichtiger ist als derjenige in ferner Zukunft (beachte, dass  $e^{-\delta t}$  für  $t \rightarrow \infty$  monoton gegen 0 strebt, und damit zeitlich weit in der Zukunft liegende Werte von  $g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t))$  schwächer gewichtet werden).

Wir erinnern uns an das Ziel der optimalen Steuerung, die Kontrollfunktion  $a \in \mathcal{A}$  (in Abhängigkeit von  $x_0$ ) so zu wählen, dass  $J$  maximiert bzw. minimiert wird.

**Definition 3.3** Betrachte ein Kontrollsystem (2.1) bzw. (2.2). Mit dem diskontierten Funktional  $J$  bzw.  $J_h$  definieren wir das optimale Steuerungsproblem: Bestimme die *optimale Wertefunktion*

$$v(x) := \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b) \quad \text{bzw.} \quad v_h(x) := \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} J_h(x, a_h, b_h)$$

Hierbei machen wir folgende Annahmen:

- (A1) Die Kontrollwertebereiche  $A, B$  seien kompakt.
- (A2) In kontinuierlicher Zeit erfülle das Kontrollsystem (2.1) die Voraussetzungen (i)-(iii) von Satz 2.4, wobei die Lipschitz-Konstante  $L_R = L$  unabhängig von  $R$  sei.

In diskreter Zeit existiere eine Konstante  $L > 0$ , so dass die Lipschitz-Abschätzung

$$\|f_h(x_1, a, b) - f_h(x_2, a, b)\| \leq (1 + Lh) \|x_1 - x_2\|$$

gilt für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  und alle  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ .

- (A3) Die Funktion  $g$  aus Definition 3.1 sei stetig und erfülle

$$|g(x, a, b)| \leq M_g \quad \text{und} \quad |g(x_1, a, b) - g(x_2, a, b)| \leq L_g \|x_1 - x_2\|$$

für alle  $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ , alle  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$  und geeignete Konstanten  $M_g, L_g > 0$ .  $\square$

**Bemerkung 3.4** Statt zu maximieren können wir auch das entsprechende Minimierungsproblem  $u(x) := \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b)$  bzw.  $u_h(x) := \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} J_h(x, a_h, b_h)$  betrachten.

In einem dynamischen Spiel dagegen können wir nicht ohne weiteres von einer Maximierung oder Minimierung von  $J$  sprechen und wollen daher zuerst die Klasse der dynamischen Spiele, für die wir uns interessieren, in weiterer Analogie zu einem Wirtschaftssystem näher beschreiben, nämlich die *nicht-kooperativen dynamischen Zwei-Personen-Nullsummenspiele*.

## 3.2 Dynamisches Spiel, optimale Kontrollfunktionen und Strategien

Ein *Spiel* ist im spieltheoretischen Sinn eine Entscheidungssituation, bei der zwei oder mehrere Personen, Wirtschaftssubjekte oder auch *Spieler* genannt, Entscheidungen treffen (die gewissen, z.B. vom Marktumfeld diktierten Regeln bzw. Einschränkungen unterliegen), um den Ausgang des Spiels, in einer quantitativen Größe gemessen, zu ihrem jeweiligen Gunsten zu beeinflussen. Wir beschränken uns auf Spiele mit zwei Spielern, also *Zwei-Personen-Spiele*. Die Spieler befinden sich im Allgemeinen in einem Interessenkonflikt miteinander und folgen bei der Entscheidung ihrem eigenen (wirtschaftlichen) Interesse. Der *erste Spieler* maximiert seinen Profit, ausgedrückt als Kostenfunktional (auch engl. *Payoff*)  $J$  und der *zweite Spieler* ebenfalls maximiert seinen Payoff, der in einem *Nullsummenspiel* genau  $-J$  beträgt. Die Summe der beiden Payoffs ist in diesem Fall stets Null. Eine andere Formulierung ist, dass der erste Spieler  $J$  maximiert und der zweite Spieler  $J$  minimiert. Das Ergebnis des Spiels ist also im gewissen Sinne ein Kompromiss und unterscheidet sich i.A. deutlich von einem Minimal- bzw. Maximalwert von  $J$  in einem Fall, in dem einer der beiden Spieler alle Entscheidungen ohne Rücksicht auf den anderen treffen könnte. Nichtsdestoweniger sind Absprachen zwischen den Spielern nicht erlaubt im Laufe des Spiels bzw. haben keine Gültigkeit, deshalb ist das Spiel *nicht-kooperativ*, und weil die zeitliche Abfolge der Entscheidungen eine große Rolle spielt, heisst das Spiel *dynamisch*.

Im Unterschied zu dem optimalen Steuerungsproblem aus Definition 3.3 haben beim dynamischen Spiel zwei verschiedene Wertefunktionen ihre Berechtigung: entweder führt der maximierende Spieler zuerst seinen Optimierungsschritt aus und nach ihm tut dies der minimierende Spieler oder sie tun es in umgekehrter Reihenfolge. Diese zwei Optimierungsprobleme haben im Allgemeinen zwei verschiedene Lösungen, unter gewissen Umständen reduzieren sich die zwei Lösungen auf einen Wert. Eine Möglichkeit diese zwei neuen Wertefunktionen  $v_s, u_s$  zu definieren wäre die folgende

$$v_s(x) := \sup_{a \in \mathcal{A}} \inf_{b \in \mathcal{B}} J(x, a, b) \leq \inf_{b \in \mathcal{B}} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b) =: u_s(x). \quad (3.3)$$

Dieses Modell würde jedoch nicht der Wirklichkeit entsprechen, betrachten wir zum Beispiel  $u_s(x)$ : der zweite (minimierende) Spieler würde bei der Wahl seiner Kontrollfunktion  $b \in \mathcal{B}$  alle Informationen auch über den zukünftigen Verlauf der bereits festgelegten Kontrollfunktion  $a \in \mathcal{A}$  des zweiten (maximierenden) Spielers besitzen und das Spiel wäre nicht "fair".

Wir wollen deshalb zuerst einige Entscheidungsregeln überlegen, d.h. eine Informationsstruktur schaffen, der die beiden Spieler bei der Wahl ihrer Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$  und  $b \in \mathcal{B}$  folgen. Jeder der Spieler soll zu jedem Zeitpunkt nur über den zuletzt gewählten

Kontrollwert seines Opponenten sowie alle anderen in der Vergangenheit verwendeten Kontrollwerte wissen und nur aufgrund dieser Informationen seine Kontrollentscheidung treffen. Das geschieht mit der Definition der *nicht-antizipierenden Strategien*.

**Definition 3.5** (1) Sei ein Kontrollsystem in kontinuierlicher Zeit (2.1) mit zwei Spielern gegeben.

- (i) Die *Strategie des ersten Spielers* ist eine Abbildung  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Sie heisst *nicht-antizipierend*, wenn für jedes  $t > 0$  und alle  $b, \tilde{b} \in \mathcal{B}$   $b(s) = \tilde{b}(s)$  für alle  $s \leq t$  die Gleichheit  $\alpha[b](s) = \alpha[\tilde{b}](s)$  für alle  $s \leq t$  impliziert.

Die *Strategie des zweiten Spielers* ist eine Abbildung  $\beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Sie heisst *nicht-antizipierend*, wenn für jedes  $t > 0$  und alle  $a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$   $a(s) = \tilde{a}(s)$  für alle  $s \leq t$  die Gleichheit  $\beta[a](s) = \beta[\tilde{a}](s)$  für alle  $s \leq t$  impliziert.

- (ii) Die *Menge aller nicht-antizipierenden Strategien* des ersten Spielers bezeichnen wir mit  $\Gamma$  und die des zweiten Spielers mit  $\Delta$ . Formal lautet dies

$$\begin{aligned}\Gamma &:= \{ \alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \mid b(s) = \tilde{b}(s) \forall s \leq t \Rightarrow \alpha[b](s) = \alpha[\tilde{b}](s) \forall s \leq t \} \\ \Delta &:= \{ \beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \mid a(s) = \tilde{a}(s) \forall s \leq t \Rightarrow \beta[a](s) = \beta[\tilde{a}](s) \forall s \leq t \}.\end{aligned}$$

(2) Sei ein Kontrollsystem in diskreter Zeit (2.2) mit zwei Spielern gegeben.

- (i) Analog zum kontinuierlichen Fall ist die *Strategie des ersten Spielers* eine Abbildung  $\alpha_h : \mathcal{B}_h \rightarrow \mathcal{A}_h$  und die des zweiten Spielers eine Abbildung  $\beta_h : \mathcal{A}_h \rightarrow \mathcal{B}_h$ . Ebenfalls analog ist die Eigenschaft *nicht-antizipierend* definiert.

- (ii) Die *Menge aller nicht-antizipierenden Strategien* des ersten Spielers bezeichnen wir entsprechend mit  $\Gamma_h$  und die des zweiten Spielers mit  $\Delta_h$ , d.h.

$$\begin{aligned}\Gamma_h &:= \{ \alpha_h : \mathcal{B}_h \rightarrow \mathcal{A}_h \mid b(ih) = \tilde{b}(ih) \forall i \leq j \Rightarrow \alpha_h[b](ih) = \alpha_h[\tilde{b}](ih) \forall i \leq j \} \\ \Delta_h &:= \{ \beta_h : \mathcal{A}_h \rightarrow \mathcal{B}_h \mid a(ih) = \tilde{a}(ih) \forall i \leq j \Rightarrow \beta_h[a](ih) = \beta_h[\tilde{a}](ih) \forall i \leq j \}.\square\end{aligned}$$

Wir können nun mit Hilfe der nicht-antizipierenden Strategien zwei neue Wertefunktionen formulieren und damit dem dynamischen Spiel zum ersten Mal eine formale Definition geben.

**Definition 3.6** Betrachte ein Kontrollsystem (2.1) bzw. (2.2). Mit dem diskontierten Funktional  $J : \mathbb{R}^d \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $J_h : \mathbb{R}^d \times \mathcal{A}_h \times \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir den *unteren Spielwert* als

$$v(x) := \inf_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \beta[a]) \quad \text{bzw.} \quad v_h(x) := \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} J(x, a_h, \beta_h[a_h]), \quad (3.2)$$



und den *oberen Spielwert* als

$$u(x) := \sup_{\alpha \in \Gamma} \inf_{b \in \mathcal{B}} J(x, \alpha[b], b) \quad \text{bzw.} \quad u_h(x) := \sup_{\alpha_h \in \Gamma_h} \inf_{b_h \in \mathcal{B}_h} J(x, \alpha_h[b_h], b_h). \quad (3.3)$$

Das dynamische Spiel lautet nun: Bestimme den oberen Spielwert  $u(x)$  und den unteren Spielwert  $v(x)$  in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  (in kontinuierlicher Zeit) bzw. bestimme den oberen Spielwert  $u_h(x)$  und den unteren Spielwert  $v_h(x)$  in  $x \in \mathbb{R}^d$  (in diskreter Zeit).

Hierbei machen wir die gleichen Annahmen (A1), (A2) und (A3) wie in Definition 3.3.

Wenn die Gleichheit  $v(x) = u(x)$  bzw.  $v_h(x) = u_h(x)$  vorliegt, hat das dynamische Spiel einen *Wert*.  $\square$

**Bemerkung 3.7** (i) Die Annahme der globalen Lipschitz-Stetigkeit in (A2) (d.h., dass die Konstante  $L_R$  unabhängig von  $R$  ist), dient der Vereinfachung einiger Beweise und Aussagen, sie ist aber nicht wesentlich für die Funktion des später vorgestellten Algorithmus.

(ii) Wir setzen hier nicht voraus, dass die optimalen Kontrollfunktionen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$  bzw.  $a_h \in \mathcal{A}_h$ ,  $b_h \in \mathcal{B}_h$  existieren, deshalb verwenden wir "sup" statt "max" und "inf" statt "min".

(iii) Über die Kenntnis der Spielwerte hinaus ist es interessant, optimale Kontrollfunktionen  $a$ ,  $b$  bzw.  $a_h$ ,  $b_h$  zu berechnen. Später werden wir diese aus  $v$  und  $u$  bzw.  $v_h$  und  $u_h$  berechnen. Zu beachten ist dabei, dass sich zum oberen und unteren Wert des gleichen dynamischen Spiels verschiedene Kontrollfunktionen und Strategien ergeben können.

**Bemerkung 3.8** (i) Zwischen dem oberen und unteren Wert eines dynamischen Spiels (3.3), (3.2) besteht die Beziehung

$$v(x) \leq u(x) \quad \text{bzw.} \quad v_h(x) \leq u_h(x) \quad (3.4)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sie rechtfertigt die Bezeichnung "unterer" und "oberer Wert", ist aber nicht offensichtlich, denn man könnte zunächst "inf sup"  $\leq$  "sup inf" wie in (3.3) vermuten. Der Grund hierfür ist, dass das Supremum bzw. das Infimum in (3.3) zweimal über der gleichen Menge  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  gebildet wird, anders als in (3.4): das Supremum wird hier in  $v(x)$  über der Menge der Kontrollfunktionen  $\mathcal{A}$  und in  $u(x)$  über der Menge der Strategien  $\Gamma$  gebildet, das gleiche gilt für das Infimum.

Eine intuitive Erklärung für die Gültigkeit von (3.4) liefert die folgende Überlegung: Selbst wenn beide Spieler nicht in Kenntnis über das zukünftige Verhalten des Opponenten sind, wählt der zweite Spieler in der Definition des unteren Spielwertes (3.2) seine

Strategie  $\beta \in \Gamma$  mit der Kenntnis, welche Antwort darauf vom ersten Spieler in Form von  $a \in \mathcal{A}$  erfolgt. Der zweite Spieler ist also bei der Definition von  $v(x)$  in einem "strategischen" Vorteil.

Wir werden in Beispiel 3.9 ein Gegenbeispiel zur Annahme  $v(x) \geq u(x)$  für alle  $x$  sehen; d.h. ein dynamisches Spiel mit bestimmten  $u, v$  konstruieren, so dass  $v(x) < u(x)$  für alle  $x$  gilt.

- (ii) Die Werte  $u_s(x)$  und  $v_s(x)$  aus (3.3) bezeichnen wir als oberen und unteren Wert eines *statischen Spiels*. Zwischen den Werten des statischen und dynamischen Spiels bestehen Relationen, die Lemma 3.10 zeigt (wir beschränken uns dabei auf kontinuierliche Spielwerte, das gleiche gilt auch für das zeitdiskrete Spiel).

**Beispiel 3.9** Es seien  $\delta = 1$ ,  $A = B = [-1, 1]$ , die Dynamik  $f$  und die Wertefunktion  $g$  wählen wir als

$$f(x, a, b) := (b - a)^2 \quad \text{und} \quad g(x, a, b) := \operatorname{sgn} x \cdot (1 - e^{-|x|}).$$

Wir sehen,  $g$  ist nur von  $x$  abhängig und streng monoton wachsend in ganz  $\mathbb{R}$  und  $\dot{x}(t) = f(x(t), a(t), b(t)) \geq 0$ . Der zweite (minimierende) Spieler wird also versuchen das System "anzuhalten", d.h.  $f \equiv 0$  zu erreichen, seine optimale Strategie wird

$$\beta^*[a](t) = a(t) \quad \text{für alle } t$$

sein. Mit dieser Festlegung ist

$$J(x, a, \beta^*[a]) = \int_0^\infty e^{-t} g(x) dt = g(x) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}$$

und es folgt

$$v(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \beta^*[a]) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Auf der anderen Seite ist die beste Strategie des ersten (maximierenden) Spielers dafür zu sorgen, dass  $(b - a)^2$  möglichst groß bleibt. Das geschieht mit der Wahl

$$\alpha^*[b](t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } b(t) \leq 0, \\ -1, & \text{wenn } b(t) > 0. \end{cases}$$

Für den zweiten Spieler ist es in diesem Fall am besten, vorausgesetzt, dass er  $\alpha^*$  kennt, seinen Kontrollwert stets  $b \equiv 0$  zu wählen. Damit ergibt sich  $x(t) = t$  wegen  $\dot{x}(t) = 1$  und für  $x \geq 0$

$$J(x, \alpha^*[b], 0) = \int_0^\infty e^{-t} g(x+t) dt = 1 - \frac{e^{-x}}{2}.$$

Es folgt also für alle  $x \geq 0$

$$u(x) = J(x, \alpha^*[b], 0) = 1 - \frac{e^{-x}}{2} = g(x) + \frac{e^{-x}}{2} > v(x).$$

Eine ähnliche Rechnung zeigt  $v(x) < u(x)$  für alle  $x < 0$ .

**Lemma 3.10** Es seien  $u(x), v(x)$  der obere und untere Wert eines dynamischen Spiels (3.3), (3.2) mit dem diskontierten Funktional  $J : \mathbb{R}^d \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u_s(x), v_s(x)$  die Werte eines statischen Spiels (3.3) mit dem gleichen Kostenfunktional  $J$ .  $\Gamma$  und  $\Delta$  seien die Mengen der nicht-antizipierenden Strategien des ersten und des zweiten Spielers. Dann gilt

(i)

$$v_s \leq u \leq u_s \quad \text{und} \quad v_s \leq v \leq u_s.$$

(ii) Zu jedem  $x \in \mathbb{R}^d$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existieren  $\bar{\alpha} \in \Gamma$  und  $\bar{\beta} \in \Delta$  derart, dass die Ungleichungen

$$u(x) - \varepsilon \leq J(x, \bar{\alpha}[b], b) \leq \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B} \quad (3.5)$$

und

$$v(x) + \varepsilon \geq J(x, a, \bar{\beta}[a]) \geq \inf_{b \in \mathcal{B}} J(x, a, b) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A} \quad (3.6)$$

erfüllt sind.

BEWEIS: Wir beweisen zuerst (3.6) im Teil (ii) des Lemmas, (3.5) folgt dann analog.

Sei  $\bar{\beta} \in \Delta$  die Strategie des zweiten Spielers, mit der in

$$v(x) = \inf_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \beta[a])$$

das Infimum angenommen wird. Mit der Eigenschaft des Supremums gilt dann

$$v(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \bar{\beta}[a]) \geq J(x, a, \bar{\beta}[a]) - \varepsilon.$$

Damit ist die erste Ungleichung in (3.6) gezeigt und die zweite folgt aus der Überlegung, dass  $\bar{\beta}[a]$  wie auch das Bild jeder anderen Strategie  $\beta$  des zweiten Spielers stets im Raum der Kontrollfunktionen  $\mathcal{B}$  enthalten ist.

Im Teil (i) des Lemmas ist mit (3.6) die erste Ungleichung in  $v_s \leq v \leq u_s$  bereits bewiesen. Zum Beweis der zweiten betrachten wir

$$\inf_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \beta[a]) \leq \inf_{b \in \mathcal{B}} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b)$$

Diese Ungleichung folgt aus der Überlegung dass  $\Delta$  eine Kopie von  $\mathcal{B}$  enthält.

Der Beweis von  $u_s \leq u \leq v_s$  erfolgt analog. ■

Sobald die Werte eines dynamischen Spiels bestimmt sind, können wir die somit festgelegten, "gespielten" Kontrollfunktionen und Strategien als (aus der Sicht eines einzelnen Spielers) optimale Kontrollfunktionen bzw. Strategien bezeichnen. Beispiele dafür haben wir bereits in Beispiel 3.9 gesehen. Formal definieren wir sie wie folgt

**Definition 3.11** Betrachte ein dynamisches Spiel aus Definition 3.6 mit den Spielwerten  $u, v$ .

- (i) Ein Kontrollfunktion  $b^* \in \mathcal{B}$  ist optimal im Punkt  $x$ , wenn gilt

$$u(x) = \sup_{\alpha \in \Gamma} J(x, \alpha[b^*], b^*),$$

- (ii) Ein Kontrollfunktion  $a^* \in \mathcal{A}$  ist optimal im Punkt  $x$ , wenn gilt

$$v(x) = \inf_{\beta \in \Delta} J(x, a^*, \beta[a^*]). \quad \square$$

**Definition 3.12** Betrachte ein dynamisches Spiel aus Definition 3.6 mit den Spielwerten  $u, v$ .

- (i) Eine Strategie  $\alpha^* \in \Gamma$  ist optimal im Punkt  $x$ , wenn gilt

$$u(x) = \inf_{b \in \mathcal{B}} J(x, \alpha^*[b], b).$$

- (ii) Eine Strategie  $\beta^* \in \Delta$  ist optimal im Punkt  $x$ , wenn gilt

$$v(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, \beta^*[a]). \quad \square$$

Folgende Beobachtung rechtfertigt die Eigenschaft "optimal" einer Kontrollfunktion  $a^* \in \mathcal{A}$  und einer Strategie  $\beta^* \in \Delta$  (am Beispiel des unteren Wertes  $v$  eines dynamischen Spiels).

**Bemerkung 3.13** Falls  $a^* \in \mathcal{A}$  und  $\beta^* \in \Delta$  in  $x$  optimal sind, so gilt

$$J(x, a, \beta^*[a]) \leq v(x) = J(x, a^*, \beta^*[a^*]) \leq J(x, a^*, \beta[a^*])$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$  und  $\beta \in \Delta$ . Wir sprechen von einem *Nash-Gleichgewicht*  $(a^*, \beta^*)$ , d.h. der erste bzw. der zweite Spieler kann durch eine einseitige Abweichung von seiner optimalen Kontrollfunktion bzw. seiner Strategie den Spielwert  $v(x)$  für sich nicht verbessern.

### 3.3 Eigenschaften der Spielwerte

Wir haben bereits in Bemerkung 3.2 die ökonomische Bedeutung des Diskontfaktors  $e^{-\delta t}$  erwähnt. Wichtiger als die ökonomische Interpretation sind für uns die mathematischen Auswirkungen des Diskontfaktors. Eine davon zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 3.14** Es sei  $\delta h < 1$ , den kontinuierlichen Fall interpretieren wir als  $h = 0$ . Das diskontierte Funktional ist endlich und für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt die Abschätzung

$$|J(x, a, b)| \leq \frac{M_g}{\delta} \quad \text{und} \quad |J_h(x, a_h, b_h)| \leq \frac{M_g}{\delta},$$

insbesondere auch  $|u(x)|, |u_h(x)|, |v(x)|, |v_h(x)| \leq M_g/\delta$ .

BEWEIS: Wir beweisen die Aussagen in kontinuierlicher Zeit, die Aussagen in diskreter Zeit folgen analog. Es gilt

$$\begin{aligned} |J(x, a, b)| &= \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\delta t} |g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t))| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\delta t} M_g dt \\ &\leq M_g \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \\ &= M_g \left[ -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_0^\infty = \frac{M_g}{\delta} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bevor wir die Funktionen der Spielwerte  $v(x)$  und  $u(x)$  numerisch approximieren können, müssen wir außerdem ihre Regularitätseigenschaften betrachten. Wir können im Allgemeinen nicht davon ausgehen, dass  $v(x)$  und  $u(x)$  differenzierbar sind; tatsächlich können wir nicht einmal die Lipschitz-Stetigkeit erwarten. Wir können aber eine Abschätzung der Lipschitz-Stetigkeit, die sogenannte *Hölder-Stetigkeit* beweisen. Hierzu benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

**Lemma 3.15** (i) Sei  $A$  eine beliebige Menge, betrachte zwei Abbildungen  $w_1, w_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Für beliebige  $a, a_1, a_2 \in A$  gelten dann die Abschätzungen

$$\left| \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) \right| \leq \sup_{a \in A} |w_1(a) - w_2(a)|$$

und

$$\left| \inf_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \inf_{a_2 \in A} w_2(a_2) \right| \leq \sup_{a \in A} |w_1(a) - w_2(a)|.$$

(ii) Sei  $A, B$  zwei beliebige Mengen, betrachte zwei Abbildungen  $w_1, w_2 : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ . Für beliebige  $a, a_1, a_2 \in A$  und  $b, b_1, b_2 \in B$  gelten dann die Abschätzungen

$$\left| \inf_{b_1 \in B} \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1, b_1) - \inf_{b_2 \in B} \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2, b_2) \right| \leq \sup_{b \in B} \sup_{a \in A} |w_1(a, b) - w_2(a, b)|.$$

und

$$\left| \sup_{a_1 \in A} \inf_{b_1 \in B} w_1(a_1, b_1) - \sup_{a_2 \in A} \inf_{b_2 \in B} w_2(a_2, b_2) \right| \leq \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |w_1(a, b) - w_2(a, b)|.$$

BEWEIS: (i) Es gelte o.B.d.A.

$$\left| \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) \right| = \sup_{a \in A} |w_1(a) - w_2(a)|,$$

andernfalls vertausche aus Symmetriegründen die Indizes. Wähle  $\varepsilon > 0$  und  $a_\varepsilon \in A$  derart, dass gilt

$$w_1(a_\varepsilon) > \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \varepsilon$$

Dann gilt nach der Eigenschaft des Supremums

$$\begin{aligned} & \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) \geq w_2(a_\varepsilon) \\ \implies & \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) < w_1(a_\varepsilon) + \varepsilon - w_2(a_\varepsilon) \\ \implies & \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) \leq |w_1(a_\varepsilon) - w_2(a_\varepsilon)| + \varepsilon \\ \implies & \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2) \leq \sup_{a \in A} |w_1(a) - w_2(a)| + \varepsilon \end{aligned}$$

Mit der Annahme

$$\left| \inf_{a_1 \in A} w_1(a_1) - \inf_{a_2 \in A} w_2(a_2) \right| = \inf_{a \in A} |w_1(a) - w_2(a)|,$$

lässt sich der zweite Teil von (i) analog beweisen.

(ii) Es gelte wieder o.B.d.A.

$$\left| \inf_{b_1 \in B} \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1, b_1) - \inf_{b_2 \in B} \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2, b_2) \right| = \inf_{b_1 \in B} \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1, b_1) - \inf_{b_2 \in B} \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2, b_2),$$

sonst vertausche wie in (i) die Terme. Mit (i) folgt

$$\begin{aligned} \inf_{b_1 \in B} \sup_{a_1 \in A} w_1(a_1, b_1) - \inf_{b_2 \in B} \sup_{a_2 \in A} w_2(a_2, b_2) & \leq \sup_{b \in B} \left| \sup_{a_1 \in A} w_1(a, b_1) - \sup_{a_2 \in A} w_2(a, b_2) \right| \\ & \leq \sup_{b \in B} \sup_{a \in A} |w_1(a, b) - w_2(a, b)|. \end{aligned}$$

Der zweite Teil von (ii) lässt sich analog beweisen. ■

**Lemma 3.16** Sei  $\delta > 0$  und  $\phi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine Funktion mit  $\phi(t) \leq M$  für ein  $M > 0$  und alle  $t \geq 0$ . Des Weiteren nehmen wir an, dass Konstanten  $C, D, L > 0$ ,  $C \leq M$ , existieren, so dass die Ungleichung

$$\int_0^T e^{\delta t} \phi(t) dt \leq C \frac{e^{(L-\delta)T} - 1}{L - \delta} + D$$

im Fall  $L \neq \delta$  oder die Ungleichung

$$\int_0^T e^{\delta t} \phi(t) dt \leq CT + D$$

im Fall  $L = \delta$  für alle  $T > 0$  gilt. Dann gilt

$$\int_0^\infty e^{\delta t} \phi(t) dt \leq KC^\gamma + D$$

mit  $\gamma = 1$ , falls  $\delta > L$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  beliebig, falls  $\delta = L$  und  $\gamma = \delta/L$ , falls  $\delta < L$  und einer Konstante  $K > 0$ .

BEWEIS: Siehe [8]. ■

Mit diesen Teilresultaten können wir nun die Stetigkeitseigenschaften von  $u$  und  $v$  beweisen.

**Satz 3.17** Betrachte das dynamische Spiel aus Definition 3.6. Ist  $\delta > L$ , so ist der obere Spielwert  $u$  bzw. der untere Spielwert  $v$  Lipschitz-stetig mit Konstante  $L_g/(\delta - L)$ . Ist  $\delta \leq L$ , so ist  $u$  bzw.  $v$  Hölder stetig, d.h., es existieren Konstanten  $K, \gamma > 0$  so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \leq K \|x - y\|^\gamma \quad \text{bzw.} \quad |v(x) - v(y)| \leq K \|x - y\|^\gamma$$

gilt. Hierbei ist  $\gamma = \delta/L$ , falls  $\delta < L$  und  $\gamma \in (0, 1)$  beliebig, falls  $\gamma = L$ . □

BEWEIS: Wir beweisen das Resultat für den unteren Wert  $v$  des kontinuierlichen dynamischen Spiels (3.2). Die Aussage für den oberen Wert  $u$  des kontinuierlichen Spiels folgt analog. Ebenfalls gilt die gleiche Beweisführung für den oberen und unteren Wert  $u_h, v_h$  des zeitdiskreten Spiels (3.3) mit Abschätzung der entsprechenden Summen an der Stelle der Integrale.

Aus der Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes  $f$  folgt die Abschätzung

$$\|\Phi(t, x, a, b) - \Phi(t, y, a, b)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t L \|\Phi(\tau, x, a, b) - \Phi(\tau, y, a, b)\| d\tau.$$

Mit Gronwalls Lemma<sup>1</sup> folgt daraus

$$\|\Phi(t, x, a, b) - \Phi(t, y, a, b)\| \leq \|x - y\| e^{Lt}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-\delta t} \|g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) - g(\Phi(t, y, a, b), a(t), b(t))\| dt \\ & \leq \int_0^T e^{-\delta t} L_g \|x - y\| e^{Lt} dt \\ & \leq L_g \|x - y\| \frac{e^{(L-\delta)T} - 1}{L - \delta} \end{aligned}$$

falls  $\delta \neq L$  oder

$$\int_0^T e^{-\delta t} \|g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) - g(\Phi(t, y, a, b), a(t), b(t))\| dt \leq L_g \|x - y\| T$$

falls  $\delta = L$ . Mit Lemma 3.16 (für  $C = L_g \|x - y\|$  und  $D = 0$ ) erhalten wir also für jedes  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$|J(x, a, b) - J(y, a, b)| \leq K \|x - y\|^\gamma \quad (3.3)$$

mit  $\gamma = 1$ , falls  $\delta > L$ , und  $\gamma$  wie in der Formulierung des Satzes, falls  $\delta < L$ . Aus Lemma 3.15 (ii) mit  $w_1(a, \beta) = J(x, a, \beta[a])$  und  $w_2(a, \beta) = J(y, a, \beta[a])$  mit beliebigen  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\beta \in \Delta$  folgt

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| & \leq \sup_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} |J(x, a, \beta[a]) - J(y, a, \beta[a])| \\ & \leq \sup_{b \in \mathcal{B}} \sup_{a \in \mathcal{A}} |J(x, a, b) - J(y, a, b)|, \end{aligned}$$

was zusammen mit (3.3) die Behauptung ergibt. ■

### 3.4 Das Bellman'sche Optimalitätsprinzip

Wir kommen nun zu einer wichtigen Eigenschaft der Spielwerte, die die Basis für die numerische Approximation darstellt. Es ist das sogenannte *Bellman'sche Optimalitätsprinzip*, im Englischen auch oft *Dynamic Programming Principle* (kurz *DPP*). Es besagt, dass Endstücke optimaler Trajektorien wieder optimal Trajektorien sind. Mit anderen Worten erhalten wir

<sup>1</sup>Dieses Lemma ist Teil der Standardtheorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen, siehe z.B. [7]



den oberen Wert  $u(x)$  bzw. den unteren Wert  $v(x)$  des Spiels in einem Punkt, wenn beide Spieler für eine (beliebig kurze oder lange) Zeit optimale Kontrollwerte und Strategien einsetzen und anschließend die Werte von  $u$  und  $v$  in dem erreichten Punkt berücksichtigen. Es lässt sich wie folgt formulieren.

**Satz 3.18** Betrachte das dynamische Spiel aus Definition 3.6 mit dem oberen Wert  $u$  und dem unteren Wert  $v$ .

(i) Der obere Spielwert  $u(x)$  erfüllt für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und jedes  $T > 0$  die Gleichung

$$u(x) = \sup_{\alpha \in \Gamma} \inf_{b \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, \alpha[b], b), \alpha[b](t), b(t)) dt + e^{-\delta T} u(\Phi(T, x, \alpha[b], b)) \right\} \quad (3.3)$$

in kontinuierlicher Zeit und für jedes  $k \in \mathbb{N}$

$$u_h(x) = \sup_{\alpha_h \in \Gamma_h} \inf_{b_h \in \mathcal{B}_h} \left\{ h \sum_{j=0}^k (1 - \delta h)^j g(\Phi_h(jh, x, \alpha_h[b_h], b_h), \alpha_h[b_h](jh), b_h(jh)) + (1 - \delta h)^{k+1} u_h(\Phi_h((k+1)h, x, \alpha_h[b_h], b_h)) \right\} \quad (3.4)$$

in diskreter Zeit.

(ii) Der untere Spielwert  $v(x)$  erfüllt für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und jedes  $T > 0$  die Gleichung

$$v(x) = \inf_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, \beta[a]), a(t), \beta[a](t)) dt + e^{-\delta T} v(\Phi(T, x, a, \beta[a])) \right\}. \quad (3.5)$$

in kontinuierlicher Zeit und für jedes  $k \in \mathbb{N}$

$$v_h(x) = \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} \left\{ h \sum_{j=0}^k (1 - \delta h)^j g(\Phi_h(jh, x, a_h, \beta_h[a_h]), a_h(jh), \beta_h[a_h](jh)) + (1 - \delta h)^{k+1} v_h(\Phi_h((k+1)h, x, a_h, \beta_h[a_h])) \right\}. \quad (3.6)$$

in diskreter Zeit. □

**BEWEIS:** Wir beweisen das Optimalitätsprinzip (3.5) für den unteren Spielwert  $v$  in Anlehnung an [1] und [4]. Der Beweis des zeitdiskreten Falls (3.6) folgt analog sowie die entsprechenden Aussagen (3.3), (3.4) für den oberen Spielwert  $u$  bzw.  $u_h$ .

Mit  $w(x)$  sei die rechte Seite von (3.5) bezeichnet. Für jedes  $z \in \mathbb{R}^d$  und  $\varepsilon > 0$  können wir ein  $\beta_z \in \Delta$  wählen, so dass

$$v(z) \geq \sup_{a \in \mathcal{A}} J(z, a, \beta_z[a]) - \varepsilon. \quad (3.7)$$

Zuerst beweisen wir  $v(x) \leq w(x)$ . Der Einfachheit halber nehmen wir  $\delta = 1$  an. Wir wählen  $\bar{\beta} \in \Delta$  derart, dass

$$w(z) \geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a(t), \bar{\beta}[a](t)), a(t), \bar{\beta}[a](t)) dt + e^{-T} v(\Phi(T, x, a, \bar{\beta}[a])) \right\} - \varepsilon \quad (3.8)$$

Wir definieren nun  $\eta \in \Delta$  als

$$\eta[a](t) := \begin{cases} \bar{\beta}[a](t), & t \leq T, \\ \beta_z[a](\cdot + T)(T - t), & t > T, \end{cases}$$

mit  $z := \Phi(x, T, a, \bar{\beta}[a])$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} \Phi(x, t + T, a, \eta[a]) &= \Phi(\Phi(x, T, a, \eta[a]), t, a, \eta[a]) \quad \text{für } t > 0 \\ &= \Phi(\Phi(x, T, a, \bar{\beta}[a]), t, a, \beta_z[a](\cdot + T)) \quad \text{für } t > 0 \\ &= \Phi(z, t, a, \beta_z[a](\cdot + T)) \quad \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

so dass mit der Variablensubstitution  $\tau = t + T$  folgt

$$\begin{aligned} J(z, a(\cdot + T), \beta_z[a](\cdot + T)) &= \int_0^\infty e^{-t} g(\Phi(z, t, a(\cdot + T), \beta_z[a](\cdot + T)), a(\cdot + T), \beta_z[a](\cdot + T)) dt \\ &= \int_T^\infty e^{T-\tau} g(\Phi(x, \tau, a, \eta[a]), a(\tau), \eta[a](\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.7) und (3.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
w(x) &\geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a, \bar{\beta}[a]), a(t), \bar{\beta}[a](t)) dt + e^{-T} v(z) \right\} - \varepsilon \\
&\geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a, \bar{\beta}[a]), a(t), \bar{\beta}[a](t)) dt \right. \\
&\quad \left. + e^{-T} \sup_{a \in \mathcal{A}} J(z, a(\cdot + T), \beta_z[a](\cdot + T)) \right\} - 2\varepsilon \\
&\geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a, \eta[a]), a(t), \eta[a](t)) dt + e^{-T} J(z, a(\cdot + T), \beta_z[a](\cdot + T)) \right\} - 2\varepsilon \\
&\geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a, \eta[a]), a(t), \eta[a](t)) dt \right. \\
&\quad \left. + e^{-T} \int_T^\infty e^{T-\tau} g(\Phi(x, \tau, a, \eta[a]), a(\tau), \eta[a](\tau)) d\tau \right\} - 2\varepsilon \\
&= \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-t} g(\Phi(t, x, a, \eta[a]), a(t), \eta[a](t)) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_T^\infty e^{-t} g(\Phi(x, t, a, \eta[a]), a(t), \eta[a](t)) dt \right\} - 2\varepsilon \\
&\geq \sup_{a \in \mathcal{A}} \int_0^\infty e^{-t} g(\Phi(x, t, a, \eta[a]), a(t), \eta[a](t)) dt - 2\varepsilon \\
&\geq v(x) - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Für den Beweis der anderen Richtung  $w(x) \leq v(x)$  wählen wir  $a_1 \in \mathcal{A}$  derart, dass

$$w(x) \leq \int_0^T e^{-t} g(\Phi(x, t, a_1, \beta_x[a_1]), a_1(t), \beta_x[a_1](t)) dt + e^{-T} v(\Phi(x, T, a_1, \beta_x[a_1])) + \varepsilon \quad (3.-2)$$

gilt, dabei ist  $\beta_x$  wie in (3.7) definiert. Nun definiere für jedes  $a \in \mathcal{A}$  ein  $\tilde{a} \in \mathcal{A}$  mit

$$\tilde{a}(t) := \begin{cases} a_1(t), & t \leq T \\ a(t - T), & t > T, \end{cases} \quad (3.-1)$$

und ein  $\tilde{\beta} \in \Delta$  mit

$$\tilde{\beta}[a](t) := \beta_x[\tilde{a}](t + T) \quad (3.0)$$

Als nächstes setzen wir

$$z := \Phi(x, T, a_1, \beta_x[a_1]) \quad (3.1)$$

und wählen  $a_2 \in \mathcal{A}$  derart, dass

$$v(z) \leq J(z, a_2, \tilde{\beta}[a_2]) + \varepsilon. \quad (3.2)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$w(x) \leq J(x, \tilde{a}_2, \beta_x[\tilde{a}_2]) + 2\varepsilon$$

gilt. Dies folgt mit Hilfe von (3.-1) und (3.0), d.h.

$$\Phi(x, \tau, \tilde{a}_2, \beta_x[\tilde{a}_2]) = \begin{cases} \Phi(x, \tau, a_1, \beta_x[a_1]), & \tau \leq T \\ \Phi(z, \tau - T, a_2, \beta[a_2]), & \tau > T. \end{cases}$$

so dass mit Hilfe der Reparametrisierung  $\tau = t + T$

$$J(z, a_2, \beta[a_2]) = \int_T^\infty e^{T-\tau} g(\Phi(x, \tau, \tilde{a}_2, \beta_x[\tilde{a}_2]), \tilde{a}_2(\tau), \beta_x[\tilde{a}_2](\tau)) d\tau \quad (3.3)$$

gilt. Unter Miteinbeziehung von (3.-2), (3.-1), (3.1), (3.2) und (3.3) folgt nun

$$w(x) \leq \int_0^\infty e^{-\tau} g(\Phi(x, \tau, \tilde{a}_2, \beta_x[\tilde{a}_2]), \tilde{a}_2(\tau), \beta_x[\tilde{a}_2](\tau)) d\tau + 2\varepsilon$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war somit die Behauptung. ■

Der folgende Satz zeigt, dass  $u(x)$  und  $v(x)$  durch das Optimalitätsprinzip tatsächlich sogar eindeutig bestimmt sind.

**Satz 3.19** Betrachte das dynamische Spiel aus Definition 3.6 mit dem oberen Wert  $u$  und dem unteren Wert  $v$ . Sei ein  $T > 0$  gegeben und sei  $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

(i) Falls  $w$  das Optimalitätsprinzip (3.3) für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  erfüllt, d.h.

$$w(x) = \sup_{\alpha \in \Gamma} \inf_{b \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, \alpha[b], b), \alpha[b](t), b(t)) dt + e^{-\delta T} w(\Phi(T, x, \alpha[b], b)) \right\},$$

(bzw. (3.4) in diskreter Zeit), dann gilt  $w = u$ .

(ii) Falls  $w$  das Optimalitätsprinzip (3.5) für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  erfüllt, d.h.

$$w(x) = \inf_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, \beta[a]), a(t), \beta[a](t)) dt + e^{-\delta T} w(\Phi(T, x, a, \beta[a])) \right\},$$

(bzw. (3.6) in diskreter Zeit), dann gilt  $w = v$ . □

BEWEIS: Wir beweisen hier (ii), der Beweis von (i) folgt analog. Für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  erhalten wir mit Lemma 3.15 die Ungleichung

$$\begin{aligned}
|w(x) - v(x)| &\leq \sup_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} \left| \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, \beta[a]), a(t), \beta[a](t)) dt + e^{-\delta T} w(\Phi(T, x, a, \beta[a])) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, \beta[a]), a(t), \beta[a](t)) dt - e^{-\delta T} v(\Phi(T, x, a, \beta[a])) \right| \\
&= \sup_{\beta \in \Delta} \sup_{a \in \mathcal{A}} e^{-\delta T} |w(\Phi(T, x, a, \beta[a])) - v(\Phi(T, x, a, \beta[a]))| \\
&\leq e^{-\delta T} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |w(y) - v(y)|.
\end{aligned}$$

Da dies für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt, folgt

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |w(y) - v(y)| \leq e^{-\delta T} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |w(y) - v(y)|$$

und damit

$$(1 - e^{-\delta T}) \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |w(y) - v(y)| \leq 0.$$

Da  $1 - e^{-\delta T} > 0$ , folgt daraus  $\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |w(y) - v(y)| = 0$ , also  $w = v$ . ■



# Kapitel 4

## Diskretisierung des dynamischen Spiels

Das numerische Verfahren, dessen Herleitung und Analyse Ziel dieses Kapitels ist, besteht aus zwei weitgehend voneinander unabhängigen Schritten, einer Diskretisierung in der Zeit und einer Diskretisierung im Ort.

### 4.1 Diskretisierung in der Zeit

Zunächst betrachten wir in diesem Abschnitt den ersten Schritt, die Diskretisierung in der Zeit, bei dem wir ein zeitkontinuierliches Spiel (2.1) durch ein zeitdiskretes Spiel Definition 2.2 approximieren. Wenn das dynamische Spiel ohnehin in diskreter Zeit vorliegt, ist dieser Schritt nicht notwendig.

Aus Definition 2.8 und Satz 2.9 wissen wir, dass wir zu einem Kontrollsystem in kontinuierlicher Zeit eine diskrete Euler-Approximation konstruieren können, die jedem Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^d$  und jedem Paar von diskreten Kontrollfunktionen  $a_h : h\mathbb{Z} \rightarrow A$  und  $b_h : h\mathbb{Z} \rightarrow B$  eine zeitdiskrete approximative Lösung  $\tilde{\Phi}_h(t, x, a_h, b_h)$  liefert.

Für ein gegebenes kontinuierliches dynamisches Spiel betrachten wir in diesem Kapitel durchgehend den unteren Spielwert  $\tilde{v}_h$  des zeitdiskreten dynamischen Spiels, das zu der Euler-Approximation gehört. Dieser ist gegeben als

$$\begin{aligned} \tilde{v}_h(x) &:= \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} \tilde{J}_h(x, a_h, \beta[a_h]) \quad \text{mit} \\ \tilde{J}_h(x, a_h, \beta_h[a_h]) &:= h \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \delta h)^j g(\tilde{\Phi}_h(jh, x, a_h, \beta_h[a_h]), a_h(jh), \beta_h[a_h](jh)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sämtliche Resultate in diesem Kapitel sind aber auch genauso für den oberen Wert  $\tilde{u}_h$  erhältlich.

### 4.1.1 Diskretisierungsfehler

Wir werden nun analysieren, inwieweit  $\tilde{v}_h$  den Spielwert  $v$  approximiert, und in diesem Rahmen die Konvergenz  $\tilde{v}_h \rightarrow v$  beweisen und den entstehenden Diskretisierungsfehler abschätzen. Wie bereits bei der Diskretisierung des zugrundeliegenden Kontrollsystems werden wir die Konvergenz  $\tilde{v}_h \rightarrow v$  hier für eine spezielle Klasse von dynamischen Spielen zeigen.

**Definition 4.1** Wir nennen das dynamische Spiel aus Definition 3.6 *konvex*, falls die Menge

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} f(x, a, b) \\ g(x, a, b) \end{array} \right), a \in A, b \in B \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  konvex ist. □

Der folgende Satz zeigt die Beziehung zwischen  $v$  und  $v_h$ .

**Satz 4.2** Betrachte ein dynamisches Spiel aus Definition 3.6 sowie das zugehörige Eulerdiskretisierte dynamische Spiel (4.1). Wir nehmen an, dass das zugrundeliegende Kontrollsystem die Voraussetzungen von Satz 2.4 und Satz 2.9 erfüllt. Dann gelten für die Spielwerte  $v$  und  $\tilde{v}$  und alle  $h \in [0, 1/\delta]$  die folgenden Abschätzungen für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\gamma \in (0, 1]$  aus Satz 3.17 und eine passende Konstante  $K > 0$ .

$$(i) \quad v(x) \leq \tilde{v}_h(x) + K(h^{\frac{\gamma}{2}} + h)$$

Ist das dynamische Spiel konvex, so gilt die schärfere Abschätzung

$$v(x) \leq \tilde{v}_h(x) + K(h^\gamma + h)$$

$$(ii) \quad \tilde{v}_h(x) \leq v(x) + K(h^\gamma + h)$$

Insbesondere gilt also für eine passende Konstante  $\tilde{K} > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$|v(x) - \tilde{v}_h(x)| \leq \tilde{K}h^{\frac{\gamma}{2}}$$

im allgemeinen Fall, bzw.

$$|v(x) - \tilde{v}_h(x)| \leq \tilde{K}h^\gamma$$

im konvexen Fall. □

**BEWEIS:** Wir zeigen zunächst die folgende Eigenschaft: Seien  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a_h \in \mathcal{A}_h$  und  $b \in \mathcal{B}$ ,  $b_h \in \mathcal{B}_h$  die Identitäten

$$f(\Phi(hi, x, a, b), a_h(hi), b_h(hi)) = \frac{1}{h} \int_{hi}^{h(i+1)} f(\Phi(hi, x, a, b), a(t), b(t)) dt \quad (4.2)$$



und

$$g(\Phi(hi, x, a, b), a_h(hi), b_h(hi)) = \frac{1}{h} \int_{hi}^{h(i+1)} g(\Phi(hi, x, a, b), a(t), b(t)) dt \quad (4.3)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  gelten. Dann gilt die Abschätzung

$$|J(x, a, b) - \tilde{J}_h(x, a_h, b_h)| \leq K(h^\gamma + h) \quad (4.4)$$

für  $\gamma$  aus Satz 3.17 und eine passende Konstante  $K > 0$ , wobei  $\gamma$  und  $K$  unabhängig von  $x$  und  $a, \beta$  sind.

Zum Beweis von (4.4) definieren wir zunächst  $[t]_h$  als die größte ganze Zahl  $i \in \mathbb{N}_0$ , mit  $hi \leq t$ . Wir schreiben kurz  $\sigma = (1 - \delta h)$ . Damit gilt

$$\tilde{J}_h(x, a_h, b_h) = \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\tilde{\Phi}_h(h[t]_h, x, a_h, b_h), a(h[t]_h), b(h[t]_h)) dt.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|J(x, a, b) - \tilde{J}_h(x, a_h, b_h)|$$

$$\leq \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt \right| \quad (4.5)$$

$$+ \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt \right| \quad (4.6)$$

$$+ \left| \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\tilde{\Phi}_h(h[t]_h, x, a, b), a_h(h[t]_h), b_h(h[t]_h)) dt \right| \quad (4.7)$$

Wir schätzen nun die Terme (4.5)-(4.7) einzeln ab. Für (4.5) nutzen wir aus, dass wegen der Beschränktheit  $|f(x, a, b)| \leq M$  die Ungleichung

$$\|\Phi(t, x, a, b) - \Phi(h[t]_h, x, a, b)\| \leq Mh$$

gilt, und damit

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(t, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt \right| \\ & \leq \int_0^\infty e^{-\delta t} L_g M h dt \\ & = K_1 h \end{aligned}$$

Zum Abschätzen von (4.6) schreiben wir

$$\sigma = 1 - \delta h = e^{-\theta \delta h},$$

was für  $\theta = -\ln(1 - \delta h)/(\delta h)$  gilt. Aus der Taylor-Entwicklung  $-\ln(1 - r) = r + r^2/2 + r^3/3 + \dots$  folgt  $\theta > 1$  und  $\theta - 1 \leq C_1 h$  für alle hinreichend kleine  $h$ . Für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgt damit

$$|\sigma^i - e^{-\delta i h}| = |e^{-\theta \delta i h} - e^{-\delta i h}| \leq \max\{e^{-\delta i h}, e^{-\theta \delta i h}\} |\theta \delta i h - \delta i h| \leq e^{-\delta i h} C_1 h \delta i h,$$

wobei wir in der ersten Ungleichung den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für  $e^r$  und in der zweiten Ungleichung  $\theta > 1$  und  $\theta - 1 \leq C_1 h$  verwendet haben.

Für allgemeine  $t \geq 0$  gilt damit

$$\begin{aligned} |\sigma^{[t]_h} - e^{\delta t}| &\leq |\sigma^{[t]_h} - e^{-\delta h [t]_h}| + |e^{-\delta h [t]_h} - e^{-\delta t}| \\ &\leq e^{-\delta h [t]_h} C_1 h \delta h [t]_h + e^{-\delta t} C_2 h \leq C_3 h e^{-\delta t} (\delta t + 1), \end{aligned}$$

wobei der zweite Summand abgeschätzt wurde mittels

$$|e^{-\delta h [t]_h} - e^{-\delta t}| \leq |e^{-\delta(t-h)} - e^{-\delta t}| = e^{-\delta t} |e^{\delta h} - 1| \leq e^{-\delta t} C_2 h.$$

Hierbei folgt die letzte Ungleichung aus der Reihendarstellung von  $e^{\delta h}$ .

Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt \right| \\ \leq \int_0^\infty e^{-\delta t} (\delta t + 1) C_3 h dt = K_2 h, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-\delta t} \delta t dt = \frac{1}{\delta}$$

verwendet haben.

Für (4.7) beachte, dass aus (4.3) die Identität

$$\int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt = \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a_h(h[t]_h), b_h(h[t]_h)) dt$$

folgt. Desweiteren folgt aus (4.2), dass  $a_h$  und  $b_h$  diskrete Kontrollfunktionen sind, für die Satz 2.9(i) im konvexen Fall gilt, also insbesondere

$$\|\Phi(h[t]_h, x, a, b) - \tilde{\Phi}_h(h[t]_h, x, a_h, b_h)\| \leq C h e^{L t}$$

gilt für ein  $C > 0$ . Wegen  $\sigma^{[t]_h} \leq e^1 e^{-\delta t}$  folgt

$$\left| \int_0^T \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^T \sigma^{[t]_h} g(\tilde{\Phi}_h(h[t]_h, x, a, b), a_h(h[t]_h), b_h(h[t]_h)) dt \right| \leq e^1 \int_0^T e^{-\delta t} L_g C h e^{L t} dt \leq e^1 L_g C h \frac{e^{(L-\delta)T} - 1}{L - \delta}$$

für  $\delta \neq L$ , bzw.  $\leq e^1 L_g C h T$ , falls  $\delta = L$ . Aus Lemma 3.16 (mit  $C = e^1 L_g C h$  und  $D = 0$ ) folgt also

$$\left| \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\Phi(h[t]_h, x, a, b), a(t), b(t)) dt - \int_0^\infty \sigma^{[t]_h} g(\tilde{\Phi}_h(h[t]_h, x, a, b), a_h(h[t]_h), b_h(h[t]_h)) dt \right| \leq K_3 h^\gamma$$

und damit (4.4) mit  $K = \max\{K_1 + K_2, K_3\}$ .

Wir kommen nun zur eigentlichen Behauptung des Satzes und zeigen zuerst (i).

Analog zur Konstruktion im Beweis von Satz 2.9 folgt aus der Konvexität des dynamischen Spiels, dass zu beliebigen  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$  approximierende diskrete Kontrollfunktionen  $\bar{a}_h \in \mathcal{A}_h, \bar{b}_h \in \mathcal{B}_h$  existieren, so dass mit ihnen (4.2) und (4.3) erfüllt sind. Insbesondere gibt zu jedem durch eine optimale Strategie  $\beta^* \in \Delta$  definierten  $b^*(t) := \beta^*[a](t)$  eine entsprechende Kontrollfunktion  $\bar{b}_h^*$ , die ebenfalls (4.2) und (4.3) erfüllt. Mit diesen  $\bar{a}_h, \bar{b}_h$  definieren wir eine Strategie  $\beta_h^* : \mathcal{A}_h \rightarrow \mathcal{B}_h$  als  $\beta_h^*[\bar{a}_h](jh) := \bar{b}_h^*(jh)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Mit (4.4) folgt also

$$\begin{aligned} \tilde{v}_h(x) &\geq \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \tilde{J}_h(x, \bar{a}_h, \beta_h[\bar{a}_h]) = \tilde{J}_h(x, \bar{a}_h, \beta_h^*[\bar{a}_h]) = \tilde{J}_h(x, \bar{a}_h, \bar{b}_h^*) \\ &\geq J(x, a, b^*) = J(x, a, \beta^*[a]) = \inf_{\beta \in \Delta} J(x, a, \beta[a]) - K(h^\gamma + h), \end{aligned}$$

und damit (i), da wir auf der rechten Seite  $a \in \mathcal{A}$  beliebig wählen und somit zum Supremum über  $a$  übergehen können.

Zum Beweis von (ii) seien  $a_h \in \mathcal{A}_h$  und  $\beta_h \in \Delta_h$  beliebig. Sei  $b_h \in \mathcal{B}$  die Kontrollfunktion mit  $b_h(ih) := \beta_h[a_h](ih), i \in \mathbb{N}_0$ . Dann erfüllen die stückweise konstanten Kontrollfunktionen

$$\bar{a}(t) := a_h(h[t]_h) \quad \text{und} \quad \bar{b}(t) := b_h(h[t]_h) = \beta_h[a_h](h[t]_h) \quad (4.7)$$

(4.2) und (4.3). Wir definieren nun eine nicht-antizipierende Strategie  $\beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mit  $\beta[\bar{a}](t) := \bar{b}(t) \forall t \geq 0$ .

Mit (4.4) folgt

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \inf_{\beta \in \Delta} J(x, \bar{a}, \beta[\bar{a}]) = J(x, \bar{a}, \beta^*[\bar{a}]) = J(x, \bar{a}, \bar{b}^*) \\ &\geq \tilde{J}_h(x, a_h, b_h^*) = \tilde{J}_h(x, a_h, \beta_h^*[a_h]) = \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \tilde{J}_h(x, a_h, \beta_h[a_h]) - K(h^\gamma + h), \end{aligned}$$

wobei  $\beta_h^*$  die Strategie, mit der das Infimum auf der rechten Seite erreicht wird, und  $\bar{b}^*$  die dadurch wie in (4.7) analog definierte stückweise konstante Kontrollfunktion bezeichnet. Da wir auf der rechten Seite zum Supremum über  $a_h \in \mathcal{A}_h$  übergehen können, folgt hieraus die Behauptung (ii). ■

**Bemerkung 4.3** Wie bereits in Satz 2.9 können wir davon ausgehen, dass die Mengen  $A$  und  $B$  endlich sind, und sie andernfalls durch hinreichend große endliche Menge  $\tilde{A} \subset A$  und  $\tilde{B} \subset B$  ersetzen, so dass die Aussagen von Satz 4.2 gültig bleiben.

**Bemerkung 4.4** Nach Satz 3.18 erfüllt  $\tilde{v}_h$  das Optimalitätsprinzip

$$\tilde{v}_h(x) = \inf_{\beta_h \in \Delta_h} \sup_{a_h \in \mathcal{A}_h} \left\{ h \sum_{i=0}^k \sigma^i g(\tilde{\Phi}_h(ih, x, a_h, \beta_h[a_h]), a_h(ih), \beta[a_h](ih)) + \sigma^{k+1} \tilde{v}_h(\tilde{\Phi}((k+1)h, x, a_h, \beta_h[a_h])) \right\}. \quad (4.7)$$

## 4.1.2 Ein Iterationsverfahren

Das Optimalitätsprinzip (4.7) liefert uns eine Iterationsvorschrift zur Berechnung der zeitdiskreten Funktion des Spielwertes  $v_h$ , die die Grundlage für die numerische Approximation bilden wird. Sie ist das Kernstück des nachfolgend definierten Verfahrens, das gleichermassen mit der Spielwertefunktion  $v_h$  eines zeitdiskreten dynamischen Spiels und mit der Funktion  $\tilde{v}_h$  aus (4.1) arbeitet, die den Spielwert eines kontinuierlichen dynamischen Spiels approximiert.

**Definition 4.5** Wir definieren iterativ Funktionen  $v_h^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots$  mittels  $v_h^0(x) = 0$  und  $v_h^{i+1}(x) = T_h(v_h^i)(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , wobei der Operator  $T_h : C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  gegeben ist durch

$$T_h(w)(x) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma w(f_h(x, a, b))\} \quad (4.8)$$

mit  $\sigma = 1 - \delta h$ . Hierbei bezeichnet  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  die Menge der stetigen Funktionen von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{R}$ . □

Wir müssen jetzt die Konvergenz der iterativen Funktionen  $v_h^i \rightarrow v_h$  zeigen, um zu wissen, dass das Verfahren auch wie gewünscht funktioniert.

**Satz 4.6** Betrachte das zeitdiskretisierte dynamische Spiel (4.1) mit dem unteren Spielwert  $v_h$ . Es sei  $\delta h < 1$ . Dann gilt für die in Definition 4.5 eingeführten Funktionen die Abschätzung

$$\|v_h^i - v_h\|_\infty \leq \sigma^i \frac{M_g}{\delta}.$$

Wegen  $\sigma < 1$  folgt also insbesondere die Konvergenz  $v_h^i(x) \rightarrow v_h(x)$  gleichmässig für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

BEWEIS: Betrachte zwei beliebige Funktionen  $w_1, w_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $T_h$  wählen wir zunächst die Darstellungsform

$$T_h(w)(x) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} S_h(w)(x, a, b)$$

mit

$$S_h(w)(x, a, b) = hg(x, a, b) + (1 - \delta h)w(f_h(x, a, b)).$$

Dann folgt aus Lemma 3.15 für ein  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |T_h(w_1)(x) - T_h(w_2)(x)| &= \left| \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} S_h(w_1)(x, a, b) - \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} S_h(w_2)(x, a, b) \right| \\ &\leq \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |S_h(w_1)(x, a, b) - S_h(w_2)(x, a, b)| \\ &= (1 - \delta h) \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |w_1(x, a, b) - w_2(x, a, b)| \\ &\leq (1 - \delta h) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |w_1(x, a, b) - w_2(x, a, b)| \\ &= \sigma \|w_1 - w_2\|_\infty \end{aligned}$$

und damit

$$\|T_h(w_1)(x) - T_h(w_2)(x)\|_\infty \leq \sigma \|w_1 - w_2\|_\infty.$$

Mit dem Optimalitätsprinzip (4.7) für  $k = 0$  ergibt sich nun die Gleichung  $v_h = T_h(v_h)$ . Mit dieser und mit der Definition der  $v_h^i$  erhalten wir

$$\|v_h - v_h^{i+1}\|_\infty = \|T_h(v_h) - T_h(v_h^i)\|_\infty \leq \sigma \|v_h - v_h^i\|_\infty.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.14(i) sieht man  $\|v_h\|_\infty \leq hM_g/(\delta h)$ , woraus

$$\|v_h^0 - v_h\|_\infty = \|v_h\|_\infty \leq \frac{hM_g}{\delta h} = \sigma^0 \frac{M_g}{\delta}$$

folgt. Also ergibt sich die Behauptung per Induktion über  $i$ .  $\blacksquare$

Das folgende Lemma zeigt, dass jedes der  $v_h^i$  Lipschitz-stetig ist und die Lipschitz-Konstante sich sogar explizit angeben lässt.

**Lemma 4.7** Es sei  $\delta h < 1$ . Dann sind die Funktionen  $v_h^i$  aus Definition 4.5 Lipschitz-stetig mit Konstanten  $L_0 = 0$  und

$$L_i \leq hL_g \sum_{k=0}^{i-1} e^{(L-\delta)hk} \leq \begin{cases} e^{h(\delta-L)\frac{L_g}{\delta-L}}, & \delta > L \\ hL_g, & \delta = L \\ \frac{L_g}{L-\delta} e^{(L-\delta)hi}, & \delta < L \end{cases} \quad (4.5)$$

für  $i \geq 1$ .

BEWEIS: Die zweite Ungleichung in (4.5) ist klar für  $\delta = L$ ; für  $\delta \neq L$  folgt sie aus

$$hL_g \sum_{k=0}^{i-1} e^{(L-\delta)hk} \leq CL_g \int_0^{hi} e^{(L-\delta)t} dt = C \frac{L_g}{L-\delta} (e^{(L-\delta)hi} - 1)$$

mit  $C = e^{\max\{h(\delta-L), 0\}}$ . Wir zeigen nun mittels Induktion die erste Ungleichung (4.5). Die Funktion  $v_h^0$  ist konstant, also Lipschitz-stetig mit Konstante  $L_0 = 0$ . Nehmen wir nun an, dass  $v_h^i$  Lipschitz-stetig mit  $L_i$  ist.

Mit Lemma 3.15 ergibt sich

$$\begin{aligned} |v_h^{i+1}(x) - v_h^{i+1}(y)| &= |T_h(v_h^i)(x) - T_h(v_h^i)(y)| \\ &\leq \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \{ |hg(x, a, b) - hg(y, a, b) + \sigma v_h^i(f_h(x, a, b)) - \sigma v_h^i(f_h(y, a, b))| \}. \end{aligned}$$

Für jedes  $a \in A, b \in B$  lässt sich dieser Term abschätzen durch

$$\begin{aligned} &|hg(x, a, b) - hg(y, a, b) + \sigma v_h^i(f_h(x, a, b)) - \sigma v_h^i(f_h(y, a, b))| \\ &\leq |hg(x, a, b) - hg(y, a, b)| + \sigma |v_h^i(\Phi_h(x, a, b)) - v_h^i(\Phi_h(y, a, b))| \\ &\leq hL_g \|x - y\| + L_i(1 + hL)\sigma \|x - y\| \leq (hL_g + L_i(1 + hL)e^{-\delta h}) \|x - y\|, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Ungleichung  $\sigma \leq e^{-\delta h}$  verwendet haben. Im Fall  $i = 0$  folgt nun  $hL_g + L_i(1 + hL)e^{-\delta h} = hL_g = L_1$ , also die Behauptung. Im Fall  $i \geq 1$  folgt

$$\begin{aligned} hL_g + L_i(1 + hL)e^{-\delta h} &\leq hL_g + L_i e^{hL} e^{-\delta h} \leq hL_g + e^{h(L-\delta)} hL_g \sum_{k=0}^{i-1} e^{(L-\delta)hk} \\ &= hL_g + hL_g \sum_{k=0}^{i-1} e^{(L-\delta)h(k+1)} = L_{i+1}, \end{aligned}$$

also ebenfalls die Behauptung. ■

## 4.2 Diskretisierung im Raum

### 4.2.1 Zustandsraumbeschränkung

Wir wollen zuallererst in diesem Abschnitt überlegen, wie wir vernünftig den Definitionsbereich von  $v_h$  bzw.  $\tilde{v}_h$  auf eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  einschränken, da es rein rechen-technisch nicht möglich ist,  $v_h$  in ganz  $\mathbb{R}^d$  auszuwerten. Wünschenswert ist es, ein Gebiet  $\Omega$  derart abzugrenzen, dass die Trajektorien  $\Phi_h$  bzw.  $\tilde{\Phi}_h$  die für alle positiven Zeiten in  $\Omega$  bleiben. Selbst aber wenn wir in der Auswahl von  $\Omega$  frei sind und oft ist  $\Omega$  schon sowieso durch die Rahmenbedingungen des dynamischen Spiels gegeben, können wir nicht sicher sein, dass  $\Phi_h$  bzw.  $\tilde{\Phi}_h$  die Menge  $\Omega$  tatsächlich nicht irgendwann verlassen und müssen daher die folgenden drei Fälle betrachten.

- (1) Die Menge  $\Omega$  ist *stark invariant*, d.h. für alle  $x \in \Omega$  und alle  $a \in A$ ,  $b \in B$  gilt  $f_h(x, a, b) \in \Omega$ . In diesem Fall gibt es keine Probleme.
- (2) Die Menge  $\Omega$  ist *schwach invariant*, d.h. für alle  $x \in \Omega$  gibt es (mindestens) ein  $a \in A$  und ein  $b \in B$  mit  $f_h(x, a, b) \in \Omega$ . In diesem Fall berücksichtigen wir nur diese  $a \in A$  und  $b \in B$  bei der Optimierung; wir optimieren damit nur über Trajektorien, die für alle Zeiten in  $\Omega$  bleiben. Falls es eine Teilmenge von  $\Omega$  gibt, die *optimal invariant* ist, d.h. eine Menge  $D \subset \Omega$  mit der Eigenschaft, dass  $f_h(x, a_x^*, b_x^*) \in D$  für alle  $x \in D$  und ein Paar  $(a_x^*, b_x^*)$  Bemerkung 4.4, so folgt, dass sich  $v_h$  auf  $D$  dadurch nicht ändert.
- (3) Die Menge  $\Omega$  ist *nicht invariant*, d.h. es gibt ein  $x \in \Omega$ , so dass für alle  $a \in A$  oder alle  $b \in B$  gilt  $f_h(x, a, b) \notin \Omega$ . Dann können wir entweder die Punkte  $f_h(x, a, b)$  zurückprojizieren (d.h. wir ersetzen  $f_h(x, a, b)$  durch den nächstgelegenen Punkt in  $\Omega$ ), oder wir definieren eine Funktion  $\tilde{v}_h : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$  und benutzen den entsprechenden Wert in der Iteration für Punkte ausserhalb  $\Omega$ . In diesem Fall ist es jedoch nicht ohne weiteres klar, dass die so erhaltene Lösung noch etwas mit  $v_h$  zu tun hat.

### 4.2.2 Funktionen auf Gittern

Wir kommen nun dem Ziel näher, die Iterationsvorschrift (4.8) numerisch zu implementieren. Ein Problem bleibt noch: selbst wenn wir die Berechnung von  $v_h$  auf eine kompakte Menge  $\Omega$  eingrenzen, enthält jede kompakte Menge im Allgemeinen unendlich viele Punkte, die eine Berechnung praktisch unmöglich machen.

Wir werden deshalb den Spielwert  $v_h$  in einem endlichdimensionalen Funktionenraum berechnen. Wir werden hier die Methoden für die Fälle  $d = 1$  und  $d = 2$  betrachten, das Prinzip lässt sich aber auch auf höhere Dimensionen übertragen. Der Einfachheit halber nehmen wir

an, dass im zweidimensionalen Fall die kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , auf der wir  $v_h$  berechnen wollen, ein Rechteck ist. Im eindimensionalen Fall werden wir die kompakte Menge  $\Omega$  als einen Geradenabschnitt definieren. Manchmal werden wir von einer Rechteckmenge  $\Omega$  sprechen und darunter beide Fälle  $d = 2$  und (ausgeartet)  $d = 1$  verstehen.

**Definition 4.8** (i) Wir betrachten zuerst den Fall  $d = 2$ . Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  mit  $a_1 < b_1$  und  $a_2 < b_2$ . Ein (*regelmäßiges*) *Rechteckgitter*  $\Xi$  auf  $\Omega$  ist eine Menge von Rechtecken  $R_i$ ,  $i = 0, \dots, P - 1$ ,  $P = P_1 P_2$ , mit Kantenlängen  $k_1 = (b_1 - a_1)/P_1$  und  $k_2 = (b_2 - a_2)/P_2$ , so dass

$$\bigcup_{i=0}^{P-1} R_i = \Omega \quad \text{und} \quad \text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset \quad \text{für alle } i, j = 0, \dots, P - 1, i \neq j$$

Mit  $E_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ ,  $N = (P_1 + 1)(P_2 + 1)$  bezeichnen wir die Eckpunkte (oder Knotenpunkte) des Gitters. Der Wert  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  bezeichnet den maximalen Durchmesser eines Rechtecks.

(ii) Im Fall  $d = 1$  sei  $\Omega \in \mathbb{R}$  gegeben durch  $\Omega = [a, b]$  mit Werten  $a < b$ . Ein (*regelmäßiges*) *Intervallgitter*  $\Xi$  auf  $\Omega$  ist eine Menge von Intervallen  $R_i$ ,  $i = 0, \dots, P - 1$  mit der Länge  $k = (b - a)/P$ , so dass

$$\bigcup_{i=0}^{P-1} R_i = \Omega \quad \text{und} \quad \text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset \quad \text{für alle } i, j = 0, \dots, P - 1, i \neq j$$

Mit  $E_i$ ,  $i = 0, \dots, P$  bezeichnen wir die Eckpunkte (oder Knotenpunkte) des Gitters.  $\square$

Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen Beispiele eines Rechteck- und eines Intervallgitters.

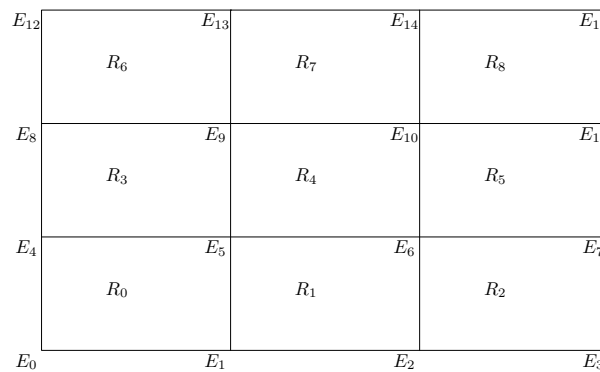
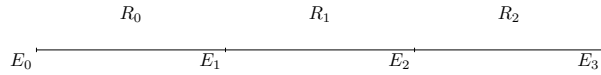


Abbildung 4.1: Ein Rechteckgitter im Fall  $d = 2$



Abbildung 4.2: Ein Intervallgitter im Fall  $d = 1$ 

Mit dieser Definition können wir schließlich den Funktionenraum einführen, in dem wir  $v_h$  approximativ berechnen.

**Definition 4.9** (i) Sei  $D \in \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $w : D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *affin linear*, falls es Konstanten  $\nu_0, \nu_1$  gibt, so dass für alle  $x \in D$

$$w(x) = \nu_0 + \nu_1 x \quad (4.6)$$

gilt.

(ii) Sei  $D \in \mathbb{R}^2$ . Eine Funktion  $w : D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *affin bilinear*, falls es Konstanten  $\nu_0, \dots, \nu_3$  gibt, so dass für alle  $x = (x_1, x_2)^T \in D$

$$w(x) = \nu_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_1 x_2 \quad (4.7)$$

gilt.

(iii) Sei  $\Omega \in \mathbb{R}$  eine streckenförmige Menge mit Intervallgitter  $\Xi$ . Wir definieren den Raum der stetigen und stückweise affin linearen Funktionen auf  $\Omega$  bezüglich  $\Xi$  als

$$\mathcal{W} := \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid w \text{ ist stetig und } w|_{R_i} \text{ ist affin linear für jedes } i = 0, \dots, P-1\}.$$

(iv) Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  eine rechteckförmige Menge mit Rechteckgitter  $\Xi$ . Wir definieren den Raum der stetigen und stückweise affin bilinearen Funktionen auf  $\Omega$  bezüglich  $\Xi$  als

$$\mathcal{W} := \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid w \text{ ist stetig und } w|_{R_i} \text{ ist affin bilinear für jedes } i = 0, \dots, P-1\}.$$

□

Das folgende Lemma beschreibt die Eigenschaften von  $\mathcal{W}$ .

**Lemma 4.10** (i) Jede Funktion  $w \in \mathcal{W}$  ist eindeutig durch ihre Werte  $w(E_i)$  in den Eckpunkten des Gitters bestimmt.

(ii) Im Fall  $d = 1$ , für jedes Intervall  $R_i = [c, d]$  mit den Knotenpunkten

$$E_{i_0} = c_1, \quad E_{i_1} = c_2$$

lässt sich  $w|_{R_i}$  für  $x \in R_i$  schreiben als

$$w(x) = \mu_0(x)w(E_{i_0}) + \mu_1(x)w(E_{i_1}) \quad (4.8)$$

mit

$$\mu_0(x) = (1 - y(x)), \quad \mu_1(x) = y(x)$$

und

$$y(x) = \frac{x - c_1}{c_2 - c_1}.$$

Hierbei gilt  $\mu_j(x) \geq 0$  für  $j = 0, 1$  und  $\mu_0(x) + \mu_1(x) = 1$ .

(iii) Im Fall  $d = 2$ , für jedes Rechteck  $R_i = [c_1, c_2] \times [d_1, d_2]$  mit den Eckpunkten

$$E_{i_0} = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, E_{i_1} = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_1 \end{pmatrix}, E_{i_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, E_{i_3} = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

lässt sich  $w|_{R_i}$  für  $x = (x_1, x_2)^T \in R_i$  schreiben als

$$w(x) = \sum_{j=0}^3 \mu_j(x)w(E_{i_j}) \quad (4.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_0(x) &= (1 - y_1(x))(1 - y_2(x)), & \mu_1(x) &= y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ \mu_2(x) &= (1 - y_1(x))y_2(x), & \mu_3(x) &= y_1(x)y_2(x) \end{aligned}$$

und

$$y_1(x) = \frac{x_1 - c_1}{c_2 - c_1}, \quad y_2(x) = \frac{x_1 - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Hierbei gilt  $\mu_j(x) \geq 0$  für  $j = 0, \dots, 3$  und  $\sum_{j=0}^3 \mu_j(x) = 1$ .

BEWEIS: Wir wollen (i) für den Fall  $d = 2$ , in folgender Form formuliert, zeigen: liegen zwei Funktionen  $w, \tilde{w} \in \mathcal{W}$  mit  $w(E_i) = \tilde{w}(E_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so folgt  $w = \tilde{w}$ .

Dazu betrachten wir ein beliebiges Rechteck  $R_i$  des Gitters,  $i \in \{0, \dots, P - 1\}$ . Falls die geforderte Gleichheit auf einem Rechteck vorliegt, gilt sie auch in jedem anderen Rechteck des Gitters, denn mittels Koordinatenverschiebung lassen sich alle Rechtecke auf das Rechteck  $R_i$  projizieren.

Seien die Funktionen  $w, \tilde{w} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\begin{aligned} w(x) &= \nu_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_1 x_2 \\ \tilde{w}(x) &= \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1 x_1 + \tilde{\nu}_2 x_2 + \tilde{\nu}_3 x_1 x_2 \end{aligned}$$

gegeben. Dann gilt für die Koordinaten von  $E_{i_0}, \dots, E_{i_3}$

$$\begin{aligned}\nu_0 + \nu_1 c_1 + \nu_2 d_1 + \nu_3 c_1 d_1 &= \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1 c_1 + \tilde{\nu}_2 d_1 + \tilde{\nu}_3 c_1 d_1 \\ \nu_0 + \nu_1 c_2 + \nu_2 d_1 + \nu_3 c_2 d_1 &= \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1 c_2 + \tilde{\nu}_2 d_1 + \tilde{\nu}_3 c_2 d_1 \\ \nu_0 + \nu_1 c_1 + \nu_2 d_2 + \nu_3 c_1 d_2 &= \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1 c_1 + \tilde{\nu}_2 d_2 + \tilde{\nu}_3 c_1 d_2 \\ \nu_0 + \nu_1 c_2 + \nu_2 d_2 + \nu_3 c_2 d_2 &= \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1 c_2 + \tilde{\nu}_2 d_2 + \tilde{\nu}_3 c_2 d_2\end{aligned}$$

und in einer anderen Schreibweise

$$M \begin{pmatrix} \nu_0 - \tilde{\nu}_0 \\ \nu_1 - \tilde{\nu}_1 \\ \nu_2 - \tilde{\nu}_2 \\ \nu_2 - \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \quad \text{mit } M := \begin{pmatrix} 1 & c_1 & d_1 & c_1 d_1 \\ 1 & c_2 & d_1 & c_2 d_1 \\ 1 & c_1 & d_2 & c_1 d_2 \\ 1 & c_2 & d_2 & c_2 d_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Mittels einiger äquivalenter Zeilenumformungen lässt sich  $M$  zu einer oberen Matrix  $M'$  transformieren,

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & d_1 & c_1 d_1 \\ 0 & c_2 - c_1 & 0 & c_2 d_1 - c_1 d_1 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 & c_1 d_2 - c_1 d_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 d_2 - c_2 d_1 - c_1 d_2 + c_1 d_1 \end{pmatrix}.$$

Die elementaren Zeilenumformungen lassen die Determinante einer Matrix unverändert und mit  $c_1 \neq c_2, d_1 \neq d_2$  gilt  $\det M = \det M' = (c_2 - c_1)^2 (d_2 - d_1)^2 > 0$ . Folglich hat  $M$  vollen Rang und somit ist

$$(\nu_0 - \tilde{\nu}_0, \nu_1 - \tilde{\nu}_1, \nu_2 - \tilde{\nu}_2, \nu_2 - \tilde{\nu}_2)^T = 0$$

die einzige Lösung der Gleichung (4.6). Daraus folgt die Behauptung.

Zum Beweis von Teil (ii) und (iii) setzen wir die Terme  $\mu_j$  in die Funktion  $w$  ein und sehen auf diese Weise, dass  $w$  sich in der Form (4.6) bzw. (4.7) darstellen lässt, d.h.  $w \in \mathcal{W}$  gilt. Die Gültigkeit von (4.8) bzw. (4.9) in den Eckpunkten von  $R_i$  verifizieren, indem wir in diese Gleichungen  $x = E_{i_j}, j \in \{0, 1\}$  bzw.  $j \in \{0, \dots, 3\}$  direkt einsetzen. Nach Teil (i) des Lemmas ist  $w$  auch im Inneren des Rechtecks eindeutig bestimmt. Die Eigenschaften der  $\mu_j$  lassen sich ebenfalls durch Nachrechnen überprüfen. ■

### 4.2.3 Die vollständige Diskretisierung

In Definition 4.5 haben wir bereits den Operator  $T_h$  und mit seiner Hilfe iterativ definierte Funktionen  $v_h^i$  eingeführt. Auf dieser Grundlage wollen wir einen Algorithmus formulieren, der auf Funktionen aus dem Raum  $\mathcal{W}$  anwendbar ist. Dabei reicht es nach Lemma 4.10 den

Operator  $T_h$  in jedem Schritt nur in den Punkten  $E_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  auszuwerten, d.h. eine Folge von Funktionen  $\hat{v}_h^j \in \mathcal{W}$  mit

$$\hat{v}_h^{j+1}(E_i) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{hg(E_i, a, b) + \sigma \hat{v}_h^j(\Phi(E_i, a, b))\},$$

$\sigma = 1 - \delta h$ , zu berechnen. Schreiben wir  $V^j = (V_0^j, \dots, V_{N-1}^j)^T \in \mathbb{R}^N$  mit  $V_i^j = \hat{v}_h^j(E_i)$ , so können wir diese Iteration auf  $\mathcal{W}$  nun als eine Iteration auf  $N$ -dimensionalen Vektoren formulieren. Die folgenden Vorschriften zur sukzessiven Berechnung der Vektoren  $V^j \in \mathbb{R}^N$  gelten sowohl für ein zweidimensionales Rechteckgitter als auch für ein eindimensionales Intervallgitter.

**Definition 4.11** Betrachte ein zeitdiskretes dynamisches Spiel und ein Rechteckgitter  $\Xi$  mit  $P$  Rechtecken und  $N$  Eckpunkten bzw. ein Intervallgitter  $\Xi$  mit  $N-1$  Intervallen,  $N$  Knotenpunkten. Zu jedem  $a \in A$ , jedem  $b \in B$  und jedem  $i = 0, \dots, N-1$  sei  $Q(i, a, b)$  der  $N$ -dimensionale Zeilenvektor, für den für jedes  $w \in \mathcal{W}$  und  $W = (w(E_0), \dots, w(E_{N-1}))^T \in \mathbb{R}^N$  mit der üblichen Matrixmultiplikation gilt

$$w(\Phi_h(E_i, a, b)) = Q(i, a, b)W$$

Beachte, dass  $Q(i, a, b)$  von keiner Funktion  $w \in \mathcal{W}$  abhängig ist und im Falle eines zweidimensionalen Gitters höchstens vier, im Falle eines eindimensionalen Gitters höchstens zwei positive Einträge (und sonst nur Null-Einträge) besitzt, deren Summe stets 1 ist.

Desweiteren bezeichnen wir  $G(i, a, b) := hg(E_i, a, b)$ . Dann berechnen wir Vektoren  $V^j$  iterativ mit dem *Gesamtschrittverfahren*

$$\begin{aligned} V^0 &:= (0, \dots, 0)^T \\ V_i^{j+1} &:= \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{G(i, a, b) + \sigma Q(i, a, b)V^j\} \quad \text{für } i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

oder dem *Einzelschrittverfahren*

$$\begin{aligned} V^0 &:= (0, \dots, 0)^T \\ V^{j+1} &:= V^j, \quad V_i^{j+1} := \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{G(i, a, b) + \sigma Q(i, a, b)V^{j+1}\} \quad \text{für } i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.8) \quad \square$$

**Bemerkung 4.12** (i) Im Allgemeinen ist das Einzelschrittverfahren vorteilhafter, da wir für jedes  $i > 1$  die aktuellen Werte  $V_k^{j+1}$  für  $0 \leq k < i$  berücksichtigen, und somit eine (leicht) schnellere Konvergenz erwarten können. Außerdem müssen im Gesamtschrittverfahren jeweils zwei Vektoren  $V^j$  und  $V^{j+1}$  gespeichert werden, während das Einzelschrittverfahren auf einem einzigen Vektor durchgeführt werden kann.

- (ii) Wenn  $A$  und  $B$  endlich sind (wenn sie als kontinuierliche Mengen gegeben sind, können sie durch eine geeignete Diskretisierung approximiert werden; d.h.  $A = \{a_1, \dots, a_{q_1}\}$  und  $B = \{b_1, \dots, b_{q_2}\}$  mit  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ ) und genügend Speicherplatz zur Verfügung steht, empfiehlt es sich in der praktischen Implementierung, die Werte  $G(i, a, b)$  und die Vektoren  $Q(i, a_{k_1}, b_{k_2})$  im Voraus zu berechnen und zu speichern, da dies der aufwändigste Teil des Algorithmus ist. Natürlich sollte man dabei die Vektoren nicht komplett speichern, sondern nur diejenigen Einträge, die ungleich Null sind.
- (iii) Falls  $A$  und  $B$  wiederum endlich bzw. endlich-approximiert sind, können wir für jedes  $i = 0, \dots, N - 1$  die Werte

$$\left[ G(i, a_{k_1}, b_{k_2}) + \sigma Q(i, a_{k_1}, b_{k_2}) V^{j+1} \right]_{\substack{0 \leq k_1 \leq q_1 \\ 0 \leq k_2 \leq q_2}},$$

hier am Beispiel des Einzelschrittverfahrens, in jedem Iterationsschritt (4.8) im Algorithmus als eine  $(q_1 \times q_2)$ -Matrix speichern. Aus diesem Grund dürfen wir in (4.7) und (4.8) statt "sup-inf" ab jetzt "max-min" schreiben. Die Bestimmung von

$$\max_{k_1 \in \{1, \dots, q_1\}} \min_{k_2 \in \{1, \dots, q_2\}} \{ G(i, a_{k_1}, b_{k_2}) + \sigma Q(i, a_{k_1}, b_{k_2}) V^{j+1} \}$$

ist somit ein Matrix-Spiel, das in jeder Iteration neu "gespielt" wird.

**Lemma 4.13** Betrachte die Iterationsvorschrift (4.7) bzw. (4.8) und sei  $\delta h < 1$ . Dann konvergieren die Vektoren  $V^j$  für  $j \rightarrow \infty$  komponentenweise gegen den Vektor  $V$ , der eindeutig bestimmt ist durch

$$V_i := \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{ G(i, a, b) + \sigma Q(i, a, b) V \} \quad \text{für } i = 0, \dots, N - 1.$$

Für die mit  $\hat{v}_h^j$ ,  $j = 1, \dots, \infty$  und  $\hat{v}_h$  bezeichneten zugehörigen Funktionen aus  $\mathcal{W}$  gilt darüber hinaus: Falls  $|V_i^j - V_i^{j+1}| \leq \varepsilon$  für alle  $i = 0, \dots, N - 1$ , so folgt

$$\|\hat{v}_h^j - \hat{v}_h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{h\delta}.$$

BEWEIS: Beachte zunächst, dass für beliebige Vektoren  $V, W \in \mathbb{R}^N$  und alle  $i = 0, \dots, N - 1$

folgende Abschätzung gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{G(i, a, b) + \sigma Q(i, a, b)V\} - \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{G(i, a, b) + \sigma Q(i, a, b)W\} \right| \\
& \leq \sigma \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |Q(i, a, b)V - Q(i, a, b)W| \\
& = \sigma \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \left| \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k - \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k W_k \right| \\
& \leq \sigma \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \left| \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k \sup_{0 \leq i \leq N-1} |V_i - W_i| \right| \tag{4.9} \\
& \leq \sigma \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \left| \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k \right| \sup_{0 \leq i \leq N-1} |V_i - W_i| \\
& = \sigma \sup_{0 \leq i \leq N-1} |V_i - W_i| \\
& = \sigma \|V_i - W_i\|_\infty,
\end{aligned}$$

wobei wir  $\sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k = 1$  ausgenutzt haben und  $\|\cdot\|_\infty$  die  $L_\infty$ -Norm im  $\mathbb{R}^N$  bezeichnet. Also definiert (4.9) eine Kontraktion auf dem  $\mathbb{R}^N$  bzgl. der  $L_\infty$ -Norm, weswegen der Vektor  $V$  existiert. Dieser ist zudem eindeutig, denn für jeden weiteren solchen Vektor  $W$  gilt mit (4.9)

$$\|V - W\|_\infty \leq \sigma \|V - W\|_\infty < \|V - W\|_\infty,$$

woraus  $V = W$  folgt.

Ebenfalls mit (4.9) sieht man leicht, dass die Vektoren  $V^j$  die Abschätzung

$$\|V^{j+1} - V\|_\infty \leq \sigma \|V^j - V\|_\infty$$

erfüllen. Daraus folgt die behauptete Konvergenz.

Außerdem folgt

$$\begin{aligned}
\|V^j - V\|_\infty & \leq \|V^j - V^{j+1}\|_\infty + \|V^{j+1} - V\|_\infty \\
& \leq \varepsilon + \sigma \|V^j - V\|_\infty
\end{aligned}$$

und daraus

$$\|V^j - V\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{1 - \sigma} = \frac{\varepsilon}{h\delta}.$$

Die entsprechende Aussage für die Funktionen  $\hat{v}_h^j$  folgt leicht mit der Darstellung aus Lemma 4.10(ii) bzw. (iii). ■

In der Praxis zeigt sich, dass die Iterationsvorschrift (4.7) bzw. (4.8) aus Definition 4.11 recht langsam gegen  $V$  konvergiert, insbesondere für kleine  $h$  und  $\delta$ . Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Iterationen behandeln, die deutlich schneller konvergieren.

#### 4.2.4 Diskretisierungsfehler

Wir wollen nun den Fehler abschätzen, der durch die Diskretisierung im Ort entsteht, d.h. wir benötigen eine Abschätzung für die Differenz

$$\|v_h - \hat{v}_h\|_\infty.$$

Dazu betrachten wir zunächst die Projektion einer beliebigen Funktion nach  $\mathcal{W}$ .

**Definition 4.14** Für eine Funktion  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Gitter  $\Xi$  bezeichnen wir mit  $\pi_{\mathcal{W}}q$  die (eindeutige) Funktion  $w \in \mathcal{W}$  mit

$$w(E_i) = q(E_i) \text{ für alle } i = 0, \dots, N-1 \quad \square$$

Das folgende Lemma gibt Auskunft über den dabei entstehenden Projektionsfehler, der auch als Interpolationsfehler bezeichnet wird.

**Lemma 4.15** Sei  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante  $L_q$ . Dann gilt

$$\|q - \pi_{\mathcal{W}}q\|_\infty \leq L_q k$$

mit dem Wert  $k$  aus Definition 4.8

**BEWEIS:** Wir konstruieren den Beweis für ein zweidimensionales Gitter, er lässt sich analog auf den eindimensionalen Fall übertragen. Sei  $x \in \Omega$  ein beliebiger Punkt und  $R_i$  ein Gitterrechteck, in dem dieser Punkt liegt. Seien  $E_{i_0}, \dots, E_{i_3}$  die Eckpunkte dieses Rechtecks. Dann liegt  $\|x - E_{i_j}\| \leq k$  für  $j = 0, \dots, 3$  und somit  $|q(x) - q(E_{i_j})| \leq L_q k$ . Mit Lemma 4.10 folgt

$$\begin{aligned} |q(x) - \pi_{\mathcal{W}}q(x)| &= \left| q(x) - \sum_{j=0}^3 \mu_j(x) q(E_{i_j}) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^3 \mu_j(x) q(x) - \sum_{j=0}^3 \mu_j(x) q(E_{i_j}) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^3 \mu_j(x) |q(x) - q(E_{i_j})| = \sum_{j=0}^3 \mu_j(x) L_q k = L_q k \end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten und im letzten Schritt die Tatsache  $\sum_{j=0}^3 \mu_j(x) = 1$  ausgenutzt. ■

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun zunächst den Fehler zwischen  $v_h^j$  und  $\hat{v}_h^j$  abschätzen. Hierbei bezeichnet  $L$ , wie üblich, die Lipschitz-Konstante des Vektorfeldes  $f$ .

**Lemma 4.16** Betrachte die Funktionen  $v_h^j$  und  $\hat{v}_h^k$  aus den Definitionen 4.5 und 4.11. Dann gelten die Abschätzungen

$$\|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_\infty \leq 2M_g e^{\delta h} \int_0^{jh} e^{-\delta t} dt \quad (4.10)$$

und, falls  $\delta > L$ ,

$$\|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_\infty \leq C \frac{k}{h} \quad (4.11)$$

bzw., falls  $\delta < L$

$$\|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_\infty \leq C \frac{k}{h} \int_0^{jh} e^{(L-\delta)t} dt \quad (4.12)$$

mit einer geeigneten Konstante  $C > 0$ .

BEWEIS: Beachte zunächst, dass man aus der Definition von  $\pi_{\mathcal{W}}$  den Zusammenhang

$$\hat{v}_h^{j+1} = \pi_{\mathcal{W}} \hat{v}_h^{j+1} = \pi_{\mathcal{W}} T_h(\hat{v}_h^j)$$

erhält. Wir zeigen nun zunächst (4.10). Aus den Definitionen, dass für die betrachteten Funktionen die Ungleichungen

$$\|v_h^{j+1}\|_\infty \leq hM_g + \sigma \|v_h^j\|_\infty \quad \text{und} \quad \|\hat{v}_h^{j+1}\|_\infty \leq hM_g + \sigma \|\hat{v}_h^j\|_\infty$$

gelten (beachte, dass  $\|\pi_{\mathcal{W}} q\|_\infty \leq \|q\|_\infty$  gilt). Durch Induktion erhalten wir

$$\|v_h^i\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{j-1} \sigma^i hM_g \quad \text{und} \quad \|\hat{v}_h^i\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{j-1} \sigma^i hM_g.$$

Aus  $\|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_\infty \leq \|v_h^j\|_\infty + \|\hat{v}_h^j\|_\infty$  und

$$\sum_{i=0}^{j-1} \sigma^i hM_g \leq e^{\delta h} \int_0^{jh} e^{-\delta t} M_g dt$$

folgt damit (4.10).

Zum Beweis von (4.11) und (4.12) verwenden wir Lemma 4.7, welches besagt, dass  $v_h^j$  Lipschitz-stetig mit der dort angegebenen Konstante  $L_j$  ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v_h^{j+1} - \hat{v}_h^{j+1}\|_\infty &\leq \|v_h^{j+1} - \pi_{\mathcal{W}} v_h^{j+1}\|_\infty + \|\pi_{\mathcal{W}} v_h^{j+1} - \pi_{\mathcal{W}} \hat{v}_h^{j+1}\|_\infty \\ &\leq kL_{j+1} + \sigma \|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_\infty, \end{aligned}$$



wobei wir zur Abschätzung des zweiten Terms in der letzten Ungleichung die Abschätzung  $\|\pi_{\mathcal{W}}q_1 - \pi_{\mathcal{W}}q_2\|_{\infty} \leq \|q_1 - q_2\|_{\infty}$  und Lemma 3.15 verwendet haben.

Aus  $v_h^0 = \hat{v}_h^0$  erhalten wir nun mittels Induktion die Abschätzung

$$\|v_h^j - \hat{v}_h^j\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^j \sigma^{j-i} k L_i \leq \sum_{i=1}^j e^{-\delta h(j-i)} k L_i.$$

Für  $\delta > L$  gilt  $L_j \leq e^{h(\delta-L)} L_g / (\delta-L) =: \tilde{C}$  und damit können wir die rechte Seite abschätzen durch

$$\sum_{i=1}^j e^{-\delta h(j-i)} k \tilde{C} \leq e^{\delta h} \frac{k}{h} \tilde{C} \int_0^{jh} e^{-\delta t} dt \leq e^{\delta h} \frac{k}{h} \tilde{C} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = C \frac{k}{h}.$$

Für  $\delta < L$  haben wir  $L_j \leq L_g e^{(L-\delta)jh} / (L-\delta)$  und damit

$$\sum_{i=1}^j e^{-\delta h(j-i)} k \frac{L_g}{L-\delta} e^{(L-\delta)ih} \leq e^{(L-\delta)h} \frac{k}{h} \frac{L_g}{L-\delta} \int_0^{jh} e^{(L-\delta)t} dt = C \frac{k}{h} \int_0^{jh} e^{(L-\delta)t} dt. \quad \blacksquare$$

Mit diesem Lemma können wir den folgenden Satz beweisen.

**Satz 4.17** Betrachte ein zeitdiskretes dynamisches Spiel aus 3.1 auf einer kompakten Rechteckmenge  $\Omega$  mit Zeitschritt  $h$ . Sei  $v_h$  der zugehörige untere Spielwert. Betrachte weiterhin ein Gitter  $\Xi$  auf  $\Omega$  mit Durchmesser  $k$ . Dann gilt für die Funktion  $\hat{v}_h$  aus Lemma 4.13 die Abschätzung

$$\|v_h - \hat{v}_h\|_{\infty} \leq K \left( \frac{k}{h} \right)^{\gamma},$$

mit  $\gamma = 1$ , falls  $\delta > L$ ;  $\gamma \in (0, 1)$  beliebig, falls  $\delta = L$  und  $\gamma = \delta/L$ , falls  $\delta < L$ , und für eine geeignete Konstante  $K > 0$ .  $\square$

BEWEIS: Im Fall  $\delta > L$  folgt die Behauptung direkt aus der Abschätzung (4.11) im Lemma 4.16, die für alle  $j \geq 0$  und damit auch für  $j \rightarrow \infty$  gilt.

Im Fall  $\delta < L$  erhalten wir aus Lemma 4.16 die Abschätzung

$$\|v_h - \hat{v}_h\|_{\infty} \leq \int_0^{\infty} e^{\delta t} \phi(t) dt$$

mit

$$\phi(t) = \min \left\{ e^{\delta h} 2M_g, C \frac{k}{h} e^{Lt} \right\}.$$

Diese Funktion erfüllt die Voraussetzung von Lemma 3.16 mit  $M = e^{\delta h} 2M_g$ ,  $D = 0$  und  $C = C \frac{k}{h}$ , also folgt

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \Phi(t) dt \leq K \left( \frac{k}{h} \right)^\gamma$$

für  $\gamma$  aus der Behauptung und ein geeignetes  $K > 0$ .

Im Fall  $\delta = L$  können wir zu gegebenem  $\gamma \in (0, 1)$  o.B.d.A.  $L = \delta/\gamma > \delta$  annehmen, und erhalten die gewünschte Aussage somit aus dem Fall  $\delta < L$ . ■

Kombinieren wir nun Satz 4.17 mit Satz 4.2, so erhalten wir die folgende Aussage.

**Satz 4.18** Betrachte ein dynamisches Spiel aus Definition 3.6 auf einer kompakten Rechteckmenge  $\Omega$  mit dem unteren Spielwert  $v$ , das zugehörige zeitdiskrete dynamische Spiel aus (4.1) zu einem  $h > 0$  sowie ein Gitter  $\Xi$  auf  $\Omega$  mit Durchmesser  $k$ . Dann gilt für die Funktion  $\hat{v}_h$  aus Lemma 4.13 die Abschätzung

$$\|v - \hat{v}_h\|_\infty \leq Kh^{\gamma/2} + K \left( \frac{k}{h} \right)^\gamma,$$

mit  $\gamma = 1$ , falls  $\delta > L$ ;  $\gamma \in (0, 1)$  beliebig, falls  $\delta = L$  und  $\gamma = \delta/L$ , falls  $\delta < L$ , und für eine geeignete Konstante  $K > 0$ . Falls das dynamische Spiel konvex ist, erhalten wir sogar

$$\|v - \hat{v}_h\|_\infty \leq Kh^\gamma + K \left( \frac{k}{h} \right)^\gamma. \quad \square$$

Aus dem Satz ergibt sich die Forderung, dass wir, um Konvergenz von  $\hat{v}_h$  gegen  $v$  zu erhalten,  $h$  und  $k$  so gegen Null streben lassen müssen, dass die Bedingung  $k/h \rightarrow 0$  ebenfalls erfüllt ist. Praktische Tests zeigen aber, dass man auch im Fall  $k \approx h$  gute Ergebnisse erhält. Der Grund dafür ist, dass tatsächlich eine stärkere Abschätzung gilt, die in [5] für optimale Steuerungsprobleme mit einem Parameter bewiesen wurde. Diese lautet

$$\|v - \hat{v}_h\|_\infty \leq Kh^{\gamma/2} + K \left( \frac{k}{\sqrt{h}} \right)^\gamma$$

für alle hinreichend kleinen  $k, h > 0$  mit der Eigenschaft, dass  $k \leq C_1 h$  für eine Konstante  $C_1 > 0$  gilt. Für  $k = C_1 h$  folgt also insbesondere die Abschätzung  $\|v - \hat{v}_h\|_\infty \leq \tilde{K} h^{\gamma/2}$  für ein geeignetes  $\tilde{K} > 0$ .

Der Beweis des Satzes ist ziemlich kompliziert und wir lassen ihn deshalb an dieser Stelle aus.

# Kapitel 5

## Numerik des dynamischen Spiels

In Kapitel 4 haben wir bereits ein numerisches Verfahren zur approximativen Berechnung des Spielwertes entwickelt. Oft ist man jedoch mehr daran interessiert, den Verlauf der optimalen Trajektorie und somit auch die optimalen Kontrollwerte des jeweiligen Spielers zu jedem Zeitpunkt im dynamischen Spiel zu kennen. Im ersten Teil dieses Kapitels werden wir untersuchen, wie diese approximative Berechnung genau geschieht und zwar nur mit der Kenntnis des aktuellen Zustands  $x$ .

Im zweiten Abschnitt wollen wir eine erweiterte Variante des bereits bekannten iterativen Verfahrens vorstellen, die sich durch eine schnellere Konvergenz auszeichnet, und schließlich werden wir im letzten Abschnitt einen Fehlerschätzer für die approximative Spielwertfunktion  $\hat{v}_h$  konstruieren.

### 5.1 Berechnung approximativ optimaler Trajektorien

#### 5.1.1 Zeitdiskrete optimale Trajektorien

Zu unserer Analyse ziehen wir hier und später in diesem Kapitel wieder den unteren Wert  $v_h$  des zeitdiskreten dynamischen Spiels heran, wissen aber dabei, dass in ähnlicher Form alles auch für den oberen Spielwert  $u_h$  gilt. Für  $v_h$  gilt das Optimalitätsprinzip (3.6), das für  $k = 0$  als

$$v_h(x) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma v_h(f_h(x, a, b))\} \quad (5.1)$$

geschrieben werden kann.

**Definition 5.1** Wir definieren zwei Abbildungen  $a^* : \mathbb{R}^d \rightarrow A$  und  $b^* : \mathbb{R}^d \rightarrow B$ , indem wir zu jedem  $x \in \mathbb{R}^d$  ein 2-Tupel  $(a_x, b_x) \in A \times B$  wählen, das das max-min-Problem in (5.1) löst (ein solches Tupel  $(a_x, b_x)$  existiert, wird aber im Allgemeinen nicht eindeutig sein), und  $a^*(x) = a_x$  und  $b^*(x) = b_x$  setzen.  $\square$

**Bemerkung 5.2** Diese Vorschrift definiert Kontrollstrategien, die nur vom aktuellen Zustand  $x$  und nicht von der Zeit  $t$  abhängen, die also keine diskreten Kontrollfunktionen im bisherigen Sinn sind. Eine solche Kontrollstrategie nennt man *Zustandsrückführung* oder *Zustandsfeedback*.

Mit den Feedbacks  $a^*$  und  $b^*$  definieren wir nun zu jedem Anfangswert  $x$  diskrete Kontrollfunktionen  $a_h^x \in \mathcal{A}_h$  und  $b_h^x \in \mathcal{B}_h$  gemäß der folgenden iterativen Vorschrift

$$a_h^x(0) := a^*(x), \quad a_h^x(ih) = a^*(\Phi_h(ih, x, a_h^x, b_h^x)) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

$$b_h^x(0) := b^*(x), \quad b_h^x(ih) = b^*(\Phi_h(ih, x, a_h^x, b_h^x)) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

**Bemerkung 5.3** Beachte, dass mit der Wahl von  $(a_x, b_x)$  in Definition 5.1 zu einem gegebenen Zustand  $x \in \mathbb{R}^d$  stets eine Funktion  $a_x \mapsto b_x$  (nach der Reihenfolge der Spieler) implizit definiert wird. Über die Zeit  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  betrachtet, bedeutet es, dass die Kontrollfunktion  $b_h^x$  in (5.3) als Ergebnis einer implizit definierten Strategie  $\beta_h : \mathcal{A}_h \rightarrow \mathcal{B}_h$ ,  $\beta_h := \{a_h^x(ih) \mapsto b_h^x(ih) \mid i \in \mathbb{N}\}$  interpretiert werden kann. Insbesondere sind  $a_h^x(ih)$  und  $b_h^x(ih)$  wohldefiniert, da die Lösung  $\Phi(ih, x, a_h^x, b_h^x)$  zum Zeitpunkt  $ih$  nur vom Verlauf von  $a_h^x$  und  $b_h^x$  bis dahin, d.h. von den Werten

$$(a_h^x(0), a_h^x(h), \dots, a_h^x((i-1)h)) \quad \text{und} \quad (b_h^x(0), b_h^x(h), \dots, b_h^x((i-1)h))$$

abhängt, die für ein gegebenes  $i \in \mathbb{N}$  bereits iterativ bestimmt sind. Das bedeutet wiederum, dass die implizit definierte Strategie  $\beta_h \in \Delta_h$ , d.h. nicht-antizipierend ist.

Der folgende Satz zeigt, dass die so definierten Kontrollen tatsächlich optimale Kontrollen für das zeitdiskrete Problem sind.

**Satz 5.4** Die in (5.2) und (5.3) definierten diskreten Kontrollfunktionen sind optimal für das zeitdiskrete dynamische Spiel, d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$J_h(x, a_h^x, b_h^x) = v_h(x). \quad \square$$

BEWEIS: Sei ein  $x \in \mathbb{R}^d$  gegeben. Wir verwenden die Abkürzungen

$$x_j := \Phi_h(jh, x, a_h^x, b_h^x), \quad a_j := a_h^x(jh), \quad b_j := b_h^x(jh)$$

und zeigen mit ihnen für alle  $k \geq 0$  per Induktion die Gleichung

$$v_h(x) = h \sum_{i=0}^k \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) + \sigma^{k+1} v_h(x_{k+1}). \quad (5.4)$$

Zum Beweis dieser Gleichung verwenden wir, dass aus der Definition von  $a^*, b^*$  und  $a_h^x, b_h^x$  für alle  $j \geq 0$  folgt

$$\begin{aligned} v_h(x_j) &= hg(x_j, a^*(x_j), b^*(x_j)) + \sigma v_h(f_h(x_j, a^*(x_j), b^*(x_j))) \\ &= hg(x_j, a_j, b_j) + \sigma v_h(f_h(x_j, a_j, b_j)) \\ &= hg(x_j, a_j, b_j) + \sigma v_h(x_{j+1}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Für  $k = 0$  ergibt sich (5.4) direkt aus (5.3) mit  $j = 0$ . Gelte also nun (5.4) für ein  $k \geq 0$ . Dann folgt mit (5.3) für  $j = k + 1$

$$\begin{aligned} v_h(x) &= h \sum_{i=0}^k \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) + \sigma^{k+1} v_h(x_{k+1}) \\ &= h \sum_{i=0}^k \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) + \sigma^{k+1} v_h(hg(x_{k+1}, a_{k+1}, b_{k+1}) + \sigma v_h(x_{k+2})) \\ &= h \sum_{i=0}^{k+1} \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) + \sigma^{k+2} v_h(x_{k+2}), \end{aligned}$$

womit (5.4) gezeigt ist und für alle  $k \geq 0$  gilt. Nun folgt aus (5.4) die Behauptung für  $k \rightarrow \infty$ , denn  $v_h$  ist beschränkt und folglich gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( h \sum_{i=0}^k \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) + \sigma^{k+1} v_h(x_{k+1}) \right) = h \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i g(x_i, a_i, b_i) = J_h(x, a_h^x, b_h^x). \quad \blacksquare$$

### 5.1.2 Numerische Berechnung optimaler Kontrollen

Analog zu Definition 5.1 definieren wir nun numerische Kontrollstrategien  $\hat{a}^*$  und  $\hat{b}^*$ . Wir betrachten dazu die Funktion  $\hat{v}_h$ , die mit der nachfolgenden Iterationsvorschrift bereits aus Lemma 4.13 bekannt ist:

$$\hat{v}_h(x) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma \hat{v}_h(f_h(x, a, b))\}. \quad (5.2)$$

**Definition 5.5** Wir definieren zwei Abbildungen  $\hat{a}^* : \Omega \rightarrow A$  und  $\hat{b}^* : \Omega \rightarrow B$ , indem wir zu jedem  $x \in \Omega$  ein 2-Tupel  $(a_x, b_x) \in A \times B$  wählen, das das max-min-Problem in (5.2) löst (ein solches Tupel  $(a_x, b_x)$  existiert, wird aber im Allgemeinen nicht eindeutig sein), und  $a^*(x) = a_x$  und  $b^*(x) = b_x$  setzen.

Analog zu (5.2) und (5.3) definieren wir nun zu jedem Anfangswert  $x$  diskrete Kontrollfunktionen  $\hat{a}_h^x \in A^{\mathbb{N}_0}$  und  $\hat{b}_h^x \in B^{\mathbb{N}_0}$  gemäß der folgenden iterativen Vorschrift

$$\hat{a}_h^x(0) := \hat{a}^*(x), \quad \hat{a}_h^x(ih) = \hat{a}^*(\Phi_h(ih, x, \hat{a}_h^x, \hat{b}_h^x)) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$\hat{b}_h^x(0) := \hat{b}^*(x), \quad \hat{b}_h^x(ih) = \hat{b}^*(\Phi_h(ih, x, \hat{a}_h^x, \hat{b}_h^x)) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

□

Für die in (5.4) definierte Funktion  $\hat{b}_h^x$  gilt wie für die Funktion  $b_h^x$  in (5.3), dass sie Ergebnis einer implizit definierten Strategie  $\beta_h \in \Delta_h$  ist (siehe Bemerkung 5.3).

**Satz 5.6** Die in (5.3) und (5.4) definierten diskreten Kontrollfunktionen  $\hat{a}_h^x$  und  $\hat{b}_h^x$  sind approximativ optimal für das zeitdiskrete dynamische Spiel. Genauer gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$\left| J_h(x, \hat{a}_h^x, \hat{b}_h^x) - v_h(x) \right| \leq C \frac{k^\gamma}{h^{\gamma+1}}$$

für  $\gamma \in [0, 1]$  aus Satz 4.17 und eine geeignete Konstante  $C > 0$ . □

Der Beweis des Satzes verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 5.4 und ist für den Fall der optimalen Steuerung mit einem Parameter in [8] ausführlich zu finden.

## 5.2 Alternatives Iterationsverfahren

Die Iterationsvorschrift des Gesamt- bzw. des Einzelschrittverfahrens aus Definition 4.11 konvergiert erfahrungsgemäß sehr langsam gegen den Vektor  $V$  insbesondere für kleine  $\delta > 0$  und  $h > 0$ . Wir wollen deshalb Methoden vorstellen, mit denen die Berechnung von  $V$  schneller gelingt.

### 5.2.1 Das kontrollierte Gauß-Seidel-Verfahren

Die bekannte Iteration des Einzelschrittverfahrens (4.8) (wir könnten an dieser Stelle genauso gut mit dem Gesamtschrittverfahren (4.7) arbeiten) notieren wir zunächst etwas anders als

$$\begin{aligned} V^0 &:= (0, \dots, 0)^T; \\ V^{j+1} &:= V^j; \quad V_i^{j+1} := S(V^{j+1})_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit

$$S(W)_i = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \left\{ G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k W_k \right\}$$

für  $W \in \mathbb{R}^N$  (dieses Verfahren wird auch als *sukzessive Approximation* bezeichnet).

Wenn wir die letzte Zuweisung in (5.5) als Gleichung ansehen, d.h.

$$V_i^{j+1} = S(V^{j+1})_i, \quad (5.6)$$

bei der auf beiden Seiten der Vektor  $V^{j+1}$  auf beiden Seiten vorkommt, können wir versuchen sie zu lösen und somit den Wert  $V^{j+1}$  zu bestimmen. Die Gleichung (5.6) ist tatsächlich lösbar, denn es gilt

$$\begin{aligned} V_i^{j+1} &= S(V^{j+1})_i = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \left\{ G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} \right\} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \forall a \in A : V_i^{j+1} \geq \min_{b \in B} \left\{ G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} \right\} \\ \exists a \in A : V_i^{j+1} = \min_{b \in B} \left\{ G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} \right\} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \forall a \in A \exists b \in B : V_i^{j+1} \geq G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} \\ \exists a \in A \forall b \in B : V_i^{j+1} \leq G(i, a, b) + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \forall a \in A \exists b \in B : V_i^{j+1} \geq G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} + \sigma Q(i, a, b)_i V_i^{j+1} \\ \exists a \in A \forall b \in B : V_i^{j+1} \leq G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1} + \sigma Q(i, a, b)_i V_i^{j+1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \forall a \in A \exists b \in B : V_i^{j+1} \geq \frac{G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1}}{1 - \sigma Q(i, a, b)_i} \\ \exists a \in A \forall b \in B : V_i^{j+1} \leq \frac{G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1}}{1 - \sigma Q(i, a, b)_i} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & V_i^{j+1} = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \left\{ \frac{G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k V_k^{j+1}}{1 - \sigma Q(i, a, b)_i} \right\} \end{aligned}$$

Wir definieren also das sogenannte *kontrollierte Gauß-Seidel-Verfahren* analog zur Iteration (5.5) als

$$\begin{aligned} V^0 &:= (0, \dots, 0)^T; \\ V^{j+1} &:= V^j; \quad V_i^{j+1} := \tilde{S}(V^{j+1})_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit

$$\tilde{S}(W)_i = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \left\{ \frac{G(i, a, b) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, a, b)_k W_k}{1 - \sigma Q(i, a, b)_i} \right\}$$

für  $W \in \mathbb{R}^N$ .

Um die Konvergenz des Verfahrens zu analysieren, betrachten wir zu  $W \in \mathbb{R}^N$  und  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  den Vektor  $\tilde{W}^i = (W_0, \dots, W_{i-1}, \tilde{S}(W)_i, W_{i+1}, \dots, W_{N-1})^T$ . Damit gilt

$$S(\tilde{W}^i)_i = [\tilde{W}^i]_i = \tilde{S}(W)_i$$

und daher für je zwei Vektoren  $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i| &= |S(\tilde{W}_1^i)_i - S(\tilde{W}_2^i)_i| \\ &\leq \sigma \|\tilde{W}_1^i - \tilde{W}_2^i\|_\infty = \sigma \max_{j=0, \dots, N-1} |[\tilde{W}_1^i - \tilde{W}_2^i]_j|. \end{aligned}$$

Wird nun das Maximum in  $j = i$  angenommen, so folgt

$$|\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i| \leq \sigma |[\tilde{W}_1^i - \tilde{W}_2^i]_i| = \sigma |\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i|$$

und damit wegen  $\sigma < 1$

$$|\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i| = 0.$$

Andernfalls erhalten wir

$$|\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i| \leq \sigma |[\tilde{W}_1^i - \tilde{W}_2^i]_j| \leq \sigma \|W_1 - W_2\|_\infty.$$

Es gilt also in beiden Fällen

$$|\tilde{S}(W_1)_i - \tilde{S}(W_2)_i| \leq \sigma \|W_1 - W_2\|_\infty,$$

weswegen  $\tilde{S}$  eine Kontraktion mit Rate  $\sigma < 1$  ist und die Iteration wegen des Banach'schen Fixpunktsatzes (linear) gegen den Fixpunkt  $V \in \mathbb{R}^N$  konvergiert. Insbesondere gilt also das Abbruchkriterium aus Lemma 4.13 auch für die Iteration (5.2).



**Bemerkung 5.7** Der Name "Gauß-Seidel" ergibt sich aus der folgenden Tatsache: Falls  $A$  und  $B$  einpunktige Mengen  $A = a_0$  und  $B = b_0$  sind, so erübrigt sich das max-min-Problem und der Operator  $S$  lässt sich als  $S(V) = \tilde{A}V + b$  schreiben. Die Lösung der Fixpunktgleichung  $V = S(V)$  ist dann gegeben durch  $S(V) - V = 0$ , also durch  $(\tilde{A} - \text{Id})V = -b$ , was gerade ein lineares Gleichungssystem im  $\mathbb{R}^N$  ist. In diesem Fall liefert die Iteration (5.2) gerade das klassische Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

### 5.2.2 Strategie-Iteration

Sowohl die sukzessive Approximation als auch das kontrollierte Gauß-Seidel-Verfahren gründen darauf, dass der jeweilige Iterationsoperator eine Kontraktion mit der Kontraktionsrate  $\sigma$  ist.

Daneben existiert eine weitere Variante der Iteration, die sogenannte *Strategie-Iteration* (engl.: *policy iteration*). Dieses Verfahren nutzt die folgende Tatsache aus: wenn wir zwei Vektoren

$$\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{N-1})^T \in A^N \quad \text{und} \quad \tilde{b} = (\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{N-1})^T \in B^N$$

wählen und statt des 2-Tupels  $(a, b) \in A \times B$  in  $S(V_i^{j+1})$ , der in (5.5) einen max-min-Wert bestimmt, die Kontrollwerte  $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$  einsetzen, so konvergiert die Iteration gegen einen Vektor  $V^{(\tilde{a}, \tilde{b})}$ , der durch das Gleichungssystem

$$V_i^{(\tilde{a}, \tilde{b})} = G(i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i) + \sigma Q(i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i) V^{(\tilde{a}, \tilde{b})}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

eindeutig bestimmt ist. Da die max-min-Bestimmung hier wegfällt, lässt sich der Vektor  $V^{(\tilde{a}, \tilde{b})}$  viel schneller als der Vektor  $V$  berechnen. Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems kann man z.B. das klassische Gauß-Seidel-Verfahren verwenden, das gerade durch die Iteration (5.2) ohne die max-min-Bestimmung gegeben ist. Folglich kann (5.2) mittels der Iteration

$$V^{(\tilde{a}, \tilde{b}), j+1} := V^{(\tilde{a}, \tilde{b}), j}, \quad \tilde{S}(V^{j+1}, \tilde{a}, \tilde{b})_i := \tilde{S}(V^{j+1}, \tilde{a}, \tilde{b})_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots \quad (5.3)$$

mit einem geeigneten Startvektor  $V^{(\tilde{a}, \tilde{b}), 0}$  und

$$\tilde{S}(W, \tilde{a}, \tilde{b})_i = \frac{G(i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i) + \sigma \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} Q(i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i)_k W_k}{1 - \sigma Q(i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i)_i}$$

für  $W \in \mathbb{R}^N, \tilde{a} \in \mathbb{R}^N, \tilde{b} \in \mathbb{R}^N$  gelöst werden.

Die Idee der Strategie-Iteration ist also, zu gegebenem  $V^j$  Kontrollvektoren  $\tilde{a}^j, \tilde{b}^j$  derart zu wählen, dass deren Komponenten gerade die max-min-bestimmenden Kontrollwerte für die Iterationsvorschrift  $S(V^j)_i$  sind, und damit  $V^{j+1} = V^{(\tilde{a}, \tilde{b})^j}$  zu berechnen. Formal besteht das Verfahren aus den folgenden Schritten:

- (1) Setze  $V^0 := (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 0$
- (2) Wähle  $\tilde{a}^j \in A^N$ ,  $\tilde{b}^j \in B^N$  mit  $\tilde{S}(V^j)_i = G(i, \tilde{a}_i^j, \tilde{b}_i^j) + \sigma Q(i, \tilde{a}_i^j, \tilde{b}_i^j)V^j$  für  $i = 0, \dots, N-1$
- (3) Berechne  $V^{j+1} = V^{(\tilde{a}, \tilde{b})^j}$
- (4) Falls  $\|V^j - V^{j+1}\|_\infty > \varepsilon$ , setze  $j := j + 1$  und gehe zu (2)

Schritt (3) kann hierbei z.B. mittels (5.3) gelöst werden, wobei der Anfangsvektor als  $V^{(\tilde{a}, \tilde{b}), 0} = V^j$  gewählt wird.

Die Strategie-Iteration hat sich in der optimalen Steuerung mit einem Parameter erfolgreich bewährt – insbesondere in Kombination mit dem Gauß-Seidel-Verfahren, und konvergiert schneller als die anderen beiden Verfahren. Beim dynamischen Spiel ist die Konvergenz dagegen nicht gesichert, da der Operator  $\tilde{S}$  im Unterschied zur optimalen Steuerung nicht monoton ist, d.h.  $W_1 \leq W_2$ ,  $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^N$  impliziert nicht  $\tilde{S}(W_1) \leq \tilde{S}(W_2)$ . Das Verfahren hat daher bei dynamischen Spielen einen "experimentellen" Charakter, deshalb wird die kontrollierte Gauß-Seidel-Iteration das Verfahren unserer Wahl für den im Programm entwickelten Algorithmus sein.

## 5.3 Fehlerschätzung

Neben der Aufgabe, die wir uns bisher gestellt haben, den vollständig diskretisierten Spielwert  $\hat{v}_h$  zu berechnen, ist es wünschenswert, die "Güte" der approximativen Funktion beurteilen zu können, d.h.  $\|v - \hat{v}_h\|_\infty$  zu bestimmen. Wir hatten bereits in Satz 4.17 eine Abschätzung – sie war jedoch *a-priori*, d.h. alleine aus den Daten des Problems entstanden. Jetzt wollen wir eine *a-posteriori* Abschätzung, d.h. mit der Kenntnis von  $\hat{v}_h$  herleiten.

### 5.3.1 Fehlerschätzer

Für die geforderte Fehlerschätzung  $\|v - \hat{v}_h\|_\infty$  definieren wir zuerst eine geeignete Schätzgröße.

**Definition 5.8** Betrachte das vollständig diskretisierte dynamische Spiel auf einem Rechteckgitter  $\Xi$  mit  $P \in \mathbb{N}$  Rechtecken  $R_0, \dots, R_{P-1}$ . Ein *lokaler a-posteriori Fehlerschätzer* (in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm) ist eine Menge von Werten  $\eta_0, \dots, \eta_{P-1}$  mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Der Wert  $\eta_i$  lässt sich aus den Daten des dynamischen Spiels und aus der Funktion  $\hat{v}_h$  in einer Umgebung  $\mathcal{N}(R_i)$  berechnen.

- (ii) Es gibt Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  (unabhängig vom Gitter  $\Xi$ ), so dass für den Wert  $\eta := \max_{i=0, \dots, P-1} \eta_i$  die Abschätzungen

$$C_1 \eta \leq \|v - \hat{v}_h\|_\infty \leq C_2 \eta$$

gelten. Man sagt auch, dass der Fehlerschätzer *effizient*<sup>1</sup> und *zuverlässig*<sup>2</sup> ist.

Gilt darüber hinaus die Abschätzung

$$C_1 \eta_i \leq \sup_{x \in \mathcal{N}(R_i)} |v_h(x) - v_{h, \Xi}^\infty(x)|,$$

so heisst der Fehlerschätzer *lokal effizient*. □

### 5.3.2 Konstruktion der Fehlerschätzer

In unserem Iterationsverfahren berechnen wir den Spielwert  $v_h$ , indem wir die Gleichung

$$v_h = T_h(v_h)$$

mit dem in (4.8) definierten Operator  $T_h$  lösen. Genauer gesagt, lösen wir approximativ

$$\hat{v}_h = \pi_{\mathcal{W}} T_h(\hat{v}_h),$$

wobei  $\pi_{\mathcal{W}}$  wie in Definition 4.14 die Projektion in den Raum  $\mathcal{W}$  ist. Der Ausgangspunkt für die Konstruktion unseres Fehlerschätzers ist die Berechnung des Residiums des Operators  $T_h$  bzgl.  $\hat{v}_h$ , d.h. der Differenz

$$\|\hat{v}_h - T(\hat{v}_h)\|.$$

Deshalb handelt es sich bei dem nachfolgend definierten Fehlerschätzer um einen sogenannten *residualen* Fehlerschätzer.

**Definition 5.9** Wir definieren eine Funktion  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$\begin{aligned} \eta(x) &:= |\hat{v}_h(x) - T(\hat{v}_h)(x)| \\ &= \left| \hat{v}_h(x) - \left( \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma \hat{v}_h(f_h(x, a, b))\} \right) \right| \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Effizient: großer Fehlerschätzer  $\Rightarrow$  großer Fehler (kein Überschätzen)

<sup>2</sup>Zuverlässig: kleiner Fehlerschätzer  $\Rightarrow$  kleiner Fehler (kein Unterschätzen)

Basierend auf  $\eta(x)$  definieren wir einen lokalen Fehlerschätzer als

$$\eta_i := \max_{x \in R_i} \eta(x)$$

für  $i = 0, \dots, P-1$ . □

**Bemerkung 5.10** Die Werte  $\eta_i$  in dieser Definition hängen tatsächlich nur von den Daten des zeitdiskreten (oder des zeitdiskretisierten) dynamischen Spiels (genauer von  $f_h, g, \delta$  und  $h$ ) ab, sowie von den Werten von  $\hat{v}_h$  in der Umgebung

$$\mathcal{N}(R_i) := \{y \in \Omega \mid \text{es gibt ein } x \in R_i \text{ mit } \|y - x\| \leq M_h\}, \quad (5.3)$$

wobei  $M_h$  eine obere Schranke für  $\|x - f_h(x, a, b)\|$  für alle  $x \in \Omega$  und  $a \in A, b \in B$  ist. Im Falle der Euler-Diskretisierung gilt  $M_h = hM$ , wobei  $M$  eine Schranke für  $\|f(x, a, b)\|$  ist; die Menge  $\mathcal{N}(R_i)$  ist also tatsächlich eine kleine Umgebung, falls  $h > 0$  ein kleiner Zeitschritt ist. Der folgende Satz zeigt, dass auch die anderen Eigenschaften der lokalen Fehlerschätzer erfüllt sind.

**Satz 5.11** Es sei  $\delta h < 1$ . Für den Fehlerschätzer aus Definition 5.9 gelten dann die Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\eta \leq \|v_h - \hat{v}_h\|_\infty \leq \frac{1}{\delta h}\eta$$

mit  $\eta = \max_{i=0, \dots, P-1} \eta_i$ . Darüber hinaus gilt

$$\frac{1}{2}\eta_i \leq \sup_{x \in \mathcal{N}(R_i)} |v_h(x) - \hat{v}_h(x)|$$

für die Umgebung  $\mathcal{N}(R_i)$  aus (5.3). □

**BEWEIS:** Mit Lemma 3.15 folgt, dass für je zwei stetige Funktionen  $w_1, w_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & |T_h(w_1)(x) - T_h(w_2)(x)| \\ &= \left| \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma w_1(f_h(x, a, b))\} - \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{hg(x, a, b) + \sigma w_2(f_h(x, a, b))\} \right| \\ &\leq \sigma \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} |w_1(f_h(x, a, b)) - w_2(f_h(x, a, b))| \\ &\leq \sigma \max_{\|x - f_h(x, a, b)\| \leq M_h} |w_1(f_h(x, a, b)) - w_2(f_h(x, a, b))| \\ &\leq \sigma \max_{y \in \bar{B}_{M_h}(x)} |w_1(y) - w_2(y)| \end{aligned} \quad (5.4)$$

gilt, dabei haben wir im vorletzten Schritt die in (5.3) formulierte Eigenschaft ausgenutzt.

Wir zeigen nun zunächst die Abschätzung für  $\eta_i$ . Aus der Gleichung  $T_h(v_h) = v_h$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\eta(x) &= |\hat{v}_h(x) - T_h(\hat{v})(x)| \\ &\leq |\hat{v}_h(x) - v_h(x)| + |T_h(\hat{v}_h)(x) - T_h(v_h)(x)| \\ &\leq 2 \max_{y \in \mathcal{B}_{M_h}(x)} |\hat{v}_h(y) - v_h(y)|,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (5.4) und  $|1 - \delta h| < 1$  folgt. Die Ungleichung für  $\eta_i$  folgt nun durch Bilden des Maximums über  $x \in R_i$ .

Die erste Ungleichung für  $\eta$  folgt sofort aus dieser Abschätzung durch Maximumsbildung über  $i = 0, \dots, P - 1$ .

Die zweite Abschätzung für  $\eta$  erhalten wir wiederum mit  $T_h(v_h) = v_h$  und (5.4) aus

$$\begin{aligned}|v_h(x) - \hat{v}_h(x)| &= |T_h(v_h)(x) - \hat{v}_h(x)| \\ &= |T_h(v_h)(x) - \hat{v}_h(x) + T_h(\hat{v})(x) - T_h(\hat{v})(x)| \\ &\leq |T_h(\hat{v}_h)(x) - \hat{v}_h(x)| + |T_h(v_h)(x) - T_h(\hat{v}_h)(x)| \\ &\leq \eta(x) + \sigma \max_{y \in \Omega} |v_h(y) - \hat{v}_h(y)|\end{aligned}$$

Durch Bilden des Maximums über  $x \in \Omega$  ergibt sich

$$\|v_h - \hat{v}_h\|_\infty \leq \eta + \sigma \|v_h - \hat{v}_h\|_\infty$$

und daraus

$$(1 - \sigma) \|v_h - \hat{v}_h\|_\infty \leq \eta,$$

also wegen  $1 - \sigma = \delta h$  die gewünschte Ungleichung. ■

Zwar beruht der Fehlerschätzer  $\eta_i$  tatsächlich nur auf Werten, die wir numerisch auswerten können. Praktisch ist es allerdings nicht möglich, das Maximum  $\max_{x \in R_i} \eta(x)$  exakt auszurechnen, da wir die Funktion  $\eta(x)$  an unendlich vielen Punkten auswerten müssten. Es lässt jedoch sich beweisen, dass auch die Funktion  $\hat{v}_h$  Hölder-stetig ist: deshalb ist es sinnvoll, das Maximum über  $R_i$  durch Auswertung von  $\eta(x)$  in einer Menge von Testpunkten approximativ zu bestimmen. In der numerischen Praxis bieten sich bei zweidimensionalen Rechteckgittern 5 Testpunkte im Mittelpunkt und an den Seiten eines Rechtecks an, bei einem eindimensionalen Gitter ein Testpunkt inmitten eines Intervalls. Dieses Muster lässt sich auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

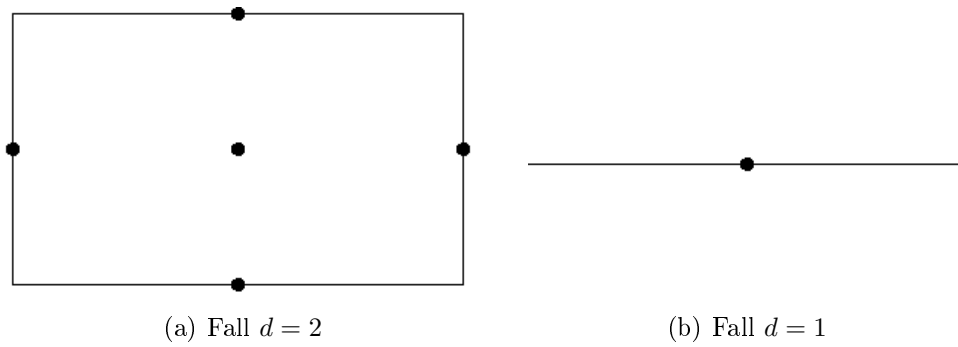


Abbildung 5.1: Testpunkte für die Auswertung von  $\eta(x)$

# Kapitel 6

## Dynamisches Spiel in der Praxis

In diesem Kapitel wollen ein mikroökonomisches Problem betrachten, die marktwirtschaftlichen Zusammenhänge formalisieren und ihre Gesamtheit als dynamisches Spiel darstellen. Anschließend werden wir die Spielwerte und die optimalen Trajektorien des formulierten dynamischen Spiels mit Hilfe des iterativen Verfahrens berechnen und die Ergebnisse unter Variation einiger wichtiger Parameter vergleichen.

Das mikroökonomische Problem stammt aus der Arbeit von M. Kato und W. Semmler [10], [11]. Die Theorie der industriellen Organisation vertritt die Meinung, dass das mögliche Auftreten neuer Wettbewerber auf dem Markt einerseits den bis dahin dominierenden Marktteilnehmer in seiner Preisgestaltung einschränkt und andererseits Innovationen auf Seiten der Konkurrenz begünstigt. Der Wettbewerb entwickelt eine Dynamik, bei der die Marktteilnehmer den Markt mittels Investitionen, Werbung, politisches Lobbying, Patentschutz, usw. beeinflussen. Wir wollen also zuallererst diese Dynamik des Wettbewerbs mit den uns aus den vorherigen Kapiteln bekannten Mitteln beschreiben.

### 6.1 Die Modellannahmen

Wir setzen voraus, dass in einer Wirtschaft ein dominierendes Unternehmen existiert bzw. eine Reihe von Unternehmen, deren Aktivitäten im hohen Grade koordiniert sind, und bezeichnen ein solches Unternehmen als ersten bzw. *dominierenden* Spieler. Der dominierende Spieler und seine Wettbewerber, von denen es ebenfalls mehrere geben darf, konkurrieren um eine gegebene *Nachfrage*  $d$ . Der dominierende Spieler hat das Bestreben, die Handlungsmöglichkeiten anderer Spieler einzuschränken, indem er *wettbewerbseinschränkendes Kapital*  $x$  akkumuliert. Ziel des dominierenden Spielers ist es nun, seinen diskontierten zukünftigen Cashflow zu maximieren,

$$\max_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{\infty} e^{-rt} [pq_1 - C(q_1) - a(t) - \varphi(a(t))] dt. \quad (6.1)$$

Dabei bezeichne  $a(t)$  die *Investitionsrate*, d.h. die zum Zeitpunkt  $t$  vom ersten Spieler getätigte Investition in das zum Zweck der Wettbewerbseinschränkung akkumulierte Kapital  $x$ , auch einfach *Kapitalstock* genannt. Obwohl  $x$  zunächst scheinbar in (6.1) nicht vorkommt, sehen wir in Kürze, wie die Funktionen  $p, q_1$  implizit von  $x(t)$  abhängen. Mit jeder Änderung von  $a$  fallen die *Strategieänderungskosten*  $\varphi(a)$  an mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} \varphi(a) > 0, & a > 0 \\ \varphi(a) = 0, & a = 0 \\ \varphi(a) < 0, & a < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi''(a) > 0.$$

Der *Marktpreis*  $p$  für das vom ersten Spieler erzeugte und verkaufte Produkt hängt alleine von seinem *Marktanteil*  $s$  ab,

$$p(s) = p_c + (p_m - p_c)s \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1, \quad (6.2)$$

wobei  $p_m$  und  $p_c$  die Grenzpreise sind:  $p_m$  ist der Monopolpreis und  $p_c$  ist der Preis im vollkommenen Wettbewerb. Der Marktanteil  $s(x)$  des ersten Spielers soll dabei die Eigenschaften

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) &= 1, \\ s'(x) &\geq 0, \\ s'(0) &= \lim_{x \rightarrow \infty} s'(x) = 0 \end{aligned}$$

haben; diese Anforderungen werden z.B. von der Funktion

$$s(x) = \frac{x^\rho}{\chi^\rho + x^\rho} < 1$$

erfüllt.  $\rho$  ist ein Parameter, der die Effizienz der Investitionen des dominierenden Spielers in Markteintrittsschranken wiedergibt, gemessen an der dadurch erreichten Steigerung des Marktanteils,  $\frac{\partial s(\rho)}{\partial \rho} > 0$ .  $\chi$  ist ein Parameter, der die Möglichkeiten einer Deregulierungs- und Wettbewerbspolitik widerspiegelt, die Kapitalakkumulierung zu verhindern,  $\frac{\partial s(\chi)}{\partial \chi} < 0$ .

$q_1$  sei die *Produktionsmenge* des dominierenden Spielers und  $C(q)$  seien die *Produktionskosten*,  $C' > 0$ . Der Einfachheit halber sei  $C' = c \in (0, 1)$ . Das bedeutet, dass das Unternehmen mit steigender Produktionsrate und verbesserter Technologie mehr Gewinn erwirtschaftet. Die Produktionsmenge

$$q_1 = s(x; \rho, \chi)d(p), \quad (6.0)$$

folgt einer klassischen, mit steigendem Preis  $p$  nach unten gerichteten Nachfragekurve  $d(p)$

$$d(p) = d_b - d_a p. \quad (6.1)$$



Die Parameter  $d_b, d_a$  sowie  $p_c, p_m$  in (6.2) seien derart gewählt, dass der Umsatz des Unternehmens  $p(s)sd(p)$  im Intervall  $0 \leq s \leq 1$  monoton steigt; das ist der Fall bei einer relativ geringen Differenz  $(p_m - p_c)$ , einem großen  $d_b$  und einem kleinen  $d_a$ .

Der Preis für eine Einheit des Investitionsgutes sei 1. Damit formulieren wir die Dynamik des Kapitalstocks  $x$  als

$$\dot{x}(t) = a(t) - b(t)x(t), \quad (6.2)$$

wobei  $b$  eine zeitabhängige Variable ist, die die Entwertungsrate des akkumulierten Kapitals  $x$  angibt. Wenn das Kapital  $x$  zum Beispiel in Patentschutz investiert wurde, so kann man sich  $b(t)x(t)$  als Wertverfall des auslaufenden Patents zum Zeitpunkt  $t$  vorstellen.

Neben dem ersten, dominierenden Spieler tritt ein weiteres Unternehmen, d.h. ein zweiter oder auch *Nebenspieler* genannt, auf dem gleichen Markt auf. Der zweite Spieler hat jedoch einen viel geringeren Einfluss auf den Markt und erfährt die Residualnachfrage

$$q_2 = (1 - s)d(p),$$

d.h. den Teil der Gesamtnachfrage  $d(p)$ , der vom ersten Spieler nicht erfüllt wird. Insbesondere hat der zweite Spieler keinen Einfluss auf die Preisgestaltung und verkauft sein Produkt zum selben Preis  $p$ . Ziel des Nebenspielers ist es ebenfalls, seinen diskontierten zukünftigen Cashflow zu maximieren,

$$\max_{b \in \mathcal{B}} \int_0^{\infty} e^{-rt} [pq_2 - C(q_2) - \zeta b(t) - \pi(b(t))] dt. \quad (6.3)$$

Für den zweiten Spieler, der sich erst am Markt etablieren will, hat es natürlich keinen Sinn in Marteintrittsschranken zu investieren. Er versucht im Gegenteil über eine Deregulierungspolitik zur Entwertung des Kapitalstocks  $x$  beizutragen. Wir nehmen an, dass der Nebenspieler die strategische Variable  $b(t)$  mitbestimmen und so einer weiteren Akkumulierung von  $x$  entgegenwirken kann. Die Handlungskosten sind  $\zeta b + \pi(b)$ , wobei  $\zeta$  der Preis für eine Einheit des "Entgegenwirkens" ist und die Strategieänderungskosten  $\pi$  die Eigenschaften  $\pi'(b) \geq 0$  für  $0 \leq b \leq 1$  und  $\pi'' > 0$  haben.

## 6.2 Das modellierte System

Wir wollen nun ein dynamisches Spiel mit der Zustandsgleichung (6.2) und den Kontrollen  $a$  und  $b$  formulieren. Es liegen zunächst einmal zwei verschiedene Optimierungsprobleme (6.1) und (6.3) vor, nachfolgend zusammengefasst, wobei wir (6.3) als ein Minimierungsproblem

schreiben:

$$\max_{a \in \mathcal{A}} J_{p1}(x, a) \quad (6.4)$$

$$\min_{b \in \mathcal{B}} J_{p2}(x, b) \quad (6.5)$$

mit zwei verschiedenen Funktionalen und Wertefunktionen

$$J_{p1}(x, a) := \int_0^\infty e^{-rt} g_{p1}(\Phi(t, x, a), a(t)) dt, \quad g_{p1}(x, a) := pq_1 - C(q_1) - a - \varphi(a)$$

und

$$J_{p2}(x, b) := \int_0^\infty e^{-rt} g_{p2}(\Phi(t, x, b), b(t)) dt, \quad g_{p2}(x, b) := -pq_2 + C(q_2) + \varsigma b + \pi(b).$$

Aus der Sicht der Spieler stellen (6.4) und (6.5) ihre "Maximalforderungen" dar, die in einem dynamischen Spiel im Allgemeinen nicht beide gleichzeitig durchsetzbar sind. Wir können sie als "Optimierungsvorgabe" in das dynamische Spiel miteinfließen lassen, da aber ein dynamisches Nullsummenspiel aus Definition 3.6 nur mit einer gemeinsamen Wertefunktion  $g(x, a, b)$  und einem gemeinsamen Funktional  $J(x, a, b)$  funktioniert, müssen wir sie uns zuerst sinnvoll konstruieren. Anders formuliert lauten (6.4), (6.5)

$$\max_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b) - J_1(x, b) \quad (6.6)$$

$$\min_{b \in \mathcal{B}} J(x, a, b) - J_2(x, a) \quad (6.7)$$

mit

$$J(x, a, b) := \int_0^\infty e^{-\delta t} g(x, a, b) dt$$

$$g(x, a, b) := psd(p) - C(sd(p)) - pd(p) + C((d(p)))\varsigma b + \pi(b) - a - \varphi(a) + \varsigma b + \pi(b)$$

und

$$J_1(x, b) := \int_0^\infty e^{-\delta t} [-pd(p) + C((d(p)))\varsigma b + \pi(b)] dt$$

$$J_2(x, a) := \int_0^\infty e^{-\delta t} [-a - \varphi(a)] dt.$$

Offensichtlich gilt

$$J_{p1}(x, a) = J(x, a, b) - J_1(x, b),$$

$$J_{p2}(x, b) = J(x, a, b) - J_2(x, a),$$

wobei  $J_1$  und  $J_2$  nur vom Kontrollwert des Gegenspielers abhängen, weshalb wir auch (6.6) ohne "max" vor  $J_1(x, b)$  und (6.7) ohne "min" vor  $J_2(x, a)$  schreiben dürfen.

Wir betrachten zu (6.4), (6.5) alternativ zwei Optimierungsprobleme

$$\max_{a \in \mathcal{A}} J(x, a, b), \quad (6.5)$$

$$\min_{b \in \mathcal{B}} J(x, a, b), \quad (6.6)$$

bei denen wir  $J_{p1}$  bzw.  $J_{p2}$  durch  $J$  ersetzen. Wenn (6.6), (6.7) und (6.5), (6.6) mit einem numerischen Verfahren für optimale Steuerungsprobleme aus Definition 3.3 lösen (siehe hierzu [8]), lässt sich feststellen, dass sich bei (6.6) und (6.5) bzw. (6.7) und (6.6) jeweils die gleichen optimalen Kontrollfunktionen  $a$  bzw.  $b$  ergeben. Das ist sinnvoll, denn wir haben vorhin festgestellt, dass die Terme  $J_1(x, b)$ ,  $J_2(x, a)$  bei der Optimierung in (6.6), (6.7) keine Rolle spielen.

Wir können nun mit dem Funktional  $J$  ein dynamisches Nullsummenspiel formulieren und anschließend die berechneten optimalen Kontrollen verwenden, um die eigentlichen Spielwerte mit den Payoffs  $J_{p1}$  und  $J_{p2}$  zu bestimmen. Die Betonung liegt dabei auf "Nullsummenspiel", denn ohne das "kombinierte" Funktional  $J$  könnten wir höchstens ein Nicht-Nullsummenspiel betrachten, für dessen Lösung wir aber kein allgemein gültiges Verfahren haben. Den "Trick" mit der Zerlegung der zwei verschiedenen Funktionale in einen "kombinierten" Payoff und zwei Restterme übernehmen wir aus der Arbeit von A. Melikyan und G.J. Olsder [12] (obwohl das dynamische Spiel dort mit einem anderen Verfahren als mit dem Optimalitätsprinzip gelöst wird).

Wir bestimmen also den unteren Wert  $V$

$$V(x) := \min_{\beta \in \Delta} \max_{a_{lo} \in \mathcal{A}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(\Phi_{lo}(t, x, a_{lo}, \beta[a_{lo}]), a_{lo}(t), \beta[a_{lo}](t)) dt \quad (6.7)$$

mit  $\Phi_{lo}$  als eindeutige Lösung von

$$\dot{x}_{lo}(t) = a_{lo}(t) - b_{lo}(t)x_{lo}(t), \quad b_{lo}(t) := \beta[a_{lo}](t)$$

und den oberen Wert  $U$

$$U(x) := \max_{\alpha \in \Gamma} \min_{b_{up} \in \mathcal{B}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(\Phi_{up}(t, x, \alpha[b_{up}], b_{up}), \alpha[b_{up}](t), b_{up}(t)) dt \quad (6.8)$$

mit  $\Phi_{up}$  als eindeutige Lösung von

$$\dot{x}_{up}(t) = a_{up}(t) - b_{up}(t)x_{up}(t), \quad a_{up}(t) := \alpha[b_{up}](t).$$

Die zulässigen Kontrollwertebereichen  $A$  und  $B$  seien dabei geeignet gewählt (und i.A. in (6.7) und (6.8) gleich). Da wir die Probleme (6.7) und (6.8) gleichzeitig betrachten, werden wir ab nun zwischen den dazugehörigen Kontrollfunktionen  $a_{lo}, b_{lo}$  und  $a_{up}, b_{up}$  (von engl. "lower", "upper value") unterscheiden, denn zu jeder Zeit  $t$  können sich in (6.7) und (6.8) verschiedene optimale Kontrollwerte  $a(t)$  und  $b(t)$  ergeben. Offensichtlich gehören dazu auch zwei verschiedene Trajektorien (obwohl beide zum gleichen Anfangswert  $x$ ), die wir als  $\Phi_{lo}(t, x, a_{lo}, b_{lo})$  und  $\Phi_{up}(t, x, a_{up}, b_{up})$  (später in der numerischen Auswertung und in den Plots oft vereinfachend  $x_{lo}, x_{up}$ ) bezeichnen.

Mit den optimalen Kontrollwerten  $a_{lo}(t), b_{lo}(t)$  und  $a_{up}(t), b_{up}(t)$  aus (6.7) und (6.8) berechnen wir schließlich die "spielerspezifischen" Spielwerte

$$V_{p1}(x) := \int_0^{\infty} e^{-rt} g_{p1}(\Phi_{lo}(t, x, a_{lo}, b_{lo}), a_{lo}(t)) dt,$$

$$V_{p2}(x) := \int_0^{\infty} e^{-rt} g_{p2}(\Phi_{lo}(t, x, a_{lo}, b_{lo}), b_{lo}(t)) dt$$

und

$$U_{p1}(x) := \int_0^{\infty} e^{-rt} g_{p1}(\Phi_{up}(t, x, a_{up}, b_{up}), a_{up}(t)) dt,$$

$$U_{p2}(x) := \int_0^{\infty} e^{-rt} g_{p2}(\Phi_{up}(t, x, a_{up}, b_{up}), b_{up}(t)) dt.$$

### 6.3 Verwendete Funktionen und Parameterwerte

Wir definieren hier spezielle Funktionen der Produktionskosten  $C(q)$ , die Strategieänderungskosten  $\varphi(a)$ ,  $\pi(b)$  und den Marktanteil  $s(x)$ .

$$C(q) = cq \tag{6.7}$$

$$\varphi(a) = \xi a^2 \tag{6.8}$$

$$\pi(b) = \zeta b^2 \tag{6.9}$$

$$s(x) = \frac{x^\rho}{\chi^\rho + x^\rho} < 1 \tag{6.10}$$

Die Standardwerte für die Variablen  $\delta, \rho, \chi, c, p_c, p_m, d_a, d_b, \xi, \zeta$  und  $\varsigma$  lauten wie folgt

$\delta$	$\rho$	$\chi$	$c$	$p_c$	$p_m$	$d_a$	$d_b$	$\xi$	$\zeta$	$\varsigma$
0.02	5	10	2	2	8	0.5	10	0.5	0.5	1.0

## 6.4 Die Rahmenbedingungen

Zunächst stellt sich die Frage, welche Werte der Rahmengrößen bei der numerischen Auswertung im Algorithmus "gut" bzw. ausreichend sind. Dazu zählt die Wahl des Gebiets  $\Omega \in \mathbb{R}$  und seine Diskretisierung, d.h. vor allem die Feinheit des darauf definierten Intervallgitters  $\Xi$ , der Zeitschritt  $h$ , das Abbruchkriterium der Iteration  $\varepsilon$  und die Diskontrate  $\delta$ , aber auch die Grenzen der zulässigen Kontrollwertebereiche  $A$  und  $B$  der beiden Spieler und ihre Diskretisierung.

Als Standardwerte wählen wir  $h = 0.1$  und  $\varepsilon = 0.01$ , die bei Übungsaufgaben mit Ein-Parameter-Kontrollsystemen zu [8] als ausreichend bewährt haben. Die Diskontrate  $\delta = 0.02$  ist zwar als Parameter des ökonomischen Modells vorgegeben, um darüber hinaus den Einfluss der Diskontrate zu sehen, wiederholen wir die Testreihe mit einem viel größeren  $\delta = 0.5$ .

Bei der Wahl des Gebiets  $\Omega$  spielen zwei Überlegungen eine Rolle. Zum einen legen wir den linken Rand von  $\Omega$  und des darauf definierten Gitters  $\Xi$  mit 0 fest, da wir wissen, dass die Zustandsvariable  $x$  (im ökonomischen Modell das akkumulierte Kapital) nicht negativ sein kann. Zum anderen wollen wir  $\Xi$  ausreichend groß wählen, so stellen wir sicher, dass wir bei der Trajektorienberechnung möglichst alle Gleichgewichte erfassen. Außerdem war bei Tests mit zu kleinen Gittern zu sehen, dass die Spielwerte  $U, V$  am rechten Rand von  $\Omega$  stark oszillieren können. Dass die großen Ausschläge erst am rechten Rand von  $\Omega$  auftraten und die Funktionen  $U, V$  im Inneren einen viel "glatteren" Verlauf hatten, deutet aber auf einen durch den Algorithmus bedingten numerischen Effekt hin. Als ein gutes Maß hat sich  $\Omega = [0, 100]$  gezeigt, so können wir von der Richtigkeit der Aussagen über die Spielwerte  $U, V$  auf einem großen inneren Bereich von  $\Omega$  ausgehen.

Beim Gitter  $\Xi$  legen wir uns auf 200 Gitterintervalle bzw.  $N = 201$  Knoten fest. Eine Gitterverfeinerung auf  $N = 1001$  Knoten bringt beim gleichen  $\Omega$  keine nennenswerten Veränderungen weder bei den Spielwerten noch beim Verlauf der Trajektorien, wenngleich man mit einer längeren Laufzeit des Algorithmus rechnen muss.

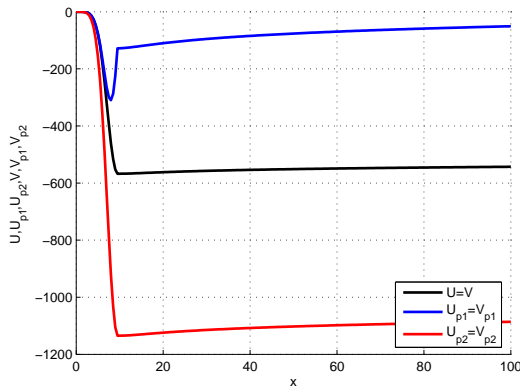
Beim Festlegen der Kontrollwertebereiche wollen wir verschiedene Mengen  $A, B$  in Betracht ziehen, uns aber auf drei Fälle  $A = [0, 4], B = [0, 1]$ ;  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  und  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  beschränken, die zu möglichst voneinander verschiedenen Trajektorienverläufe beitragen sollen. Tests mit größeren Mengen z.B.  $A = [-2, 10]$  oder  $A = [-2, 25]$  haben gezeigt, dass auch dann Kontrollwerte meist nicht über den Bereich  $[-2, 4]$  verwendet werden.

## 6.5 Numerische Ergebnisse mit Diskontrate $\delta = 0.02$

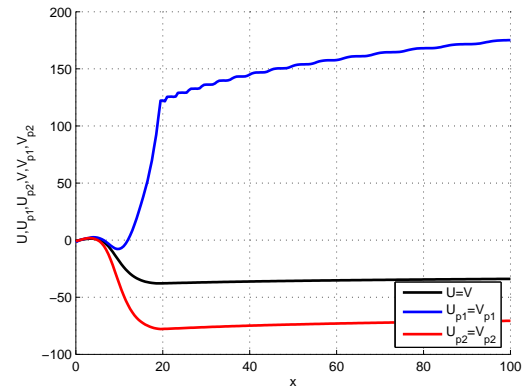
### 6.5.1 Spieler 1 maximiert, Spieler 2 minimiert

#### Die Spielwerte

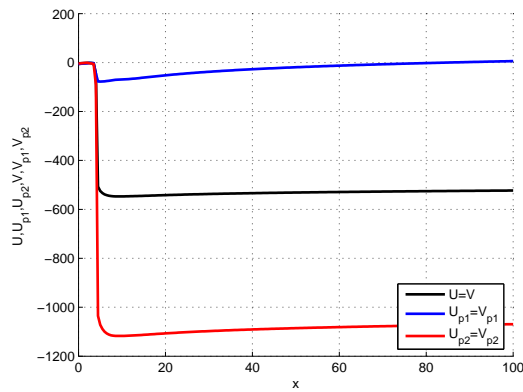
Die unteren und oberen Spielwerte  $U, V$  weisen in den Fällen  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  (Abb. 6.1 (a)),  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  (Abb. 6.1 (b)) und  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (Abb. 6.1 (c)) einen ähnlichen Verlauf auf (hier und später stellen wir sie daher in einer Abbildung zusammengefasst dar). Sowohl die Spielwerte  $U, V$  zur Wertefunktion  $g$  als auch die spielereigenen Spielwerte  $U_{p1}, V_{p1}$  und  $U_{p2}, V_{p2}$  sinken im Intervall  $x = [0, 7]$ , wachsen dann wieder streng monoton und nähern sich langsam asymptotisch einer Obergrenze an. Eine Ausnahme ist der Fall (b), bei dem der Spielwert des ersten Spielers  $U_{p1} = V_{p1}$  stärker nach oben ausschlägt. Hier und später werden wir einfach vom "Spielwert" sprechen, wenn das Spiel *einen* Wert hat, wenn also die jeweiligen oberen und unteren Spielwerte exakt übereinstimmen.



(a)  $A = [0, 4], B = [0, 1]$



(b)  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$



(c)  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

Abbildung 6.1: Die Spielwerte (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ )

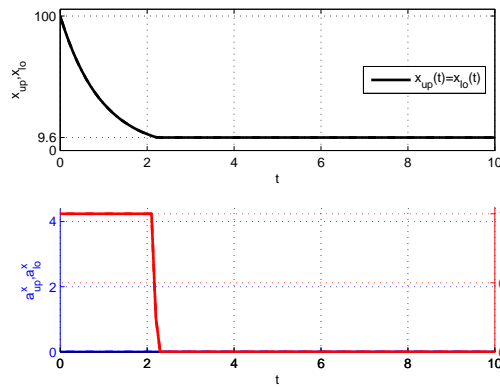
**Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$** 

Wir versuchen nun mit einigen wenigen Trajektorien die Lage der Gleichgewichte und ihre Einzugsbereiche zu beschreiben. Eine Trajektorie mit Anfangswert  $x_0 = 100$ , die also am rechten Gitterrand startet, konvergiert gegen  $x = 9.6$  (Abb. 6.2 (a)). Aufgrund der Kozykluseigenschaft wissen wir, dass auch jede Trajektorie mit einem Anfangswert  $x_0 \in [9.6, 100]$  gegen  $x = 9.6$  konvergiert. Für jeden anderen Anfangswert  $x_0 < 9.6$  verläuft die Trajektorie konstant  $x(t) = x_0$  für alle  $t \in [0, T]$  (hier beispielsweise  $x_0 = 0, 1, 3, 5, 8$  in Abb. 6.2 (b)-(f)).

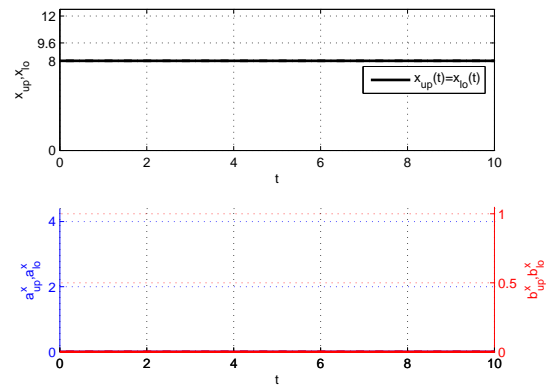
Wir wissen also, dass jeder Punkt im Intervall  $[9.6, 100]$  nach Definition A.1 ein Gleichgewicht ist, es ist jedoch weder stabil noch instabil. Hier und weiter verwenden wir Definitionen aus A um die Eigenschaften der Gleichgewichte zu charakterisieren.

Die numerischen Kontrollwertefunktionen  $a_h^x(t)$  und  $b_h^x(t)$  verlaufen in allen Fällen konstant bei 0 mit Ausnahme von (a), bei dem  $a_h^x(t) = 4$  in der Zeit  $t$ , solange die Trajektorie  $x(t)$  noch nicht beim Gleichgewicht  $x_0 = 9.6$  angelangt ist.

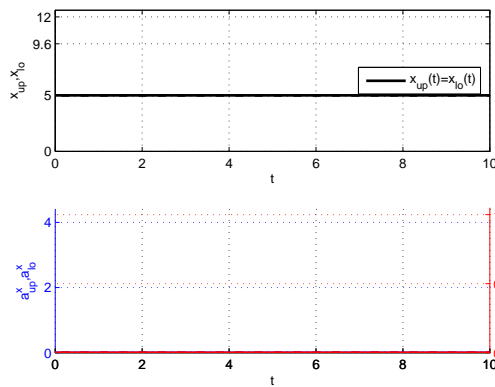




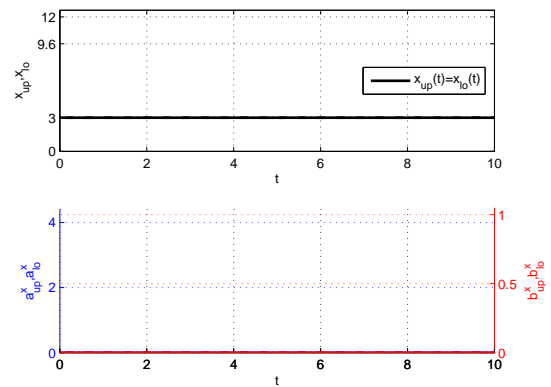
(a)  $x_0 = 100$



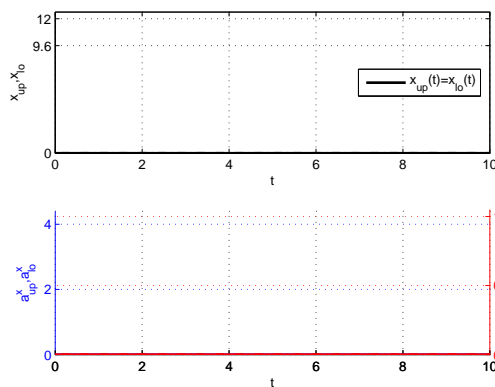
(b)  $x_0 = 8$



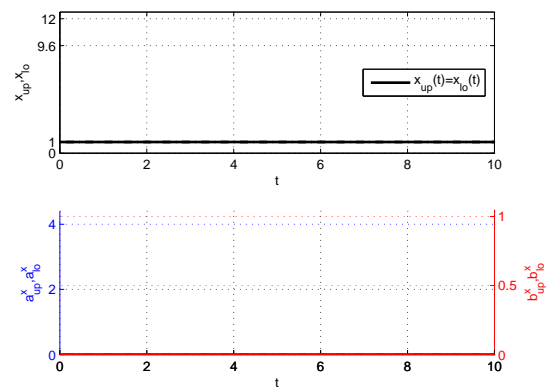
(c)  $x_0 = 5$



(d)  $x_0 = 3$



(e)  $x_0 = 0$



(f)  $x_0 = 1$

Abbildung 6.2: Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ )

### Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$

In diesem Fall reicht eine Trajektorie mit  $x_0 = 100$ , die gegen  $x = 0$  konvergiert (Abb. 6.3 (a)), um festzustellen, dass  $x^* = 100$  das einzige Gleichgewicht auf dem Gebiet  $\Omega = [0, 100]$  ist, denn wegen der Kozykluseigenschaft konvergiert jede andere Trajektorie ebenfalls gegen 0. Mit anderen Worten der Einzugsbereich  $\mathcal{D}(x^*)$  ist ganz  $\Omega$ .

Im Unterschied zum vorherigen Fall mit  $A = [0, 4]$  sind nun auch negative Kontrollwerte  $a$  im Modell möglich, die eine vom ersten Spieler getätigte Desinvestition darstellen.  $a_h^x(t)$  und  $b_h^x(t)$  haben einen weniger gleichmässigen Verlauf als noch in Abb. 6.2. Die Kontrollwertefunktion des ersten Spielers  $a_h^x(t)$  hat negative Werte, solange die Trajektorie noch nicht am linken Gitterrand angelangt hat. Sobald das Gleichgewicht erreicht ist, oszillieren die Werte von  $a_h^x(t)$  um  $a = 0$ . Die zweite Kontrollwertefunktion  $b_h^x(t)$  verläuft meist konstant bei  $b = 0$ , die Ausnahmen sind ein Zeitintervall zur Anfangszeit  $t = 0$  und eins später bei  $t = 12$ , in dem  $b_h^x(t)$  mehrere Ausschläge nach oben hat. In Abb. 6.3 (b) plotten wir einen Ausschnitt der gleichen Trajektorie mit  $x_0 = 100$ , haben jedoch den Bereich  $B$  höher diskretisiert (20 statt 5 Kontrollwerte). Auf diese Weise sehen wir, dass der Abstand zwischen zwei Peaks mehr als einen Zeitschritt ( $h = 0.1$ ) beträgt und die Höhe eines Peaks mehr als zwei Kontrollwerte  $b_i, b_{i+1} \in B$  umfasst (der Abstand dazwischen ist  $\frac{b_{q_2} - b_0}{20} = 0.05$ ), d.h. dass es sich bei den Peaks nicht um einfache numerische Artefakte handelt.

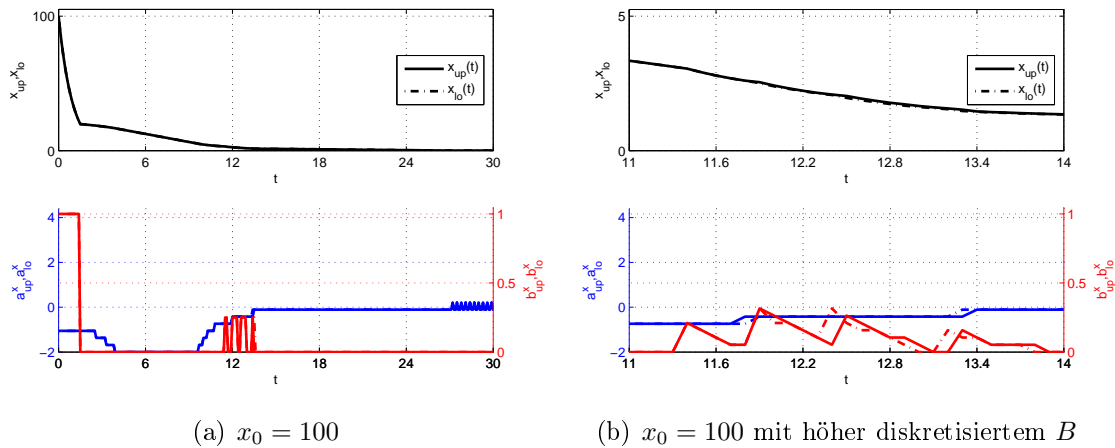


Abbildung 6.3: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ )

**Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$** 

Auch im dritten Fall tasten wir das Gebiet  $\Omega$  auf mögliche Gleichgewichte ab zuerst mit einer Trajektorie mit  $x_0 = 100$ . Sie konvergiert nach unten gegen  $x = 9.6$  (Abb. 6.4 (a)). Wählen wir einen Anfangswert  $x_0 \in [4.1, 9.6]$ , konvergiert  $x(t)$  gegen  $x = 9.6$  von unten (Abb. 6.4 (b)). Eine Trajektorie mit  $x_0 = 4$  verläuft konstant (Abb. 6.4 (c)), eine mit  $x_0 = 4.1$  konvergiert nach unten gegen  $x = 2.5$  (Abb. 6.4 (d)). Damit ist klar, dass  $x^* = 9.6$  ein stabiles Gleichgewicht ist mit  $\mathcal{D}(x^*) = [4.1, 100]$  (wir erinnern uns: im ersten Fall mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  war  $x^* = 9.6$  ein Gleichgewicht, jedoch weder stabil noch instabil mit  $\mathcal{D}(x^*) = [9.6, 100]$ ). Auch  $x^* = 4$  ist ein (instabiles) Gleichgewicht.

Es bleibt noch das Intervall  $[0, 2.5]$  zu untersuchen. Eine Trajektorie mit  $x_0 = 2.2$  konvergiert gegen  $x = 2.5$ , bei  $x_0 = 2.1$  bekommen wir zu ersten Mal zwei deutlich voneinander verschiedene Trajektorien  $x_{up}(t)$  und  $x_{lo}(t)$  (zum oberen und unteren Spielwert) mit Grenzwerten  $\lim x_{up}(t) = 2.5$  und  $\lim x_{lo}(t) = 1.35$  (alle Plots in Abb. 6.5). Bisher haben wir stets beide Trajektorien berechnet, sie aber einheitlich mit  $x(t)$  bezeichnet, solange sie exakt übereinstimmten. Mit weiteren Trajektorien ( $x_0 = 0, 1, 1.1, 2$ ) finden wir noch ein Gleichgewicht bei  $x = 0.9$ . Es treten also im Teilbereich  $[0, 2.5]$  von  $\Omega$  drei Gleichgewichte auf, die Trajektorien  $x_{up}(t)$  und  $x_{lo}(t)$  weichen oft voneinander ab, der Graph der Kontrollwertfunktion  $b_h^x(t)$  oszilliert deutlich (wie auch bei den Trajektorien sind es in Wirklichkeit zwei Funktionen  $b_{h,lo}^x(t)$  und  $b_{h,up}^x(t)$ ). Insgesamt besteht also ein Grund zu überprüfen, ob die Lage der Gleichgewichte gleich bleibt, wenn wir z.B. den Bereich  $B$  höher diskretisieren.

Wir untersuchen also noch einmal das Intervall  $[0, 2.5]$  mit einem höher diskretisierten  $B$  (20 Werte statt 5). Wir sehen nun, dass mit  $x_0 = 2.1$  sowohl  $x_{up}(t)$  als auch  $x_{lo}(t)$  gegen  $x = 2.5$  konvergieren (Abb. 6.6 (a)), mit  $x_0 = 2$  jedoch gegen  $x = 1.1$  (Abb. 6.6 (b)). Eine Trajektorie mit  $x_0 \in [0, 1]$  konvergiert gegen  $x = 1$  bzw.  $x = 1.1$  ( $x_{up}(t)$  und  $x_{lo}(t)$ , Abb. 6.6 (b)). Insbesondere ist die Kontrollwertfunktion  $b_{h,lo}^x$  zu der Trajektorie  $x_{lo}$  interessant: sobald  $x_{lo}$  das Gleichgewicht erreicht hat, beginnt  $b_{h,lo}^x$  in relativ großen Abständen zu oszillieren, jeder Abschnitt besteht dabei aus noch kleineren Bewegungen.

Die Kombination von  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  ist bisher der vielfältigste Fall mit den meisten Gleichgewichten:  $x^* = 1$  (mit  $x_{lo}$ ,  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 1.1]$ ),  $x^* = 1.1$  (für beides  $x_{lo}$  und  $x_{up}$ , allerdings  $\mathcal{D}(x^*) = [1.1, 2]$  für  $x_{lo}$  und  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 2]$  für  $x_{up}$ ),  $x^* = 2.5$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [2.1, 3.9]$ , ein instabiles Gleichgewicht  $x^* = 4$  und schließlich  $x^* = 9.6$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [4.1, 100]$ .

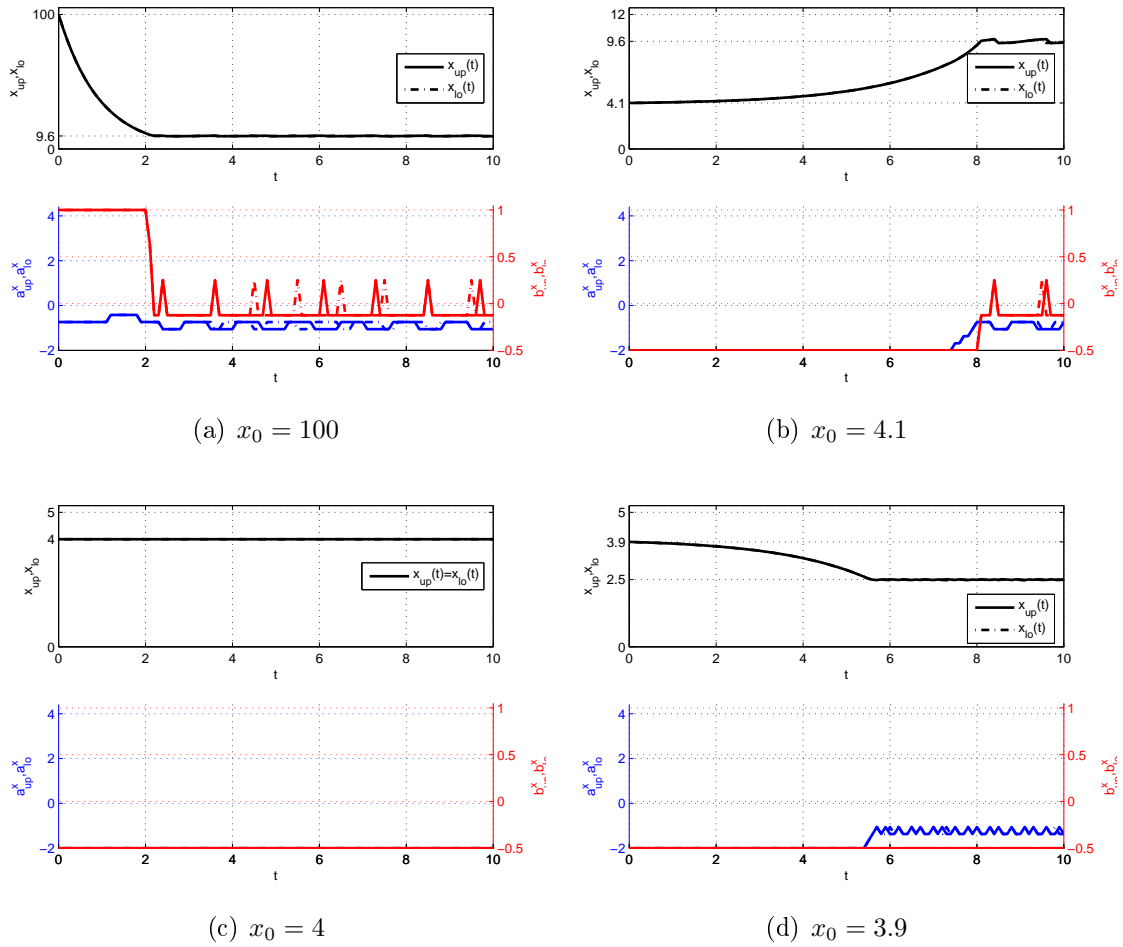
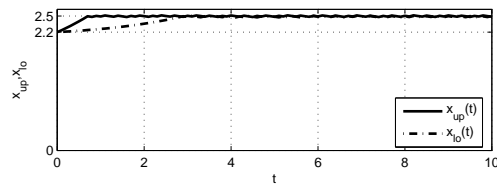
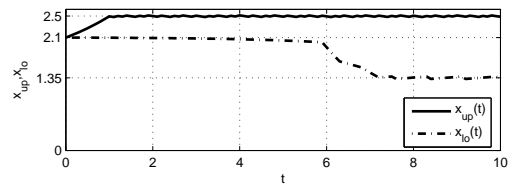


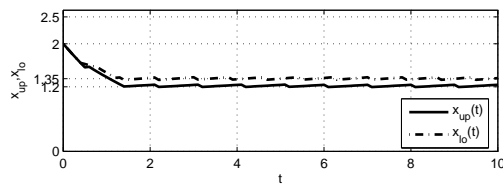
Abbildung 6.4: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ )



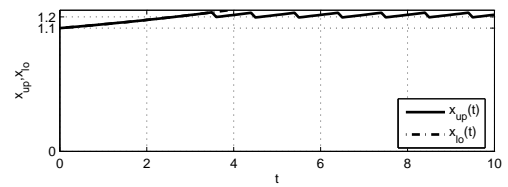
(a)  $x_0 = 2.2$



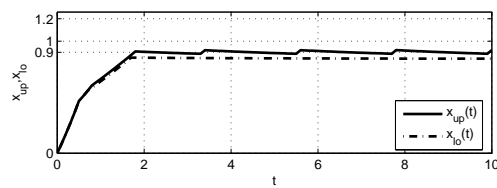
(b)  $x_0 = 2.1$



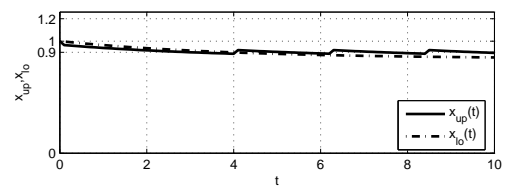
(c)  $x_0 = 2$



(d)  $x_0 = 1.1$



(e)  $x_0 = 0$



(f)  $x_0 = 1.0$

Abbildung 6.5: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ ), Fortsetzung

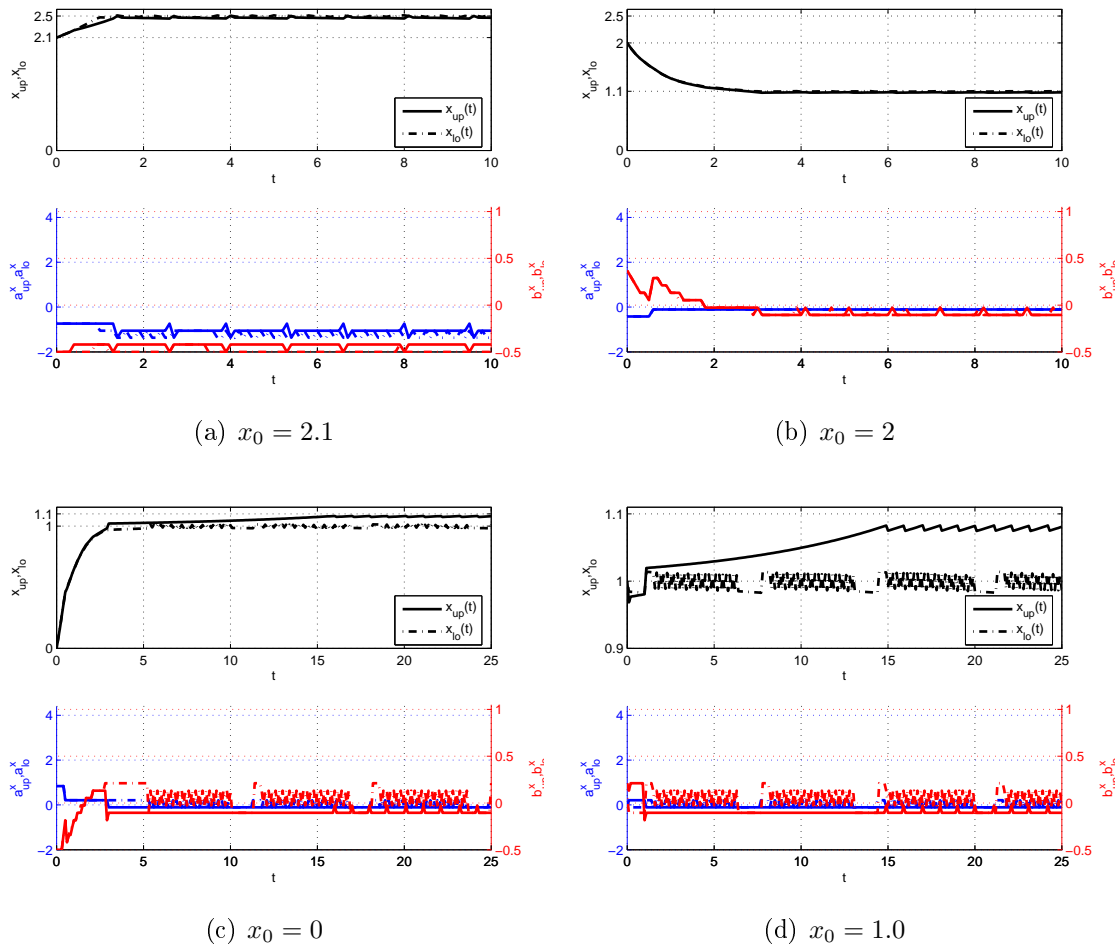


Abbildung 6.6: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.02$ ), mit höher diskretisiertem  $B$

### 6.5.2 Spieler 1 minimiert, Spieler 2 maximiert

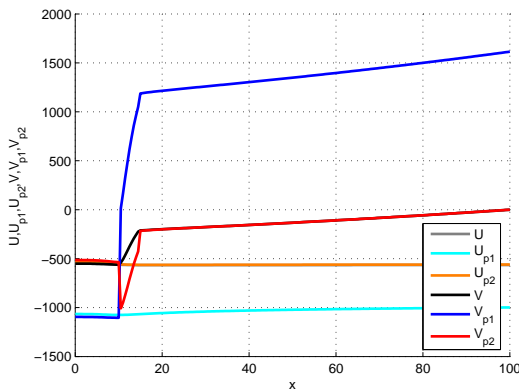
Selbst wenn das ökonomische Modell einen Rollentausch im dynamischen Spiel nicht vorsieht, kontrolltheoretisch ist die Frage, was passiert, wenn nun der erste Spieler minimiert und der zweite Spieler maximiert, genauso berechtigt. Wir führen hier also die gleiche Analyse des "inversen" Spiels durch, welche wir im vorherigen Abschnitt im Fall des "regulären" Spiels gemacht haben.

Wieder wollen wir sehen, wie sich eine Änderung des zulässigen Kontrollwertebereiches  $A$

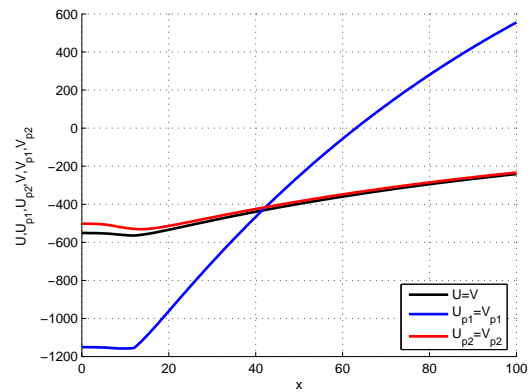
auf die Spielwerte und die Trajektorien auswirkt. Wir führen wieder drei Testreihen mit den gleichen Kontrollwertebereichen  $A$  und  $B$  durch.

### Die Spielwerte

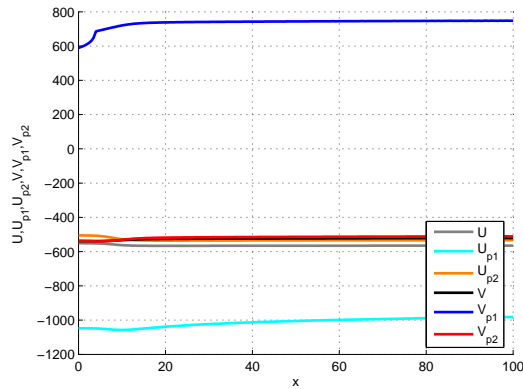
Die neuen Spielwerte sind in Abb. 6.7 abgebildet. Das bemerkenswerte daran ist, dass in den Fällen (a) und (c) die Spielwerte des ersten Spielers  $U_{p1}, V_{p1}$  voneinander abweichen.



(a)  $A = [0, 4], B = [0, 1]$



(b)  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$



(c)  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

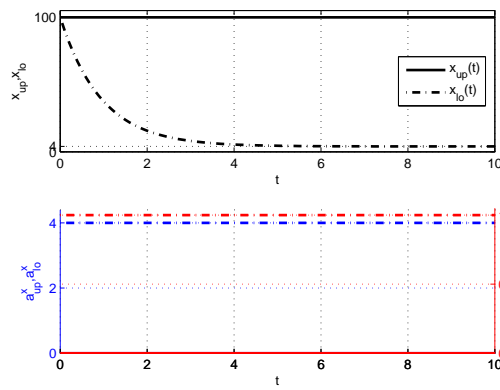
Abbildung 6.7: Die Spielwerte (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.02$ )

**Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$** 

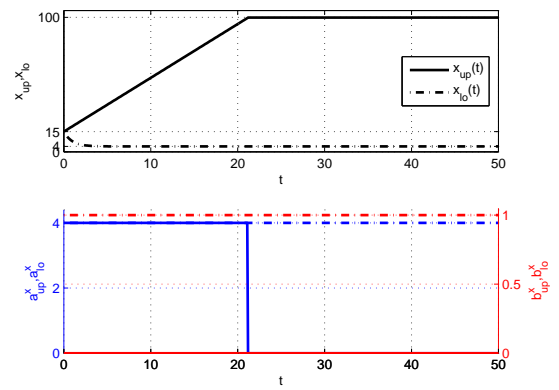
Wir beginnen wieder mit einer Trajektorie mit Anfangswert  $x_0 = 100$ . Offensichtlich haben wir wieder zwei verschiedene Trajektorien  $x_{up}$  und  $x_{lo}$  ( $\lim x_{up}(t) = 100$ ,  $\lim x_{lo}(t) = 4$ , Abb. 6.8 (a)) je nach dem, ob wir auf Grundlage des oberen oder unteren Spielwertes rechnen. Auch mit anderen  $x_0 \in [15, 100]$  konvergiert  $x_{up}(t)$  immer noch gegen  $x = 100$ ,  $x_{lo}(t)$  gegen  $x = 4$  (Abb. 6.8 (b)). Erst mit  $x_0 = 14$  ändert sich das Bild:  $x_{up}(t)$  konvergiert nicht mehr nach oben, aber auch nicht nach unten, sie verläuft konstant (Abb. 6.8 (c)). Das gilt für alle Trajektorien  $x_{up}(t)$  mit  $x_0 \in [11, 14]$  (Abb. 6.8 (c)). Mit  $x_0 \in [0, 10]$  konvergiert nun auch  $x_{up}(t)$  genauso wie  $x_{lo}(t)$  gegen  $x = 4$ .

Wir müssen also in diesem Fall zwischen Gleichgewichten von  $x_{lo}(t)$  und  $x_{up}(t)$  unterscheiden. Bei  $x_{lo}(t)$  ist  $x^* = 4$  das einzige Gleichgewicht, es ist stabil mit  $\mathcal{D}(x^*) = \Omega$ . Bei  $x_{up}(t)$  ist  $x^* = 100$  ein stabiles Gleichgewicht mit  $\mathcal{D}(x^*) = [15, 100]$ . Auch  $x^* = 4$  ist ein stabiles Gleichgewicht mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 10]$ . Alle Punkte im Intervall  $[11, 14]$  sind Gleichgewichte, sie sind jedoch weder stabil noch instabil.

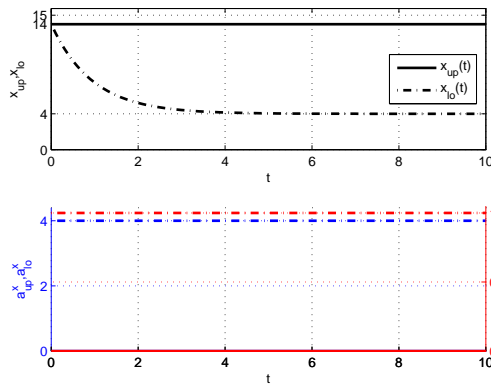




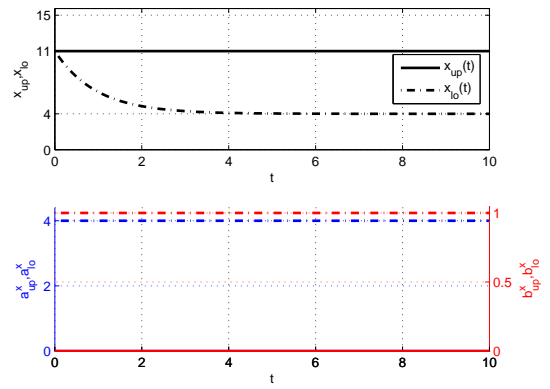
(a)  $x_0 = 100$



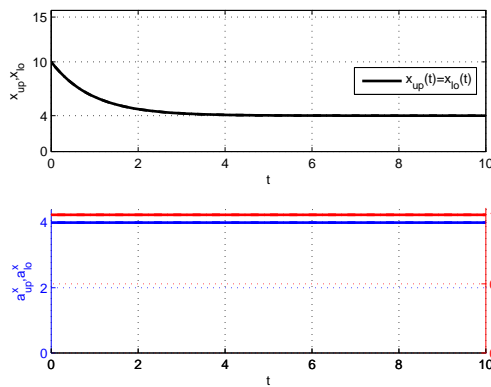
(b)  $x_0 = 15$



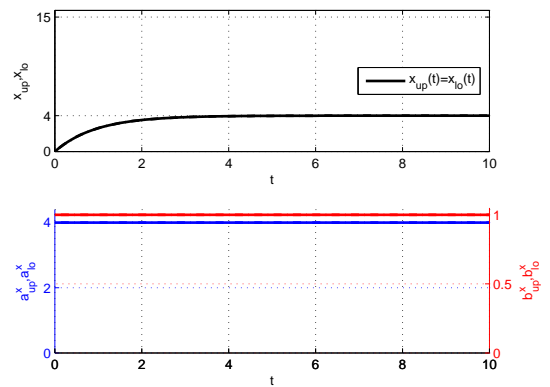
(c)  $x_0 = 14$



(d)  $x_0 = 11$



(e)  $x_0 = 10$



(f)  $x_0 = 0$

Abbildung 6.8: Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.02$ )

### Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$

Zum Anfangswert  $x_0 = 100$  erhalten wir zwei verschiedene Trajektorien;  $x_{lo}(t)$  konvergiert gegen  $x = 4$ ,  $x_{up}(t)$  gegen  $x = 12.5$  (Abb. 6.9 (a)). Bemerkenswert ist, dass  $x_{lo}(t)$  sich viel schneller dem Gleichgewicht nähert als  $x_{up}(t)$ , die einen vollkommen linearen Verlauf aufweist. Mit  $x_0 = 12$  stimmen beide Trajektorien überein und konvergieren gegen  $x = 4$  (Abb. 6.9 (b)). Ebenso konvergieren sie mit  $x_0 = 0$  von unten gegen  $x = 4$  (Abb. 6.9 (c)).

Daraus folgt, dass für  $x_{lo}(t)$  als einziges (stabiles) Gleichgewicht  $x^* = 4$  in  $\Omega$  existiert. Auch für  $x_{up}(t)$  ist  $x^* = 4$  ein stabiles Gleichgewicht allerdings mit einem kleineren Einzugsbereich  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 12.5]$ .  $x^* = 12.5$  ist ebenfalls ein Gleichgewicht für  $x_{up}(t)$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [12.5, 100]$ , es ist jedoch nach Definition A.4 instabil, da in jeder Umgebung von  $x^* = 12.5$  ein  $x_0 < 12.5$  existiert, so dass  $x_{up}(t)$  nicht gegen  $x^* = 12.5$  konvergiert.

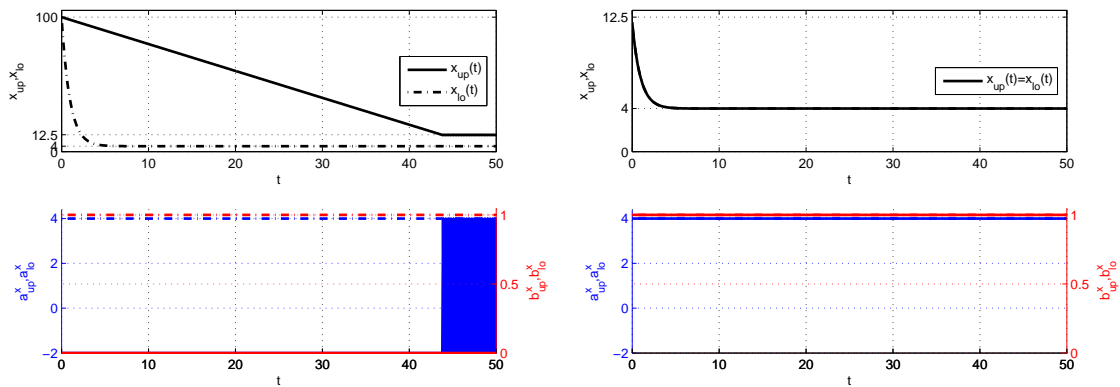
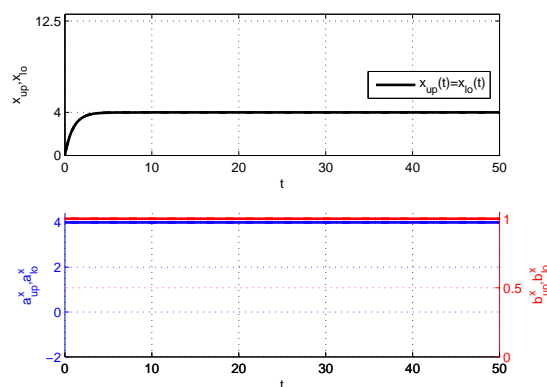
(a)  $x_0 = 100$ (b)  $x_0 = 12$ (c)  $x_0 = 0$ 

Abbildung 6.9: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.02$ )

### Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

Hier reichen Trajektorien mit zwei verschiedenen Anfangswerten um alle Gleichgewichte zu finden. Mit  $x_0 = 100$  konvergiert  $x_{lo}(t)$  gegen  $x^* = 4$ , während  $x_{up}(t)$  weiter am rechten Rand oszilliert (Abb. 6.10 (a)). Vom linken Rand mit  $x_0 = 0$  konvergiert  $x_{lo}(t)$  wiederum gegen  $x^* = 4$  und  $x_{up}(t)$  gegen  $x^* = 100$  (Abb. 6.10 (b)). Es gibt also ein einziges Gleichgewicht in ganz  $\Omega$ , im Fall  $x_{lo}(t)$  ist es jedoch  $x^* = 4$  und im Fall  $x_{up}(t)$  ist  $x^* = 100$ .

Auffallend ist das starke Oszillieren der Kontrollwertefunktionen  $a_{h,up}^x(t), b_{h,up}^x(t)$  über den ganzen Bereich  $A$  bzw.  $B$  und der Trajektorie  $x_{up}(t)$  selbst, sobald sie den rechten Gitterrand erreicht hat.

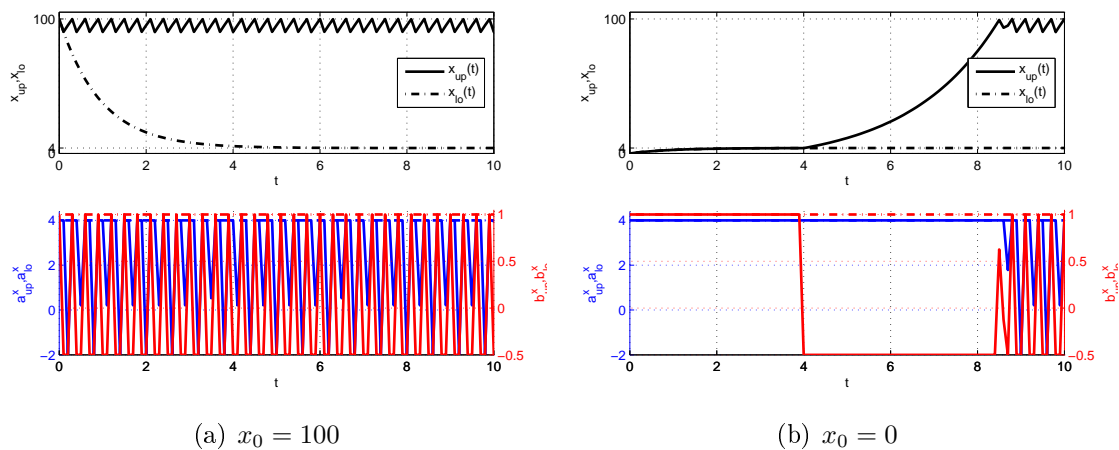


Abbildung 6.10: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  ( $S_1$  min,  $S_2$  max,  $\delta = 0.02$ )

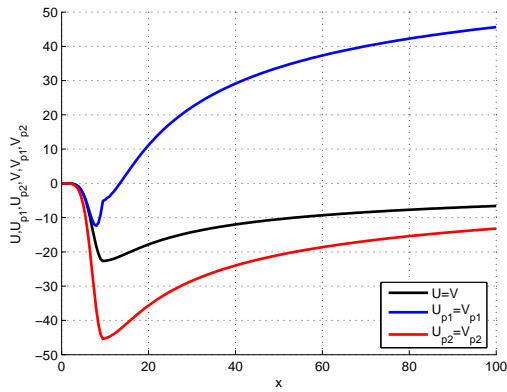
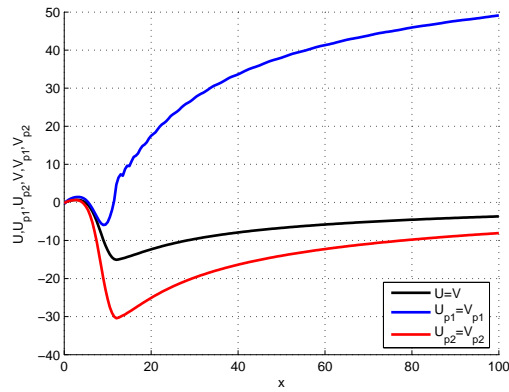
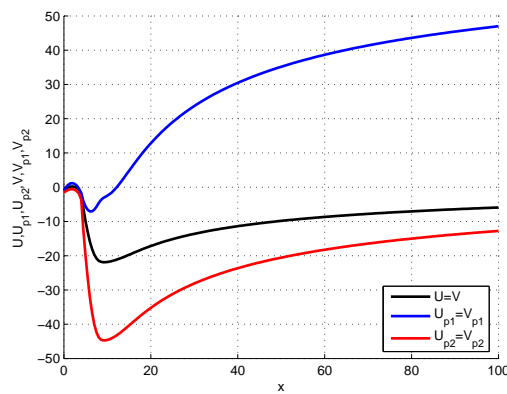
## 6.6 Numerische Ergebnisse mit Diskontrate $\delta = 0.5$

### 6.6.1 Spieler 1 maximiert, Spieler 2 minimiert

#### Die Spielwerte

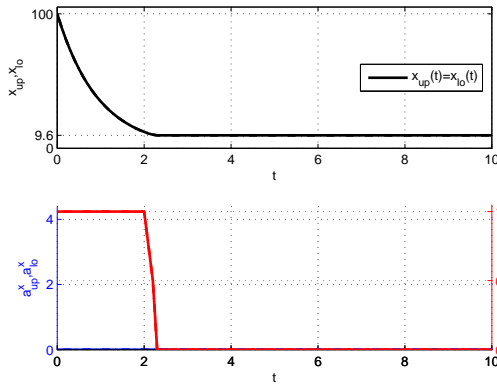
Wir modellieren das dynamische Spiel noch einmal mit den bekannten Kontrollwertebereichen  $A, B$  aus den drei bisher verwendeten Fällen jetzt mit der Diskontrate  $\delta = 0.5$  statt  $\delta = 0.02$ . Die unteren und oberen Spielwerte stimmen miteinander überein ( $U \equiv V$ ,  $U_{p1} \equiv V_{p1}$ ,  $U_{p2} \equiv V_{p2}$ , Abb. 6.11) und haben trotz der verschiedenen Kontrollwertebereiche  $A, B$  in den Fällen (a), (b) und (c) einen ähnlichen Verlauf auf dem Gebiet  $\Omega$ . Ein Unterschied zur ersten Testserie mit  $\delta = 0.02$  ist, dass die Spielwerte, nachdem sie den Tiefpunkt bei

ca.  $x = 12$  erreicht haben, mit wachsendem  $x$  schneller ansteigen, und einen steileren, aber immer noch asymptotischen Verlauf haben.

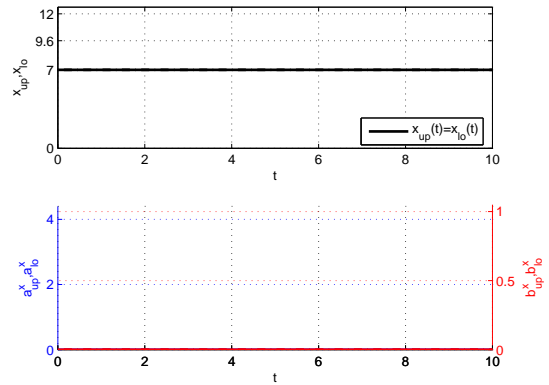
(a)  $A = [0, 4], B = [0, 1]$ (b)  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$ (c)  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$ Abbildung 6.11: Die Spielwerte (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.5$ )

Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$

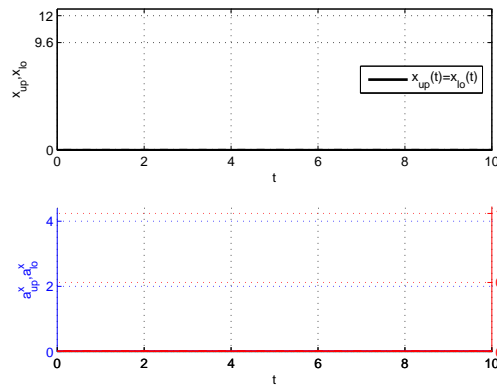
Mit diesen Kontrollwertebereichen haben wir auch mit der höheren Diskontrate den gleichen Trajektorienverlauf und die gleichen Gleichgewichte wie im Fall mit  $\delta = 0.02$ : jede Trajektorie mit Anfangswert  $x_0 \in [9.6, 100]$  konvergiert gegen  $x^* = 9.6$  und jede Trajektorie mit  $x_0 \in [0, 9.6]$  verläuft konstant (Abb. 6.12).



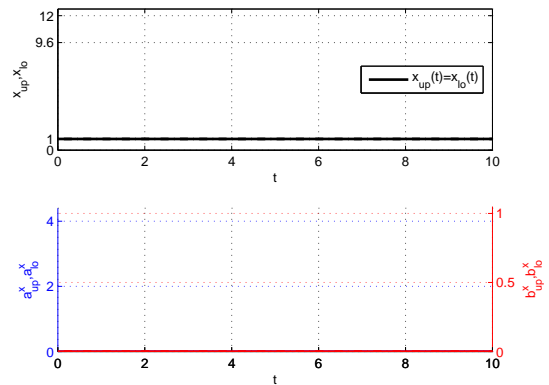
(a)  $x_0 = 100$



(b)  $x_0 = 7$



(c)  $x_0 = 0$

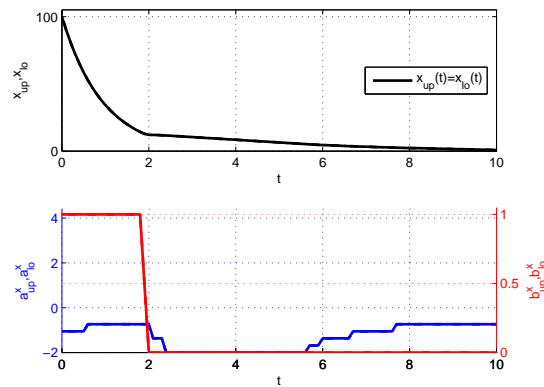


(d)  $x_0 = 1.0$

Abbildung 6.12: Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.5$ )

### Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [0, 1]$

Mit diesen Kontrollwertebereichen ergibt sich wie auch im Fall mit  $\delta = 0.02$  für  $x_0 = 100$  eine Trajektorie, die gegen  $x = 0$  konvergiert: somit ist  $x^* = 0$  auch für jeden anderen Startwert  $x_0 \in \Omega = [0, 100]$  das einzige Gleichgewicht. Ein kleiner Unterschied zum Fall mit  $\delta = 0.02$  besteht darin, dass der kurze "Ausschlag" im Graph der numerischen Kontrollwertfunktion  $b^x(t)$  bei  $t = 12$  nicht mehr vorkommt.



(a)  $x_0 = 100$

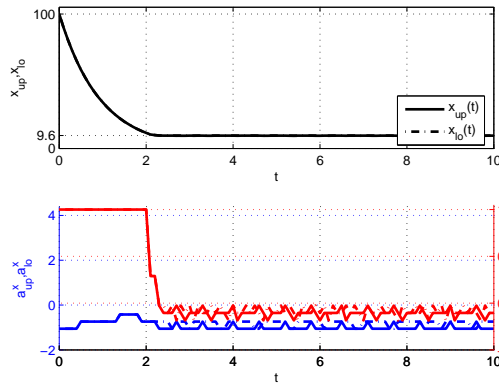
Abbildung 6.13: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.5$ )

### Trajektorien mit $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

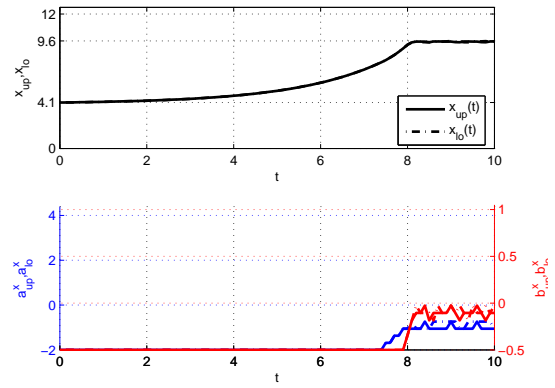
Hier erwarten wir wie im ähnlichen Fall mit  $\delta = 0.02$  eine hohe Konzentration von Gleichgewichten im unteren Bereich von  $\Omega = [0, 100]$  und eine ähnliche Sensitivität im Verhalten der Trajektorien bzgl. der Diskretisierung von  $B$ . Wir lassen deshalb hier den Algorithmus gleich mit der höheren Diskretisierung von  $B$  (20 Kontrollwerte) laufen.

Eine Trajektorie mit Startwert  $x_0 = 100$  konvergiert gegen  $x = 9.6$  und ebenso eine mit Anfangswert  $x_0 = 4.1$ .  $x^* = 4$  ist ebenso ein (instabiles) Gleichgewicht, denn eine Trajektorie mit  $x_0 = 4$  verläuft konstant, eine mit  $x_0 = 3.9$  konvergiert nach unten gegen  $x^* = 0.5$ . Wählen wir einen Startwert unterhalb von  $x^* = 0.5$ , konvergiert  $x(t)$  mit  $x_0 = 0.3$  wiederum gegen  $x^* = 0.5$ ,  $x(t)$  mit  $x_0 = 0.2$  gegen  $x^* = 0$ . Es muss also zwischen 0.2 und 0.3 die Grenze zweier Einzugsbereiche verlaufen. Folglich liegen im ganzen Bereich  $\Omega$  drei (vermutlich asymptotisch) stabile Gleichgewichte  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0.5$ ,  $x_4^* = 9.6$  mit den Einzugsbereichen  $\mathcal{D}(x_1^*) = [0, 0.2]$ ,  $\mathcal{D}(x_2^*) = [0.2, 3.9]$ ,  $\mathcal{D}(x_4^*) = [4.1, 100]$  sowie das instabile Gleichgewicht  $x_3^* = 4$ .

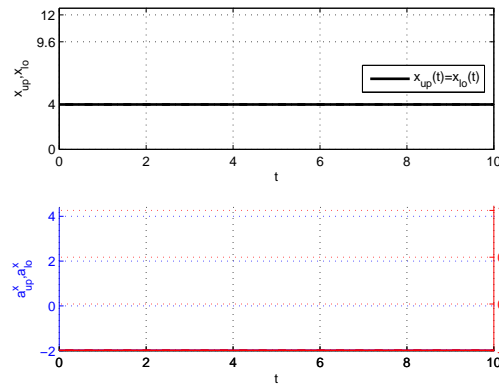
Zur Erinnerung: im Fall  $\delta = 0.02$  hatten wir  $x_1^* = 1.1$ ,  $x_2^* = 2.5$ ,  $x_3^* = 4$ ,  $x_4^* = 9.6$ . Auch die Diskontrate hat also Einfluss auf die Lage der Gleichgewichte.



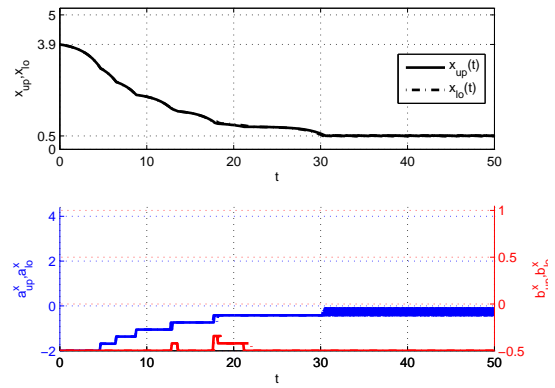
(a)  $x_0 = 100$



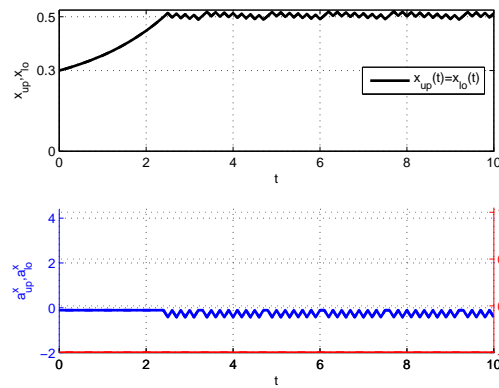
(b)  $x_0 = 4.1$



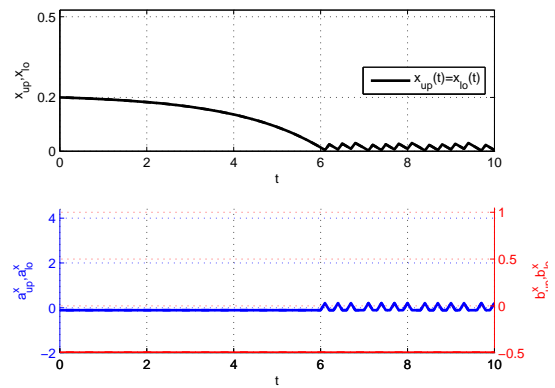
(c)  $x_0 = 4$



(d)  $x_0 = 3.9$



(e)  $x_0 = 0.3$



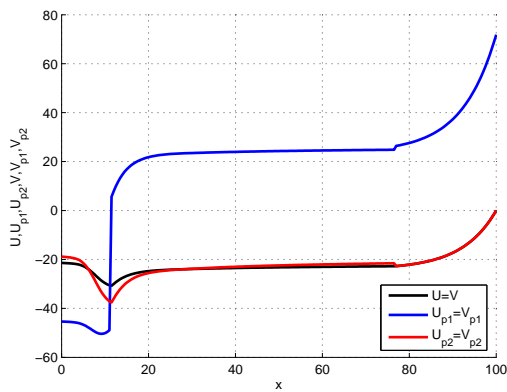
(f)  $x_0 = 0.2$

Abbildung 6.14: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (S1 max, S2 min,  $\delta = 0.5$ )

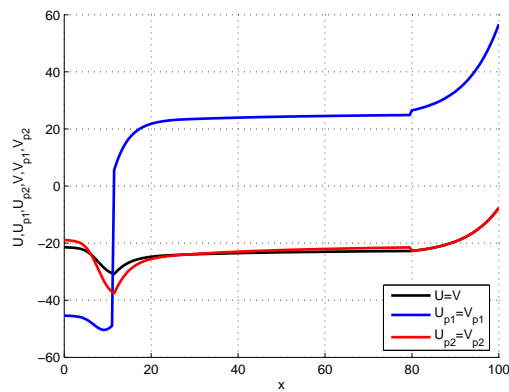
## 6.6.2 Spieler 1 minimiert, Spieler 2 maximiert

### Die Spielwerte

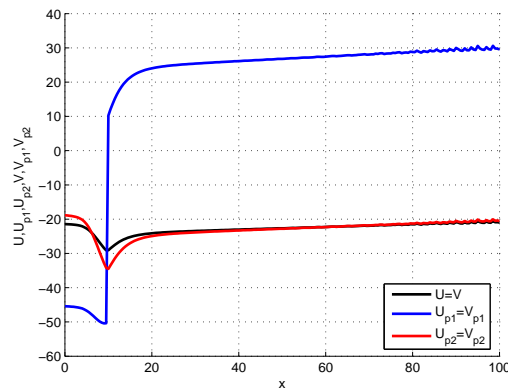
Auch bei dem Spiel mit vertauschten Optimierungsrollen (erster Spieler minimiert, zweiter Spieler maximiert) haben wir nun in allen drei Fällen (a), (b) und (c), Abb. 6.15 mit  $\delta = 0.5$  im Unterschied zu Abb. 6.7 übereinstimmende obere und untere Spielwerte ( $U \equiv V$ ,  $U_{p1} \equiv V_{p1}$ ,  $U_{p2} \equiv V_{p2}$ ).



(a)  $A = [0, 4], B = [0, 1]$



(b)  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$



(c)  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

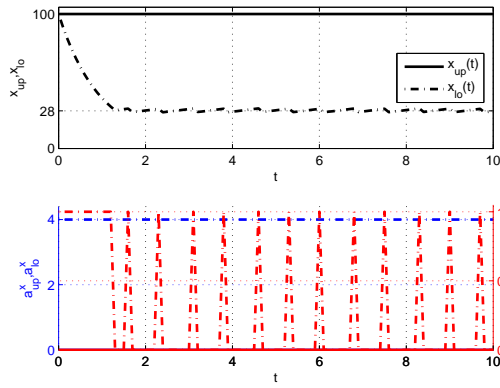
Abbildung 6.15: Die Spielwerte (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.5$ )



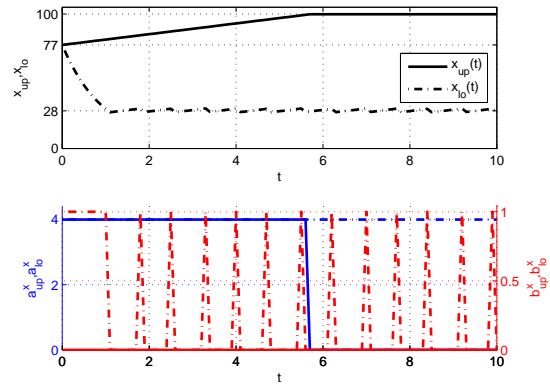
**Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$** 

Wir müssen in diesem Fall zunächst zwischen den Trajektorien  $x_{lo}(t)$  und  $x_{up}(t)$  unterscheiden. Denn  $x_{lo}(t)$  mit Anfangswert  $x_0 \in [77, 100]$  konvergiert gegen  $x = 28$ , während  $x_{up}(t)$  gegen den rechten Gitterrand  $x = 100$  konvergiert (Abb. 6.16 (a),(b)). Bei einem Anfangswert  $x_0 \in [12, 76]$  sind  $x_{lo}(t)$  und  $x_{up}(t)$  wieder identisch und konvergieren beide gegen  $x = 28$  (Abb. 6.16 (c),(d)). Bei  $x_0 \in [0, 11]$  konvergieren sie gegen  $x = 4$  (Abb. 6.16 (e),(f)).

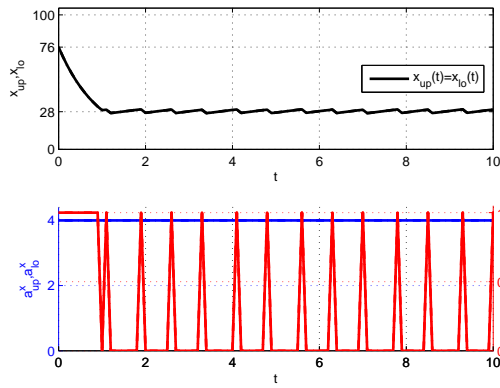
Die Gleichgewichte sind also  $x^* = 4$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 11]$  und  $x^* = 28$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [12, 100]$  für  $x_{lo}(t)$ ;  $x^* = 4$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 11]$ ,  $x^* = 28$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [12, 76]$  und  $x^* = 100$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [77, 100]$  für  $x_{up}(t)$ . Die Unterschiede zum dynamischen Spiel mit den gleichen  $A, B$  und  $\delta = 0.02$  (Abb. 6.8) sind, dass  $x_{lo}(t)$  ein Gleichgewicht mehr als vorher hat und alle Gleichgewichte von  $x_{up}(t)$  (wie auch die von  $x_{lo}(t)$ ) asymptotisch stabil sind.



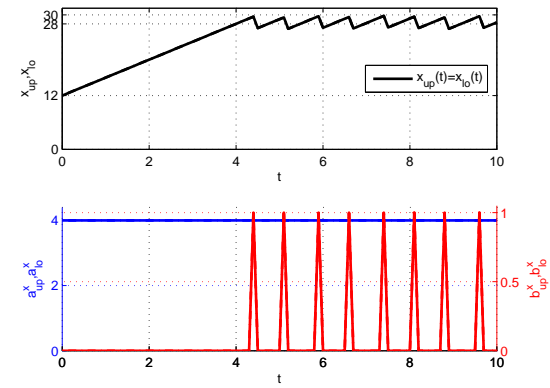
(a)  $x_0 = 100$



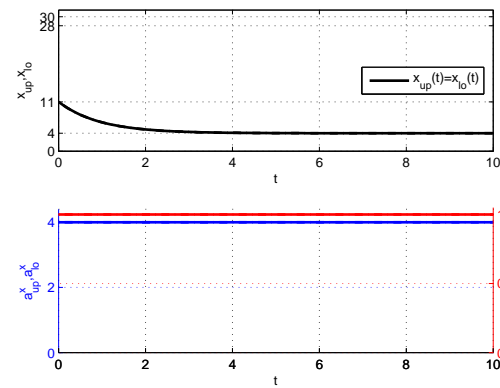
(b)  $x_0 = 77$



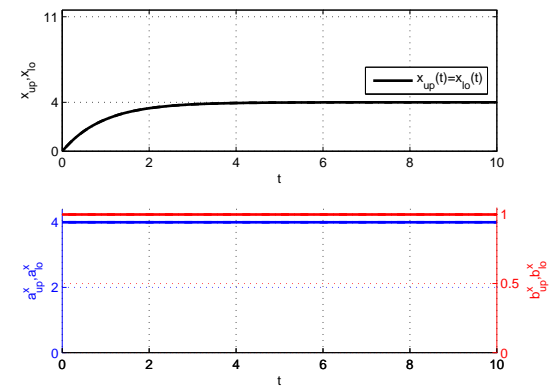
(c)  $x_0 = 76$



(d)  $x_0 = 12$



(e)  $x_0 = 11$

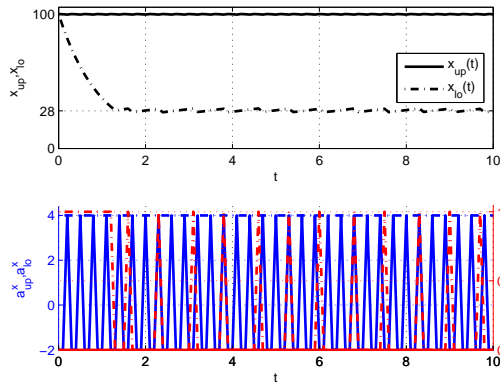


(f)  $x_0 = 0$

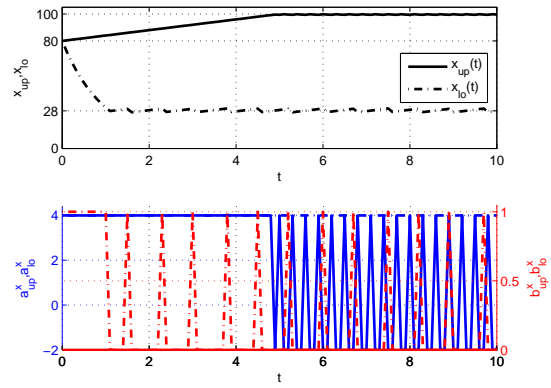
Abbildung 6.16: Trajektorien mit  $A = [0, 4], B = [0, 1]$  (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.5$ )

**Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$** 

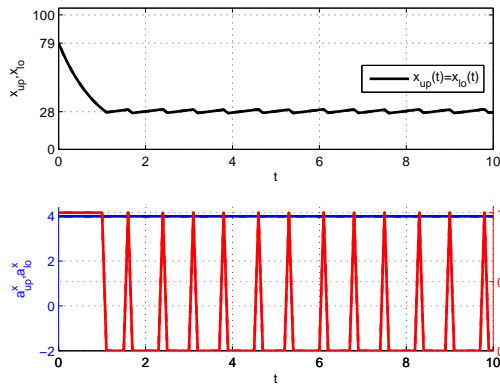
Die Trajektorienverläufe und Gleichgewichte sind hier fast identisch mit denen im letzten Abschnitt (vgl. Abbildungen 6.16 und 6.17). Nur die Grenzen der Einzugsbereiche von  $x^* = 28$  und  $x^* = 100$  für  $x_{up}(t)$  sind leicht verschoben. Die Gleichgewichte sind im einzelnen  $x^* = 4$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 11]$  und  $x^* = 28$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [12, 100]$  für  $x_{lo}(t)$ ;  $x^* = 4$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 11]$ ,  $x^* = 28$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [12, 79]$  und  $x^* = 100$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [80, 100]$  für  $x_{up}(t)$ . Die numerischen Kontrollwertefunktionen  $a_{h,lo}^x(t)$  und  $a_{h,up}^x(t)$  des ersten Spielers oszillieren im Fall  $A = [-2, 4]$  bei  $x_0 \in [80, 100]$  über die volle Breite von  $A$ , während sie bei  $A = [0, 4]$  relativ konstant sind.



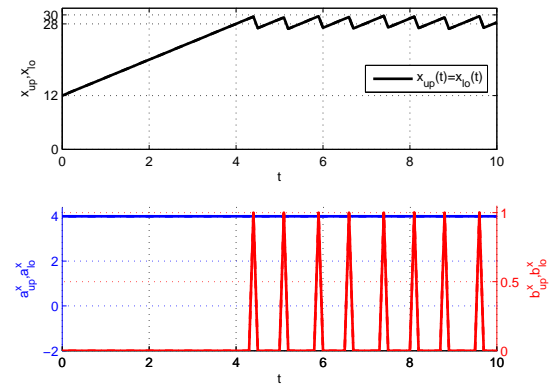
(a)  $x_0 = 100$



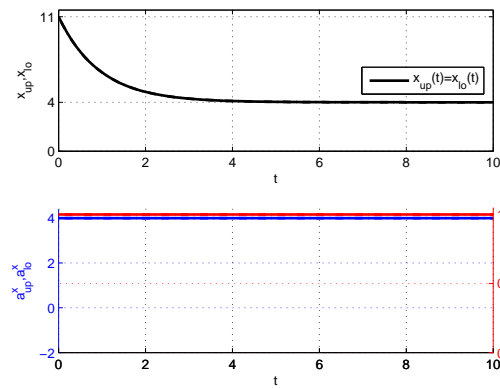
(b)  $x_0 = 80$



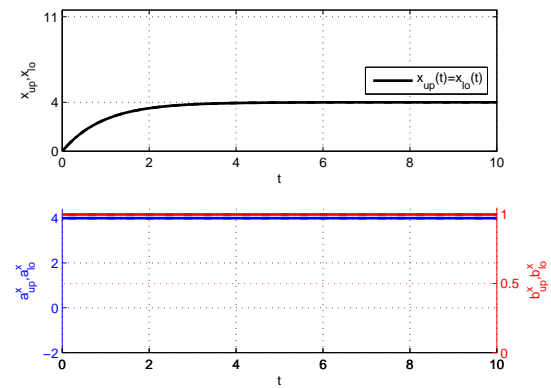
(c)  $x_0 = 79$



(d)  $x_0 = 12$



(e)  $x_0 = 11$



(f)  $x_0 = 0$

Abbildung 6.17: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [0, 1]$  (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.5$ )

Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$

Auch dieser Fall hat eine interessante Änderung im Vergleich: hatte das dynamische Spiel mit den gleichen  $A, B$  und  $\delta = 0.02$  nur ein einziges Gleichgewicht auf dem Gebiet  $\Omega$  (es war jedoch mit  $x^* = 4$  für  $x_{lo}(t)$  anders als  $x^* = 100$  für  $x_{up}(t)$ , Abb. 6.10), so ist nun mit  $\delta = 0.5$  ein neues (für  $x_{lo}(t)$  und  $x_{up}(t)$  gemeinsames) Gleichgewicht  $x^* = 4$  mit  $\mathcal{D}(x^*) = [0, 9]$  dazugekommen (Abb. 6.18). Im Restbereich  $[10, 100]$  haben  $x_{lo}(t)$  und  $x_{up}(t)$  nach wie vor je ein Gleichgewicht  $x^* = 30$  bzw.  $x^* = 100$ .

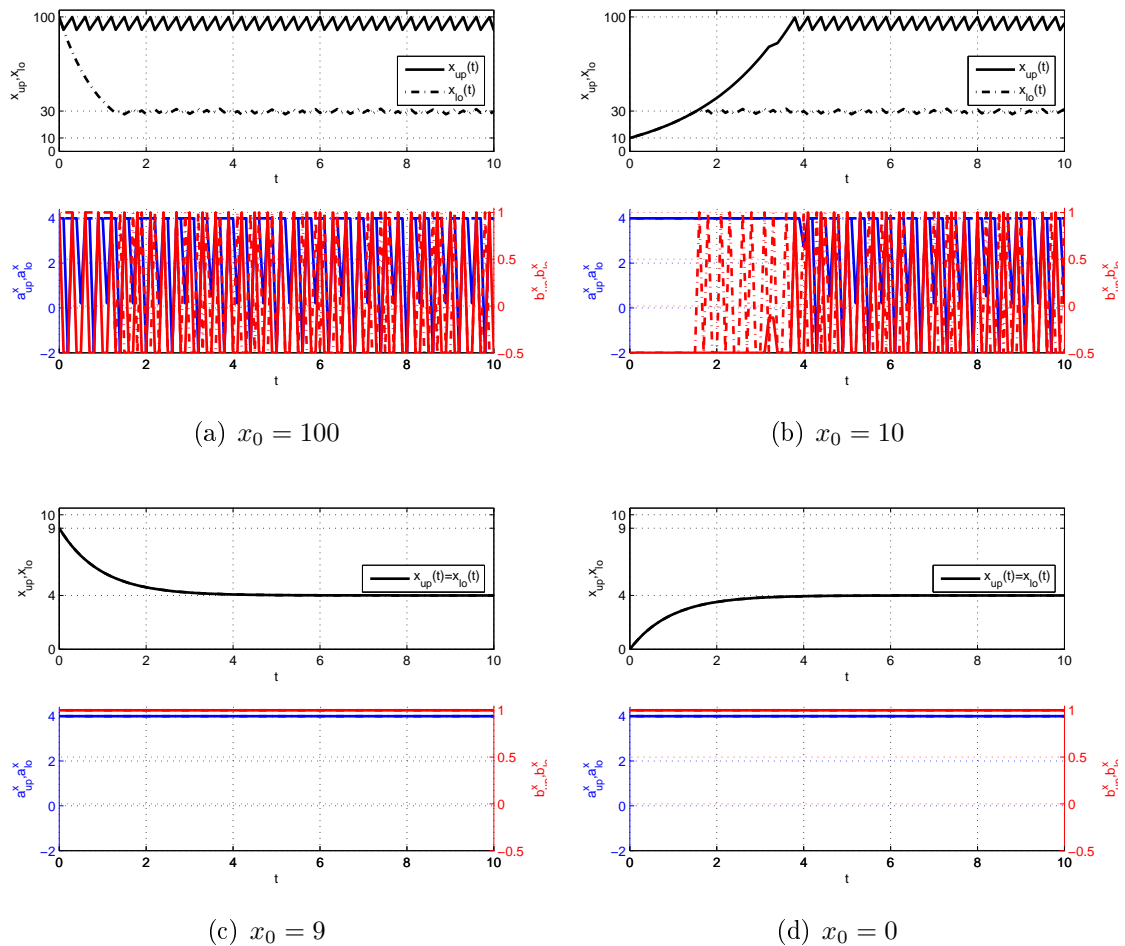


Abbildung 6.18: Trajektorien mit  $A = [-2, 4], B = [-0.5, 1]$  (S1 min, S2 max,  $\delta = 0.5$ )

## 6.7 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Wir haben in diesem Kapitel das Modell eines Oligopolmarkts als ein diskontiertes dynamisches Spiel konsequent aufgebaut und mit dem auf dem Optimalitätsprinzip basierenden numerischen Verfahren erste Ergebnisse daraus gewonnen. Nun wollen wir einige mögliche Weiterentwicklungen andeuten.

Eine wesentliche Erkenntnis aus der Simulation der Trajektorien ist, dass verschiedene Anfangswerte des Kapitalstocks  $x$  oft zu verschiedenen Trajektorien und verschiedenen Gleichgewichten führen. Die Wahl des Anfangswertes  $x$  hat also einen entscheidenden Einfluss auf die Spielwerte und wir haben uns während der Simulation die Freiheit genommen, jeden möglichen Anfangswert im untersuchten Bereich  $\Omega$  wählen zu können. Sofern man einen real existierenden Markt modelliert, ist es jedoch oft so, dass nur bestimmte, sei es aus einer Ressourcenknappheit oder regulatorisch nach oben beschränkte Anfangswerte möglich sind. Es ist ganz klar, dass verschiedene Gleichgewichte von jedem der Spieler oder von einem eventuellen außenstehenden Marktregulierer subjektiv unterschiedlich bewertet werden. Es ist daher interessant, einen engeren Zusammenhang zwischen den tatsächlich möglichen Anfangswerten von  $x$  und den als optimal angesehenen Gleichgewichten herzustellen, um eine eventuelle Handlungsempfehlung für die Beteiligten aus dem Modell abzuleiten.

In den einzelnen Abschnitten des Kapitels haben wir das dynamische Spiel mehrfach, mit geänderter Diskontrate  $\delta$  und verschiedenen Kontrollwertebereichen  $A, B$  wiederholt, um über die reine Kenntnis der Spielwerte, der Gleichgewichte und ihrer Einzugsbereiche hinaus den ersten Eindruck über die Robustheit dieser Ergebnisse zu bekommen. Wir haben vor allem die Diskontrate und die zulässigen Kontrollwertebereichen variiert, weil diese Parameter Bestandteile jedes dynamischen Spiels sind. Was unser konkretes Oligopolmodell betrifft, wäre es ebenso interessant die Auswirkung einer Änderung der regulatorischen Parameter  $\chi$  und  $\rho$ , d.h. die damit verbundene Verschiebung der Gleichgewichte und ihrer Einzugsbereiche zu untersuchen, wenn man beispielsweise aus der Sicht einer Deregulierungsbehörde eine Liberalisierung des Marktes anstrebt.

In [10] sehen W. Semmler und M. Kato eine Erweiterung des Kontrollsystems vor, indem die Investitionsrate  $a(t)$  in den Kapitalstock  $x(t)$  selbst mit Hilfe einer zweiten Differentialgleichung beschrieben wird. Das Verfahren zur approximativen Berechnung der Spielwerte bleibt grundsätzlich das gleiche – wir müssen beim Funktionenraum  $\mathcal{W}$  von den stückweise stetigen, affin linearen zu affin bilinearen Funktionen übergehen, die wir bereits nebeneinander eingeführt haben, und dazu lediglich einige Routinen für im Algorithmus für zweidimensionale Gitter anpassen. Erste Versuche mit diesem System haben jedoch gezeigt, dass der im Abschnitt 4.2.1 beschriebene Fall einer invarianten Menge  $\Omega$  tatsächlich eintreten kann; d.h. dass für ein  $x \in \Omega$  die Lösung  $f_h(x, a, b)$  mit allen zulässigen Werten  $a, b$  den Bereich  $\Omega$  verlässt. Damit das Verfahren uns in diesem Fall weiterhin sinnvolle Ergebnisse liefert, müssen

wir effektiv eine Methode finden, mit der wir das System geeignet transformieren können, damit dieses Problem nicht mehr auftritt.

Bevor wir mit der eigentlichen Berechnung der Spielwerte anfangen konnten, mussten wir uns anhand einiger Testläufe mehr oder weniger "visuell" für eine ausreichend hohe Diskretisierung des Bereichs  $\Omega$  entscheiden. Diese Entscheidung hängt stark von der verwendeten Wertefunktion  $g$  ab: wenn  $g$  steiler ansteigt, sollte das Gitter  $\Xi$  feiner gewählt sein. Das numerische Verfahren kann hierzu um eine adaptive Gittererzeugung erweitert werden: wenn man die lokalen Fehlerschätzer in jeder Iteration auswertet, kann man das relativ grobe Anfangsgitter im Laufe des Algorithmus nur in den Bereichen verfeinern, wo es nötig ist, d.h. wenn der Fehler  $\eta_i$  groß ist. Weiterführende Details zu diesem Ansatz sind im Artikel [9] von L. Grüne und W. Semmler zu finden.

Ebenso recht heuristisch war unsere Vorgehensweise zur Bestimmung der Grenzen der Einzugsbereiche, indem wir die Anfangswerte der Trajektorie, die gegen gewünschte Gleichgewichte konvergieren, einfach erraten. In [8, Kapitel 6] wird für optimale Steuerungsprobleme ein Verfahren besprochen, mit dem man die Grenzen der Einzugsbereiche numerisch berechnen kann. Es wäre schließlich interessant zu untersuchen, inwieweit sich ein vergleichbares Verfahren bei dynamischen Spielen anwenden lässt.





# Anhang A

## Einige Begriffe aus der Stabilitätstheorie

Wir wollen hier einige wichtige Definitionen zur Analyse des dynamischen Spiels übernehmen, die in [8] zur Stabilitätsanalyse optimaler Steuerungsprobleme (mit einem Kontrollparameter) entwickelt wurden. Insbesondere wollen wir damit die Gleichgewichte charakterisieren, die sich unter bestimmten Umständen in dem mit Hilfe des Kontrollsystems (2.1) oder (2.2) modellierten ökonomischen Systems ergeben, d.h. Punkte, gegen die die numerisch berechneten optimalen Lösungen nach einer gewissen Zeit konvergieren.

Einige Begriffe, die wir benötigen, stammen aus der Stabilitätstheorie für unkontrollierte dynamische Systeme. Darunter verstehen wir hier vereinfachend die Lösungsabbildung  $\Phi(t, x)$  einer Differential- oder Differenzgleichung der Form (2.1) oder (2.2), die nicht von Kontrollfunktionen  $a, b$  abhängt und die für alle Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle Zeiten  $t \geq 0$  bzw.  $t \in h\mathbb{N}_0$  existiert.

**Definition A.1** Ein Punkt  $x^*$  heißt *Gleichgewicht* eines dynamischen Systems, falls

$$\Phi(t, x^*) = x^*$$

für alle  $t \geq 0$  bzw.  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt. □

Für die späteren Stabilitätsdefinitionen sind bestimmte Klassen von Vergleichsfunktionen sehr hilfreich, die wir hier nun angeben.

**Definition A.2** Wir definieren die folgenden Klassen von Funktionen

$$\mathcal{K}_\infty := \left\{ \alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ ist stetig, streng monoton wach-} \\ \text{send, unbeschränkt und erfüllt} \\ \alpha(0) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

und

$$\mathcal{KL} := \left\{ \beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \left| \begin{array}{l} \beta \text{ ist stetig, } \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}_\infty \text{ für jedes} \\ t \geq 0 \text{ und } \beta(r, t) \text{ ist streng monoton} \\ \text{fallend in } t \text{ mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0 \\ \text{für jedes } r > 0 \end{array} \right. \right\} \quad \square$$

Mit diesen Funktionen definieren wir folgende Eigenschaften.

**Definition A.3** (i) Ein Gleichgewicht  $x^*$  heisst *stabil*, falls eine Umgebung  $\mathcal{N}(x^*)$  und eine  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion  $\alpha$  existiert, so dass für alle  $x \in \mathcal{N}(x^*)$  die Ungleichung

$$\|\Phi(t, x) - x^*\| \leq \alpha(\|x - x^*\|)$$

für alle  $t \geq 0$  bzw.  $t \in h\mathbb{N}_0$  gilt.

(ii) Ein Gleichgewicht  $x^*$  heisst *asymptotisch stabil*, falls eine Umgebung  $\mathcal{N}(x^*)$  und eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion  $\beta$  existiert, so dass für alle  $x \in \mathcal{N}(x^*)$  die Ungleichung

$$\|\Phi(t, x) - x^*\| \leq \beta(\|x - x^*\|, t)$$

(iii) Ein Gleichgewicht  $x^*$  heisst *instabil*, falls (i) nicht gilt, also falls für jede Umgebung  $\mathcal{N}(x^*)$  und jede  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion  $\alpha$  ein Punkt  $x \in \mathcal{N}(x^*)$  und ein  $t \geq 0$  existieren mit

$$\|\Phi(t, x) - x^*\| > \alpha(\|x - x^*\|). \quad \square$$

Falls in einem dynamischen System mehrere asymptotisch stabile Gleichgewichte existieren, ist es interessant, für welche Anfangswerte die Lösungen gegen welche Gleichgewichte konvergieren.

**Definition A.4** Für ein Gleichgewicht  $x^*$  eines dynamischen Systems definieren wir den *Einzugsbereich* (oder auch *Stabilitätsumgebung*) als

$$\mathcal{D}(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \Phi(t, x) \rightarrow x^* \text{ für } t \rightarrow \infty\}. \quad \square$$

# Anhang B

## Programm

### B.1 Der Programmaufruf

Das Programm wird auf der Kommandozeile mit fünf bzw. sechs Parametern aufgerufen. Es sind die Parameter, die am häufigsten geändert wurden, um möglichst diversifizierte Ergebnisse, dargestellt in Kapitel 6, zu bekommen, in dieser Reihenfolge: die Diskontrate  $\delta$ , die Wahl der zulässigen Bereiche  $A$  und  $B$ , die Zeit  $t$  zur Berechnung der Trajektorie, der Anfangswert  $x_0$  der zu berechnenden Trajektorie. Optional außerdem noch der Name einer ASCII-Textdatei, die die oberen und unteren Spielwerte im nächsten Abschnitt B.2 beschriebenen Format enthält. Falls also bereits bei einem früheren Programmlauf berechnete Spielwerte vorliegen und man nur an der Berechnung der Trajektorie interessiert ist, bedeutet das eine Zeitersparnis.

Zur Erklärung erscheint folgende Hilfeausgabe, wenn man das Programm ohne Parameter aufruft:

```
>spiel
```

```
Benutzung: spiel DELTA CTRL_S T X0 [ASC]
```

```
DELTA  : Diskontfaktor delta
CTRL_S : # 410: Kontrollwertebereiche A=[0,4], B=[0,1]
        : # 411:                A=[-2,4], B=[0,1]
        : # 412:                A=[-2,4], B=[-0.5,1]
        : # 440:                A=[0,4], B=[0,1] h.diskr.
        : # 441:                A=[-2,4], B=[0,1] h.diskr.
        : # 442:                A=[-2,4], B=[-0.5,1] h.diskr
T       : Zeit zur Berechnung der Trajektorie
X0      : Anfangswert der Trajektorie
ASC     : [optional] Berechnete, in Datei gespeicherte Spielwerte
```

Zur Wahl der Kontrollwertebereiche `CTRL_S`: beim Testen des Programms konnte man erkennen, dass einige wenige Kombinationen bei der Wahl von  $A$  und  $B$  genügen, um möglichst viele verschiedene Konvergenzverhalten der Trajektorien zu erzeugen. Um das Eingeben der Grenzen von  $A$  und  $B$  zu vereinfachen, sind drei verschiedene Möglichkeiten, wie in der Hilfeausgabe angegeben, im Programm vordefiniert und lassen sich mit einem einzigen Parameter `CTRL_S = {410,411,412}` auswählen. Dabei wird  $A$  mit 20,  $B$  mit 5 Werten diskretisiert. Falls man für  $B$  eine höhere Diskretisierung (20 Werte) benötigt, kann man es auch mit der Wahl von `CTRL_S = {440,441,442}` angeben.

Zur Wahl der Zeit `T`: in den meisten Fällen war ein Wert von 50 und kleiner ausreichend, um die Rechenzeit gering zu halten. In sehr seltenen Fällen war ein Wert von 250 nötig.

Zur Wahl des Anfangswerts `X0`: der Wert muss im Bereich  $\Omega$  liegen; andernfalls bricht das Programm ab mit einer Fehlermeldung.

Gültige Beispiele sind folgende Aufrufe:

```
>spiel 0.02 410 25 0
>spiel 0.1 411 50 100
>spiel 0.5 442 50 3.9 reg_werte_gs.asc
```

Damit wird das kontrollierte Gauß-Seidel-Verfahren ausgeführt. Die Strategie-Iteration befindet sich in einer anderen Programmdatei und wird mit `spiel_pl` anstatt von `spiel` und mit den sonst gleichen Parametern gestartet.

## B.2 Die Programmausgabe

Nach dem Programmablauf wird eine ASCII-Textdatei in das Programmverzeichnis geschrieben, `reg_werte_gs.asc` bzw. `reg_werte_pl.asc` als Ergebnis des Gauß-Seidel-Verfahrens bzw. der Strategie-Iteration, im Fall wenn der erste Spieler maximiert und der zweite minimiert. Im Fall wenn der erste minimiert und der zweite maximiert, heißen die Dateien `inv_werte_gs.asc` bzw. `inv_werte_pl.asc`.

Beide Dateien haben dasselbe Format. In der ersten Zeile enthalten sie Zusatzinformationen wie die Anzahl der Gitterknoten  $N$ , die Grenzen des Bereichs  $\Omega = [r_0, r_1]$  und den größten und kleinsten Wert der Kontrollwertebereiche  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{q1}\}$  und  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{q2}\}$ . In den  $N + 1$  nachfolgenden Zeilen stehen die für jeden Gitterknoten  $x$  berechneten oberen und unteren Spielwerte  $V, U$  sowie die spielereigenen Werte  $V_{p1}, U_{p1}$  und  $V_{p2}, U_{p2}$ .

$N$	$r_0$	$r_1$	$a_0$	$a_{q1}$	$b_0$	$b_{q2}$
201	0.000000	100.000000	-2.000000	4.000000	-0.500000	1.000000
$x$	$V(x)$	$V_{p1}(x)$	$V_{p2}(x)$	$U(x)$	$U_{p1}(x)$	$U_{p2}(x)$
0.000000	-3.860531	-6.801824	-4.779769	-3.473312	-3.932161	-6.487774
0.500000	-2.971414	-5.235754	-3.678487	-2.579587	-2.331946	-5.406815
1.000000	-2.369709	-4.411066	-2.698061	-1.968558	-1.438154	-4.467519
1.500000	-1.937184	-3.850394	-1.961159	-1.543348	-0.931694	-3.698350

Außerdem wird eine Datei `reg_trajektorie.asc` bzw. `inv_trajektorie.asc` mit Trajektoriewerten geschrieben, die Grundlage der Spielwerte aus dem Gauß-Seidel-Verfahren berechnet wurden. Die Kopfzeile enthält zur Kontrolle die Grenzen der verwendeten Kontrollwertebereiche  $A$  und  $B$ . Ab der zweiten Zeile stehen in den Spalten die Zeit  $t$ , der Wert der Trajektorie  $x_{up}(t)$  zum oberen Spielwert  $V$  (in der zweiten Zeile mit  $t = 0$  ist es also gerade der Anfangswert  $x_0$ ), die Werte der numerischen Kontrollwertefunktionen  $a_{h,up}^x(t)$  und  $b_{h,up}^x(t)$ , und weiter analog der Wert der Trajektorie  $x_{lo}(t)$  zum unteren Spielwert  $U$ ,  $a_{h,lo}^x(t)$  und  $b_{h,lo}^x(t)$ .

	$a_0$	$a_{q1}$	$b_0$	$b_{q2}$		
0.000000	0.000000	-2.000000	4.000000	0.000000		
$t$	$x_{up}(t)$	$a_{h,up}^x(t)$	$b_{h,up}^x(t)$	$x_{lo}(t)$	$a_{h,lo}^x(t)$	$b_{h,lo}^x(t)$
0.000000	2.000000	-0.421053	0.368421	2.000000	-0.421053	0.368421
0.100000	1.884211	-0.421053	0.289474	1.884211	-0.421053	0.289474
0.200000	1.787562	-0.421053	0.210526	1.787562	-0.421053	0.210526
0.300000	1.707824	-0.421053	0.131579	1.707824	-0.421053	0.131579

Während des Programmlaufes erscheint eine Meldung, wenn der gerade mit dem Euler-Verfahren berechnete Punkt außerhalb des Gitters liegt, und die aktuelle Abweichung zwischen den Vektoren der Spielwerte der zwei letzten Iterationsschritte in der  $\infty$ -Norm im Vergleich zum vorgegebenen Abbruchkriterium. Zum Schluss wird die Anzahl der benötigten Iterationen ausgegeben.

### B.3 Wichtige Funktionen und Variablen im Programm

Dieser Abschnitt soll eine Auskunft über die im Programm verwendeten Funktionen sowie wichtige Variablen geben, insbesondere für den Fall, wenn Parameter des dynamische Spiels geändert werden. Die am häufigsten geänderten Parameter werden dem Programm als Argumente beim Aufruf übergeben, es findet aber sich eine Reihe weiterer ebenso wichtiger Optionen im Programmcode.

### B.3.1 Globale Variablen

Zu Beginn stehen drei globale Variablen im Code:

**int d** hat durchgehend den Wert 1 und muss i.A. nicht geändert werden. Falls später z.B. ein zweidimensionales Gitter verwendet wird, wird  $d=2$  gesetzt (dazu müssen außerdem noch weitere Funktionen, z.B. die Gitterroutinen angepasst werden).

**int ig** bei  $ig=1$  werden die Wertefunktionen  $g, g_{p1}, g_{p2}$  "so wie sie sind" ausgewertet; im Gegensatz zu  $ig=-1$ , wenn stattdessen die negativen Wertefunktionen  $-g, -g_{p1}, -g_{p2}$  eingesetzt werden.

**int il**  $il=1$  bedeutet, erster Spieler maximiert, zweiter Spieler minimiert (seine jeweilige Wertefunktion);  $il=-1$  bedeutet, erster Spieler minimiert, zweiter Spieler maximiert.

### B.3.2 Strukturen

Um die Datenverwaltung innerhalb des Programms z.B. bei Unterfunktionsaufrufen einfach zu halten, sind zahlreiche Variablen und Arrays in Strukturen zusammengefasst.

**struct ParamSet** enthält die Variablen

```
double rho;
double chi;
double pc;
double pm;
double da;
double db;
double cst;
double alpha;
double beta;
double gamma;
```

die in `init_param()` mit den Parametern des ökonomischen Modell initialisiert werden (vgl. Tabelle im Abschnitt 6.3). Die Diskontrate findet sich in der nächsten Struktur mit Iterationsparametern.

**struct Iter** enthält drei iterationsbezogene Parameter: die Diskontrate `delta`, die Schrittweite `h`, das Abbruchkriterium `epsilon`. Außerdem die Variable `n`, die später die Anzahl der benötigten Iterationen im Algorithmus speichert:

```
double eps;
double h;
double delta;
```

```
long *n;
```

**struct Gitter** Dies ist die einzige Struktur, von der global ein Element `grd` angelegt wird; es wird später in `main()` initialisiert (auf `grd` wird von allen Funktionen später direkt zugegriffen, andere Strukturelemente werden als Funktionsargumente übergeben). Sie speichert den linken und den rechten Gitterrand (bezogen auf das eindimensionale Spiel) und die Gitterfeinheit (die Anzahl der Gitterintervalle):

```
double lr[1];
double rr[1];
int n[1];
```

**struct Control** enthält Informationen über die zulässigen Kontrollwertebereiche  $A, B$  der beiden Spieler: die Grenzen von  $A, B$ , die Anzahl der diskreten Kontrollwerte in jedem Bereich, Zeiger auf zwei eindimensionale Arrays mit den eigentlichen Kontrollwerten (Speicher für die Arrays wird in `init_control()` reserviert).

```
double a_lb;
double a_ub;
double b_lb;
double b_ub;
int q1;
int q2;
double *a;
double *b;
```

**struct Payoff** enthält Zeiger auf Arrays mit den unteren und oberen Spielwerten auf Grundlage der kombinierten Wertefunktion sowie die spezifischen Werte der beiden Spieler (Speicher für die Arrays wird in `init_payoff()` reserviert):

```
double *up;
double *up_p1;
double *up_p2;
double *lo;
double *lo_p1;
double *lo_p2;
```

### B.3.3 Hilfsfunktionen

Mit den Hilfsfunktionen werden entweder Arrays initialisiert, oder eine der im letzten Abschnitt beschriebenen Strukturen.

`init_int()` initialisiert ein Array mit Integer-Werten der Länge `dim`.

- init\_double()** initialisiert ein Array mit Double-Werten der Länge `dim`.
- init\_dmat()** initialisiert ein zweidimensionales Array (Matrix) `dim1` x `dim2` mit Double-Werten.
- copy\_double()** kopiert den Inhalt eines Double-Arrays in ein zweites Array der gleichen Länge `dim`.
- init\_param()** weist den Parametern des ökonomischen Modells in `struct ParamSet` die Standardwerte zu (vgl. Tabelle im Abschnitt 6.3).
- init\_iter()** weist den Iterationsparametern ihre Standardwerte zu (Zeitschritt  $h = 0.1$ , Abbruchkriterium  $\varepsilon = 0.01$ ). Die Diskontrate  $\delta$  bekommt den Wert des ersten Übergabeparameters beim Programmaufruf (siehe Abschnitt B.1).
- init\_control()** wählt anhand des Übergabeparameters  $\{410, 411, 412, 440, 441, 442\}$  die vordefinierten Grenzen der Kontrollwertebereiche  $A = [a_0, a_{q1}]$  und  $B = [b_0, b_{q2}]$ , berechnet äquidistant die diskreten Werte  $\{a_0, a_1, \dots, a_{q1}\}$  und  $\{b_0, b_1, \dots, b_{q2}\}$  und speichert sie in zwei Arrays.
- init\_payoff()** reserviert Speicher für Arrays mit den Spielwerten  $U, V, U_{p1}, U_{p2}, V_{p1}, V_{p2}$ .

### B.3.4 Funktionen des Algorithmus

**Gitter1d()** berechnet den globalen Index eines Gitterknotens.

*EINGABE:*     *i*, Nr. des Gitterintervalls;  
                   *j*, lokaler Index des Knotenpunktes;  
*RÜCKGABE:*    1, globaler Index des Knotenpunktes.

**Koordinaten1d()** berechnet die Koordinate eines Gitterknotens auf dem (eindimensionalen) Gebiet  $\Omega$ .

*EINGABE:*     *i*, globaler Index des Knotenpunktes;  
*RÜCKGABE:*    *x*[0], die berechnete Koordinate.

**FindeRechteckKoord1d()** berechnet den Intervallindex  $s$  zu einem Punkt  $x \in R_s \subset \Omega$  und die linearen Koordinaten  $\mu_0, \mu_1$  (s. Lemma 4.10), die zum Intervall  $R_s$  gehören und mit denen sich der Spielwert in  $x$  als Ergebnis einer affin-linearen Funktion bestimmen läßt.

*EINGABE:*     \**x*, die Koordinate eines Punktes  $x$ ;  
*RÜCKGABE:*    *s*, Index des Gitterintervalls, welches den Punkt  $x$  enthält; -1, wenn  $x$  außerhalb des Gitters liegt;  
                   \**koord*, 2-Array mit  $\mu_0, \mu_1$ , die zum Gitterintervall  $s$  gehören.



**Wert()** berechnet approximativ den Spielwert im Punkt  $x \in R_s \subset \Omega$  mittels einer affinen linearen Funktion  $w(x) = \mu_0(x)w(R_{s_0}) + \mu_1(x)w(R_{s_1})$  und der linearen Koordinaten  $\mu_0, \mu_1$  zum Intervall  $R_s$  (berechnet mit `FindeRechteckKoord1d()`).

*EINGABE:*     \***x**, die Koordinate eines Punktes  $x$ ;  
                   \***v**, Array mit den im voraus berechneten Spielwerten  $V$  bzw.  
                    $U$  für jeden Gitterknoten (ein Arrayelement von `struct vf`);

*RÜCKGABE:*   berechneter Spielwert in  $x$ ;  
                   **flag**==0, falls  $x$  im Gitter liegt; 1 sonst.

**rS()** die rechte Seite der Zustandsgleichung, aufgerufen im Euler-Verfahren.

*EINGABE:*     **x**, ein Punkt im Bereich  $\Omega$ ;  
                   **a,b**, ein Tupel der Kontrollwerte der beiden Spieler;

*RÜCKGABE:*   **y**, entspricht Funktionswert  $f(x, a, b) = a - b \cdot x$ .

**Euler()** das Euler-Verfahren.

*EINGABE:*     **x**, ein Punkt im Bereich  $\Omega$ ;  
                   **a,b**, ein Tupel der Kontrollwerte der beiden Spieler;  
                   **itr**, Struktur mit den Iterationsparametern;

*RÜCKGABE:*   **y**, entspricht  $f_h(x, a, b) = x + hf(x, a, b)$ .

**kGSV()** kontrolliertes Gauß-Seidel-Verfahren, berechnet für ein gegebenes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  die rechte Seite des Optimalitätsprinzips wahlweise mit Wertefunktion  $g, g_{p1}$  oder  $g_{p2}$ .

*EINGABE:*     **uplow**==0 (min-max-Wert wird berechnet) oder **uplow**==1  
                   (max-min-Wert);  
                   **i**, globaler Index des Gitterknotens;  
                   \***v**, Vektor der Wertefunktion (ein Arrayelement der Struktur  
                   **vf**);  
                   **a,b**, ein Tupel der Kontrollwerte der beiden Spieler;  
                   **f**, Wahlparameter für die in der Funktion verwendete Wertefunktion: **f**==0 für  $g$ , **f**==1 für  $g_{p1}$ , **f**==2 für  $g_{p2}$ ;  
                   **itr**, Struktur mit den Iterationsparametern;  
                   **param**, Struktur mit den Modellparametern;

*RÜCKGABE:*   berechneter Wert (rechte Seite des Optimalitätsprinzips);  
                   **flag**==0, falls der nächste iterierte Punkt  $y$  im Gitter liegt; 1  
                   sonst.

**gs()** das Gauß-Seidel-Verfahren, bestimmt in jedem Iterationsschritt für einen Gitterknoten den  $\min_{b \in B} \max_{a \in A}$ - bzw.  $\max_{a \in A} \min_{b \in B}$ -Wert.

*EINGABE:*    `uplow==0` (min-max-Wert wird berechnet) oder `uplow==1` (max-min-Wert);  
                  `i`, globaler Index des Gitterknotens;  
                  `vf`, Struktur mit den Spielwerten;  
                  `ctrl`, Struktur mit den Kontrollwerten;  
                  `itr`, Struktur mit den Iterationsparametern;  
                  `param`, Struktur mit den Modellparametern;

*RÜCKGABE:* `swert`, gefundener min-max/max-min-Wert (mit kombinierter Wertefunktion  $g$ );  
                  `swert_p1`, gefundener min-max/max-min-Wert (mit Wertefunktion des ersten Spielers  $g_{p1}$ );  
                  `swert_p2`, gefundener min-max/max-min-Wert (mit Wertefunktion des zweiten Spielers  $g_{p2}$ );  
                  `aopt, bopt`, das Tupel der Kontrollwerte, mit denen sich der gefundene min-max/max-min-Wert ergibt;  
                  1, falls ein  $x$  existiert, so dass für jedes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  der nächste Punkt  $y$  außerhalb des Gitters liegt;  
                  0 sonst.

**gs\_iter()** Gauß-Seidel-Iteration zur Berechnung des oberen und unteren Spielwertes  $V, U$ . Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis die neuen Spielwerte sich von den des letzten Iterationsschrittes in der Maximumnorm weniger als `itr.h*itr.delta*itr.eps` abweichen.

*EINGABE:*    `vf`, Struktur mit den Spielwerten;  
                  `ctrl`, Struktur mit den Kontrollwerten;  
                  `itr`, Struktur mit den Iterationsparametern;  
                  `param`, Struktur mit den Modellparametern;

*RÜCKGABE:* 1, falls ein  $x$  existiert, so dass für jedes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  der nächste Punkt  $y$  außerhalb des Gitters liegt;  
                  0 sonst.

**strategie\_iter()** Kombination der Gauß-Seidel-Iteration und der Strategie-Iteration zur Berechnung des oberen und unteren Spielwertes  $V, U$ . Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis die neuen Spielwerte sich von den des letzten Iterationsschrittes in der Maximumnorm weniger als `itr.h*itr.delta*itr.eps` abweichen. Die Funktion ist als eine experimentelle Implementierung des Verfahrens zu sehen, da die Konvergenz i.A. nicht immer gegeben ist.

*EINGABE:* `vf`, Struktur mit den Spielwerten;  
`ctrl`, Struktur mit den Kontrollwerten;  
`itr`, Struktur mit den Iterationsparametern;  
`param`, Struktur mit den Modellparametern;  
*RÜCKGABE:* 1, falls ein  $x$  existiert, so dass für jedes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  der nächste Punkt  $y$  außerhalb des Gitters liegt;  
0 sonst.

**uoptx()** bestimmt approximativ die optimalen Kontrollen  $a \in \{a_0, a_1, \dots, a_{q1}\}$  und  $b \in \{b_0, b_1, \dots, b_{q2}\}$  im Punkt  $x$ , mit denen sich ein min-max- bzw. max-min-Wert ergibt.

*EINGABE:* `uplow==0` (Trajektorie  $x_{up}(t)$  zum Spielwert  $V$  wird berechnet) oder `uplow==1` (Trajektorie  $x_{lo}(t)$  zum Spielwert  $U$ )  
`*v`, Array mit den im voraus für jeden Gitterpunkt berechneten Spielwerten  $V$  bzw.  $U$  (ein Arrayelement von `struct vf`);  
`x`, momentaner Trajektorienwert;  
`ctrl`, Struktur mit den Kontrollwerten;  
`itr`, Struktur mit den Iterationsparametern;  
`param`, Struktur mit den Modellparametern;  
*RÜCKGABE:* `aopt`, `bopt`, die optimalen Kontrollwerte;  
1, falls ein  $x$  existiert, so dass für jedes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  der nächste Punkt  $y$  außerhalb des Gitters liegt;  
0 sonst.

**trajopt()** berechnet approximativ die zeitdiskreten Trajektorien  $x_{up}$ ,  $x_{lo}$  und die Werte der numerischen Kontrollwertefunktionen  $a_{h,up}^x$ ,  $b_{h,up}^x$  und  $a_{h,lo}^x$ ,  $b_{h,lo}^x$ .

*EINGABE:*     **uplow==0** (Trajektorie  $x_{up}(t)$  zum Spielwert  $V$  wird berechnet) oder **uplow==1** (Trajektorie  $x_{lo}(t)$  zum Spielwert  $U$ )  
**\*v**, Array mit den im voraus für jeden Gitterpunkt berechneten Spielwerten  $V$  bzw.  $U$  (ein Arrayelement von **struct vf**);  
**ctrl**, Struktur mit den Kontrollwerten;  
**itr**, Struktur mit den Iterationsparametern;  
**param**, Struktur mit den Modellparametern;  
**x[0]**, Wert der Trajektorie zum Zeitpunkt 0;  
**M**, Anzahl der Zeitschritte;

*RÜCKGABE:*   **\*\*x**, Array mit Werten der Trajektorie zum Zeitpunkt  $hi$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ;  
**\*aopt**, **\*bopt**, Arrays der Länge  $M$  mit den optimalen Kontrollwerten zu den Zeitpunkten  $hi$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ;  
**gsum**, Summe der diskontierten Werte der Wertefunktion  $g$  entlang der Trajektorie  $x_{up}$  bzw.  $x_{lo}$  (zum Abgleich mit dem Spielwert  $V(x)$  bzw.  $U(x)$ );  
**1**, falls ein  $x$  existiert, so dass für jedes Tupel der Kontrollwerte  $(a, b)$  der nächste Punkt  $y$  außerhalb des Gitters liegt;  
**0** sonst.

### B.3.5 Funktionen des ökonomischen Modells

**g()** Kombinierte Wertefunktion  $g$ , auf deren Grundlage der min-max- bzw. der max-min-Wert in jeder Iteration berechnet wird,

**g\_p1()** Wertefunktion des ersten Spielers  $g_{p1}$ ,

**g\_p2()** Wertefunktion des zweiten Spielers  $g_{p2}$ .

Alle folgenden Funktionen werden in **g()**, **g\_p1()** oder **g\_p2()** aufgerufen.

**phi()** Strategieänderungskosten des ersten Spielers, vgl. (6.8)

**pi()** Strategieänderungskosten des zweiten Spielers, vgl. (6.9)

**mshare()** Marktanteil des ersten Spielers, vgl. (6.10)

**output()** Produktionsmenge des ersten bzw. zweiten Spielers (parameterabhängig), vgl. (6.0)

**cost()** Produktionskosten, vgl. (6.7)

**price()** Marktpreis, vgl. (6.2)

**demand()** Marktnachfrage, vgl. (6.1).

# Anhang C

## Inhalt der beiliegenden CD

Die dieser Arbeit beiliegende CD beinhaltet folgende Verzeichnisse mit Daten:

- /1\_Diplomarbeit  
enthält die Diplomarbeit als PDF-Datei *Diplomarbeit.pdf*
- /2\_Programmcode  
enthält den Quellcode des in dieser Arbeit verwendeten C++ Programms.
- /3\_Daten  
enthält die mit dem Programm generierten Datensätze.
- /4\_Plots  
enthält Plots der Datensätze im eps- und pdf-Format.
- /5\_Literatur  
enthält einen Teil der im Literaturverzeichnis aufgeführten Literatur, der in elektronischer Form verfügbar ist.



# Notation

Die Liste enthält einige wichtige Bezeichnungen, die in dieser Arbeit verwendet wurden, in der Reihenfolge des Auftretens.

$h$	Schrittweite des Kontrollsystems in diskreter Zeit
$x(t)$	Zustand des Kontrollsystems
$f(x, a, b)$	Dynamik des Kontrollsystems in kontinuierlicher Zeit
$f_h(x, a, b)$	Dynamik des Kontrollsystems in diskreter Zeit
$A$	Kontrollwertebereich des ersten Spielers
$B$	Kontrollwertebereich des zweiten Spielers
$a(t), b(t)$	Kontrollfunktion des ersten, zweiten Spielers in kontinuierlicher Zeit
$a_h(t), b_h(t)$	Kontrollfunktion des ersten, zweiten Spielers in diskreter Zeit
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	Raum der zulässigen Kontrollfunktionen des ersten, zweiten Spielers in kontinuierlicher Zeit
$\mathcal{A}_h, \mathcal{B}_h$	Raum der zulässigen Kontrollfunktionen des ersten, zweiten Spielers in diskreter Zeit
$\Phi(t, x_0, a, b)$	Lösung, Trajektorie des Kontrollsystems in kontinuierlicher Zeit zum Anfangswert $x_0$
$\Phi_h(t, x_0, a, b)$	Lösung, Trajektorie des Kontrollsystems in diskreter Zeit zum Anfangswert $x_0$
$\tilde{\Phi}_h(t, x_0, a, b)$	Lösung, Trajektorie des mit Hilfe des Euler-Verfahrens definierten zeitdiskreten Kontrollsystems
$B_R(x)$	offene Kugel mit Radius $R$ um den Punkt $x$
$L$	Lipschitz-Konstante
$g(x, a, b)$	Kosten- bzw. Ertragsfunktion
$\delta$	Diskontrate
$e^{-\delta t}$	Diskontfaktor in kontinuierlicher Zeit $t \geq 0$
$\sigma^i$	Diskontfaktor in diskreter Zeit, $i \in \mathbb{N}_0$ , $\sigma = 1 - \delta h$
$J(x, a, b)$	diskontiertes Funktional in kontinuierlicher Zeit
$J_h(x, a_h, b_h)$	diskontiertes Funktional in diskreter Zeit
$\alpha, \beta$	Strategie des ersten, zweiten Spielers in kontinuierlicher Zeit

$\alpha_h, \beta_h$	Strategie des ersten, zweiten Spielers in diskreter Zeit
$\Gamma, \Delta$	Menge der nicht-antizipierenden Strategien des ersten, zweiten Spielers in kontinuierlicher Zeit
$\Gamma_h, \Delta_h$	Menge der nicht-antizipierenden Strategien des ersten, zweiten Spielers in diskreter Zeit
$u(x), v(x)$	oberer, unterer Wert des dynamischen Spiels in kontinuierlicher Zeit
$u_h(x), v_h(x)$	oberer, unterer Wert des dynamischen Spiels in diskreter Zeit
$\gamma$	Exponent der Hölder-Stetigkeit von $u$ bzw. $v$
$\tilde{J}_h(x, a_h, b_h)$	diskontierstes Funktional des zeitdiskretisierten dynamischen Spiels
$\tilde{u}_h(x), \tilde{v}_h(x)$	oberer, unterer Wert des zeitdiskretisierten dynamischen Spiels vom Optimalitätsprinzip abgeleiteter iterativer Operator
$T_h$	mittels $T_h$ definierte iterative Funktionenfolge
$v_h^i$	kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}$ , auf der der Spielwert $v_h$ approximativ berechnet wird
$\Xi$	regelmäßiges, auf $\Omega$ definiertes Rechteck- (bzw. Intervall-)gitter
$R_i$	Rechteck (bzw. Intervall) von $\Xi$
$E_i$	Eckpunkt (bzw. Knotenpunkt) von $\Xi$
$\mathcal{W}$	Raum der stetigen, stückweise affin (bi-) linearen Funktionen auf $\Omega$ bzgl. $\Xi$
$\hat{v}_h$	im Raum $\mathcal{W}$ definierte, vollständig diskretisierte Approximation von $v_h$
$V_i^j$	im Eckpunkt $E_i$ ausgewertete iterative Folge $\hat{v}_h^j$
$\pi_{\mathcal{W}}q$	Projektion einer Funktion $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nach $\mathcal{W}$
$a^*, b^*$	Zustandsfeedback des ersten, zweiten Spielers
$a_h^x, b_h^x$	feedbackgestützte Kontrollfunktionen des ersten, zweiten Spielers
$\hat{a}_h^x, \hat{b}_h^x$	feedbackgestützte Kontrollfunktionen auf Gitter $\Xi$
$S(W)$	Iterationsoperator der sukzessiven Approximation
$\tilde{S}(W)$	Iterationsoperator der Gauß-Seidel- bzw. der Strategie-Iteration
$\eta_i$	lokaler a-posteriori Fehlerschätzer



# Literaturverzeichnis

- [1] M. BARDI AND I. CAPUZZO DOLCETTA, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [2] T. BAŞAR AND G.J. OLSDER, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2nd Edition, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [3] E.J. DOCKNER, S. JØRGENSEN, N.V. LONG, G. SORGER, *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] L.C. EVANS, P.E. SOUGANIDIS, *Differential games and representation formulas for Solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equations*, Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 773-797.
- [5] M. FALCONE, T. GIORGI, *An approximation scheme for evolutive Hamilton-Jacobi equations*, Stochastic analysis, control, optimization and applications, W.M. McEneaney, G. Yin, and Q. Zhang, eds., Birkhäuser, Boston, 1999, 288-303.
- [6] R.L.V. GONZÁLES AND M.M. TIDBALL, *On a discrete time approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming*, INRIA Rapports de Recherche Nr. 1375, 1991.
- [7] L. GRÜNE, *Numerik dynamischer Systeme*, Skript zu der Vorlesung, gehalten an der Universität Bayreuth im Wintersemester 2003/04.
- [8] L. GRÜNE, *Numerische Dynamik von Kontrollsystemen*, Skript zu der Vorlesung, gehalten an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2004.
- [9] L. GRÜNE, W. SEMMLER, *Using Dynamic Programming with Adaptive Grid Scheme for Optimal Control Problems in Economics*, Journal of Economic Dynamics and Control, vol.28: 2427-2456, 2004.
- [10] M. KATO, W. SEMMLER, *Dominant Firms, Barriers to Entry Capital and Antitrust Policy*, [http://newschool.edu/gf/cem/papers/wp/io/antitrust\\_050611.pdf](http://newschool.edu/gf/cem/papers/wp/io/antitrust_050611.pdf), 2005.
- [11] M. KATO, W. SEMMLER, *Differential Game between Dominant and Fringe Firms*, Preprint, 2005.
- [12] A. MELIKYAN, G.J. OLSDER, *Feedback Solution of a Non-Zero-Sum Game via Reduction to a Zero-Sum Game*, Preprint, 2005.

- [13] E.D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 1998.

# ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth, den 29. Mai 2007

.....  
Igor Kornienko