

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Modellierung und Analyse impulsiver Systeme mittels des Riemann-Stieltjes-Integrals

Diplomarbeit

von

Alexander Fick

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 24. Oktober 2010

Betreuung:
Prof. Dr. F. Lempio
Dr. R. Baier

Danksagung

Die vorliegende Diplomarbeit stellt für mich den Endpunkt meines Studiums der Technomathematik an der Universität Bayreuth dar. Deswegen möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei einigen Menschen zu bedanken, die mich durch diesen Lebensabschnitt begleitet haben.

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Frank Lempio. Durch seine Numerik-Vorlesungen hat er mein Interesse an diesem Teilgebiet der Mathematik geweckt und mir im Rahmen dieser Arbeit eine vertiefte Einarbeitung ermöglicht. Zudem hatte er auch immer ein offenes Ohr für die Belange der Studierenden, etwa in seiner Funktion als Prüfungsausschussvorsitzender.

Ein herzliches Dankeschön gilt auch Herrn Dr. Robert Baier. Er hat mich bei der Erstellung dieser Arbeit betreut und mir in vielen Gesprächen Denkanstöße und Hilfestellungen gegeben.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Professor Matthias Gerdts, der mir Rechenraten und Informationen zu einem Beispiel aus seiner Habilitation zur Verfügung gestellt hat.

Zuletzt möchte ich mich bedanken bei Josef, Monika, Tom, Steffi und Christina. Danke für alles!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
I Einleitung und Beispiele	1
1 Einleitung	2
2 Beispiele	4
2.1 Population einer Fischzucht	4
2.2 Gekoppeltes Masse-Feder-System	6
2.3 Hüpfender Ball	13
2.4 Wasserbehälter mit Abfluss	17
II Theoretische Analyse und Modellierung	21
3 Mathematische Hilfsmittel	22
3.1 Funktionen beschränkter Variation	22
3.2 Maße	29
3.3 Zusammenhang von Funktionen beschränkter Variation und Maßen	33
3.4 Vektorwertige Maße und Funktionen beschränkter Variation	37
3.5 Das Riemann-Stieltjes-Integral	39
4 Die allgemeine Systemgleichung	50
4.1 Formulierung	50
4.2 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen	54
4.3 Optimale Steuerung impulsiver Systeme	55

4.4	Beispielklassen	56
4.4.1	Impulsive Kontrolle	56
4.4.2	Trajektorienabhängige Impulse	58
4.4.3	Impulse mit Häufungspunkt	59
4.4.4	Optimale Steuerungsprobleme für nicht-impulsive Systeme mit Zustandsbeschränkungen	61
III	Numerische Analyse	64
5	Numerik von Riemann-Stieltjes Integralen	65
5.1	Quadraturverfahren	65
5.1.1	Riemann-Stieltjes-Summe	65
5.1.2	Geschlossene Newton-Cotes-Formeln	66
5.1.3	Trapezregel	67
5.1.4	Simpson-Regel	68
5.2	Konvergenzaussagen	69
5.2.1	Riemann-Stieltjes-Summe	69
5.2.2	Iterierte Trapezregel	73
5.3	Ausblick und weitere Literatur	76
6	Numerik impulsiver Integralgleichungen	77
6.1	Das Riemann-Stieltjes-Verfahren	78
6.2	Verallgemeinerung von Heun-Verfahren und Mittelpunktsregel	80
6.3	Weitere Verfahren	82
6.4	Numerische Analyse	82
6.4.1	Fehlernormen	83
6.4.2	Konvergenzanalyse	83
6.5	Beispiele	84
6.5.1	Fischpopulation	84
6.5.2	Hüpfender Ball	93
6.5.3	Verwendung der linearen Interpolierenden	112
6.6	Besonderheiten bei Implementierung und numerischer Analyse	118
7	Schlusswort und Ausblick	120
A	Daten auf der beiliegenden CD	121
A.1	Verzeichnisse	121
A.2	Programmpaket für impulsive Systeme	121
	Literaturverzeichnis	130

Abbildungsverzeichnis

2.1	Fischpopulation: Schematische Darstellung	4
2.2	Fischpopulation: Impulsives Wachstum	6
2.3	Masse-Feder-System: Ausgangssituation	7
2.4	Masse-Feder-System: Kontaktphase	9
2.5	Masse-Feder-System: Lösung für endliche D	11
2.6	Masse-Feder-System: Lösung für den Grenzfall $D = \infty$	13
2.7	Hüpfender Ball: Modell	14
2.8	Hüpfender Ball: Lösung	16
2.9	Wasserbehälter mit Abfluss: Modell	17
2.10	Wasserbehälter mit Abfluss: Optimale Zustände und Steuerungen	19
2.11	Wasserbehälter mit Abfluss: Adjungierte und Multiplikatoren	20
3.1	Funktionen beschränkter Variation: Unstetigkeitsfälle	26
3.2	Riemann-Stieltjes-Integral: Sprungfunktion	42
3.3	Riemann-Stieltjes-Integral: Balken mit stetigen und punktförmigen Massen	46
3.4	Riemann-Stieltjes-Integral: Massenverteilung eines Balkens mit stetigen und punktförmigen Massen	46
3.5	Riemann-Stieltjes-Integral: Statisches Moment eines Balkens mit stetigen und punktförmigen Massen	49
5.1	Numerik von Riemann-Stieltjes-Integralen: Herleitung der allgemeinen Newton-Cotes-Formel	67
6.1	Fischpopulation: Numerische Approximation	88
6.2	Fischpopulation: Konvergenzanalyse und Ausgleichsgerade	90
6.3	Hüpfender Ball: Numerische Approximation von $x_1(t)$	98
6.4	Hüpfender Ball: Numerische Approximation von $x_2(t)$	102
6.5	Hüpfender Ball: Sprünge in analytischer und numerischer Lösung	103
6.6	Hüpfender Ball: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für huepf_ball_1.m	108
6.7	Hüpfender Ball: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für huepf_ball_4.m	109
6.8	Hüpfender Ball: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für große N	111
6.9	Hüpfender Ball: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse bei Verwendung der linearen Interpolierenden in huepf_3_linear_Interpol.m	114

6.10 Hüpfender Ball: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse bei Verwendung der linearen Interpolierenden in <code>huepf_4_linear_Interpol.m</code>	115
A.1 Numerik impulsiver Systeme: Programmpaket für impulsive Systeme auf der beiliegenden CD	122

Tabellenverzeichnis

6.1	Numerische Verfahren: Abkürzungen	84
6.2	Fischkultur: Modellierungen	85
6.3	Fehler für fischkultur_2.m mit solve_rs_def.m	89
6.4	Konvergenzanalyse für fischkultur_2.m mit solve_rs_def.m	89
6.5	Fehler für fischkultur_1.m mit solve_rs_def.m	91
6.6	Fehler für fischkultur_3.m mit solve_rs_def.m	91
6.7	Fehler für fischkultur_4.m mit solve_rs_def.m	92
6.8	Konvergenzanalyse für fischkultur_1.m mit solve_rs_def.m	92
6.9	Konvergenzanalyse für fischkultur_3.m mit solve_rs_def.m	92
6.10	Konvergenzanalyse für fischkultur_4.m mit solve_rs_def.m	92
6.11	Hüpfender Ball: Modellierungen	93
6.12	Fehler für huepf_ball_1.m mit solve_rs_def.m	105
6.13	Fehler für huepf_ball_2.m mit solve_rs_def.m	105
6.14	Fehler für huepf_ball_3.m mit solve_rs_def.m	106
6.15	Fehler für huepf_ball_4.m mit solve_rs_def.m	106
6.16	Konvergenzanalyse für huepf_ball_1.m mit solve_rs_def.m	107
6.17	Konvergenzanalyse für huepf_ball_2.m mit solve_rs_def.m	107
6.18	Konvergenzanalyse für huepf_ball_3.m mit solve_rs_def.m	107
6.19	Konvergenzanalyse für huepf_ball_4.m mit solve_rs_def.m	107
6.20	Fehler für huepf_ball_1.m mit solve_rs_def.m für große N	110
6.21	Konvergenzanalyse für huepf_ball_1.m mit solve_rs_def.m für große N	110
6.22	Lineare Interpolierende: Modellierungen	112
6.23	Fehler für fischkultur_3_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	113
6.24	Konvergenzanalyse für fischkultur_3_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	113
6.25	Fehler für huepf_ball_3_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	116
6.26	Konvergenzanalyse für huepf_ball_3_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	116
6.27	Fehler für huepf_ball_4_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	117
6.28	Konvergenzanalyse für huepf_ball_4_linear_Interpol.m mit solve_rs_def_linear_Interpol.m	117

Teil I

Einleitung und Beispiele

Kapitel 1

Einleitung

im|pul|siv <Adj.> [zu *Impuls*]: *aus einem plötzlichen, augenblicklichen Impuls heraus handelnd, einer Eingebung sogleich folgend*

Diese Bedeutung ordnet der Duden [34] dem Wort "*impulsiv*" zu. Und obwohl diese Beschreibung leicht verständlich ist und den Begriff in einfachen Worten erklärt, so verdeutlicht sie doch auch die Eigenschaften, die man in der Mathematik und den Anwendungen mit diesem Ausdruck verbindet. *Impulsive Systeme* beschreiben Prozesse, die extrem schnellen Veränderungen und plötzlich auftretenden Einflüssen in den Zustandsvariablen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ unterliegen. Deswegen ist deren Glattheit nicht zu allen Zeitpunkten t gegeben, sodass sie in den sogenannten Sprungpunkten t_k einen sprunghaften und unstetigen Verlauf zeigen. Umgangssprachlich sind also impulsive Systeme nichts anderes als sprunghafte Systeme.

Für impulsive Systeme gibt es eine Vielzahl von Anwendungsgebieten in der Kontrolltheorie, der Populationsforschung, den Ingenieurwissenschaften, der Mechanik, der Elektrotechnik oder auch den Wirtschaftswissenschaften. Deswegen ist es nicht verwunderlich, dass diese Systeme Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten sind und es derzeit eine Vielzahl verschiedener Ansätze für ihre Modellierung gibt. Daher werden in der vorliegenden Arbeit einerseits theoretische Grundlagen für einen dieser Zugänge bereitgestellt, andererseits mit Hilfe dieser Theorie numerische Untersuchungen erfolgen. Auf lange Sicht sollen damit Probleme der optimalen Steuerung gelöst werden, insbesondere die hier, infolge des Maximumprinzips, auftauchende adjungierte Gleichung, die genau ein solches impulsives System darstellt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich hierzu in drei Teile. Zum Teil I gehört einerseits das aktuelle Kapitel 1, welches dem Leser eine anschauliche Vorstellung impulsiver Systeme und die Gliederung dieser Arbeit näherbringt. In Kapitel 2 werden auf einfache Weise einige Beispiele modelliert, die verdeutlichen, dass impulsive Systeme in völlig alltäglichen Anwendungen vorkommen und zum Teil auf ganz natürliche Weise auftreten.

Im Teil II erfolgt dann die theoretische Analyse impulsiver Systeme. Dazu werden im Kapitel 3 einige mathematische Hilfsmittel wie etwa Funktionen beschränkter Variation, Maße und das Riemann-Stieltjes-Integral bereitgestellt. Dabei zeigt sich eine interessante Beziehung zwischen speziellen Funktionen beschränkter Variation und regulären Borel-Maßen, die auch eine eindeutige dreiteilige Dekomposition dieser beiden Formalismen beinhaltet. In diesem Kapitel werden dabei teilweise mehr Resultate als später benötigt zusammengestellt, um dem Leser einen vollständigeren theoretischen Überblick zu verschaffen. Im Anschluss daran wird in Kapitel 4 eine allgemeine Formulierung für impulsive Systeme in Form einer Integralgleichung eingeführt. Diese ist dabei nur der Versuch einer allgemeinen Darstellung impulsiver Systeme, die Prüfung ihrer mathematischen Allgemeingültigkeit und Verwendbarkeit kann daher das Ziel weiterer Untersuchungen sein. Danach werden die Beispiele aus Kapitel 2 im Rahmen dieser neuen Darstellung modelliert.

Zum Schluss der Arbeit werden in Teil III impulsive Systeme einer numerischen Analyse unterzogen. Die Basis dafür wird in Kapitel 5 bereitgestellt, in welchem numerische Approximationsmöglichkeiten für Riemann-Stieltjes-Integrale vorgestellt werden. Darauf aufbauend werden in Kapitel 6 numerische Lösungsverfahren für impulsive Integralgleichungen entwickelt, welche an bereits bekannten Einschrittverfahren wie dem Eulerschen Polygonzugverfahren angelehnt sind. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einer detaillierten numerischen Untersuchung einiger Beispiele aus Kapitel 2. Die in diesem Kapitel vorgestellte Numerik ist allerdings heuristisch und vor allem in den positiven Ergebnissen der Beispielanalyse motiviert. Insbesondere wird keine theoretische Grundlage für die Diskretisierung impulsiver Systeme bereitgestellt.

Im darauffolgenden Anhang A.1 wird zunächst der Inhalt der beiliegenden CD vorgestellt. Der wichtigste Bestandteil dabei ist das neu implementierte Programmpaket zur Lösung impulsiver Systeme inklusive einer umfangreichen Programmbibliothek. Dazu gehören etwa die Umsetzungen der Lösungsverfahren für impulsive Integralgleichungen aus Kapitel 6 sowie einige Werkzeuge zur numerischen Analyse. Außerdem sind sämtliche Modellierungen aus dem Kapitel 6.5 und in den weiteren Unterordnern Plots und Tabellen aus deren numerischer Untersuchung abgespeichert. Zudem ist eine *pdf*-Version dieser Arbeit beigefügt. Im Anhang A.2 wird dann die Handhabung des Programmpakets hinsichtlich der Einbindung spezifischer Problemdaten als auch der Programmbibliothek erklärt.

Kapitel 2

Beispiele

Um den Einstieg in die Theorie der impulsiven Systeme zu motivieren, sollen in diesem Kapitel einige Anwendungen aus dem täglichen Leben vorgestellt werden. Dabei treten die Impulse teilweise ganz natürlich auf und eine Modellierung der Beispiele wäre ohne sie gar nicht möglich.

2.1 Population einer Fischzucht

Das erste Beispiel, das wir betrachten, entstammt dem Buch [22, Kap. 1.4] und behandelt die Population einer Fischzucht, bei der zum Zeitpunkt t_0 eine bestimmte Menge x_0 an Fischen in einem Bassin vorhanden ist. Nun sei $M \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Durch Abfischen des Bestandes zu Zeitpunkten $t_k, k = 1, \dots, M$, zu denen ein vorgegebener Prozentsatz a_k an Fischen aus dem Becken entnommen wird, ändert sich sprunghaft die Anzahl der verbleibenden Fische (vgl. Abbildung 2.1). Der Bestand nach dem Abfischen berechnet sich

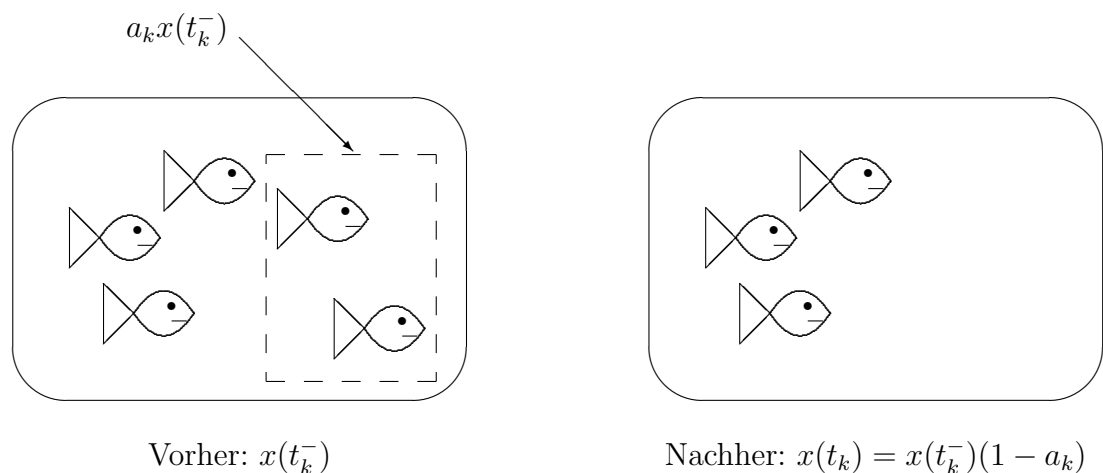


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Abfischung.

dann zu

$$x(t_k) = x(t_k^-) - a_k x(t_k^-) = x(t_k^-)(1 - a_k). \quad (2.1)$$

Das Wachstum $\dot{x}(t)$ der Population sei bezüglich der Wachstumsrate C proportional zum Bestand $x(t)$. Damit ergibt sich die folgende Modellierung der Fischpopulation:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Cx(\tau)d\tau, \text{ für } t \neq t_k \quad (2.2)$$

mit

$$\begin{aligned} C &\in \mathbb{R}^+ && (\text{Wachstumsrate}), \\ t_0 &\in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^+ && (\text{Anfangspopulation zur Zeit } t_0), \\ M &\in \mathbb{N}, k = 1, \dots, M, && \\ t_k &\in \mathbb{R}, t_0 < t_k < t_{k+1} && (\text{Abfischzeitpunkte}), \\ a_k &\in [0, 1) && (\text{Abfischquote}), \\ x(t_k) &= x(t_k^-)(1 - a_k) && (\text{Sprungbedingung bei } t = t_k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das vorliegende Problem ist eine lineare Integralgleichung, bei der nur die gesuchte Funktion selber, jedoch keine Ableitungen auf der rechten Seite vorkommen. Die allgemeine Lösungsformel für solche Gleichungen findet sich in [3, Kap. 3.2], [27, Kap. 2.2] beziehungsweise [37, Kap. 1.6]. Diese Formel lässt sich jedoch auch ganz intuitiv herleiten. Man berechne dazu $x(t)$ bis zum ersten Sprungzeitpunkt t_1 , was dem Lösen eines klassischen Systems entspricht. Unter Zuhilfenahme von (2.1) erhält man daraus den Wert der Trajektorie kurz nach dem Sprung und beginnt mit diesem Startwert die Systemgleichung erneut zu lösen. Dabei kann man bis zum nächsten Sprungzeitpunkt so tun, wie wenn das System bisher keinem Impuls ausgesetzt war und erneut klassisch lösen. Dieses Vorgehen lässt sich iterieren und durch Zusammensetzen der einzelnen Teile erhält man schließlich die in der Literatur zu findende Lösungsformel. Damit ergibt sich durch kurze Rechnung

$$x(t) = x_0 e^{C(t-t_0)} \prod_{j=1}^k (1 - a_j), \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (2.4)$$

als Lösung dieses Systems. Der zeitliche Verlauf des Bestandes der Population ist in Abbildung 2.2 beispielhaft dargestellt. Dabei wurde $t_k := k$ mit $M = 9$ sowie $t_0 = 0, x_0 = 10, C = 0.5$ gewählt.

Bemerkung 2.1. *Durch unsere Rechnung kommen wir auf eine andere Lösung für dieses Problem als die Autoren in [22, Kap. 1.4]. Dort taucht nämlich der Produktterm in der Form*

$$\prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - a_j}$$

auf. Da sich allerdings unsere Lösung (2.4) bei der späteren numerischen Analyse bewährt hat, gehen wir von ihrer Richtigkeit aus.

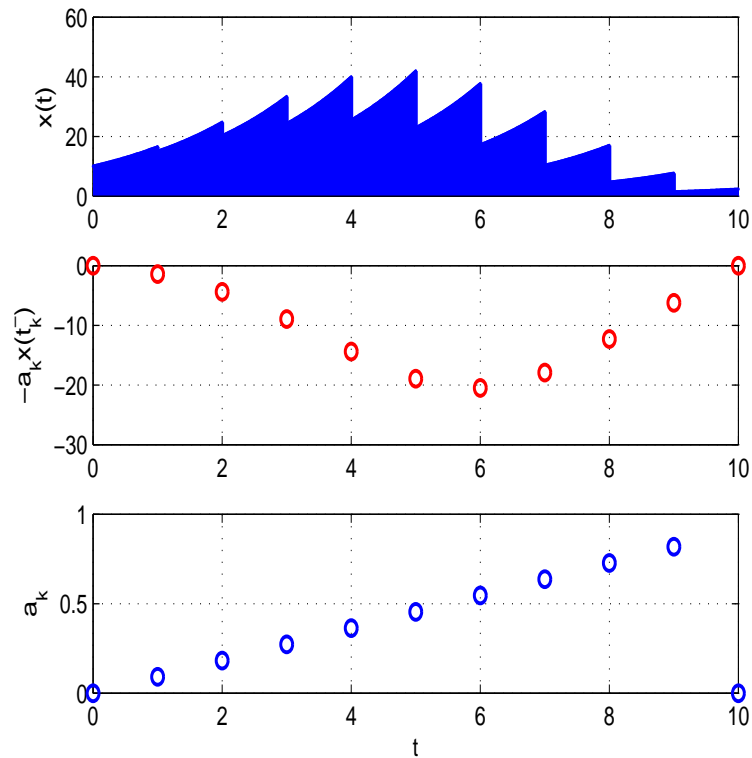


Abbildung 2.2: Impulsives Wachstum einer Fischpopulation.

Bemerkung 2.2. Man betrachte eine Population wie oben, die aber unbeeinflusst, das heißt ohne zwischenzeitliches Abfischen, wächst. In diesem Fall ist keine Sprungbedingung zu beachten und man erhält als Lösung die stetige Trajektorie

$$x(t) = x_0 e^{C(t-t_0)}, \quad t_0 \leq t.$$

Insofern ist die klassische Wachstumsmodellierung kein Spezialfall, sondern vollständig in eine größere Problemklasse eingebettet.

2.2 Gekoppeltes Masse-Feder-System

In diesem Kapitel betrachten wir das Masse-Feder-System aus [5, Kap. 2.1.1], bestehend aus einem Klotz der Masse m , der sich reibungsfrei auf einem Untergrund bewegen kann, und einer Feder der Länge l_D mit Federhärte D (vgl. Abbildung 2.3). Mit $x_1(t)$ bezeichnen wir die Position der vorderen Kante des Klotzes und mit $x_2(t)$ seine Geschwindigkeit. Er bewegt sich vom Startpunkt $x_1(t_0) = x_0$ mit einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit $x_2(t_0) = \dot{x}_0$ auf eine Wand zu, an der die vorne angebrachte Feder gestaucht, seine kinetische Energie in potentielle Energie der Feder und zurück gewandelt wird, die Feder sich wieder entspannt

und er in entgegengesetzter Richtung zurückbeschleunigt wird. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass für $x_1(t) = 0$ die Feder die Wand gerade berührt. Das Ziel ist schließlich, die Federhärte sehr groß werden zu lassen, also den Grenzfall $D \rightarrow \infty$ zu betrachten. Insofern approximiert man ein impulsives System (harter Stoß) durch eine Folge stetiger Systeme (elastische Stöße).

Zunächst wollen wir aber die Lösung des Systems für endliche D analysieren. Wir zerlegen dazu das Problem in drei Teile, indem wir das System vor, während und nach dem Wandkontakt betrachten und diese Teilprobleme sukzessive lösen. Die Dynamik wird dabei durch das zweite Newtonsche Axiom beschrieben, also über den Zusammenhang von Kraft mit Masse und Beschleunigung.

Anlaufphase ($t_0 \leq t < t_1$):

Wir betrachten zunächst das System ab dem Startzeitpunkt t_0 bis zur Kollision mit der Wand zur Zeit t_1 . Dann gilt

$$\begin{aligned} m\dot{x}_2(t) &= 0, \\ x_1(t_0) &= x_0, \\ x_2(t_0) &= \dot{x}_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit den beiden Zustandsbeschränkungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leq l_D && (\text{keine Wanddurchdringung}), \\ \dot{x}_0 &\geq 0 && (\text{Bewegung in Richtung Wand}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit der Federlänge l_D . Äquivalent dazu ist mit den Anfangsbedingungen aus (2.5) das System

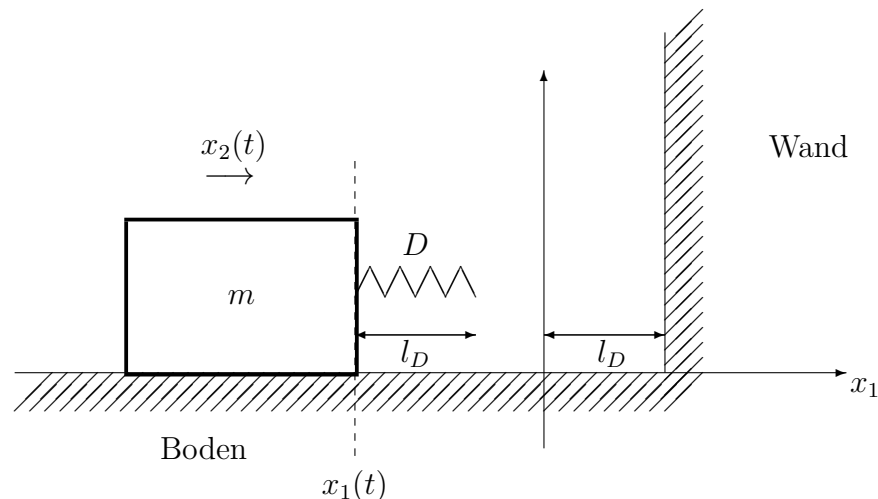


Abbildung 2.3: Ausgangssituation.

von Integralgleichungen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau, \\x_2(t) &= \dot{x}_0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x}_0 d\tau \\&= x_0 + \dot{x}_0(t - t_0)\end{aligned}\tag{2.8}$$

In der Modellierung wurde angenommen, dass der Zusammenstoß zur Zeit t_1 sich im Koordinatenursprung ereignet, also ist

$$\begin{aligned}0 &= x_1(t_1) \\&= x_0 + \dot{x}_0(t_1 - t_0) \\ \Rightarrow t_1 &= -\frac{x_0}{\dot{x}_0} + t_0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

d.h. der Kollisionszeitpunkt t_1 ist alleine durch die Vorgaben für t_0, x_0, \dot{x}_0 bestimmt. Dies ergibt sich aber erst beim konkreten Berechnen der Lösung. Insofern ist t_1 trotzdem trajektorienabhängig.

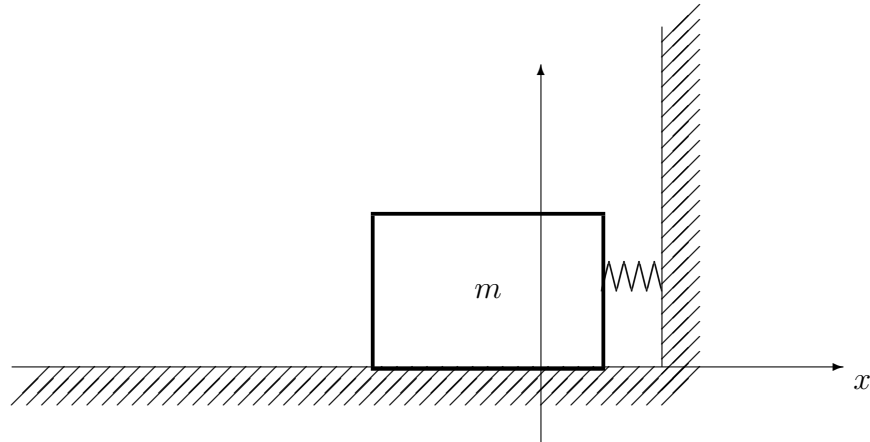
Kontaktphase ($t_1 \leq t < \hat{t}$):

Nun können wir die Lösung des Systems für $t_1 \leq t < \hat{t}$ berechnen, wobei \hat{t} den Zeitpunkt definiert, zu dem sich die Feder vollständig entspannt hat und gerade noch in Kontakt mit der Wand steht. Die Systemgleichung für diese Phase lautet

$$\begin{aligned}m\dot{x}_2(t) &= D(x_1(t_1) - x_1(t)), \\x_1(t_1) &= 0, \\x_2(t_1) &= \lim_{t \nearrow t_1} x_2(t) = \dot{x}_0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

wobei nach wie vor (2.6) zu beachten ist. Die Anfangsbedingung für den Ort setzt man sofort ein und erhält durch Umformungen wie schon im ersten Schritt die Integralgleichungen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0 + \int_{t_1}^t x_2(\tau) d\tau, \\x_2(t) &= \dot{x}_0 + \int_{t_1}^t \underbrace{\dot{x}_2(\tau)}_{\stackrel{(2.10)}{=} -\frac{D}{m}x_1(t)}} d\tau.\end{aligned}$$

Abbildung 2.4: Kontaktphase bei $t_1 \leq t < \hat{t}$.

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{D}} \sin \left(\sqrt{\frac{D}{m}} (t - t_1) \right), \\ x_2(t) &= \dot{x}_0 \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} (t - t_1) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

die zugehörige Lösung. Nun müssen wir den wiederum trajektorienabhängigen Zeitpunkt \hat{t} des LoslöSENS von der Wand ermitteln. Die entsprechende Bedingung lautet

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \min_{t > t_1} \{t | x(t) = 0\} \\ &= t_1 + \sqrt{\frac{m}{D}} \pi \\ &= -\frac{x_0}{\dot{x}_0} + t_0 + \sqrt{\frac{m}{D}} \pi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Damit können wir schließlich den letzten Teil unserer Lösung berechnen.

Entfernungsphase ($\hat{t} \leq t$):

Nachdem sich die Feder völlig entspannt hat, Klotz und Feder also gerade noch mit der Wand in Berührung stehen, hat die Systemgleichung folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_2(t) &= 0, \\ x_1(\hat{t}) &= 0, \\ x_2(\hat{t}) &= \lim_{t \nearrow \hat{t}} \left[\dot{x}_0 \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} (t - t_1) \right) \right] = -\dot{x}_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wiederum wendet man Umformungen analog zur Anlaufphase an und berechnet damit

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\dot{x}_0, \\ x_1(t) &= -\dot{x}_0(t - \hat{t}) \\ &= -x_0 - \dot{x}_0(t - t_0) + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{D}}\pi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

□

Die gesamte Lösung ergibt sich nun durch Zusammenfassung von (2.7),(2.8),(2.11) und (2.14). Für die Ortskomponente erhält man

$$x_1(t) = \begin{cases} x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) & , t_0 \leq t < t_1 \\ \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_1)\right) & , t_1 \leq t < \hat{t} \\ -x_0 - \dot{x}_0(t - t_0) + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{D}}\pi & , \hat{t} \leq t \end{cases} \quad (2.15)$$

und für die Geschwindigkeit

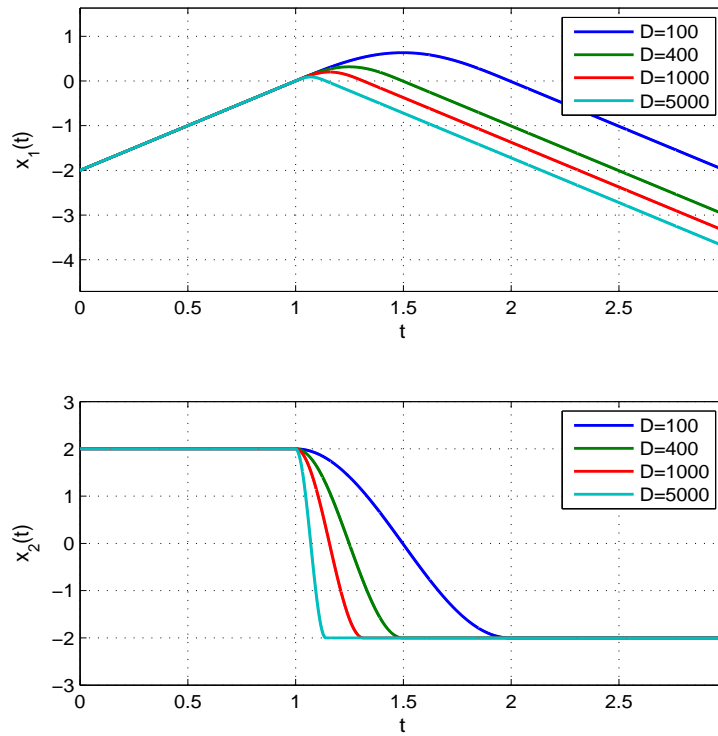
$$x_2(t) = \begin{cases} \dot{x}_0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ \dot{x}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_1)\right) & , t_1 \leq t < \hat{t} \\ -\dot{x}_0 & , \hat{t} \leq t. \end{cases} \quad (2.16)$$

Für endliche D gilt zudem

$$\begin{aligned} x_2(\hat{t}^-) - x_2(t_1^+) &= \lim_{t \nearrow \hat{t}} x_2(t) - x_2(t_1) \\ &= \lim_{t \nearrow \hat{t}} \left\{ \dot{x}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_1)\right) \right\} - \dot{x}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}(t_1 - t_1)\right) \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \dot{x}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{\frac{m}{D}}\pi\right) - \dot{x}_0 \cos(0) = -2\dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

d.h. $x_2(t)$ muss, unabhängig von D , im Intervall $[t_1, \hat{t}[$ seinen Wert um $-2\dot{x}_0$ ändern. Einige Trajektorien für verschiedene Werte von D sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Dabei wurden die Parameter $m = 10$, $x_0 = -2$, $\dot{x}_0 = 2$ und $t_0 = 0$ verwendet.

Bemerkung 2.3. Die beiden Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind glatte Funktionen, da ihre jeweiligen, abschnittsweise definierten Teile stetig differenzierbar zusammengesetzt werden können, und das für alle D .

Abbildung 2.5: Lösung für endliche D .

Außerdem sollte man sich der Einfachheit des Modells bewusst sein, da keine Verlustkräfte in Form von Reibung, Luftwiderstand oder Ähnlichem beachtet werden.

□

Grenzfall ($D \rightarrow \infty$):

Nun wollen wir die Federhärte unendlich groß werden lassen, um damit einen harten impulsiven Zusammenstoß von Masse und Wand zu modellieren. Dabei nutzen wir unsere Berechnungen für endliche D von oben, wobei insbesondere t_1 nicht von D abhängt. Weiterhin gilt

$$\hat{t} = t_1 + \sqrt{\frac{m}{D}} \pi \xrightarrow{D \rightarrow \infty} t_1, \quad (2.18)$$

demnach wird die Zeitdauer des Kontaktes zwischen Masse bzw. Feder und Wand umso kürzer, je härter die Feder ist. Wegen (2.17) führt das im Grenzfall $D \rightarrow \infty$ zu einem Sprung, also einem Impuls, der Höhe $-2\dot{x}_0$ zum Zeitpunkt t_1 , dem die Geschwindigkeitstrajektorie unterworfen ist. Daraus ergibt sich die Sprungbedingung

$$x_2(t_1) = x_2(t_1^-) - 2\dot{x}_0. \quad (2.19)$$

Bemerkung 2.4. *Im Prinzip ist die Sprungbedingung in diesem Beispiel eine Geschwindigkeitsumkehr und lautet ganz allgemein*

$$x_2(t_1) = -x_2(t_1^-). \quad (2.20)$$

Diesen Fall werden wir hier nicht weiter verfolgen und stattdessen die bereits analytisch berechnete Sprunghöhe $-2\dot{x}_0$ verwenden.

Damit modelliert das folgende System den elastischen Stoß von Masse und Wand im Grenzfall $D \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau, \\ x_2(t) &= x_2^0, \end{aligned} \quad \text{für } t \neq t_1 \quad (2.21)$$

mit

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_0, \\ x_2(t_0) &= \dot{x}_0, \\ x_2(t_1) &= x_2(t_1^-) - 2\dot{x}_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die Gleichung für $x_2(t)$ lässt sich durch Einsetzen von Anfangswert und Sprungbedingung lösen.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \dot{x}_0 - 2\dot{x}_0 \begin{cases} 0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ 1 & , t_1 \leq t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dot{x}_0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ -\dot{x}_0 & , t_1 \leq t. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

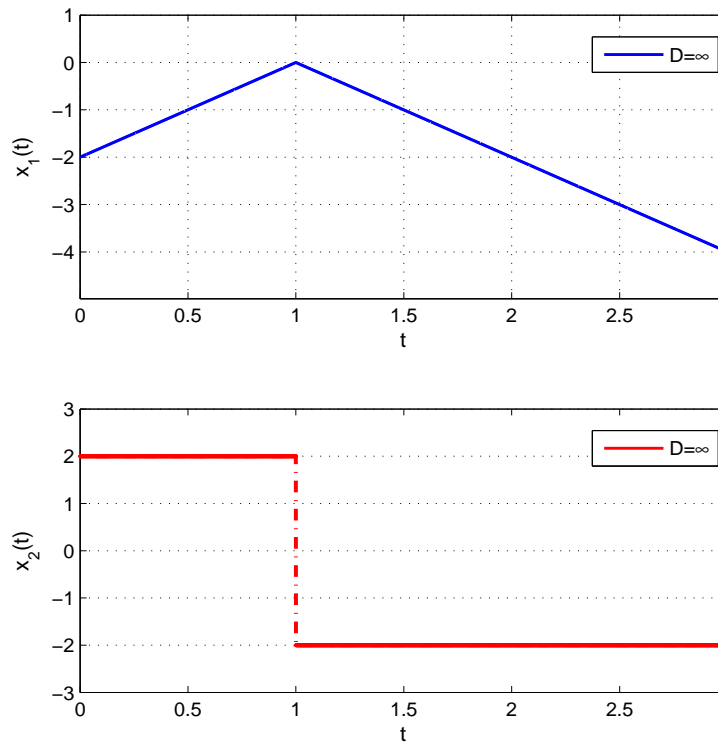
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1(t) &\stackrel{x_1(t_1)=x_0}{=} x_0 + \begin{cases} \int_{t_0}^t \dot{x}_0 d\tau & , t_0 \leq t < t_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_0 d\tau + \int_{t_1}^t (-\dot{x}_0) d\tau & , t_1 \leq t \end{cases} \\ &= x_0 - \dot{x}_0 t_0 + \begin{cases} \dot{x}_0 t & , t_0 \leq t < t_1 \\ -\dot{x}_0 t + 2\dot{x}_0 t_1 & , t_1 \leq t. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Zeitpunkt t_1 bleibt gegenüber den Systemen für endliche D unverändert. Oben eingesetzt ergibt sich damit

$$x_1(t) = \begin{cases} x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) & , t_0 \leq t < t_1, \\ -x_0 - \dot{x}_0(t - t_0) & , t_1 \leq t. \end{cases} \quad (2.24)$$

Abbildung 2.6 zeigt den Verlauf der Lösung des harten Stoßes für $x_0 = -2$, $\dot{x}_0 = 2$ und $t_0 = 0$ und insbesondere den Sprung der Geschwindigkeitstrajektorie im Zeitpunkt t_1 .

Abbildung 2.6: Masse-Feder-System für $D = \infty$.

Bemerkung 2.5. *Dieses Beispiel zeigt zum Einen, dass ein Impuls nicht immer von vornherein bekannt sein muss. Vielmehr ergeben sich Auftrittszeitpunkt und Sprunghöhe erst durch Berechnung der Lösung, der Impuls hängt somit von der Lösung selber ab. Zum Anderen ist dieses impulsive System als Grenzwert einer Folge glatter Systeme interpretierbar. Dies motiviert, zur Lösung impulsiver Problemstellungen glatte approximierende Probleme zu betrachten und auf hierfür verfügbare Numerik zurückzugreifen.*

□

2.3 Hüpfender Ball

Unser nächstes Beispiel findet sich unter anderem in [38, Introduction] und [1, Kap. 1.4] und behandelt einen Ball, der lediglich unter Einfluss der Schwerkraft auf einer Tischplatte auf und ab hüpft (vgl. Abbildung 2.7). Der Impuls ist dabei gerade die Umkehr von Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufprallens auf den Tisch. Deformationen des Balles werden hierbei nicht explizit modelliert, sondern innerhalb einer Sprungbedingung verarbeitet.

Interessant für uns ist die Höhe des Balles über der Tischplatte und seine Geschwindigkeit.

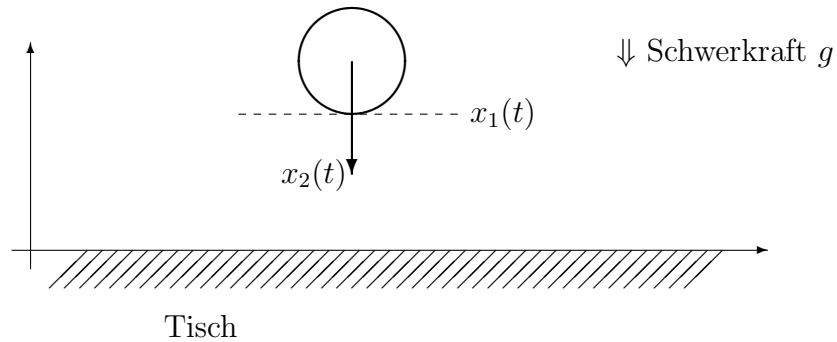


Abbildung 2.7: Modell des hüpfenden Balles.

Dazu beschreibe $x_1(t)$ das untere Ende des Balles, welches auf dem Tisch aufprallt. Mit $x_2(t)$ bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Balles, nach oben gerichtet positiv. Weiterhin definieren wir $x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Die Bewegungsgleichungen schreiben sich auch hier wieder sehr einfach:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

mit den Anfangswerten

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

und der Sprungbedingung

$$x_2(t_k) = -\mu x_2(t_k^-), \text{ falls } x_1(t_k^-) = 0 \text{ und } x_2(t_k^-) \leq 0 \quad (2.27)$$

zum Zeitpunkt $t_k, k \in \mathbb{N}$ des Auftreffens auf dem Tisch. Dadurch wird erreicht, dass der Geschwindigkeitsvektor nach dem Aufprall seine Richtung umkehrt und gleichzeitig noch sein Betrag um den Faktor $0 \leq \mu < 1$ geändert wird. Dieser modelliert gerade die Energieverluste durch Deformation während des Kontaktes mit dem Tisch. Es ist auch möglich, wie in [38], den Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit genau auf der Tischplatte starten zu lassen. Da so eine Vorgabe in der Realität aber eher schwer herzustellen ist, soll der Ball bei uns auf einer Anfangshöhe von x_1^0 gehalten und dann fallen gelassen werden.

Die Lösung dieses Problems geschieht nun wieder stückweise. Wir starten mit den Anfangswerten und berechnen $x_1(t)$ sowie $x_2(t)$ bis zum ersten Aufprallzeitpunkt t_1 . Durch (2.27) erhalten wir damit neue Anfangsbedingungen, mit denen wir erneut die Bewegungsgleichung lösen. Durch anschließende Anwendung von vollständiger Induktion lassen sich folgende Aussagen beweisen:

(i) Die Lösung bis zum 1. Sprung in $t = t_1$ ist

$$\begin{aligned}x_2(t) &= gt_0 - gt, \\x_1(t) &= \left(x_1^0 - \frac{1}{2}gt_0^2\right) + gt_0t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

mit

$$t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{2x_1^0}{g}}. \quad (2.28)$$

(ii) Die Sprungzeitpunkte $t_k, k \geq 1$ berechnen sich zu

$$t_k = t_0 + \sqrt{\frac{2x_1^0}{g}} \left(1 + 2\mu \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu}\right). \quad (2.29)$$

Da $0 \leq \mu < 1$ gilt, haben die Zeiten t_k zudem einen Häufungspunkt in

$$\tilde{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 + \sqrt{\frac{2x_1^0}{g}} \left(1 + 2\mu \frac{1}{1 - \mu}\right). \quad (2.30)$$

(iii) Wir definieren als Abkürzung zunächst $\nu_k := (1 + 2\mu + \dots + 2\mu^{k-1} + \mu^k)$ für $k \geq 1$. Es gelte dabei insbesondere $\nu_1 = 1 + \mu$. Die Lösung für $t_k \leq t < t_{k+1}, k \geq 1$ lautet dann

$$\begin{aligned}x_2^k(t) &= + \left[\nu_k \sqrt{2x_1^0 g + gt_0} \right] - gt, \\x_1^k(t) &= - \left[x_1^0 \left(1 + 2\mu \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu}\right) \left(1 + 2\mu \frac{1 - \mu^k}{1 - \mu}\right) + t_0 \nu_k \sqrt{2x_1^0 g + \frac{1}{2}gt_0^2} \right] \\&\quad + \left[\nu_k \sqrt{2x_1^0 g + gt_0} \right] t \\&\quad - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned} \quad (2.31)$$

Einen Eindruck der Lösung für die Werte $t_0 = 0, x_1^0 = 1, x_2^0 = 0, \mu = \frac{7}{8}$ und $g = 9.81$ verschafft Abbildung 2.8. Hier kann man gut die Unstetigkeiten in der Geschwindigkeitstrajektorie und die Knicke in der Ortskurve erkennen.

Bemerkung 2.6. Die oben angegebene Lösung für $t_0 \leq t < t_1$ lässt sich auch der allgemeinen Formel (2.31) unterordnen. Dazu macht man Gebrauch von der Identität $\nu_k = 1 + 2\mu \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu} + \mu^k$. Damit kann man die Definition von ν_k auf $k = 0$ ausweiten, nämlich $\nu_0 = 0$, und somit eine geschlossene Lösungsformel für alle Zeiten $t \geq t_0$ angeben.

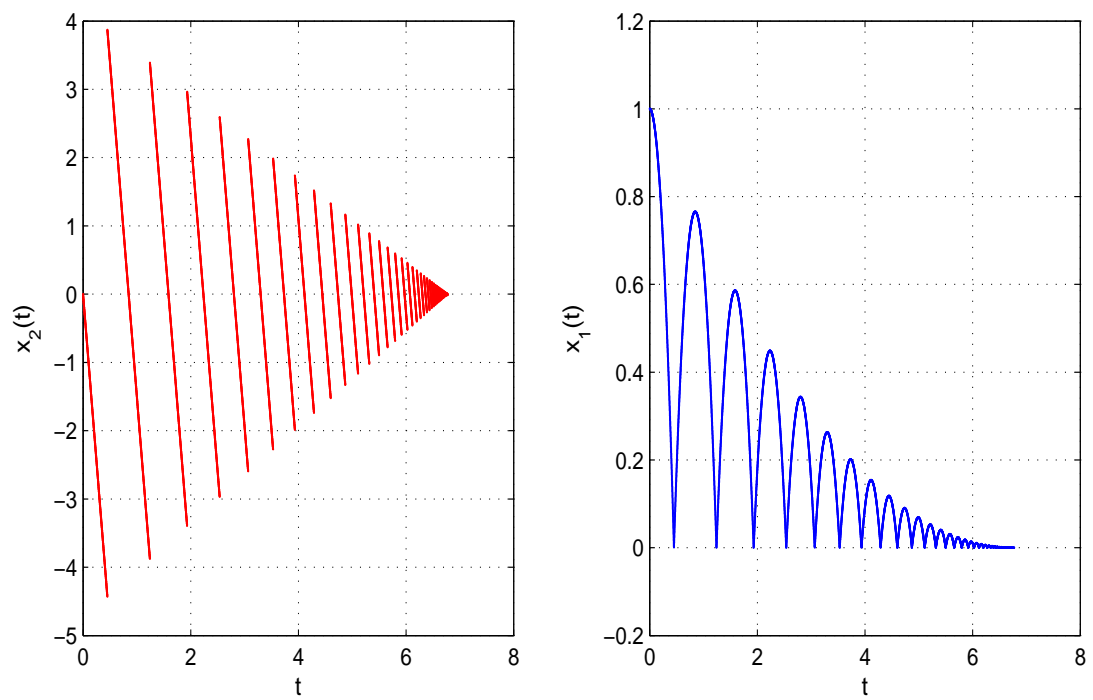


Abbildung 2.8: Bewegung des hüpfenden Balles.

2.4 Wasserbehälter mit Abfluss

Das folgende Beispiel aus [12, Kap. 6.4] behandelt zwei Wasserbehälter wie in Abbildung 2.9. Es seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die Wasservolumina sowie $u_1(t)$ und $u_2(t)$ die steuerbaren Abflussraten der jeweiligen Behälter zu den entsprechenden Zeitpunkten t . Die Zustandsbeschränkungen $x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0$ ergeben sich hier automatisch, da negative Volumina für die Modellierung sinnlos sind.

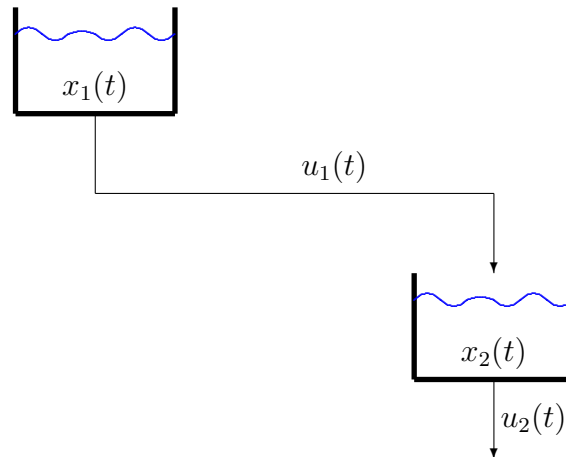


Abbildung 2.9: Modell der Wasserbehälter mit Abfluss.

Dazu betrachten wir nun das folgende optimale Steuerungsproblem:

Minimiere

$$- \int_0^{10} \left(\left(10 - \frac{t}{s}\right) u_1(t) + \frac{t}{s} u_2(t) \right) dt \quad (2.32)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= +u_1(t) - u_2(t), \\ x_1(0) &= 4 \quad , \quad x_2(0) = 4, \\ x_1(t) &\geq 0 \quad , \quad x_2(t) \geq 0 \text{ in } [0, 10], \\ u_1(t), u_2(t) &\in [0, 1] \quad , \quad v(t) \in [0, 1] \text{ f.ü. in } [0, 10]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Im Zielfunktional wird zur Konsistenz der (physikalischen) Dimensionen die Zeit t durch die Einheit Sekunde (s) geteilt. Der Integrand ist eine Linearkombination der Volumenströme u_1 und u_2 , die eine sich ändernde Gewichtung der beiden Steuerungen während des betrachteten

Zeitintervalls $[0, 10]$ modelliert. Durch Integration und Zusammenfassung von Minimierung und "–" vor dem Integral erhält man dadurch ein mittleres Abflussvolumen über die betrachtete Zeit, das maximiert werden soll.

Zur Lösung dieses Problems wird nun das Minimumprinzip aus [12, Theorem 4.1.10 bzw. 4.2.4] angewendet. Es besagt, dass die folgenden Funktionen dem Maximumprinzip genügen und aufgrund der Konvexität des Problems dann auch optimal sind:

Die optimalen Steuerungen sind gegeben durch

$$\hat{u}_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t < 4, \\ 0, & \text{für } 4 \leq t \leq 10, \end{cases}, \hat{u}_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq t < 2, \\ 1, & \text{für } 2 \leq t \leq 10. \end{cases} \quad (2.34)$$

Die optimalen Zustandsgrößen sind gegeben durch

$$\hat{x}_1(t) = \begin{cases} 4 - t, & \text{für } 0 \leq t < 4, \\ 0, & \text{für } 4 \leq t \leq 10, \end{cases}, \hat{x}_2(t) = \begin{cases} 4 + t, & \text{für } 0 \leq t < 2, \\ 6, & \text{für } 2 \leq t < 4, \\ 10 - t, & \text{für } 4 \leq t \leq 10. \end{cases} \quad (2.35)$$

Die Adjungierten sind gegeben durch

$$\hat{\lambda}_1(t) = \mu_1(t) - \mu_1(10), \hat{\lambda}_2(t) = \mu_2(t) - \mu_2(10) = \begin{cases} -2, & \text{für } 0 \leq t < 10, \\ 0, & \text{für } t = 10, \end{cases} \quad (2.36)$$

wobei μ_1 monoton wachsend ist und $\mu_1(t) = 0$ gilt für $t \in [0, 4)$ und

$$\int_4^{10} d\mu_1(\tau) = \mu_1(10) - \mu_1(4) = 8, \mu_1(10) - \mu_1(t) > 12 - t, \text{ für } t \in (4, 10). \quad (2.37)$$

Dabei ist μ_2 gegeben durch

$$\hat{\mu}_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq t < 10, \\ 2, & \text{für } t = 10. \end{cases} \quad (2.38)$$

Das Maximumprinzip sagt aus, dass $\mu_1(t) \equiv 0, \mu_2(t) \equiv 0$ gilt, solange keine Zustandsbeschränkungen aktiv sind. Falls diese aber aktiv werden, gilt die Aussage $\mu_1(t) \geq 0, \mu_2(t) \geq 0$. Man sieht, dass die Zustandsbeschränkung für das Volumen $\hat{x}_2(t)$ im zweiten Behälter nur zum Zeitpunkt $t_1 = 10$ aktiv wird und in diesem Fall das zugehörige $\hat{\mu}_2(t)$ dort springt. Demzufolge verhält sich auch die Adjungierte $\hat{\lambda}_2(t)$. Die entsprechend zu $\hat{x}_1(t)$ gehörigen Größen könnten ein analoges Verhalten aufweisen, da $\hat{x}_1(t) = 0$ für $t \in [4, 10]$ gilt. Allerdings sind $\hat{\mu}_1(t)$ und $\hat{\lambda}_1(t)$ durch die obigen Gleichungen nicht eindeutig bestimmt und das Maximumprinzip garantiert in diesem Fall nur Nichtnegativität für μ_1 , weswegen ein Sprung hier nicht zwingend auftreten muss. Die Lösung ist in den Abbildungen 2.10 und 2.11 dargestellt.

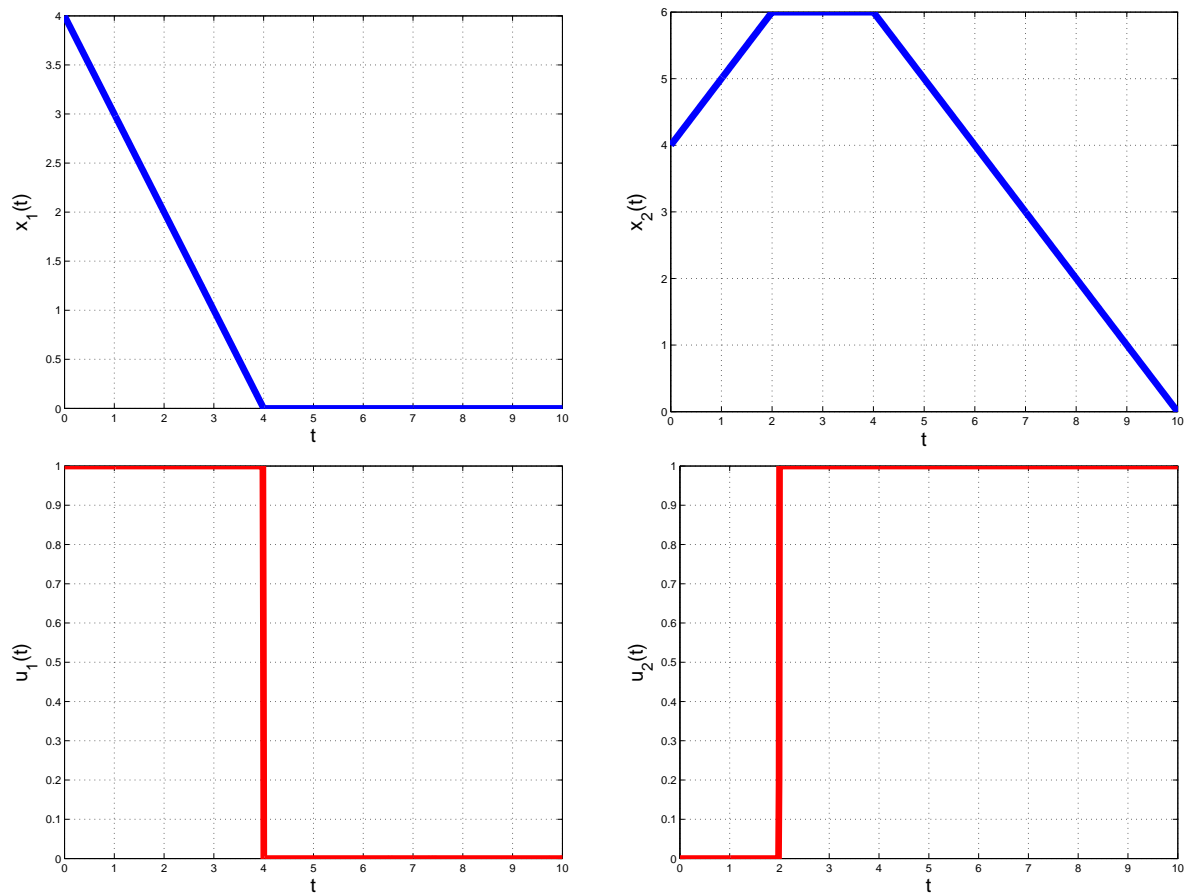


Abbildung 2.10: Optimale Zustände und Steuerungen.

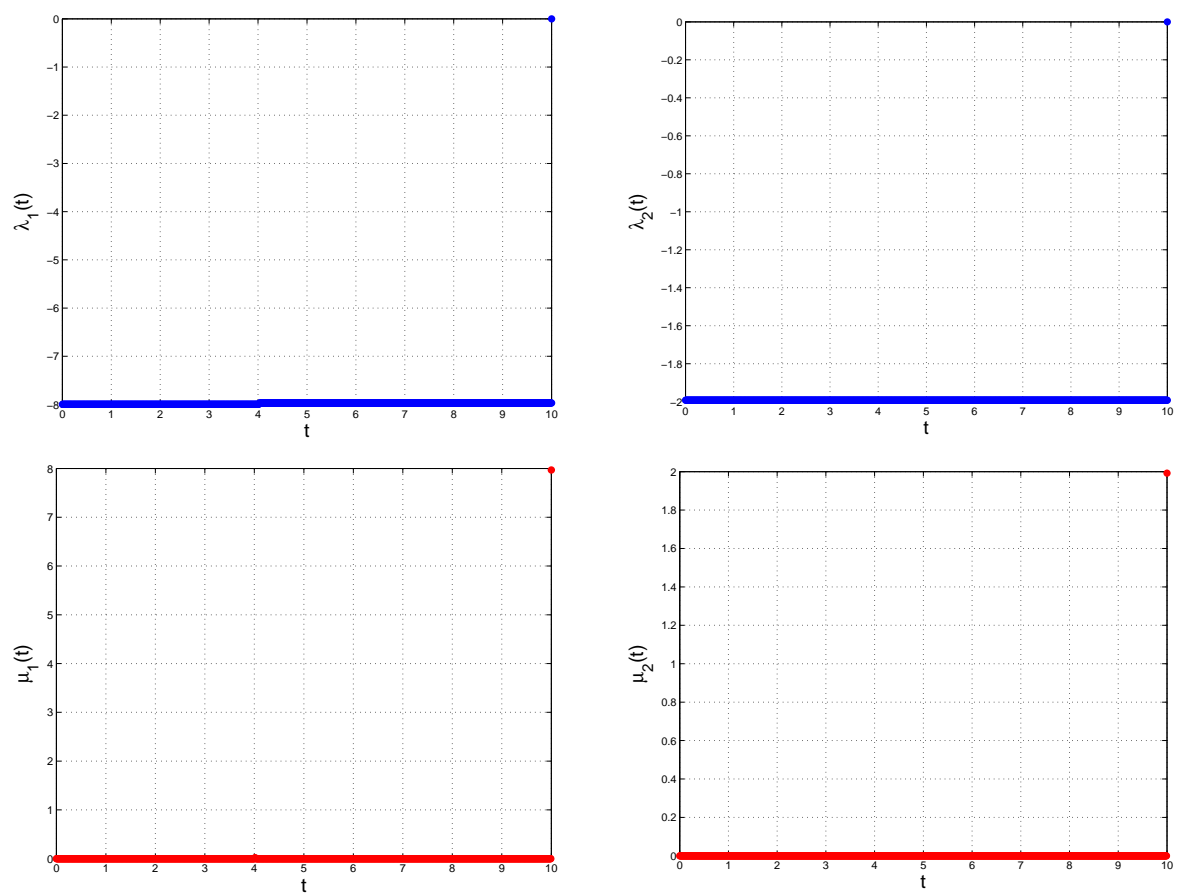


Abbildung 2.11: Adjungierte und Multiplikatoren.

Teil II

**Theoretische Analyse und
Modellierung**

Kapitel 3

Mathematische Hilfsmittel

Für die theoretische Analyse impulsiver Systeme ist die Bereitstellung einiger mathematischer Hilfsmittel erforderlich. Wir werden uns dabei aber nicht nur auf die später benötigten Resultate beschränken, sondern an einigen Stellen einen umfassenderen Überblick über interessante Sätze und Eigenschaften zusammenstellen. Zunächst werden wir den Begriff der Funktionen beschränkter Variation einführen, welche unstetig sein dürfen und deswegen gut zur Modellierung impulsiver Systeme geeignet sind. Das Riemann-Stieltjes-Integral verallgemeinert den Integralbegriff insbesondere für derartige Funktionen und ermöglicht uns dann im nächsten Kapitel die Formulierung impulsiver Systeme als Integralgleichung.

3.1 Funktionen beschränkter Variation

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften der Funktionen beschränkter Variation vorgestellt. Diese Funktionenklasse spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung impulsiver Systeme. Die folgenden Aussagen stammen aus den Werken [10, Kap. XV, §4], [11, Kap. 3.5] und [21, Kap. VIII, § 3 und Kap. IX, § 7].

Definition

Definition 3.1. *Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie die Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$V_a^b(\alpha) := \sup_{\Delta} \left\{ \sum_{k=1}^m |\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})| : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b \right\} \quad (3.1)$$

die **totale** oder **vollständige Variation von α über $[a, b]$** , wobei $\Delta : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Falls

$$V_a^b(\alpha) < \infty \quad (3.2)$$

ist, so heißt α **Funktion beschränkter oder endlicher Variation über $[a, b]$** . Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{BV}([a, b], \mathbb{R}) := \{\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid V_a^b(\alpha) < \infty\} \quad (3.3)$$

die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf $[a, b]$.

Wie in [11] dargestellt, lässt sich die Definition der vollständigen Variation auch von endlichen Intervallen $[a, b]$ auf ganz \mathbb{R} ausdehnen. Entsprechend bezeichnet dann $\mathbf{BV}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf \mathbb{R} .

Wenn die Bedeutung klar ist, werden wir auch die Kurzschreibweise \mathbf{BV} für Funktionen beschränkter Variation verwenden.

Beispielklassen

Das folgende Lemma zeigt, dass viele bekannte Funktionenklassen auf ganz natürliche Weise die Eigenschaft (3.2) erfüllen und ihre Elemente demzufolge von beschränkter Variation sind.

Lemma 3.2. (i) Jede beschränkte monotone Funktion ist von beschränkter Variation.

(ii) Eine Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig** mit der **Lipschitz-Konstante** $K \geq 0$, falls

$$|\alpha(\tilde{y}) - \alpha(y)| \leq K|\tilde{y} - y|$$

für alle $\tilde{y}, y \in [a, b]$ gilt. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist von beschränkter Variation.

(iii) Eine Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **absolutstetig** auf $[a, b]$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für ein beliebiges endliches System paarweise durchschnittsfremder Intervalle $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ mit der Gesamtlänge $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^m (\alpha(b_k) - \alpha(a_k)) \right| < \epsilon.$$

Wir bezeichnen mit $\mathbf{AC}([a, b], \mathbb{R})$ den Raum der absolutstetigen Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} . Analog zu oben lässt sich auch diese Definition auf ganz \mathbb{R} ausdehnen und man erhält die Menge der absolutstetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} : $\mathbf{AC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Insbesondere ist jede absolutstetige Funktion auch von beschränkter Variation und stetig.

(iv) Nicht jede stetige Funktion ist von beschränkter Variation.

Beweis: (i) Es sei $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann gilt aufgrund der Monotonie $\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1}) > 0$ für alle $k \geq 1$. Somit ist

$$\sum_{k=1}^m |\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})| = \alpha(b) - \alpha(a) < \infty$$

und daraus folgt die Behauptung.

(ii) Vergleiche [21, Kap. VIII, §3, Definition 2].

(iii) Vergleiche [21, Kap. IX, §2, Satz 1].

(iv) Man betrachte die Funktion $\alpha(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$, ($0 < t \leq 1, \alpha(0) = 0$) und für $m \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $0 < \frac{1}{2m} < \frac{1}{2m-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ des Intervalls $[0, 1]$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^m |\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$$

und somit $V_0^1(\alpha) = \infty$. □

Eigenschaften von Funktionen beschränkter Variation

Wir wollen nun einige grundlegende Eigenschaften für Funktionen aus BV zusammenfassen.

Lemma 3.3. (i) Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann gilt: $\alpha(t)$ ist beschränkt, d.h. $\alpha(t) \leq C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Falls $\alpha(t), \beta(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ sind, so auch $\alpha(t) + \beta(t), \alpha(t) - \beta(t)$ sowie $\alpha(t) \cdot \beta(t)$. Falls zusätzlich $\beta(t) \geq c > 0$ ist, so gilt dies auch für $\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$.

(iii) $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R}) \iff \alpha(t) = \beta(t) - \gamma(t)$ auf $[a, b]$, wobei $\beta(t), \gamma(t)$ monoton wachsend und beschränkt sind.

(iv) Es sei eine beschränkte Funktion $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $a < c < b$. Dann gilt

$$V_a^b(\alpha) = V_a^c(\alpha) + V_c^b(\alpha).$$

Ist zusätzlich $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$, so ist sie auch aus $BV([a, c], \mathbb{R})$ und $BV([c, b], \mathbb{R})$ und umgekehrt.

(v) Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann gilt auch $\alpha(t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dazu besteht die Möglichkeit, α konstant fortzusetzen, indem man $\alpha(t) = \alpha(a)$ bzw. $\alpha(t) = \alpha(b)$ für $t < a$ bzw. $b < t$ wählt. Man kann aber auch $\alpha(t) \equiv 0$ für $t \notin [a, b]$ setzen.

Beweis: Für die Eigenschaften (i) – (iv) vergleiche man etwa [21, Kap. VIII, §3]. Die Eigenschaft (v) findet sich in [11, Kap. 3.5, S.102]. □

Bemerkung 3.4. Aufgrund dieser letzten Eigenschaft (v) ist insbesondere jede Funktion aus $BV([a, b], \mathbb{R})$ auch in $BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die Umkehrung gilt aber genauso, d.h. für eine Funktion aus $BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist auch ihre Einschränkung auf $[a, b]$ von beschränkter Variation. Deswegen kann man sämtliche Aussagen dieses Kapitels sowohl für $BV([a, b], \mathbb{R})$ als auch für $BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verwenden (siehe [11, Kap. 3.5, S.102]).

Glattheit von Funktionen beschränkter Variation

In der Definition der Funktionen aus BV werden keine Voraussetzungen hinsichtlich Stetigkeit oder gar Differenzierbarkeit gestellt. Umso erstaunlicher sind die beiden folgenden Sätze, die überraschende und wichtige Resultate liefern.

Satz 3.5. *Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte höchstens abzählbar. Wir bezeichnen sie mit $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$. Des Weiteren existieren in allen diesen t_k die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, also*

$$\lim_{t \nearrow t_k} \alpha(t) = \alpha(t_k^-) \text{ und } \lim_{t \searrow t_k} \alpha(t) = \alpha(t_k^+).$$

Satz 3.6. *Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann existiert in fast jedem Punkt von $[a, b]$ eine endliche Ableitung $\alpha'(t)$, die integrierbar ist.*

Normalisierung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Normalisierung von Funktionen beschränkter Variation vorstellen. Wir werden diese später benötigen, um den Zusammenhang von Funktionen aus BV mit Maßen zu erklären und darüber die Eindeutigkeit der, im nächsten Abschnitt folgenden, Dekomposition.

Definition 3.7 (Normalisierung). *Wir bezeichnen mit*

$$\mathbf{NBV}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{\alpha(t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \alpha \text{ rechtsseitig stetig, } \alpha(0) = 0\} \quad (3.4)$$

den Raum der **normalisierten** Funktionen beschränkter Variation, in Kurzschreibweise auch **NBV**.

Diese Definition ist hinsichtlich der Normalisierung $\alpha(0) = 0$ völlig willkürlich, insbesondere wäre die Wahl von $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = 0$ eine gleichberechtigte Alternative.

Bemerkung 3.8. *Auch für Funktionen $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ kann man eine Normalisierung und den zugehörigen Raum $\mathbf{NBV}([a, b], \mathbb{R})$ einführen. Dabei hat man immer die Möglichkeit der Standardisierung am linken Intervallende durch $\alpha(a) = 0$. Genau diese Definition wollen wir auch betrachten. In [33, Kap. I, §8] wird ergänzend noch eine Mittelwertbildung durch $\alpha(t) = \frac{\alpha(t^+) + \alpha(t^-)}{2}$, ($a < t < b$) vereinbart. Alternativ kann man für $0 \in [a, b]$ wie oben verfahren.*

Insgesamt können wir immer zu einem $\alpha \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein α^* bestimmen, so dass $\alpha^* \in \mathbf{NBV}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. Dazu definieren wir (vgl. [13, Kap. III, §8, (8.20)] oder [11, Kap. 3.5, S. 103f])

$$\alpha^*(t) := \alpha(t^+) - \alpha(0^+). \quad (3.5)$$

Analog geht dies auch für $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ durch

$$\alpha^*(t) := \alpha(t^+) - \alpha(a^+). \quad (3.6)$$

Bemerkung 3.9. Die Art der Normalisierung wird bei vielen Autoren unterschiedlich definiert. Sie ist jedoch, insbesondere hinsichtlich der dadurch erzeugten linksseitigen oder rechtsseitigen Stetigkeit der Funktionen im offenen Intervall (a, b) , für die folgenden Betrachtungen äquivalent. Deswegen werden wir uns auf die rechtsseitig stetige Definition beschränken.

Die beiden Definitionen (3.5) und (3.6) garantieren automatisch die rechtsseitige Stetigkeit von α^* , wie man sich leicht anhand der verschiedenen möglichen Unstetigkeiten von Funktionen aus BV in Abbildung 3.1 veranschaulichen kann. Insbesondere die beiden unteren Fälle treten für Funktionen aus NBV nicht mehr auf. Außerdem sieht man, dass nach dieser Normalisierung die Funktionen aus NBV bis auf die Addition einer Konstante eindeutig sind.

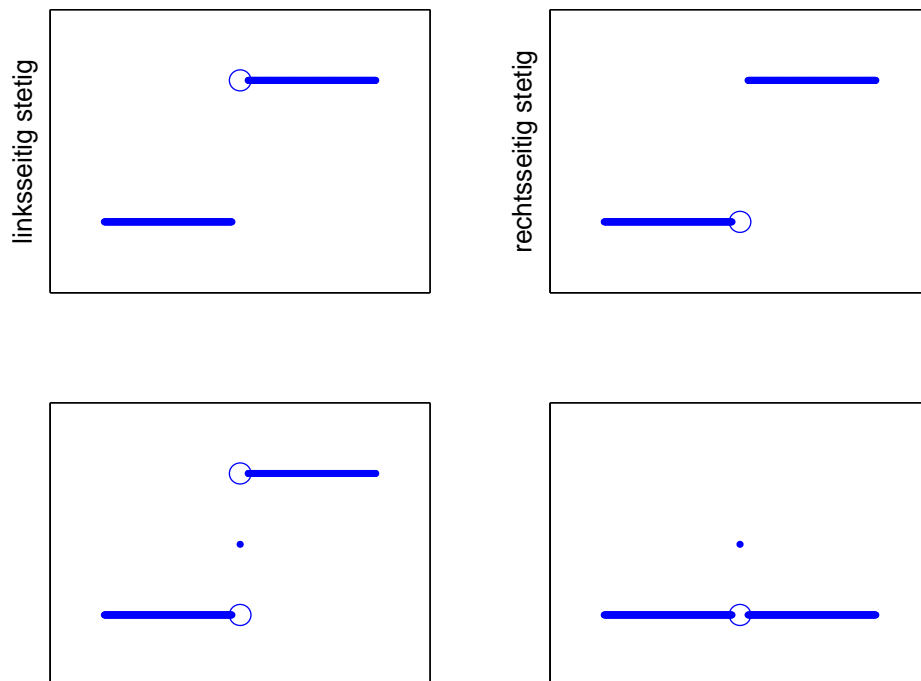


Abbildung 3.1: Unstetigkeiten von Funktionen beschränkter Variation.

Nach dieser Normalisierung sind Funktionen beschränkter Variation in einer Weise eindeutig bestimmt, die wir jetzt aus funktionalanalytischer Sicht beschreiben wollen. Zunächst vergleichen wir dazu die Auswirkungen der Normalisierung auf das Riemann-Stieltjes-Integral. Dieser neue Integral-Begriff wird später in Kapitel 3.5 eingeführt.

Satz 3.10 ([13, Kap. III, §8, (8.20)] oder [33, Kap. I, §8]). *Es sei f stetig auf $[a, b]$ und $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) d\alpha^*(t).$$

mit der normalisierten Funktion $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$.

Für die Integration stetiger Funktionen spielt es beim Riemann-Stieltjes-Integral also keine Rolle, ob man Funktionen beschränkter Variation oder deren normalisierte Varianten benutzt. Darauf aufbauend beschreibt der folgende Satz die angesprochene Eindeutigkeit der Normalisierung.

Satz 3.11 (Riesz). *Auf der Menge der stetigen reellen Funktionen $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ sei ein stetiges lineares Funktional $\Phi(f)$ gegeben. Dann existiert genau eine Funktion $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$, so dass für jedes f gilt*

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t) d\alpha^*(t).$$

Beweis: In [21, Kap. VIII, §8] findet sich eine Variante dieses Satzes, welche die Existenz einer Funktion $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ garantiert, so dass

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t) d\alpha(t).$$

gilt. Mit Hilfe von Satz 3.10 gilt diese Aussage auch für $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es existieren zwei Funktionen $\alpha_1^*, \alpha_2^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ mit $\alpha_1^* \neq \alpha_2^*$ und

$$\int_a^b f(t) d\alpha_1^*(t) = \Phi(f) = \int_a^b f(t) d\alpha_2^*(t).$$

Dann gilt mit Eigenschaft (iv) aus Lemma 3.54

$$0 = \int_a^b f(t) d[\alpha_1^*(t) - \alpha_2^*(t)].$$

Da dies für alle stetigen Funktionen f auf $[a, b]$ erfüllt sein muss ist

$$\alpha_1^*(t) - \alpha_2^*(t) = \text{const}$$

und dann aufgrund der Normalisierung

$$\alpha_1^*(t) = \alpha_2^*(t).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, weswegen die Eindeutigkeit und somit der Satz bewiesen ist. \square

Dekomposition von Funktionen beschränkter Variation

Wir wollen nun unser Hauptresultat zu Funktionen beschränkter Variation vorstellen. Es handelt sich dabei um die eindeutige dreiteilige Dekomposition in einen absolutstetigen, einen singulären und einen Sprunganteil. Die Herleitung des Ergebnisses erfolgt stückweise und beginnt mit einer Zerlegung in zwei Anteile.

Satz 3.12 ([21, Kap. VIII, §4, Satz 7]). *Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt*

$$\alpha(t) = \alpha_{BV, stetig}(t) + \alpha_{Sprung}(t) \quad (3.7)$$

wobei $\alpha_{BV, stetig}(t)$ eine stetige Funktion beschränkter Variation und $\alpha_{Sprung}(t)$ die **Sprungfunktion** von $\alpha(t)$ ist.

Nach [21, Kap. VIII, §3] lässt sich die Sprungfunktion definieren als

$$\begin{aligned} \alpha_{Sprung}(a) &= 0, \\ \alpha_{Sprung}(t) &= [\alpha(a^+) - \alpha(a)] + \sum_{t_k < t} [\alpha(t_k^+) - \alpha(t_k^-)] + [\alpha(t) - \alpha(t^-)], \end{aligned}$$

wobei die Zeitpunkte t_k gerade die Unstetigkeitsstellen von $\alpha(t)$ sind.

Satz 3.13 ([21, Kap. XI, §7, Satz 1]). *Es sei eine stetige Funktion $\alpha_{BV, stetig}(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung der Form*

$$\alpha_{BV, stetig}(t) = \alpha_{AC}(t) + \alpha_{sing}(t) \quad (3.8)$$

wobei $\alpha_{AC}(t) \in AC([a, b], \mathbb{R})$ und $\alpha_{sing}(t)$ eine singuläre Funktion ist. Dabei heißt eine Funktion **singulär**, falls sie nicht konstant, stetig, von beschränkter Variation und ihre Ableitung fast überall gleich Null ist.

Durch Zusammenfassung obiger Resultate erhalten wir das folgende wichtige Korollar, welches die Struktur der Funktionen aus BV beschreibt.

Korollar 3.14 (Dekomposition einer Funktion beschränkter Variation). *Sei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Dann kann $\alpha(t)$ dargestellt werden in der Form*

$$\alpha(t) = \alpha_{AC}(t) + \alpha_{sing}(t) + \alpha_{Sprung}(t), \quad (3.9)$$

wobei auf $[a, b]$ $\alpha_{AC}(t)$ eine absolutstetige, $\alpha_{sing}(t)$ eine singuläre Funktion und $\alpha_{Sprung}(t)$ die Sprungfunktion von $\alpha(t)$ ist.

Bemerkung 3.15 (Eindeutigkeit). *Diese Dekomposition ist bereits an sich eine interessante Tatsache. Wir werden aber später die ganze Funktionenklasse NBV und insbesondere die dortige Dreiteilung in Bezug zu einem, auf den ersten Blick völlig anderen, Formalismus setzen können, nämlich dem der regulären Borel-Maße (siehe Kapitel 3.3). Anhand dieser Verbindung lässt sich dann auch die Eindeutigkeit der Zerlegung für Funktionen aus NBV beweisen.*

Darauf vorbereitend betrachten wir zunächst im folgenden Abschnitt einige Begriffe zu Maßen.

3.2 Maße

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff des Maßes einführen und einige vertiefende Definitionen und Eigenschaften von Maßen zusammenfassen. Unser Ziel wird es letztlich sein, im nächsten Abschnitt eine Verbindung zwischen dem Raum der regulären Borel-Maße und dem Raum der nichtfallenden rechtsseitig stetigen Funktionen herzustellen. Die vorgestellten Aussagen finden sich in den Büchern [11, Kap. 1 und Kap. 3] und [13, Kap. V, §19].

Einführung

Definition 3.16. Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X . $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Algebra** auf X , falls

- (i) $\forall E \in \mathcal{A} : E^c \in \mathcal{A}$,
- (ii) $\forall (E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

Hier bezeichnet E^c das Komplement der Menge E in \mathcal{A} , also $E^c = \{x | x \in \mathcal{A} \text{ und } x \notin E\}$. Zudem beinhaltet obige Definition auch die Abgeschlossenheit unter abzählbarer Durchschnittsbildung, d.h.

$$\forall (E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}.$$

Desweiteren gilt automatisch $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$, da für $E \in \mathcal{A}$ gilt $\emptyset = E \cap E^c$ und $X = E \cup E^c$.

Bemerkung 3.17. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Definition 3.16. Dann gibt es für jede Teilmenge \mathcal{E} von $\mathcal{P}(X)$ eine eindeutig bestimmte kleinste σ -Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, welche \mathcal{E} enthält, nämlich den Durchschnitt aller σ -Algebren, die \mathcal{E} enthalten. $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ heißt dann die von \mathcal{E} **erzeugte** σ -Algebra.

Als nächstes werden wir eine wichtige σ -Algebra einführen, die vom System aller offenen Mengen erzeugt wird. Wir benötigen sie für unsere späteren Ergebnisse.

Definition 3.18. Sei X ein metrischer oder topologischer Raum. Die von der Menge $\{E \subset X | E \text{ offen}\}$ erzeugte σ -Algebra \mathcal{B}_X heißt **Borel- σ -Algebra**. Ihre Elemente bezeichnen wir als **Borel-Mengen**.

Hinsichtlich des Begriffs "topologischer Raum" verweisen wir auf die Bemerkung 3.25.

Satz 3.19. Die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ wird von jeder der folgenden Mengen erzeugt:

- (i) den offenen Intervallen: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$,
- (ii) den geschlossenen Intervallen: $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$,

- (iii) den halb-offenen Intervallen: $\mathcal{E}_3 = \{(a, b) : a < b\}$ oder $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$,
- (iv) den offenen Halbstrahlen: $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
- (v) den geschlossenen Halbstrahlen: $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Zum Schluss dieser Einführung werden wir den Begriff des Maßes auf einer σ -Algebra definieren.

Definition 3.20. Sei X eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Eine Funktion $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß** auf \mathcal{A} bzw. auf (X, \mathcal{A}) , falls

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) $\forall (E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $E_k \cap E_j = \emptyset, k \neq j : \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.

Ein Maß ist also eine Abbildung, welche einem Element einer σ -Algebra, also letztlich einer Menge, eine positive Zahl zuordnet. Wegen Eigenschaft (ii) wird μ auch als **abzählbar additives** Maß bezeichnet. Ein Maß welches auf der Borel- σ -Algebra \mathcal{B}_X definiert ist, bezeichnen wir auch als **Borel-Maß** auf X .

Beispiele

Nach dieser Einführung der Grundbegriffe von Maßen wollen wir uns anhand einiger Beispiele besser mit ihnen vertraut machen.

Beispiel 3.21. Es sei eine beliebige nichtleere Menge X gegeben und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dann definiert eine Funktion $f: X \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß μ_f auf \mathcal{A} durch die Definition

$$\mu_f(E) := \sum_{x \in E} f(x)$$

mit $E \in \mathcal{A}$. Durch die Wahl von f lassen sich speziellere Maße definieren. Zwei davon wollen wir jetzt vorstellen.

(i) Es sei $f(x) = 1$ für $x \in X$. Für das hierdurch definierte Maß gilt dann

$$\mu_f(E) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } E, & \text{falls } E \text{ endlich} \\ \infty, & \text{falls } E \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Dann heißt μ_f **Zählmaß**, da es genau die Anzahl der Elemente in E angibt.

(ii) Es sei $x_0 \in X$ beliebig, aber fest. Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

für $x \in X$. Dann bezeichnen wir μ_f als **Dirac-Maß** oder **(Einheits-)Punktmasse in x_0** . Dieses Maß ist in der Literatur und den Anwendungen sehr weit verbreitet. Deswegen

und da es im Wesentlichen nur vom Punkt x_0 abhängt, bezeichnet man es auch mit $\delta_{x_0}(E)$, d.h.

$$\delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1, & x_0 \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Das wichtigste Beispiel eines Maßes ist jedoch das sogenannte Lebesgue-Maß. Es ist invariant unter Translationen und liefert für beliebige Quader den elementar-geometrischen Inhalt.

Beispiel 3.22. *Es existiert genau ein Maß $\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, y \in \mathbb{R}^n : \lambda(y + E) = \lambda(E) \quad (\text{Translationsinvarianz})$$

$$(ii) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a_i < b_i, i = 1, \dots, n : \lambda([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

λ heißt das **Lebesgue-Maß** auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Wir werden in Beispiel 3.37 eine Konstruktion dieses Maßes auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ vorstellen, die den Bezug von Maßen zu monoton wachsenden Funktionen ausnutzt.

Dekomposition von Maßen

Wir wollen nun die eindeutige Dekomposition von Maßen in drei verschiedene Anteile vorstellen. Diese werden wir im Kapitel 3.3 mittels einer Abbildungsvorschrift in den Raum der nichtfallenden rechtsseitig stetigen Funktionen übertragen können. Die folgenden Definitionen beschreiben zwei, dazu nötige, spezielle Klassen von Maßen.

Definition 3.23. *Es sei ein Maß μ auf (X, \mathcal{A}) gegeben.*

(i) *Ist $\mu(X) < \infty$, so bezeichnen wir μ als **finites** Maß.*

(ii) *Falls $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ mit $E_k \in \mathcal{A}$ und $\mu(E_k) < \infty$ für alle k , so bezeichnen wir μ als **σ -finites** Maß.*

Definition 3.24. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und μ ein Maß auf \mathcal{A} , sodass $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{A}$. Dann heißt μ ein **reguläres** Maß, falls*

$$(i) \quad \mu(K) < \infty \text{ für alle kompakten Mengen } K \subset X,$$

$$(ii) \quad \mu(E) = \inf \{ \mu(U) \mid E \subset U, U \subset X \text{ offen} \} \text{ für alle } E \in \mathcal{A},$$

$$(iii) \quad \mu(U) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subset U, K \text{ kompakt} \} \text{ für alle offenen Mengen } U \subset X.$$

Insbesondere ist jedes Borel-Maß μ auf \mathbb{R} automatisch regulär, falls $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}$. Außerdem ist aufgrund der Basisdarstellung in Satz 3.19 jedes reguläre Maß in $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ auch σ -finit.

Bemerkung 3.25. Die bisherigen Definitionen sind unter sehr allgemeinen Voraussetzungen formuliert. Soweit möglich werden wir auch im Folgenden diese Allgemeinheit beibehalten. Für unser Hauptresultat am Ende des Kapitels werden wir jedoch speziell die Annahme $X = \mathbb{R}$ treffen. Indem wir diesen Raum für $x \in \mathbb{R}$ mit der Euklidischen Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{(x)^2} = |x|$$

versehen, wird er zu einem metrischen Raum und ist aufgrund der endlichen Dimension damit ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dies genügt für die Voraussetzungen der obigen Definitionen. Aus diesem Grund werden wir auch die Begriffe topologischer Raum und lokal kompakter Hausdorff-Raum hier nicht näher erläutern.

Als nächstes führen wir einige weitere Bezeichnungen für Maße ein, durch die bereits an dieser Stelle Analogien zu den Funktionen beschränkter Variation angedeutet werden sollen. Der Satz über die eindeutige Dekomposition eines regulären Borel-Maßes beendet schließlich diesen Abschnitt.

Definition 3.26. Es seien zwei Maße μ und ν auf (X, \mathcal{A}) gegeben. Wir bezeichnen ν dann als **absolutstetig** bezüglich μ und schreiben $\nu \ll \mu$, falls für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$ immer folgt $\nu(E) = 0$.

Definition 3.27. Es seien zwei Maße μ und ν auf (X, \mathcal{A}) gegeben. Wir bezeichnen μ und ν dann als (**wechselseitig**) **singulär** und schreiben $\mu \perp \nu$, falls ein $E \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $\mu(E) = 0$ und $\nu(E^c) = 0$ gilt. Man sagt auch μ bzw. ν ist **singulär bezüglich** ν bzw. μ .

Diese beiden Definitionen könnte man auch leicht abgeändert für signierte Maße aufstellen. Zusätzlich zu der obigen Maßdefinition dürfen diese Werte in $[-\infty, \infty]$ annehmen und dabei insbesondere höchstens einen der Werte $\pm\infty$. Für uns genügt es jedoch, wenn wir genau die Maße wie in Definition 3.20 betrachten.

Definition 3.28. Es sei eine beliebige abzählbare Menge in \mathbb{R} gegeben, die wir mit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen. Dazu existiere eine Folge von Zahlen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ ist. Für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ definieren wir dann ein Maß ν durch

$$\nu(E) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{t_k}(E)$$

Ein auf diese Weise definiertes Maß heißt **diskret** oder **rein unstetig**. In Ergänzung dazu nennt man ein Maß ν **stetig**, falls $\nu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist ein diskretes Maß (auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) automatisch ein reguläres Borel-Maß.

Als nächstes werden wir einen Satz vorstellen, der die eindeutige zweiteilige Dekomposition eines regulären Borel-Maßes beschreibt. Die Analogie zu den Funktionen beschränkter Variation ist dabei offensichtlich.

Satz 3.29 ([13, Kap. V, §19, (19.57)]). *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß auf \mathbb{R} . Dann gibt es genau eine Zerlegung der Form*

$$\nu = \nu_{\text{stetig}} + \nu_{\text{diskret}},$$

wobei ν_{diskret} ein diskretes Maß und ν_{stetig} ein stetiges reguläres Borel-Maß ist.

Der nächste Satz taucht in der Literatur als *Lebesgue-Radon-Nikodym-Theorem* (vgl. [11, Kap. 3.2, Satz 3.8]) bzw. als *Lebesgue-Dekomposition* (vgl. [13, Kap. V, §19, (19.42)]) auf und beschreibt eine Zerlegung σ -finiter Maße.

Satz 3.30 (Lebesgue-Dekomposition). *Es seien μ und ν σ -finite Maße auf (X, \mathcal{A}) . Dann gilt*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

wobei ν_1 und ν_2 wiederum σ -finite Maße auf (X, \mathcal{A}) sind mit $\nu_1 \ll \mu$ und $\nu_2 \perp \mu$. Insbesondere ist diese Zerlegung eindeutig.

Bemerkung 3.31. *Dieser Satz ist in den angegebenen Quellen noch allgemeiner für signierte σ -finite Maße formuliert. In den zugehörigen Beweisen ziehen sich die Autoren jedoch immer auf (positive) σ -finite Maße im Sinne der Definition 3.20 zurück.*

Mit diesem Satz haben wir die Grundlagen für das folgende Hauptresultat dieses Abschnitts zusammengestellt. Es handelt sich dabei um die eindeutige Zerlegung eines Borel-Maßes auf \mathbb{R} .

Satz 3.32 (Dekomposition eines Maßes), [13, Kap. V, §19, (19.61)]. *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß auf \mathbb{R} . Dann kann ν auf genau ein Art in der Form*

$$\nu = \nu_{AC} + \nu_{\text{sing}} + \nu_{\text{diskret}} \tag{3.10}$$

geschrieben werden, wobei $\nu_{AC}, \nu_{\text{sing}}$ und ν_{diskret} reguläre Borel-Maße auf \mathbb{R} sind. Weiterhin gilt $\nu_{AC} \ll \lambda$, $\nu_{\text{sing}} \perp \lambda$, ν_{diskret} ist diskret und ν_{sing} stetig.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt nicht direkt sondern mit einem Umweg über den Raum der nichtfallenden rechtsseitig stetigen Funktionen. Die Beziehung zwischen Maßen und diesem Raum wollen wir im nun folgenden Kapitel genauer betrachten.

3.3 Zusammenhang von Funktionen beschränkter Variation und Maßen

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir uns unabhängig voneinander mit Funktionen beschränkter Variation und Maßen auseinandergesetzt. Es existiert jedoch eine enge Verbindung zwischen diesen beiden Formalismen, die wir im Folgenden näher beleuchten wollen. Die entsprechenden Resultate finden sich in [11, Kap. 1.5 und Kap. 3.5] und [13, Kap. V, §19].

In einer ersten Vereinfachung ziehen wir uns von Funktionen aus BV auf den Raum der normalisierten Funktionen beschränkter Variation NBV zurück. Wie bereits im entsprechenden Kapitel dargestellt sind solche Funktionen in bestimmter Hinsicht eindeutig bestimmt. In [11] wird teilweise nur diese Vereinfachung angewandt. Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und normalisierte Funktionen beschränkter Variation äquivalent als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen schreiben. Deswegen genügt es für uns wie in [13] den Raum der monoton wachsenden, rechtsseitig stetigen und reellwertigen Funktionen mit $\alpha(0) = 0$ zu betrachten:

$$\mathcal{W} := \{\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha(0) = 0, \alpha \text{ monoton wachsend und rechtsseitig stetig}\} \quad (3.11)$$

Auch hinsichtlich der Maße werden wir nicht die allgemeinste Definition zulassen. Für unsere Betrachtung wird es ausreichen, die regulären Borel-Maße auf \mathbb{R} zu verwenden.

Bemerkung 3.33. *Aufgrund der gewählten Normalisierung von Funktionen beschränkter Variation wird für die in [13] vorgestellte Theorie der Raum*

$$\mathcal{V} := \{\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha(0) = 0, \alpha \text{ monoton wachsend und linksseitig stetig}\}$$

benutzt. Da sich \mathcal{V} und \mathcal{W} jedoch nur hinsichtlich des Funktionswertes in Unstetigkeitspunkten unterscheiden, sind die Modellierungen mit links- oder rechtsseitig stetigen Funktionen völlig äquivalent.

Nach diesen Vereinbarungen wollen wir sofort die Kernaussage über die Verbindung zwischen den beiden Formalismen vorstellen. Der folgende Satz enthält die entsprechende Abbildungsvorschrift.

Satz 3.34 ([13, Kap. V, §19, (19.45)]). *Sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß auf \mathbb{R} . Wir definieren α durch die Vorschrift*

$$\alpha(t) = \begin{cases} \nu((0, t]) & , \text{ falls } t > 0, \\ 0 & , \text{ falls } t = 0, \\ -\nu((t, 0]) & , \text{ falls } t < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dann ist α eine monoton wachsende, reellwertige und rechtsseitig stetige Funktion auf \mathbb{R} . Weiterhin gilt $\alpha(0) = 0$ und somit $\alpha \in \mathcal{W}$.

Somit sind wir bereits in der Lage, uns aus einem gegebenen Maß ν eine entsprechende Funktion $\alpha \in \mathcal{W}$ zu konstruieren. Darüberhinaus gelten aber für diese Abbildung noch besondere Eigenschaften, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 3.35 ([13, Kap. V, §19, (19.48)]). *Die in (3.12) definierte Abbildung*

$$\nu \rightarrow \alpha$$

ist eine bijektive Abbildung aus dem Raum der regulären Borel-Maße auf \mathbb{R} in den Raum \mathcal{W} . Die Vorschrift für die Umkehrabbildung lautet

$$\alpha \rightarrow \lambda_\alpha. \quad (3.13)$$

Bemerkung 3.36. Die Abbildung (3.13) liefert nicht nur ein reguläres Borel-Maß, sondern sogar ein **vollständiges** Maß. Bei solchen Maßen beinhaltet der Definitionsbereich auch alle Teilmengen von Nullmengen. In diesem Sinne ist das durch (3.13) erzeugte Maß eine Vervollständigung von ν und beinhaltet in seinem Definitionsbereich $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ als echte Teilmenge. Derartige Maße λ_{α} werden auch **Lebesgue-Stieltjes-Maße** genannt. Somit ist jedes reguläre Borel-Maß auf \mathbb{R} auch ein Lebesgue-Stieltjes-Maß.

Man kann weiterhin zeigen, dass

$$\lambda_{\alpha}((a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a) = \nu((a, b]) \quad (3.14)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt. Wegen Satz 3.19 und der Eigenschaft (ii) in Definition 3.20 sind damit ν und λ_{α} für alle $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ identisch, was für unsere Zwecke ausreichend ist. Deswegen werden wir im folgenden Lebesgue-Stieltjes-Maße nicht weiter verwenden und stattdessen das mit (3.14) zu α korrespondierende Maß ν benutzen. Falls nötig werden wir es auch mit ν_{α} bezeichnen.

Zur Illustration der eben vorgestellten Aussagen reichen wir an dieser Stelle die versprochene Konstruktion des Lebesgue-Maßes λ anhand der obigen Abbildungen nach.

Beispiel 3.37. Das Lebesgue-Maß λ ist das vollständige Maß, welches man durch Anwendung der Abbildung (3.13) auf die Funktion $\alpha(t) = t$ erhält, d.h.

$$\lambda((a, b]) := \lambda_{\alpha(t)=t}((a, b]) = b - a.$$

Der Definitionsbereich dieses Maßes ist die Klasse der sogenannten **Lebesgue-messbaren** Mengen, die die Menge $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ als echte Teilmenge enthalten. Wir werden im Folgenden jedoch nur die Einschränkung dieses Maßes auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ benötigen und diese ebenfalls als Lebesgue-Maß λ bezeichnen.

In den vorhergehenden Abschnitten sind wir bereits auf die dreiteilige Dekomposition, sowohl von Funktionen beschränkter Variation als auch von Maßen, eingegangen. Daher stellt sich nun die Frage, in welchem Verhältnis die daraus resultierenden absolutstetigen, singulären und diskreten bzw. Sprung-Anteile jeweils zueinander stehen. Dies wollen wir im folgenden beantworten.

Satz 3.38. Es sei eine Funktion $\alpha \in \mathcal{W}$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ absolutstetig} \\ &\text{auf jedem Intervall } [-n, n] \text{ mit } n \in \mathbb{N} \iff \nu_{\alpha} \ll \lambda \end{aligned} \quad (3.15)$$

Satz 3.39. Ein diskretes Maß (auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) ist automatisch ein reguläres Borel-Maß. Außerdem gilt

$$\nu \text{ diskret} \implies \alpha' = 0 \text{ f.ü.} \quad (3.16)$$

für das nach (3.12) korrespondierende α . Dabei ist "f.ü." bzw. "fast überall" im Bezug auf das Lebesgue-Maß zu verstehen.

Satz 3.40. *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß und α die nach (3.12) korrespondierende Funktion in \mathcal{W} . Dann gilt*

$$\nu \perp \lambda \iff \alpha' = 0 \text{ f.ü.} \quad (3.17)$$

Eine weitere interessante Beziehung lässt sich hinsichtlich stetiger Maße und stetigen Funktionen aus \mathcal{W} zeigen.

Satz 3.41. *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß und α die nach (3.12) korrespondierende Funktion in \mathcal{W} . Dann gilt*

$$\alpha \text{ stetig} \iff \nu \text{ stetig.} \quad (3.18)$$

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir die dreiteilige Zerlegung von Maßen und Funktionen beschränkter Variation bzw. äquivalent dazu Funktionen aus \mathcal{W} erneut betrachten, jetzt aber vor dem Hintergrund der gezeigten Abbildungen (3.12) und (3.13). Der nächste Satz enthält ein dazu nötiges Teilresultat.

Satz 3.42 ([13, Kap. V, §19, (19.57) und (19.58)]). *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß auf \mathbb{R} . Dann kann ν auf genau eine Art in der Form*

$$\nu = \nu_{\text{stetig}} + \nu_{\text{diskret}}$$

geschrieben werden, wobei ν_{diskret} ein diskretes Maß und ν_{stetig} ein stetiges reguläres Borel-Maß ist. Mit diesen Maßen berechnen wir anhand von (3.12) die entsprechenden Funktionen $\alpha, \alpha_{\text{stetig}}$ und α_{Sprung} . Dann gilt

$$\alpha = \alpha_{\text{stetig}} + \alpha_{\text{Sprung}},$$

wobei α_{stetig} eine stetige Funktion und α_{Sprung} eine Sprungfunktion ist.

Dieser Satz in Kombination mit der Lebesgue-Dekomposition aus Satz 3.30 ergibt die vollständige Zerlegung von Maßen und Funktionen aus BV bzw. \mathcal{W} .

Satz 3.43 (Dreiteilige Dekomposition, [13, Kap. V, §19, (19.61)]). *Es sei ν ein beliebiges reguläres Borel-Maß auf \mathbb{R} . Dann kann ν auf genau ein Art in der Form*

$$\nu = \nu_{AC} + \nu_{\text{sing}} + \nu_{\text{diskret}} \quad (3.19)$$

geschrieben werden, wobei $\nu_{AC}, \nu_{\text{sing}}$ und ν_{diskret} reguläre Borel-Maße auf \mathbb{R} sind. Weiterhin gilt $\nu_{AC} \ll \lambda$, $\nu_{\text{sing}} \perp \lambda$ mit dem Lebesgue-Maß λ , ν_{diskret} ist diskret und ν_{sing} stetig. Falls $\alpha, \alpha_{AC}, \alpha_{\text{sing}}$ und α_{Sprung} die nach (3.12) korrespondierenden Funktionen aus \mathcal{W} sind, so gilt

$$\alpha = \alpha_{AC} + \alpha_{\text{sing}} + \alpha_{\text{Sprung}}, \quad (3.20)$$

wobei α_{AC} eine auf jedem kompakten Intervall absolutstetige, α_{sing} eine singuläre Funktion und α_{Sprung} die Sprungfunktion von α ist. Weiterhin gilt

$$\nu_{AC}(E) = \int_E \alpha'(t) dt \quad (3.21)$$

für alle Borel-Mengen E , und

$$\alpha_{AC}(s) = \begin{cases} \int_0^s \alpha'(t) dt & , \text{ für } s \geq 0, \\ -\int_s^0 \alpha'(t) dt & , \text{ für } s < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Bemerkung 3.44. Damit haben wir die Eindeutigkeit der dreiteiligen Zerlegung für Funktionen aus \mathcal{W} anhand der Eindeutigkeit bei regulären Borel-Maßen und der bijektiven Abbildung (3.12) hergeleitet. Insbesondere ist dadurch auch die Eindeutigkeit für normalisierte Funktionen beschränkter Variation NBV gezeigt.

Wir haben uns bei unserer Darstellung auf Aussagen im \mathbb{R}^1 beschränkt. Es stellt sich nun die Frage, ob man diese Resultate auch auf vektorwertige Bildbereiche erweitern kann. Einen kleinen Einblick in die Antwort wollen wir im nächsten Kapitel geben.

3.4 Vektorwertige Maße und Funktionen beschränkter Variation

Die Erweiterung der bisher vorgestellten Ergebnisse auf vektorwertige Bildbereiche ist eine, an dieser Stelle, völlig natürliche Fragestellung. Wir wollen hier, statt einer umfassenden Antwort, auf einige in der Literatur vorhandene Lösungsansätze eingehen.

Eine kurze überblicksartige Verallgemeinerung wird in [22, Kap. 1.1 und Kap. 1.2] vorgestellt. Hier wird für x im \mathbb{R}^n die Norm

$$\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

definiert. Es sei nun eine Funktion $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine beliebige Zerlegung $\Delta : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$ des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt

$$V_a^b(\alpha) := \sup_{\Delta} \left\{ \sum_{j=1}^m \|\alpha(y_j) - \alpha(y_{j-1})\| \right\} \quad (3.23)$$

die totale oder vollständige Variation von α in $[a, b]$. Man sagt α ist von beschränkter Variation in $[a, \infty)$, falls $V_a^t(\alpha) < +\infty$ auf jedem Intervall $[a, t], a \leq t < \infty$. Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation auf $I = [a, \infty)$ mit Werten in \mathbb{R}^n wird mit $BV(I, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Für eine Funktion $\alpha \in BV(I, \mathbb{R}^n)$ existiert dann die Zerlegung

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

mit einer absolutstetigen Funktion α_1 und $\alpha_2' = 0$ f.ü. in $[a, b]$. Diese Zerlegung ist bis auf die Addition einer Konstante eindeutig.

Bemerkung 3.45. Die wichtigste Beobachtung die wir hier machen ist aber eine andere. Wir nehmen an, es gelte $\alpha_j \in BV(I, \mathbb{R}), j \in 1, \dots, n$ für die einzelnen Komponenten einer Funktion $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für eine beliebige Zerlegung Δ von I erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|\alpha(y_j) - \alpha(y_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |\alpha_i(y_j) - \alpha_i(y_{j-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i(y_j) - \alpha_i(y_{j-1})| \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^m |\alpha_1(y_j) - \alpha_1(y_{j-1})|}_{\leq V_a^b(\alpha_1)} + \dots + \underbrace{\sum_{j=1}^m |\alpha_n(y_j) - \alpha_n(y_{j-1})|}_{\leq V_a^b(\alpha_n)} \\ &\leq V_a^b(\alpha_1) + \dots + V_a^b(\alpha_n) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung muss auch für \sup_{Δ} gelten und somit ist $\alpha \in BV(I, \mathbb{R}^n)$.

Nun gelte umgekehrt $\alpha \in BV(I, \mathbb{R}^n)$. Für eine beliebige Zerlegung Δ und einen Index $j \in 1, \dots, n$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |\alpha_i(y_j) - \alpha_i(y_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^m \|\alpha(y_j) - \alpha(y_{j-1})\| \\ &\leq \sup_{\Delta} \left\{ \sum_{j=1}^m \|\alpha(y_j) - \alpha(y_{j-1})\| \right\} \\ &= V_a^b(\alpha) \end{aligned}$$

und somit

$$V_a^b(\alpha_i) \leq V_a^b(\alpha) < \infty.$$

Deswegen gilt $\alpha_i \in BV(I, \mathbb{R})$. Man sieht also, dass sich die Betrachtung vektorwertiger Funktionen auf die Betrachtung der Einzelkomponenten zurückführen lässt und somit der bisher entwickelte Formalismus vollständig angewendet werden kann.

Eine viel weitreichendere und mathematisch fundiertere Verallgemeinerung wird in [4, Kap. 1, §3.2 und §3.3] vorgestellt. Hier werden Funktionen $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ betrachtet, wobei X ein Banachraum ist (insbesondere ist auch \mathbb{R}^n ein Banachraum!). Dieser ist mit der Norm $\|\cdot\|$ ausgestattet und man definiert durch

$$V_a^b(\alpha) := \sup_{\Delta} \sum_{j=1}^m \|\alpha(y_{j-1}) - \alpha(y_j)\| \quad (3.24)$$

die totale Variation der Funktion α , wobei $\Delta : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Analog zu oben heißt α von beschränkter Variation,

falls $V_a^b(\alpha) < \infty$ ist. Mit $BV([a, b], X)$ wird der Raum all dieser Funktionen bezeichnet. Es wird weiterhin gezeigt, dass solche Funktionen bis auf eine abzählbare Menge von Punkten stetig sind und in speziellen Banachräumen sogar f.ü. differenzierbar. Außerdem wird eine Verallgemeinerung der Definition der absoluten Stetigkeit für banachwertige Funktionen vorgestellt. Im Anschluss daran führen die Autoren Vektormaße ein, die hier Werte im Banachraum X annehmen. Anhand von Riemann-Stieltjes-Integralen (die wir im nächsten Kapitel genauer betrachten) wird eine Verbindung zwischen diesen Maßen und Funktionen beschränkter Variation hergestellt sowie für beide Formalismen die Lebesgue-Dekomposition in einen absolutstetigen und einen singulären Anteil gezeigt.

3.5 Das Riemann-Stieltjes-Integral

In diesem Kapitel stellen wir einige wichtige Fakten über das Stieltjes- bzw. Riemann-Stieltjes-Integral zusammen. In der Literatur sind beide Bezeichnungen gebräuchlich. Da sie genau dasselbe beschreiben, wir aber den Begriff als eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Riemannsches Integrals verstehen wollen, werden wir im Folgenden immer vom Riemann-Stieltjes-Integral sprechen. Die folgenden Aussagen basieren auf den Werken [21, Kap. VIII und IX], [33, Kap. I] und [10, Kap. XV, §5]. Der Zusammenhang dieses Integrals mit dem Lebesgue-Stieltjes-Integral wird in [15, Kap. IV, 9.] und eine Beziehung zu Kettenbrüchen in [24, Kap. IV] betrachtet.

Definition

Wir wollen nun das Riemann-Stieltjes-Integral definieren. Dazu seien zwei endliche Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Durch die Punkte

$$\tau_0 = a < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$$

erhalten wir eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, die wir mit Δ bezeichnen. Weiterhin sei

$$\lambda := \max_{i=0, \dots, n-1} (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Definition 3.46. Falls die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \tag{3.25}$$

mit

$$\tau_i \leq \xi_i \leq \tau_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

für $\lambda \rightarrow 0$ gegen einen endlichen Grenzwert I konvergiert, der weder von der Art der Zerlegung Δ noch von der Wahl der Punkte ξ_i abhängt, so heißt dieser Grenzwert **Riemann-Stieltjes-Integral von f bezüglich α** , in Zeichen

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau). \tag{3.26}$$

Wir bezeichnen f dabei als **Integranden** und α als **Integrator**.

Diese Definition lässt sich auch durch ein ϵ - δ -Kriterium formulieren: Die Zahl I ist das Riemann-Stieltjes-Integral von f bezüglich α , falls gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\lambda < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] - I \right| < \epsilon,$$

unabhängig von der Wahl der Zerlegung Δ und der Wahl der Punkte ξ_i .

Bemerkung 3.47. Durch die Wahl von $\alpha(\tau) = \tau$ erhält man in (3.25) genau die bekannte Riemann-Summe und somit, als Spezialfall von (3.26), das Riemann-Integral. Dies erklärt die verallgemeinernde Bedeutung des Riemann-Stieltjes-Integrals und rechtfertigt die Nutzung dieses Begriffs.

Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals

Wir wollen nun zunächst einige Aussagen zur Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals unter verschiedenen Voraussetzungen vorstellen.

Es seien dazu

$$S_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}} f(\tau) \right) [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)]$$

$$s_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}} f(\tau) \right) [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)].$$

Dann gilt der folgende

Satz 3.48. Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt sind und α zusätzlich monoton wachsend, dann existiert das Integral (3.26) genau dann, wenn unabhängig von der Wahl der Zerlegung Δ gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_{\Delta} - s_{\Delta}) = 0.$$

Der folgende Satz ist sehr wichtig, da er insbesondere die Funktionen beschränkter Variation in Zusammenhang mit dem Riemann-Stieltjes-Integral bringt.

Satz 3.49 ([33, Kap. I, §4, Theorem 4a]). Ist f auf $[a, b]$ stetig und $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$, so existiert das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau).$$

Bemerkung 3.50. Da $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ genau dann gilt, wenn sich α als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen schreiben lässt, kann man sich für den obigen Satz auch auf diese Funktionenklasse zurückziehen (siehe [13, Theorem (8.7)]).

Durch Vertauschen der Voraussetzungen an die Funktionen aus dem obigen Satz erhält man ebenfalls eine Existenzaussage, die man auch als Formel der partiellen Integration auffassen kann.

Satz 3.51 (Partielle Integration, [33, Kap. I, §4, Theorem 4b]). Ist $f \in BV([a, b], \mathbb{R})$ und α auf $[a, b]$ stetig, so existiert das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. α und es ist

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(\tau) df(\tau).$$

Wir wissen bereits, dass eine Lipschitz-stetige oder sogar absolutstetige Funktion ebenfalls von beschränkter Variation ist. Deswegen könnten wir in diesem Fall direkt die obigen Sätze anwenden. Allerdings lässt sich unter diesen Voraussetzungen sogar noch etwas mehr zeigen.

Satz 3.52 ([21, Kap. XI, §7, Satz 3]). Ist f auf $[a, b]$ stetig und $\alpha \in AC([a, b], \mathbb{R})$, so existiert wegen Satz 3.49 das Riemann-Stieltjes-Integral und es gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^b f(\tau) \alpha'(\tau) d\tau,$$

wobei das letzte Integral im Lebesgueschen Sinne zu verstehen ist.

Es sei die Unterteilung $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben. Die Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei konstant auf jedem der Teilintervalle $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{m-1}, c_m)$, d.h.

$$\alpha(\tau) = \sum_{i=0}^k a_i, \quad c_k \leq \tau < c_{k+1}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, m-1$. Ein Beispiel für den Fall $m = 3$ ist in Abbildung 3.2 dargestellt. α ist dann eine Sprungfunktion im Sinne der Definition in Kapitel 3.1.

Der folgende Satz beinhaltet zum einen die Existenz, zum anderen eine Formel zur Berechnung des Riemann-Stieltjes-Integrals mit Sprungfunktionen als Integratoren. Er kommt besonders gut in Kombination mit der Dekomposition von Funktionen beschränkter Variation zum tragen.

Satz 3.53. Es sei f auf $[a, b]$ stetig und α eine Sprungfunktion wie oben. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) &= f(a)[\alpha(a^+) - \alpha(a)] + \sum_{k=1}^m f(c_k)[\alpha(c_k^+) - \alpha(c_k^-)] \\ &\quad + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b^-)] \\ &= \sum_{i=0}^m a_i f(c_i). \end{aligned}$$

Eine konkrete Anwendung dieser beiden Sätze findet sich in Beispiel 3.62 am Ende des Kapitels.

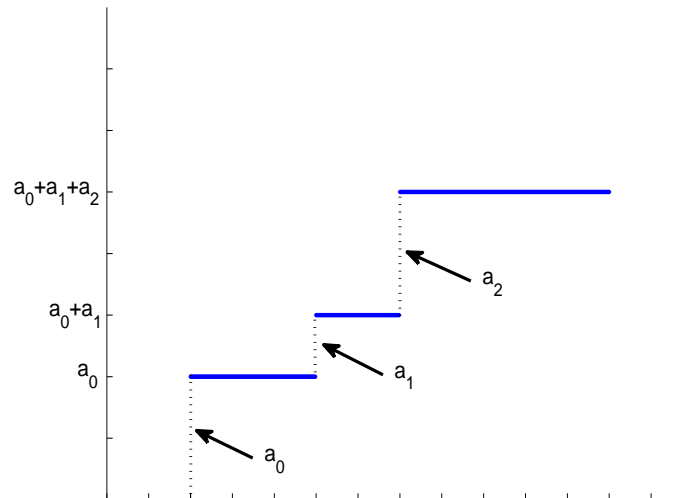


Abbildung 3.2: Sprungfunktion.

Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Nach den Aussagen zur Existenz folgen nun einige Rechenregeln und Eigenschaften, die im Vergleich zum Riemann-Integral teilweise überraschend sind.

Lemma 3.54. *Aus der Definition 3.46 des Riemann-Stieltjes-Integrals lassen sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften ableiten:*

$$(i) \int_a^b d\alpha(\tau) = \alpha(b) - \alpha(a);$$

$$(ii) \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = 0, \text{ falls } \alpha \text{ konstant};$$

$$(iii) \int_a^b [f_1(\tau) + f_2(\tau)] d\alpha(\tau) = \int_a^b f_1(\tau) d\alpha(\tau) + \int_a^b f_2(\tau) d\alpha(\tau);$$

$$(iv) \int_a^b f(\tau) d[\alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau)] = \int_a^b f(\tau) d\alpha_1(\tau) + \int_a^b f(\tau) d\alpha_2(\tau);$$

$$(v) \int_a^b kf(\tau) d[l\alpha(\tau)] = kl \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \quad (k, l = \text{const});$$

In den drei Fällen (iii), (iv) und (v) folgt hierbei aus der Existenz der Integrale auf der rechten Seite die Existenz der Integrale auf der linken Seite.

Die nächste Eigenschaft behandelt das Aufteilen des Riemann-Stieltjes-Integrals auf mehrere Integrationsintervalle:

(vi) Falls $a < c < b$ und alle Integrale existieren, gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^c f(\tau) d\alpha(\tau) + \int_c^b f(\tau) d\alpha(\tau).$$

Beweis: Zum Beweis der Eigenschaften (i), (iii) – (vi) vergleiche [10, Kap. XV, §5, Nr. 576]. Die Eigenschaft (ii) findet sich in [33, Kap. I, §5]. \square

Zur Eigenschaft (vi) gibt es aber noch zweierlei zu sagen, da hier eine wichtige Tatsache im Vergleich zum Riemann-Integral auftaucht. Zum einen folgt aus der Existenz von $\int_a^b f(\tau)d\alpha(\tau)$ auch die der Integrale $\int_a^c f(\tau)d\alpha(\tau)$ und $\int_c^b f(\tau)d\alpha(\tau)$ und somit die obige Gleichung. Zum anderen gilt die Umkehrung aber nicht. Aus der Existenz von $\int_a^c f(\tau)d\alpha(\tau)$ und $\int_c^b f(\tau)d\alpha(\tau)$ folgt im allgemeinen nicht die des Integrals $\int_a^b f(\tau)d\alpha(\tau)$, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.55. Es seien f und α auf dem Intervall $[-1, 1]$ wie folgt definiert:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \tau \leq 0, \\ 1, & 0 < \tau \leq 1, \end{cases} \quad \alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \tau < 0 \\ 1, & 0 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Dann existieren die beiden Integrale

$$\int_{-1}^0 f(\tau)d\alpha(\tau), \quad \int_0^1 f(\tau)d\alpha(\tau),$$

weil die beiden Riemann-Stieltjes-Summen (3.25) gleich 0 sind. Beim ersten Integral folgt dies, da stets $f(\tau) = 0$ ist, beim zweiten Integral wenden wir die Eigenschaft (ii) aus dem Lemma 3.54 an. Dagegen existiert

$$\int_{-1}^1 f(\tau)d\alpha(\tau)$$

nicht. Dazu zerlegen wir $[-1, 1]$ so in Teilintervalle, dass der Punkt 0 nicht zur Menge der Teilpunkte gehört und bilden die Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)].$$

Falls nun $\tau_k < 0 < \tau_{k+1}$ gilt, so bleibt in der Summe nur der k -te Summand stehen. Ansonsten haben nämlich τ_i und τ_{i+1} das gleiche Vorzeichen und somit ist $\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i+1}) = 0$ für $i \neq k$. Daraus folgt

$$\sigma = f(\xi_k)[\alpha(\tau_{k+1}) - \alpha(\tau_k)] = f(\xi_k).$$

Je nachdem, ob nun $\xi_k \leq 0$ oder $\xi_k > 0$ ist, gilt

$$\sigma = 0 \text{ oder } \sigma = 1,$$

so dass kein Grenzwert existiert.

Bemerkung 3.56 (Ergänzung zur Existenz). *Interessant ist nach diesem Beispiel die Frage, was allgemein über die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals ausgesagt werden kann, wenn der Integrand f und der Integrator α unstetig an derselben Stelle $\tau = c$ sind. Dazu gibt es in der Literatur zwei unterschiedliche Aussagen.*

In [10, Kap. XV, §5, Nr. 584, 4.] findet sich ein Beweis dafür, dass das Integral in diesem Fall nicht existiert.

Eine andere Aussage findet sich in [15, Kap. 9.44] in der Fußnote 1). Dort heißt es, dass die Integral-Definition weniger einfach ist, falls f unstetig und g (dem entspricht in unserer Schreibweise α) von beschränkter Variation sein darf. Dies widerspricht nicht der Aussage in [10], lässt aber die Hoffnung zu, dass man auch unter diesen Voraussetzungen - ggf. mit Zusatzforderungen - eine vernünftige Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals aufstellen kann.

Ein weiterer interessanter Aspekt ist das Verhalten des Riemann-Stieltjes-Integrals, wenn für den Integrator $\alpha \in BV$ sein normalisiertes Pendant $\alpha^* \in NBV$ verwendet wird. Den entsprechenden Satz haben wir bereits in Kapitel 3.1 formuliert und geben ihn hier der Vollständigkeit halber erneut an.

Satz 3.57 ([33, Kap. I, §8]). *Es sei f auf $[a, b]$ stetig und $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Es sei $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ die zu α gehörende normalisierte Funktion beschränkter Variation. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^b f(\tau) d\alpha^*(\tau).$$

Des Weiteren existieren in Analogie zum Riemann-Integral auch für das Riemann-Stieltjes-Integral mehrere Mittelwertsätze. Exemplarisch stellen wir den folgenden Satz vor. Er findet sich zusammen mit weiteren Resultaten in [33, Kap. I, §10] und [10, Kap. XV, §5, Nr. 582].

Satz 3.58. *Es sei f auf $[a, b]$ stetig und α monoton wachsend. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = f(\xi) [\alpha(b) - \alpha(a)]$$

mit $a \leq \xi \leq b$.

Die letzte Eigenschaft, die wir anführen wollen, behandelt eine betragsmäßige Abschätzung des Riemann-Stieltjes-Integrals.

Satz 3.59. *Ist f auf $[a, b]$ stetig und $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \right| \leq \max_{a \leq \tau \leq b} |f(\tau)| \cdot V_a^b(\alpha).$$

Dieser Satz lässt sich leicht durch Abschätzung der Riemann-Stieltjes-Summe (3.25) beweisen. Anwendung findet er bei den Beweisen für die Sätze des folgenden Abschnitts.

Grenzübergänge unter dem Riemann-Stieltjes-Integral

In diesem Abschnitt werden wir zwei Aussagen zur Vertauschung von Grenzwert und Integral im besonderen Kontext des Riemann-Stieltjes-Integrals vorstellen (vgl. [21, Kap. VIII, §7] oder [10, Kap. XV, §5, Nr. 583]). Die Vertauschung erfolgt dabei einmal hinsichtlich des Integranden f und dann bezüglich des Integrators α .

Satz 3.60. *Es seien auf $[a, b]$ eine Funktion $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ gegeben sowie eine Folge stetiger Funktionen $(f_n(\tau))_{n \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert (, die somit automatisch auch stetig ist). Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau).$$

Diese Tatsache ist bereits vom gewöhnlichen Riemann-Integral her bekannt und somit nicht ganz neu. Neu hingegen ist die Frage nach der Vertauschbarkeit, wenn man den Integrator α mittels einer Folge (α_n) ankonvergiert.

Satz 3.61. *Es seien auf $[a, b]$ eine stetige Funktion f gegeben und eine Folge von Funktionen $(\alpha_n(\tau))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \in BV([a, b], \mathbb{R})$, die punktweise gegen eine endliche Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Gilt dann $V_a^b(\alpha_n) \leq K < \infty$ für alle n , so ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(\tau) d\alpha_n(\tau) = \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau).$$

Anwendungsbeispiel

Wir wollen dieses Kapitel mit einem Beispiel aus der technischen Mechanik beenden. Es illustriert die Benutzung des Riemann-Stieltjes-Integrals bei Anwendungen aus dem täglichen Leben und veranschaulicht außerdem noch die Verwendung der dreiteiligen Dekomposition von Funktionen beschränkter Variation bei der Berechnung des Integrals.

Beispiel 3.62 (Statisches Moment eines Balkens). *Gegeben sei ein Stab mit homogener verteilter Masse m_0 und zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2 wie in Abbildung 3.3. Gesucht ist nun das statische Moment M_{stat} des Balkens um den Punkt $\tau = 0$.*

Es sei nun $\alpha(\tau)$ die Masse des Stabes im Intervall $[0, \tau]$. Dann hat $\alpha(\tau)$ offensichtlich folgende Gestalt (vergleiche auch Abbildung 3.4 für $m_0 = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$):

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{m_0}{l} \tau & , 0 \leq \tau < \frac{1}{3}l, \\ \frac{m_0}{l} \tau + m_1 & , \frac{1}{3}l \leq \tau < \frac{2}{3}l, \\ \frac{m_0}{l} \tau + m_1 + m_2 & , \frac{2}{3}l \leq \tau \leq l. \end{cases}$$

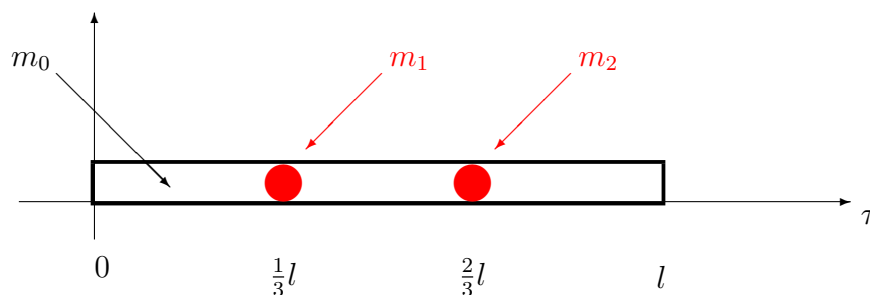


Abbildung 3.3: Balken mit stetigen und punktförmigen Massen.

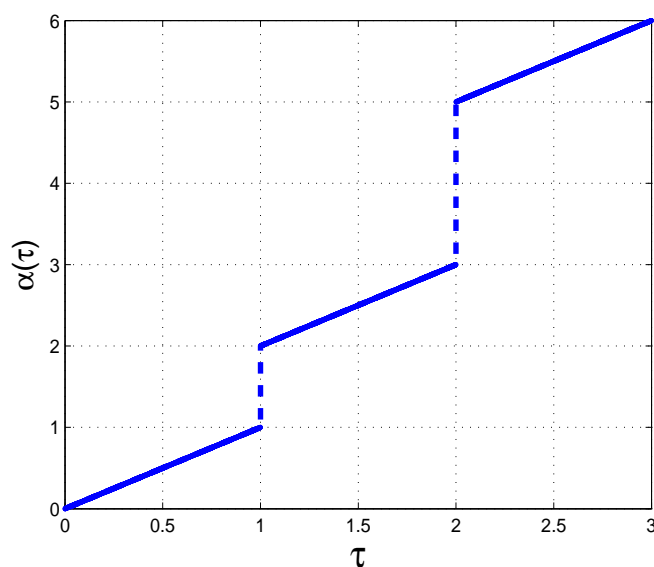


Abbildung 3.4: Massenverteilung eines Balkens mit stetigen und punktförmigen Massen.

Da $\alpha(\tau)$ monoton wachsend ist, gilt auch $\alpha(\tau) \in BV([0, l], \mathbb{R})$. Somit lässt sich eine Zerlegung in einen Sprung- und einen stetigen BV-Anteil angeben. Nach [21, Kap. VIII, §3] ist der Sprunganteil gegeben durch

$$\alpha_{\text{Sprung}}(\tau) = [\alpha(0^+) - \alpha(0)] + \sum_{\bar{\tau}_k < \tau} [\alpha(\bar{\tau}_k^+) - \alpha(\bar{\tau}_k^-)] + [\alpha(\tau) - \alpha(\tau^-)],$$

wobei $\{\bar{\tau}_k\}$ die Menge aller Unstetigkeitspunkte von $\alpha(\tau)$ bezeichnet. Hier ist konkret $\{\bar{\tau}_k\} =$

$\{\frac{1}{3}l, \frac{2}{3}l\}$ und außerdem $\alpha(0^+) - \alpha(0) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Sprung}}(\tau) &= \begin{cases} 0 & , 0 \leq \tau < \frac{1}{3}l, \\ \alpha(\frac{l}{3}^+) - \alpha(\frac{l}{3}^-) & , \frac{1}{3}l \leq \tau < \frac{2}{3}l, \\ \left[\alpha(\frac{l}{3}^+) - \alpha(\frac{l}{3}^-) \right] + \left[\alpha(\frac{2l}{3}^+) - \alpha(\frac{2l}{3}^-) \right] & , \frac{2}{3}l \leq \tau \leq l. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , 0 \leq \tau < \frac{1}{3}l, \\ m_1 & , \frac{1}{3}l \leq \tau < \frac{2}{3}l, \\ m_1 + m_2 & , \frac{2}{3}l \leq \tau \leq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wenden erneut [21, Kap. VIII, §3] an um den zweiten Anteil der Dekomposition zu berechnen.

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{BV, stetig}}(\tau) &= \alpha(\tau) - \alpha_{\text{Sprung}}(\tau) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_0}{l}\tau \\ \frac{m_0}{l}\tau + m_1 \\ \frac{m_0}{l}\tau + m_1 + m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & , 0 \leq \tau < \frac{1}{3}l, \\ m_1 & , \frac{1}{3}l \leq \tau < \frac{2}{3}l, \\ m_1 + m_2 & , \frac{2}{3}l \leq \tau \leq l \end{pmatrix} \\ &= \frac{m_0}{l}\tau. \end{aligned}$$

Aufgrund von [21, Kap. IX, §7, Folgerung zu Satz 2] ist $\alpha_{\text{BV, stetig}}(\tau)$ sogar absolutstetig, weshalb der singuläre Anteil der dreiteiligen Dekomposition von $\alpha(\tau)$ hier verschwindet. Es gilt also $\alpha_{\text{sing}}(\tau) \equiv 0$ und wir können $\alpha_{\text{AC}}(\tau) := \alpha_{\text{BV, stetig}}(\tau)$ setzen.

Nun wollen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurückkehren und das statische Moment des Balkens berechnen:

Sei $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = l$ eine beliebige Zerlegung von $[0, l]$. Dann ist in $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ die Masse $\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i) =: \Delta\alpha(\tau_i)$ enthalten. Nehmen wir die Massen im linken Intervallende als punktförmig an, so ergibt sich für das statische Moment der Näherungsausdruck

$$M_{\text{stat}} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{i+1} \Delta\alpha(\tau_i).$$

Die Anwendung von Satz 3.48 liefert hier die Existenz des Grenzwertes für $n \rightarrow \infty$ und somit des Riemann-Stieltjes-Integrals

$$M_{\text{stat}} = \int_0^l \tau \, d\alpha(\tau).$$

Diesen Ausdruck können wir anhand der Rechenregeln für Riemann-Stieltjes-Integrale sowie

der Existenzaussagen für absolutstetige bzw. sprungförmige Integratoren auswerten.

$$\begin{aligned}
 M_{stat} &= \int_0^l \tau \, d\alpha(\tau) \\
 &= \int_0^l \tau \, d\alpha_{AC}(\tau) + \int_0^l \tau \, d\alpha_{Sprung}(\tau) \\
 &= \int_0^l \tau \cdot \underbrace{\alpha'_{AC}(\tau)}_{\frac{m_0}{l}} d\tau + \sum_{k=1}^2 \underbrace{\frac{k \cdot l}{3}}_{=\bar{\tau}_k} m_k \\
 &= \frac{m_0}{l} \left[\frac{1}{2} \tau^2 \right]_0^l + \frac{l}{3} m_1 + \frac{2l}{3} m_2 \\
 &= \frac{l}{2} m_0 + \frac{l}{3} m_1 + \frac{2l}{3} m_2.
 \end{aligned}$$

Man kann das statische Moment aber auch als eine Funktion in Abhängigkeit von τ betrachten. Die Rechnung ist analog zu der obigen und es ergibt sich

$$M_{stat}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \tau^2, & 0 \leq \tau < \frac{1}{3}l, \\ \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \tau^2 + \frac{l}{3} m_1, & \frac{1}{3}l \leq \tau < \frac{2}{3}l, \\ \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \tau^2 + \frac{l}{3} m_1 + \frac{2l}{3} m_2, & \frac{2}{3}l \leq \tau \leq l \end{cases}$$

Das gesamte statische Moment setzt sich also zusammen aus dem Moment der stetig verteilten Masse und dem Moment der punktförmig im Balken eingelagerten Massen. Man sieht hier deutlich die praktische Eigenschaft des Riemann-Stieltjes-Integrals. Es liefert genau diese Modellierung zweier Momentenanteile in einem einzigen Integralausdruck.

Die folgende Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf des statischen Moments für den Balken aus Abbildung 3.4, d.h. mit $l = 3$ und $m_0 = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

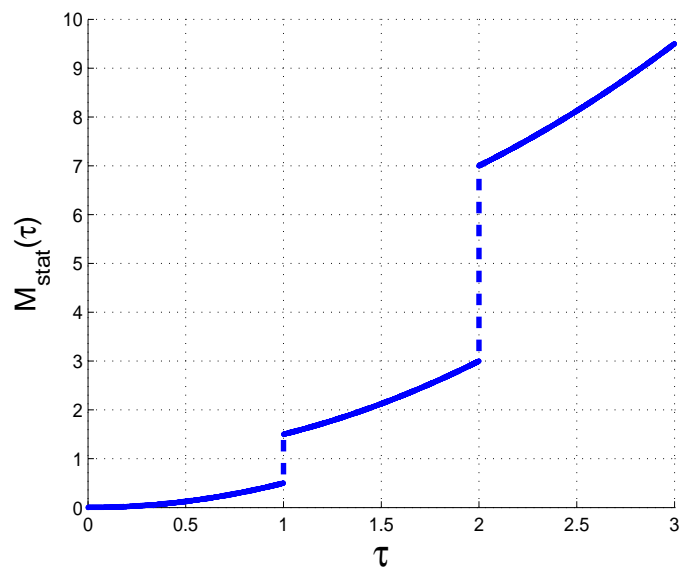


Abbildung 3.5: Statisches Moment eines Balkens mit stetigen und punktförmigen Massen.

Kapitel 4

Die allgemeine Systemgleichung

In diesem Kapitel wird unter Ausnutzung der mathematischen Hilfsmittel, insbesondere der Funktionen beschränkter Variation und des Riemann-Stieltjes-Integrals, eine allgemeine Formulierung für impulsive Systeme in Form einer Integralgleichung vorgestellt. Sämtliche Beispiele aus dem Kapitel 2 lassen sich dabei als Spezialfälle der allgemeinen Gestalt darstellen.

4.1 Formulierung

Zur Beschreibung eines impulsiven Systems betrachten wir ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dazu sei eine Funktion beschränkter Variation $\alpha[x](t) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ gegeben, die wir in Bemerkung 4.2 noch genauer erklären werden. Zur weiteren Darstellung des Systemverhaltens dienen die beiden Funktionen $F : ([a, b] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G : ([a, b] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Wir suchen nun eine Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche die Integralgleichung

$$x(t) = x_a + \int_a^t F(\tau, x(\tau))d\tau + \int_a^t G(\tau, x(\tau))d\alpha[x](\tau)$$

(4.1)

$$x_a = x(a)$$

für $a \leq t \leq b$ löst. Diese bezeichnen wir als **impulsives System**.

Bemerkung 4.1. Für die folgenden Betrachtungen wollen wir die Existenz der Lösung $x(t)$ des impulsiven Systems (4.1) und sämtlicher Integrale voraussetzen. Zudem nehmen wir die Nichttrivialität der Funktion G an, d.h.

$$G(t, x(t)) \neq 0.$$

(4.2)

Bemerkung 4.2. Der Name der Funktion $\alpha[x](t)$ soll bereits andeuten, dass sie neben der Zeit auch noch von der Lösung x des impulsiven Systems (4.1) selbst abhängt. Insofern ist $\alpha[x](t)$ bezüglich x fest gewählt und lediglich von der Zeit t abhängig. Deswegen werden wir im folgenden die Bezeichnungen α und $\alpha[x]$ äquivalent verwenden.

Bemerkung 4.3. Die Auswertung der Integrale erfolgt komponentenweise. Wir benutzen die Bezeichnungen $F(t, x(t)) = (F_1(t, x(t)), \dots, F_n(t, x(t)))^T$ und $G = (G_{ij}(t, x(t)))_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ sowie $x_a = (x_{1,a}, \dots, x_{n,a})^T$. Dann lässt sich die Zustandsgleichung des impulsiven Systems (4.1) schreiben als

$$x_i(t) = x_{i,a} + \int_a^t F_i(\tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^n \int_a^t G_{ij}(\tau, x(\tau)) d\alpha_j[x](\tau).$$

Um die Gleichung (4.1) überhaupt formulieren zu können, muss die Existenz der Integrale gesichert sein. Doch die Wahl der richtigen Räume und Voraussetzungen für die Komponenten des impulsiven Systems bereitet einige Schwierigkeiten. Einerseits ist die Trajektorie sprungbehaftet, weswegen es Sinn macht $x(t) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ anzunehmen. Andererseits haben wir in Kap. 3.5 Sätze kennengelernt, die für die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals die Stetigkeit von G fordern. Da aber G von x abhängen darf, ist unklar, inwieweit dies hier garantiert werden kann. Auch die Existenz des Riemann-Integrals ist aufgrund der x -Abhängigkeit von F nicht trivial, allerdings könnte man versuchen diese anhand der partiellen Integration aus Satz 3.51 zu beweisen. Allgemein können wir die Existenz der Integrale lediglich für einige Spezialfälle sichern, wie etwa

$$\begin{aligned} \alpha[x](t) &= \alpha(t), \\ G(t, x(t)) &= G(t), \end{aligned}$$

wobei $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist, F, G bezüglich t stetig sind und $F \in BV$ hinsichtlich x . Ansonsten muss man bei der Formulierung der Integralgleichung immer - auch im weiteren Verlauf des Kapitels - an die x -Abhängigkeit der Funktionen F und G denken. Insofern ist die obige Formulierung nur der Versuch einer allgemeinen Darstellung impulsiver Systeme, die Prüfung ihrer mathematischen Allgemeingültigkeit und Verwendbarkeit kann allerdings das Ziel weiterer Untersuchungen sein. Zur Anwendung auf Beispiele prüfe man deshalb von Fall zu Fall die Existenz der Integrale, gegebenenfalls auch stückweise über Teilintervalle von $[a, b]$, mit eventuell stärkeren Forderungen an F und G nach.

Bemerkung 4.4. Für die Wahl $\alpha[x](t) \equiv 0$ vereinfacht sich Gleichung (4.1) zu einer klassischen Integralgleichung. Zumindest insofern ist unsere Formulierung eines impulsiven Systems sinnvoll, da sie eine echte Verallgemeinerung der diesbezüglichen Theorie darstellt.

Wir haben bereits erwähnt, dass $x \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine sinnvolle Annahme ist. Da wir bereits von der dreiteiligen Dekomposition solcher Funktionen wissen, liegt es nahe sich nach der Kopplung der entsprechenden Anteile von x und α zu fragen.

Zunächst können wir α in die drei Teile $\alpha_{AC}, \alpha_{sing}$ sowie α_{Sprung} zerlegen und damit das Riemann-Stieltjes-Integral als

$$\int_a^t G d\alpha = \int_a^t G d\alpha_{AC} + \int_a^t G d\alpha_{sing} + \int_a^t G d\alpha_{Sprung}$$

schreiben. Aufgrund unserer Annahmen in Bemerkung 4.1 existieren alle Integrale und es gilt die Gleichheit. Weiterhin folgt aus der absoluten Stetigkeit der Funktion α_{AC}

$$\int_a^t G d\alpha_{AC} = \int_a^t G \alpha'_{AC} d\tau.$$

Man sieht sofort, dass dieser Ausdruck absolutstetig hinsichtlich t ist. Außerdem ist α_{Sprung} und deshalb auch

$$\int_a^t G d\alpha_{Sprung} = \sum_{t_k \leq t} G(t_k, x(t_k)) [\alpha_{Sprung}[x](t_k^+) - \alpha_{Sprung}[x](t_k^-)]$$

eine Sprungfunktion bezüglich t mit den Unstetigkeitsstellen t_k der Funktion α . Zuletzt wollen wir das mittlere Integral analysieren. Es sei dazu $t \in [a, b)$ und wir definieren $H(t) := \int_a^t G d\alpha_{sing}$. Dann folgt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\begin{aligned} \frac{H(t + \epsilon) - H(t)}{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} G(\tau, x(\tau)) d\alpha_{sing}[x](\tau) \\ &= \frac{1}{\epsilon} G(\xi_{t,t+\epsilon}, x(\xi_{t,t+\epsilon})) [d\alpha_{sing}[x](t + \epsilon) - d\alpha_{sing}[x](t)] =: w \end{aligned}$$

mit $\xi_{t,t+\epsilon} \in [t, t + \epsilon]$ und $t + \epsilon < b$. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} w &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G(\xi_{t,t+\epsilon}, x(\xi_{t,t+\epsilon})) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} [d\alpha_{sing}[x](t + \epsilon) - d\alpha_{sing}[x](t)] \\ &\stackrel{f.\ddot{u}.}{=} G(t, x(t)) \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

da α_{sing} singulär ist. Damit verschwindet $\frac{d}{dt} H(t)$ f.ü. und durch eine analoge Rechnung ergibt sich auch die Stetigkeit von H bezüglich t . Es sei nun $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = t$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, t]$. Dann gilt erneut unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes und der Stetigkeit von G

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |H(y_j) - H(y_{j-1})| &= \sum_{j=1}^m \left| \int_{y_{j-1}}^{y_j} G(\tau, x(\tau)) d\alpha_{sing}[x](\tau) \right| \\ &= \sum_{j=1}^m |G(\xi_j, x(\xi_j)) \cdot [\alpha_{sing}[x](y_j) - \alpha_{sing}[x](y_{j-1})]| \\ &= \sum_{j=1}^m \underbrace{|G(\xi_j, x(\xi_j))|}_{\leq M_j} \cdot \underbrace{|\alpha_{sing}[x](y_j) - \alpha_{sing}[x](y_{j-1})|}_{\leq V_a^t(\alpha_{sing}[x])} \\ &\leq M \cdot V_a^t(\alpha_{sing}[x]) \end{aligned}$$

mit $\xi_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und der Konstanten $M = \sum_{j=1}^m M_j$. Somit ist H von beschränkter Variation. Zuletzt wollen wir noch zeigen, dass H nicht konstant ist. Dazu nehmen wir an, dass

$$\int_a^t G d\alpha_{sing} \equiv C$$

gilt $\forall t \in [a, b]$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Nun seien $\tau_1, \tau_2 \in [a, b]$ mit $\tau_1 < \tau_2$ beliebig. Dann folgt mit der Aufteilung des Riemann-Stieltjes-Integrals auf Teilintervalle und dem Mittelwertsatz 3.58

$$\begin{aligned} 0 &= C - C \\ &= \int_a^{\tau_1} G d\alpha_{sing} - \int_a^{\tau_2} G d\alpha_{sing} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} G d\alpha_{sing} \\ &= G(\xi, x(\xi)) \cdot [\alpha_{sing}[x](\tau_2) - \alpha_{sing}[x](\tau_1)] \end{aligned}$$

mit $\xi \in [\tau_1, \tau_2]$. Nun ist aber $\alpha_{sing}[x]$ singulär und darum nicht konstant. Zudem waren τ_1 und τ_2 beliebig gewählt, weshalb der Klammerausdruck im Allgemeinen nicht 0 wird. Deswegen muss $G \equiv 0$ sein, was aber einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung (4.2) darstellt und somit die Funktion H nicht konstant sein kann. Insgesamt ist H also eine singuläre Funktion und wir haben gezeigt, dass sich die Eigenschaften der Funktionen α_{AC} , α_{sing} sowie α_{Sprung} direkt auf die Integrale übertragen.

Unsere letzte Beobachtung ist die absolute Stetigkeit des Ausdrucks $x(a) + \int_a^t F(\tau, x(\tau)) d\tau$ hinsichtlich der Zeit t . Damit haben wir nachgewiesen, dass die rechte Seite von (4.1) eine Funktion beschränkter Variation ist und diese bereits in die entsprechenden Anteile zerlegt. Demnach muss $x(t)$ eine Funktion beschränkter Variation sein und wir erhalten die Zerlegung des impulsiven Systems (4.1) in das System von drei gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{AC}(t) &= x(a) + \int_a^t F(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_a^t G(\tau, x(\tau)) \alpha'_{AC}[x](\tau) d\tau, \\ x_{sing}(t) &= \int_a^t G(\tau, x(\tau)) d\alpha_{sing}[x](\tau), \\ x_{Sprung}(t) &= \int_a^t G(\tau, x(\tau)) d\alpha_{Sprung}[x](\tau) = \sum_{t_k \leq t} G(t_k, x(t_k)) [\alpha_{Sprung}[x](t_k^+) - \alpha_{Sprung}[x](t_k^-)], \end{aligned} \tag{4.3}$$

welche wegen Satz 3.57 und Bemerkung 3.44 für normalisierte Funktionen beschränkter Variation bis auf die Addition einer Konstanten eindeutig ist. Insbesondere sieht man anhand der dritten Gleichung, dass der Lösungsanteil x_{Sprung} - und damit x selbst - höchstens dort Sprünge haben kann, wo auch die Funktion α_{Sprung} welche aufweist, denn für den Fall $\alpha_{Sprung} \in \text{Ker } G$ werden diese gar nicht auf die Trajektorie übertragen. Außerdem setzt sich dieses System nicht aus drei entkoppelten Gleichungen zusammen, da in die Auswertungen von $G(t, x(t))$ und $\alpha[x](t)$ immer alle drei Komponenten der Lösung eingehen.

Bemerkung 4.5. Die Dekomposition der Funktion α wird auch in der Arbeit [23] verwendet. Dort wird mit Hilfe dieser Zerlegung ein Maximumprinzip für impulsive Systeme formuliert.

Bemerkung 4.6. Neben der in (4.1) vorgestellten Formulierung existieren in der Literatur weitere Varianten zur Darstellung impulsiver Systeme. Eine sehr intuitive Form wird in [37, Kap. 1] oder [3, Kap. 3] vorgestellt. Ein impulsives System ist hier von der Gestalt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(t, x), \quad (t, x) \notin \mathcal{N}, \\ \Delta x &= J(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{N}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Die Impulse werden von der Systemgleichung getrennt und in einem sogenannten Sprungoperator

$$\mathcal{J}(t, x) = x + J(t, x)$$

verarbeitet. Solange das Tupel (t, x) kein Element der Menge \mathcal{N} ist, haben wir lediglich eine gewöhnliche Differentialgleichung vorliegen, für die eine fundierte Lösungstheorie existiert. Falls aber die Sprungbedingung $(t, x) \in \mathcal{N}$ erfüllt ist, modelliert der Sprungoperator \mathcal{J} einen Impuls, dem das System unterworfen ist, und es gilt

$$x(t^+) = \mathcal{J}(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{N}.$$

In dieser Formulierung lassen sich impulsive Systeme sehr einfach der numerischen Behandlung durch bekannte Verfahren für klassische Differentialgleichungen zugänglich machen. Eine Anwendung dieses Zugangs im Rahmen von Differentialinklusionen findet sich in [2]. Dort wird auch die x -Abhängigkeit der Funktion α zugelassen.

Eine schöne Übersicht verschiedener Zugänge zu impulsiven Systemen findet sich in [39, Kap. 5.1]. Der erste ist der von uns eingeschlagene Weg über Integralgleichungen mit Hilfe des Riemann-Stieltjes-Integrals. Dort wird auch auf weiterführende Literatur wie [29] verwiesen, die impulsive Systeme im Rahmen von sogenannten "Generalized equations" verallgemeinern. Der zweite Zugang findet sich auch in [5] und behandelt impulsive Systeme mittels Distributionen. Der letzte Zugang approximiert unstetige Lösungen durch eine Folge von klassischen Lösungen und wird in [17] weiter vorgestellt.

Ein weitere Möglichkeit der Behandlung impulsiver Systeme findet sich in den Arbeiten [35] und [36], wo Lösungskonzepte im Rahmen der Graphvervollständigung vorgestellt werden. Dabei wird anhand einer Zeittransformation während eines Sprunges der Funktion α das Verhalten der Trajektorie x festgehalten, damit die Berechnung des Produktes $G \cdot \alpha$ unmissverständlich ist.

Bemerkung 4.7. In der Literatur sind impulsive Systeme auch in Form von Differentialgleichungen dargestellt. In den Werken [7, Appendix], [22, Kap.2] und [28, Kap. 2] wird jedoch gezeigt, dass man Integral- und Differentialschreibweise äquivalent verwenden kann.

4.2 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

Dieses Kapitel soll lediglich der Vollständigkeit dienen und dem, hinsichtlich der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen impulsiver Systeme, interessierten Leser einige Literaturverweise geben.

Als erstes betrachten wir den Spezialfall sogenannter linearer Systeme. In der Formulierung (4.4) hat die darin vorkommende Funktionen F dann die Gestalt

$$F(t, x(t)) = A(t)x(t)$$

mit der Matrixfunktion $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Damit lässt sich durch sukzessive Multiplikation der Fundamentalmatrizen des Systems zwischen den Sprüngen eine geschlossene Lösungsformel angeben. Diese beinhaltet allerdings mehrere Fallunterscheidungen und ist deswegen sehr umfangreich. Zu finden ist diese Formel in [3, Kap. 3.2], [27, Kap. 2.2] oder [37, Kap. 1.6].

Weiterhin werden in [37, Kap. 1.4] für impulsive Systeme der Gestalt (4.4) zwei lokale Existenzaussagen vorgestellt. Im darauf folgenden Kapitel [37, Kap. 1.5] geht der Autor näher auf das sogenannte "Beating Phänomen" ein, bei welchem die Lösung immer wieder die Sprungbedingung $(t, x) \in \mathcal{N}$ erfüllt und im schlimmsten Fall eine unendliche Zahl von Sprüngen auftreten kann.

Ein weitere lokale Existenzaussage findet sich in [22, Kap. 2.2] oder [7, Kap. 2] für impulsive Systeme in einer Definition, die der von uns in (4.1) gewählten sehr ähnlich ist. In [22, Kap. 2.3] gehen die Autoren dann noch einen Schritt weiter und formulieren ergänzend zur Existenz der Lösung eine Eindeutigkeitsaussage.

Eine andere Zusammenstellung von (lokalen) Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen wird in [6, Kap. 3] vorgestellt. Hier werden zunächst einige Hypothesen H_1, \dots, H_6 eingeführt. Unter Gültigkeit unterschiedlicher Kombinationen dieser Hypothesen lassen sich verschiedene Aussagen über die Lösung impulsiver Systeme herleiten.

4.3 Optimale Steuerung impulsiver Systeme

Auch in diesem Kapitel wollen wir keine ausführliche Theorie vorstellen sondern erneut einige Hinweise auf Literatur über die optimale Steuerung impulsiver Systeme geben.

In [22, Kap. 2.4] wird zunächst die impulsive Systemgleichung um eine Steuerung u ergänzt. Danach werden Begriffe wie "zulässige Kontrolle", "Kostenfunktional" und "Zielmenge" definiert. Den Kern dieses Kapitels bildet das anschließende Theorem über die Existenz einer optimalen Kontrolle.

Eine oft zitierte Literaturquelle ist das Werk [28]. Der Autor präsentiert ein sehr umfassendes Werk zur Theorie impulsiver Systeme und insbesondere in Kap. 6 einige Resultate bezüglich optimaler Steuerung. Auch hier werden zu Beginn verschiedene Definitionen eingeführt und im Anschluss zwei Aussagen zur Existenz optimaler Steuerungen vorgestellt und ausführlich bewiesen.

Ebenso gehen die Autoren in [6] auf das Problem der optimalen Steuerung ein. In Kap. 4 wird erneut eine Steuerung in die Systemgleichung eingebaut und anhand verschiedener Annahmen die Existenz der Lösung des impulsiven Vorgangs garantiert. Nach der Definition verschiedener Begriffe folgt in Kap. 5 ein Theorem zur Existenz einer optimalen Kontrolle und der entsprechende Beweis.

4.4 Beispielklassen

Um ein Gefühl für impulsive Systeme in unserer Formulierung (4.1) zu bekommen, wollen wir die früheren Beispiele aus dem Kapitel 2 in diesem Kontext erneut betrachten und sie größeren Beispielklassen zuordnen. Da wir nun die Funktionen beschränkter Variation zur Verfügung haben, können wir die Sprungbedingung neu verarbeiten und direkt in die Integralgleichung stecken.

Zusätzlich wollen wir hier anhand unserer Ergebnisse aus Kapitel 3.3 die zu den Funktionen aus NBV gehörenden regulären Borel-Maße berechnen. Damit könnte man dann die folgenden impulsiven Systeme äquivalent in Form einer Integralgleichung mit Maßen schreiben (vgl. etwa [28], [7] oder [5]).

4.4.1 Impulsive Kontrolle

Die erste Problemklasse, die wir betrachten, beschreibt Systeme in denen die Impulse als Steuerung auftauchen, die wir selber beliebig kontrollieren können. Das bedeutet, dass sowohl die Höhe der Sprünge als auch die Zeitpunkte ihres Auftretens vollständig bekannt sind. Das Beispiel aus Kapitel 2.1 ist genau von diesem Typ.

Wir betrachten deswegen erneut die Fischpopulation, die zu bestimmten Zeitpunkten $t_k, k = 1, \dots, M$ um einen Prozentsatz a_k abgefischt wird. Wir benötigen nun eine entsprechende Funktion $\alpha[x](t) \in BV$, die gerade diese Sprungeigenschaft modelliert. Dazu definieren wir Sprungfunktionen

$$\alpha_{t_k}[x](t) := \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ -a_k x(t_k^-), & t_k \leq t \end{cases}$$

und fassen diese in einer einzelnen Sprungfunktion

$$\alpha[x](t) := \sum_{k=1}^M \alpha_{t_k}[x](t) \quad (4.5)$$

zusammen. Nach [21, Kap. VIII, §3] ist $\alpha[x](t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\alpha[x](t) = \alpha_{\text{Sprung}}[x](t)$, es existieren also keine absolutstetigen oder singulären Anteile. Weiterhin benötigen wir die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} F(t, x) &= Cx, \\ G(t, x) &= (1). \end{aligned}$$

und betrachten dann das System

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t Cx(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t d\alpha[x](\tau), \\ x_{t_0} &= x_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit

$$\begin{aligned}
C &\in \mathbb{R}^+ && \text{(Wachstumsrate),} \\
t_0 &\in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^+ && \text{(Anfangspopulation zur Zeit } t_0), \\
M &\in \mathbb{N}, k = 1, \dots, M, && \\
t_k &\in \mathbb{R}, t_0 < t_k < t_{k+1} && \text{(Abfischzeitpunkte),} \\
a_k &\in [0, 1) && \text{(Abfischquote),}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

und behaupten, dass es dieselbe Lösung liefert wie beim früheren Ansatz mit der Sprungbedingung (2.1). Unter Verwendung von [21, Kap. VIII, §6, Satz 3] oder [33, Kap. 1, §6] gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t d\alpha[x](\tau) &= \sum_{j=1}^k \alpha_{t_j}[x](t) \\
&= \sum_{j=1}^k -a_j x(t_j^-).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

für k mit $t_k \leq t < t_{k+1}$. Nun kann man die Systemgleichung (4.6) zwischen den Sprungpunkten klassisch lösen und ansonsten diesen Ausdruck als eine Korrektur des jeweiligen Anfangswertes der Trajektorie im Intervall $[t_k, t_{k+1})$ betrachten. Man sieht sofort die Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis (2.4). Somit löst (2.4) auch das System (4.6) und die beiden Modellierungen sind demnach äquivalent.

Bemerkung 4.8. *Definiert man hier $\tilde{\alpha}_{t_k} := -\alpha_{t_k}$, so gilt $\tilde{\alpha}_{t_k} \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ und aufgrund der Einfachheit der Funktion insbesondere $\tilde{\alpha}_{t_k} \in \mathcal{W}$ für $k = 1, \dots, M$ (vgl. Bemerkung 3.8 und (3.11)). Aufgrund unserer Resultate aus Kapitel 3.3 können wir dann das nach (3.14) zugehörige Maß $\tilde{\nu}_{\tilde{\alpha}_{t_k}}$ berechnen. Durch Anwendung der Abbildungsvorschrift erhalten wir dann für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_{\tilde{\alpha}_{t_k}}((a, b]) &= \tilde{\alpha}_{t_k}[x](b) - \tilde{\alpha}_{t_k}[x](a) \\
&= -(\alpha_{t_k}[x](b) - \alpha_{t_k}[x](a)) \\
&= - \begin{cases} 0, & \text{falls } a, b < t_1 \text{ oder } t_k \leq a, b \\ -a_k x(t_k^-), & \text{falls } a < t_k \leq b \end{cases} \\
&= a_k x(t_k^-) \cdot \delta_{t_k}((a, b]).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt das zu $\tilde{\alpha}$ zugehörige Borel-Maß

$$\tilde{\nu}_{\tilde{\alpha}}((a, b]) = \sum_{k=1}^M a_k x(t_k^-) \cdot \delta_{t_k}((a, b]).$$

Durch die Definition von $\tilde{x} := -x$ könnte man dann das ganze impulsive System für die Fischkultur bis auf das Vorzeichen äquivalent als Integralgleichung mit Maßen formulieren.

4.4.2 Trajektorienabhängige Impulse

In diesem Abschnitt werden wir eine Systemklasse betrachten, bei welcher der Impuls nicht von vornherein bekannt ist, sondern sogar von der Lösung selber abhängen darf. Die tatsächlichen Sprunghöhen und Auftrittszeitpunkte ergeben sich demnach erst beim Berechnen der Lösung und werden als zusätzliche Unbekannte betrachtet. Das gekoppelte Masse-Feder-System aus Kapitel 2.2 hat genau diese Form.

Wir modellieren dieses Beispiel also erneut, diesmal allerdings ohne unser Wissen über Sprunghöhe und Zeitpunkt aus der theoretischen Analyse der glatten approximierenden Probleme. Dazu verwenden wir die allgemeine Sprungbedingung (2.20)

$$x_2(t_1) = -x_2(t_1^-), \text{ für } t_1 \text{ mit } x_1(t_1) = 0$$

und definieren damit die Funktion

$$\alpha_{t_1}[x](t) := \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -2x_2(t_1^-), & t_1 \leq t \end{cases}$$

sowie die Sprungfunktion

$$\alpha[x](t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{t_1}[x](t) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Dabei ist wegen [21, Kap. VIII, §3] $\alpha_{t_1}[x](t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und somit auch $\alpha[x](t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Außerdem ist $\alpha_{t_1}[x](t) = \alpha_{t_1, \text{Sprung}}[x](t)$, da $\alpha_{t_1}[x](t)$ schon eine Sprungfunktion ist und somit keine absolutstetigen oder singulären Anteile existieren. Weiterhin definieren wir die Systemfunktionen

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G(t, x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann beschreibt das folgende System von Integralgleichungen die Dynamik des harten Stoßes:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\alpha[x](\tau), \\ x_{t_0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\alpha[x](t)$ von beschränkter Variation ist, existiert wegen [21, Kap. VIII, §6, Satz 1] bzw. [33, Kap. 1, §4, Theorem 4a] das Integral $\int d\alpha_{t_1}$. Die Gleichung für $x_2(t)$ kann man etwa mit

der Eigenschaft (i) aus Lemma 3.54 leicht lösen und erhält

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \dot{x}_0 + \int_{t_0}^t 0 \, d\tau + \int_{t_0}^t d\alpha_{t_1}[x](\tau) \\
 &= \dot{x}_0 - 2x_2(t_1^-) \cdot \begin{cases} 0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ 1 & , t_1 \leq t \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \dot{x}_0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ -\dot{x}_0 & , t_1 \leq t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $x_2(t)$ dieselbe Lösung wie schon in der früheren Modellierung. Die restlichen Rechenschritte können jetzt völlig analog durchgeführt werden. Man sieht erneut die Äquivalenz unseres impulsiven Systems nach (4.1) mit der vorherigen Modellbildung (2.21).

Bemerkung 4.9. Auch hier definieren wir $\tilde{\alpha}_{t_1} := -\alpha_{t_1}$, sodass $\tilde{\alpha}_{t_1} \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ und aufgrund der Einfachheit der Funktion insbesondere $\tilde{\alpha}_{t_1} \in \mathcal{W}$ gilt (vgl. Bemerkung 3.8 und (3.11)). Damit berechnen wir gemäß unseren Resultaten aus Kapitel 3.3 das zu $\tilde{\alpha}_{t_1}$ zugehörige Maß $\tilde{\nu}_{\tilde{\alpha}_{t_1}}$ berechnen. Dazu wenden wir wieder die Abbildungsvorschrift (3.14) an und erhalten dadurch für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nu}_{\tilde{\alpha}_{t_1}}((a, b)) &= \tilde{\alpha}_{t_1}[x](b) - \tilde{\alpha}_{t_1}[x](a) \\
 &= -(\alpha_{t_1}[x](b) - \alpha_{t_1}[x](a)) \\
 &= - \begin{cases} 0, & \text{falls } a, b < t_1 \text{ oder } t_1 \leq a, b \\ -2x_2(t_1^-), & \text{falls } a < t_1 \leq b \end{cases} \\
 &= 2x_2(t_1^-) \cdot \delta_{t_1}((a, b]).
 \end{aligned}$$

Auch hier könnte man dann mit der Definition $\tilde{x} := -x$ das impulsive System der Masse-Feder-Anordnung bis auf das Vorzeichen äquivalent als Integralgleichung mit Maßen formulieren.

4.4.3 Impulse mit Häufungspunkt

Die im folgenden Kapitel vorgestellte Beispielklasse behandelt erneut Impulse, deren Auftrittszeitpunkte und Sprunghöhen unbekannt sind, da diese von der Lösung abhängen. Zusätzlich wollen wir aber zwei weitere interessante Aspekte betrachten:

- Die Impulse treten als unendliche Folge auf.
- Die Auftrittszeitpunkte besitzen sogar einen Häufungspunkt.

Der hüpfende Ball aus Kapitel 2.3 besitzt genau diese Eigenschaften. Hier setzen wir folgende Systemgestalt im Sinne von Gleichung (4.1) an:

$$x(t) = x_{t_0} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ -g \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\alpha[x](\tau) \quad (4.10)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x_{t_0} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Sprungbedingung

$$x_2(t_k) = -\mu x_2(t_k^-), \text{ falls } x_1(t_k^-) = 0 \text{ und } x_2(t_k^-) \leq 0 \quad (4.11)$$

wie in der Modellierung von früher. In der Schreibweise von Gleichung (4.1) gilt somit

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) &= \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -g \end{pmatrix}, \\ G(t, x(t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zudem ergibt sich durch Einsetzen der Sprungbedingung für den Integrator des Riemann-Stieltjes-Integrals

$$\begin{aligned} \alpha_2[x](t) &= \sum_{\substack{k:t_k \leq t, \\ x_1(t_k^-)=0, x_2(t_k^-) \leq 0}} (x_2(t_k) - x_2(t_k^-)) \\ &= \sum_{\substack{k:t_k \leq t, \\ x_1(t_k^-)=0, x_2(t_k^-) \leq 0}} (1 + \mu)(-x_2(t_k^-)) \end{aligned}$$

und somit

$$\alpha[x](t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2[x](t) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist wegen [21, Kap. VIII, §3] $\alpha_2[x](t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und somit auch $\alpha[x](t) \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Außerdem ist $\alpha_2[x](t) = \alpha_{2, \text{Sprung}}[x](t)$, da $\alpha_2[x](t)$ schon eine Sprungfunktion ist und somit keine absolutstetigen oder singulären Anteile existieren. Diesen Ausdruck setzen wir nun in die Systemgleichung ein und erhalten

$$\int_{t_0}^t d\alpha_2[x](\tau) = \sum_{\substack{k:t_k \leq t, \\ x_1(t_k^-)=0, x_2(t_k^-) \leq 0}} (1 + \mu)(-x_2(t_k^-)) \quad (4.12)$$

in der zweiten Komponente. Nun lässt sich die Integralgleichung erneut klassisch lösen, solange die Sprungbedingung (4.11) nicht erfüllt ist. Ansonsten berechnet man (4.12) für das aktuelle t , fügt diesen konstanten Term zur zweiten Komponente hinzu und rechnet anschließend wieder auf klassische Weise weiter. Durch dieses Vorgehen kann man die Lösung $x(t)$ von (4.10) berechnen und mit der früheren des Systems (2.25)–(2.27) vergleichen. Man sieht, dass die beiden Trajektorien miteinander übereinstimmen und somit auch die beiden Modellierungen äquivalent sind.

Bemerkung 4.10. Hier gilt aufgrund der Definition $\alpha_2 \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ und aufgrund der Einfachheit der Funktion insbesondere $\alpha_2 \in \mathcal{W}$ (vgl. Bemerkung 3.8 und (3.11)). Damit können wir das nach (3.14) zu α_2 zugehörige Maß ν_{α_2} berechnen. Durch Anwendung der Abbildungsvorschrift erhalten wir dann für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha_2}((a, b)) &= \alpha_2[x](b) - \alpha_2[x](a) \\ &= \sum_{\substack{k: a < t_k \leq b, \\ x_1(t_k^-) = 0, x_2(t_k^-) \leq 0}} (1 + \mu)(-x_2(t_k^-)). \end{aligned}$$

Damit lässt sich das ganze impulsive System für den hüpfenden Ball äquivalent als Integralgleichung mit Maßen formulieren.

4.4.4 Optimale Steuerungsprobleme für nicht-impulsive Systeme mit Zustandsbeschränkungen

Die sogenannten optimalen Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen (vgl. [14, Kap. 5.2]) stellen an sich noch keine Beispielklasse für impulsive Systeme dar. Interessant an ihnen ist jedoch, dass man bei ihrer Behandlung gerade durch die Vorgabe von Zustandsbeschränkungen auf Impulse stoßen kann. Wenn man nämlich das Maximumprinzip formuliert, so tauchen diese in der adjungierten Gleichung auf und die adjungierte Trajektorie kann demzufolge Sprünge aufweisen.

Bei optimalen Steuerungsproblemen versucht man ein Zielfunktional \mathcal{J} , welches von einem Zustand $x(t)$ und einer Steuerung $u(t)$ abhängt, zu minimieren. Diese Größen unterliegen dabei noch einigen Nebenbedingungen und insgesamt ergibt sich das folgende Gesamtsystem:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) &= \int_{t_0}^T f(t, x, u) dt \rightarrow \inf; \\ \dot{x} &= \varphi(t, x, u), \\ u &\in U, \\ h_0(x(t_0)) &= 0, \quad h_1(x(T)) = 0, \\ g_i(t, x(t)) &\leq 0, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

und die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_l} \quad (l = 0, 1)$$

stetig sind und nach x stetig differenzierbar. Auf dieses Problem kann man nun das Pontrjaginsche Maximumprinzip anwenden, welches hierfür eine notwendige Optimalitätsbedingung liefert.

Satz 4.11 ([14, Kap. 5.2.1, Satz 1]). *Wir nehmen an, dass $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ Lösung der optimalen Steuerungsaufgabe (4.13) ist. Dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $p(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und auf den Mengen $T_i = \{t \in [t_0, T] | g_i(t, \hat{x}(t)) = 0\}$ konzentrierte nichtnegative reguläre Maße $\mu_i, i = 1, \dots, k$, auf $[t_0, T]$ (wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, dass folgendes gilt:
Die Vektorfunktion $p(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung*

$$\begin{aligned} p(t) = & -h_1'^*(\hat{x}(T))l_1 + \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), p(\tau), \lambda_0) d\tau \\ & - \sum_{i=1}^k \int_t^T \frac{\partial g_i}{\partial x}(\tau, \hat{x}(\tau)) d\mu_i \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit

$$p(t_0) = h_0'^*(\hat{x}(t_0))l_0 \quad (4.15)$$

und der Hamilton-Funktion

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle - \lambda_0 f(t, x, u)$$

sowie den transponierten Jacobi-Matrizen $h_1'^*$ und $h_0'^*$.

Bemerkung 4.12. *Wie man leicht sieht, ergibt sich aus Satz 4.11 die Formulierung in [12, Kap. 4.2, Satz 4.2.4] und umgekehrt, indem man die Adjungierte p durch $-\tilde{p}$ ersetzt und anschließend alle Gleichungen mit -1 durchmultipliziert. In [12] wird zudem das Minimumprinzip mit normalisierten Funktionen beschränkter Variation formuliert, das Maximumprinzip in Satz 4.11 dagegen mit regulären Maßen. An dieser Tatsache sieht man erneut die Äquivalenz dieser beiden Formalismen, die wir in Kapitel 3.3 gezeigt haben.*

Die Gleichung (4.14) wird **adjungierte Gleichung** genannt. Aufgrund der hier vorkommenden Integrale bezüglich der Maße μ_i kann die Funktion $p(\cdot)$ Unstetigkeiten aufweisen. Sie ist jedoch stets eine Funktion beschränkter Variation. Insofern ist die adjungierte Gleichung bis auf den Maßaspekt ein impulsives System im Sinne unserer Formulierung (4.1).

Ein konkretes Beispiel für diese Klasse von Problemen haben wir in Kapitel 2.4 vorgestellt. Das dort betrachtete optimale Steuerungsproblem der Wasserbehälter mit Abfluss ist genau von der Form (4.13). Hier gilt

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= -(10 - \frac{t}{s})u_1 - \frac{t}{s}u_2, \\ \varphi(t, x, u) &= \begin{pmatrix} -u_1 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}, \\ u_1(t), u_2(t) &\in [0, 1], \text{ f.ü. in } [0, 10], \\ h_0(x(0)) &= \begin{pmatrix} x_1(0) - 4 \\ x_2(0) - 4 \end{pmatrix}, \quad h_1(x(10)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g_i(t, x(t)) &= -x_i(t) \leq 0, \quad t \in [0, 10], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Mit der hieraus definierten Hamilton-Funktion

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = -p_1 u_1 + p_2 (u_1 - u_2) + \lambda_0 \left(10 - \frac{t}{s}\right) u_1 - \frac{t}{s} u_2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ h'_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ h'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Satz 4.11 erhält man dann die zugehörige adjungierte Gleichung als impulsives System der Form (4.1):

$$\begin{aligned} p(t) &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} l_1 + \int_t^{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau - \sum_{i=1}^2 \int_t^{10} \frac{\partial g_i}{\partial x} d\mu_i \\ &= \begin{pmatrix} \int_t^{10} d\mu_1 \\ \int_t^{10} d\mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1(10) - \mu_1(t) \\ \mu_2(10) - \mu_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$p(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} l_0 = l_0.$$

Aufgrund der Struktur des Problems ist das impulsive System hier von sehr einfacher Gestalt. Für die weitere Betrachtung dieses konkreten Falles verweisen wir auf [12, Kap. 6.4.2].

Teil III
Numerische Analyse

Kapitel 5

Numerik von Riemann-Stieltjes Integralen

Wir werden uns in diesem Kapitel näher mit der numerischen Behandlung von Riemann-Stieltjes-Integralen beschäftigen und dazu einige Quadraturformeln und Konvergenzaussagen vorstellen. Unsere grundlegende Problemstellung ist dabei die Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \tag{5.1}$$

mit den Funktionen $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die genauen Voraussetzungen wollen wir hier noch offen lassen und in den jeweiligen Verfahren und Aussagen genauer betrachten.

5.1 Quadraturverfahren

In diesem Abschnitt werden wir im Wesentlichen zwei Ansätze zur Approximation des Riemann-Stieltjes-Integrals vorstellen, zum einen anhand der Riemann-Stieltjes-Summe, zum anderen durch geschlossene Newton-Cotes-Formeln. Die theoretische Grundlage dazu bilden die Werke [8, Kap. 8] und [32].

5.1.1 Riemann-Stieltjes-Summe

Zuerst betrachten wir eine recht naive Herangehensweise, indem wir die Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals in (3.25) ausnutzen. Diese Riemann-Summe stellt auf ganz natürliche Weise eine Approximation an das tatsächliche Integral dar. In seiner einfachsten Form approximiert man das Integral nur anhand eines festen Punktes $\xi \in [a, b]$ durch

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \approx f(\xi) [\alpha(b) - \alpha(a)] \tag{5.2}$$

und ganz allgemein mit einer Unterteilung $a = \tau_0 < \dots < \tau_n = b$ des Intervalls durch

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)]. \quad (5.3)$$

mit einem frei wählbaren $\xi_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Eine umfassende Sammlung von Aussagen zu dieser Herangehensweise findet sich etwa in [8, Kap. 8, Abschnitte 3.2 und 3.3 sowie 4.3 und 4.4]. Insbesondere werden wir auf die dort gemachten Ausführungen aus 4.3 sowie 4.4 im Rahmen der Konvergenzanalyse vertieft eingehen. Dabei werden wir für die Ansätze (5.2) und (5.3) entsprechende Resultate herleiten.

5.1.2 Geschlossene Newton-Cotes-Formeln

Für den Riemannschen Fall existiert eine ganze Approximationsklasse zur näherungsweise Berechnung des Integrals, die sogenannten Newton-Cotes-Formeln (siehe [30] oder auch [16] und [31]). Bei diesen wird der Integrand durch ein interpolierendes Polynom ersetzt und dieses anschließend exakt integriert. Die geschlossenen Formeln nutzen dabei die Intervallränder bzw. Integrationsgrenzen als Stützstellen mit, die offenen nicht. Als Endergebnis erhält man eine Linearkombination von Funktionswerten der zu integrierenden Funktion f , wobei die einzelnen Summanden jeweils mit (noch zu bestimmenden) Gewichten multipliziert werden. In [32, Kap. 2 und Kap. 3] wird eine Erweiterung dieser Theorie für das Riemann-Stieltjes-Integral vorgestellt. Der Autor legt in seinen Ausführungen besonderen Wert darauf, Ableitungen weder von f noch von α bei der Integralberechnung zu verwenden, da diese Stabilitätsprobleme bei der numerischen Behandlung verursachen und schwierig zu berechnen sein können.

Wir betrachten nun eine Unterteilung $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ des Intervalls $[a, b]$. Es sei \mathcal{C} der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a, b]$ und $f \in \mathcal{C}$. Weiterhin sei A_n der aus den Polynomen vom Höchstgrad n bestehende Unterraum von \mathcal{C} und

$$P_n : \mathcal{C} \rightarrow A_n$$

eine Projektion auf A_n , wobei $P_n(f)$ das Polynom in A_n mit kleinstem Grad bezeichnet, welches f in $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ interpoliert. Für die allgemeine Formel wird an dieser Stelle gefordert, dass α eine stetige Funktion beschränkter Variation ist. Diese Voraussetzung ist für unsere Zwecke eigentlich zu stark, wir werden sie jedoch in den später folgenden Konvergenzaussagen für $n = 1$ wieder abschwächen können. Als erstes ersetzen wir den Integranden f in (5.1) durch sein interpolierendes Polynom $P_n(f)$. Durch partielle Integration anhand von Satz 3.51 und Ausnutzung des Satzes 3.52 wird das Problem dann in ein gewöhnliches Integral umformuliert. Da der Integrand $\alpha P_n(f)'$ nun eventuell noch nicht geschlossen integriert werden kann, wenden wir auf ihn erneut die Projektion P_n an und erhalten schließlich die gesuchte Newton-Cotes-Formel

$$Q_n^{RS}(f, \alpha) := f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b P_n(\alpha P_n(f)')(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

für Riemann-Stieltjes-Integrale. Abbildung 5.1 zeigt die beschriebene Herleitung inklusive der entsprechenden Formeln.

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \int_a^b P_n(f)(\tau) d\alpha(\tau) \\
 & \quad \downarrow \\
 & f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(\tau) P_n(f)'(\tau) d\tau \\
 & \quad \downarrow \\
 Q_n^{RS}(f, \alpha) & := f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b P_n(\alpha P_n(f)')(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.1: Herleitung der allgemeinen Newton-Cotes-Formel für das Riemann-Stieltjes-Integral

Bemerkung 5.1. *Man kann zeigen, dass $Q_n^{RS}(f, \alpha)$ für den Fall $\alpha(\tau) = \tau$ mit der klassischen Newton-Cotes-Formel übereinstimmt. Man könnte aber auch umgekehrt ansetzen und in den klassischen Formeln $\alpha(\tau)$ für τ einzusetzen. Dieser Weg führt aber im Allgemeinen nicht auf die Approximation nach (5.4), wie man z.B. anhand der später formulierten Simpson-Regel sieht.*

Wir wollen in den nächsten beiden Abschnitten speziell auf die Wahl von $n = 1$ und $n = 2$ eingehen und dazu die entsprechende Gestalt von $Q_n^{RS}(f, \alpha)$ angeben.

5.1.3 Trapezregel

Die erste Newton-Cotes-Formel für Riemann-Stieltjes-Integrale, die wir explizit vorstellen wollen, ist die sogenannte Trapezregel. Wir werden dazu die in Abbildung 5.1 gezeigten Schritte zur Herleitung vollständig nachvollziehen.

Wir wählen hier $n = 1$ und stellen damit im ersten Schritt das in den Punkten a und b interpolierende Polynom

$$P_1(f)(\tau) = f(a) \frac{\tau - b}{a - b} + f(b) \frac{\tau - a}{b - a}$$

auf. Dieses wird im zweiten Schritt nach τ abgeleitet und anschließend mit α multipliziert. Daraus ergibt sich

$$\alpha(\tau) P_1(f)'(\tau) = \alpha(\tau) \cdot \left[\frac{f(a)}{a - b} + \frac{f(b)}{b - a} \right].$$

Zur Interpolation dieser Funktion in den Punkten a und b benutzt man das Polynom

$$P_1(\alpha P_1(f)')(\tau) = \underbrace{\alpha(a) \left[\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right]}_{:=A_1} \frac{\tau - b}{a - b} + \underbrace{\alpha(b) \left[\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right]}_{:=A_2} \frac{\tau - a}{b - a},$$

welches nun noch integriert werden muss. Dabei erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_a^b P_1(\alpha P_1(f)')(\tau) d\tau &= \left[\frac{A_1}{a-b} \left(\frac{1}{2} \tau^2 - b\tau \right) + \frac{A_2}{b-a} \left(\frac{1}{2} \tau^2 - a\tau \right) \right]_a^b \\
 &= \frac{A_1}{a-b} \left[\frac{1}{2} (b^2 - a^2) - (b^2 - ab) \right] + \frac{A_2}{b-a} \left[\frac{1}{2} (b^2 - a^2) - (ab - a^2) \right] \\
 &= \frac{A_1}{a-b} \left[-\frac{1}{2} a^2 + ab - \frac{1}{2} b^2 \right] + \frac{A_2}{b-a} \left[\frac{1}{2} a^2 - ab + \frac{1}{2} b^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (a-b)^2 \left[-\frac{A_1}{a-b} - \frac{A_2}{a-b} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (a-b) \left\{ -\alpha(a) \left[\frac{f(a) - f(b)}{a-b} \right] - \alpha(b) \left[\frac{f(a) - f(b)}{a-b} \right] \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} (\alpha(a) + \alpha(b)) (f(a) - f(b)).
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt setzen wir diesen Ausdruck in (5.4) ein und es ergibt sich die folgende geschlossene Newton-Cotes-Formel für die Wahl $n = 1$:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{RS}(f, \alpha) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) + \frac{1}{2} [\alpha(a)f(a) - \alpha(a)f(b) + \alpha(b)f(a) - \alpha(b)f(b)] \\
 &= \frac{1}{2} [f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - f(b)\alpha(a) + f(a)\alpha(b)] \\
 &= \frac{f(b) + f(a)}{2} [\alpha(b) - \alpha(a)].
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für den Fall $\alpha(\tau) = \tau$ sieht man sofort die Übereinstimmung der aufgestellten Formel mit der für das Riemann-Integral bekannten Trapezregel

$$\int_a^b f(\tau) d\tau \approx \frac{f(b) + f(a)}{2} [b - a].$$

Man könnte hier auch umgekehrt beginnen und ausgehend von dieser klassischen Formel versuchen, eine Verallgemeinerung für das Riemann-Stieltjes-Integral zu finden. Dazu würde man naiv den Term $b-a$ durch $\alpha(b) - \alpha(a)$ ersetzen, was in diesem Fall auch zum gewünschten Ziel führt. Anders bei der folgenden Formel für die Wahl $n = 2$.

5.1.4 Simpson-Regel

Eine weitere beim Riemann-Integral bekannte geschlossene Newton-Cotes-Formel ist die Simpson-Regel, die anhand von drei Stützstellen eine Integral-Approximation realisiert. In der allgemeinen Newton-Cotes-Formel (5.4) für das Riemann-Stieltjes-Integral muss man

dementsprechend $n = 2$ wählen und erhält damit die Näherung

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \approx Q_2^{RS}(f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{6} [f(a) + 4f(m) + f(b)] \\ + \frac{f(b) - f(a)}{3} [\alpha(a) - 2\alpha(m) + \alpha(b)], \quad (5.6)$$

wobei $m = \frac{a+b}{2}$. Setzt man $\alpha(\tau) = \tau$, so erkennt man auch hier sofort die Übereinstimmung dieser Formel mit der Version beim Riemann-Integral. Wenn man umgekehrt von der klassischen Simpson-Regel für Riemann-Integrale ausgeht und erneut die Terme $b - a$ durch $\alpha(b) - \alpha(a)$ ersetzt, ergibt sich allerdings nicht die dargestellte Newton-Cotes-Formel. Stattdessen ist der zweite Term in (5.6) ein hier zusätzlich auftretender Korrekturfaktor, der die Variation von α über $[a, m]$ und $[m, b]$ berücksichtigt.

5.2 Konvergenzaussagen

Wir stellen in diesem Abschnitt Konvergenzaussagen für einige der eben motivierten Quadraturverfahren bzw. ihre iterierten Versionen vor. Bei iterierten Verfahren wendet man Quadraturformeln nicht einmal auf das gesamte Integrationsgebiet sondern mehrmals auf Teilintervalle an und setzt die Einzelergebnisse dann wieder zusammen. Wir betrachten hier eine Zerlegung $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ mit den jeweiligen Schrittweiten $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$.

5.2.1 Riemann-Stieltjes-Summe

Wir widmen uns zunächst der Riemann-Stieltjes-Summe, da sie die natürlichste Art der Berechnung des Riemann-Stieltjes-Integrals darstellt. In einem ersten Schritt beweisen wir die Konvergenz auf einem Teilintervall $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, was dem Ansatz (5.2) entspricht. Darauf aufbauend formulieren wir eine entsprechende Aussage für die in (5.3) motivierte Approximation.

Satz 5.2. *Es seien f und α Funktionen auf dem Intervall $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Dabei sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ und α von beschränkter Variation. Dann gilt*

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \bar{f}_i \right| \leq \frac{L}{4} h_i V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha), \quad (5.7)$$

mit $\bar{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\tau$ und $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i$.

Beweis: Da f Lipschitz-stetig und α von beschränkter Variation ist, können wir Satz 3.59 anwenden und es gilt

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) \right| \leq \max_{\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |f(\tau)| \cdot V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha). \quad (5.8)$$

Dann folgern wir mit Eigenschaft (i) aus Lemma 3.54

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \bar{f}_i \right| = \\
& = \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [f(\tau) - \bar{f}_i] d\alpha(\tau) \right| \\
& \stackrel{(5.8)}{\leq} \max_{\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |f(\tau) - \bar{f}_i| V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
& = \frac{1}{h_i} \max_{\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) ds - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(s) ds \right| V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
& \leq \frac{1}{h_i} \max_{\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(\tau) - f(s)| ds \right) V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
& \stackrel{f \text{ Lipschitz}}{\leq} \frac{1}{h_i} \max_{\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} L|\tau - s| ds \right) V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) =: (\star).
\end{aligned}$$

Da bei der Maximumbildung $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ gilt, können wir den Integrationsbereich in zwei Teile zerlegen und damit den Betrag auflösen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\tau - s| ds &= \int_{\tau_i}^{\tau} (\tau - s) ds + \int_{\tau}^{\tau_{i+1}} -(\tau - s) ds \\
&= \tau(\tau - \tau_i) - \frac{s^2}{2} \Big|_{\tau_i}^{\tau} - \tau(\tau_{i+1} - t) + \frac{s^2}{2} \Big|_{\tau}^{\tau_{i+1}} \\
&= \tau^2 - \tau(\tau_{i+1} + \tau_i) + \frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2}.
\end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass diese in τ quadratische Funktion ihr Maximum an der Stelle $\tau = \frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2}$ besitzt. Eingesetzt ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
(\star) &= \frac{L}{h_i} \left[\left(\frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2} \right)^2 - \frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2} (\tau_{i+1} + \tau_i) + \frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} \right] V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
&= \frac{L}{h_i} \left[- \left(\frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2} \right)^2 + \frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} \right] V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
&= \frac{L}{h_i} \left(\frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} \right)^2 V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
&= \frac{L}{h_i} \frac{h_i^2}{4} V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\
&= \frac{L}{4} h_i V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha)
\end{aligned}$$

und somit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 5.3. In [8, Kap. 4.4] findet sich eine Variante dieses Satzes mit schwächeren Voraussetzungen. Darin wird lediglich die Stetigkeit von f gefordert, allerdings auf Kosten einer schlechteren Abschätzung, in die, statt dem Faktor $\frac{L}{4}h_i$, der sogenannte Stetigkeitsmodul $\omega[f, h_i] = \sup_{|s-\tau| \leq h_i} |f(s) - f(\tau)|$ eingeht.

Der Term \bar{f}_i scheint auf den ersten Blick für die Berechnung des Riemann-Stieltjes-Integrals hinderlich zu sein. Tatsächlich kann man aber die Approximation nach (5.2) mit $f(\xi_i)$ und einem beliebigen $\xi_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ auf die Abschätzung (5.7) zurückführen, wie das folgende Korollar zeigt.

Korollar 5.4. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2 gilt

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i) \right| \leq \frac{5}{4} L h_i V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \quad (5.9)$$

mit einem beliebigen $\xi_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Beweis: Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt zunächst

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i) \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \bar{f}_i \right| + |[\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \cdot [f(\xi_i) - \bar{f}_i]|. \end{aligned}$$

Aufgrund des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung ist

$$\bar{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\tau = f(\hat{\xi}_i)$$

mit einem festen $\hat{\xi}_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Somit können wir \bar{f}_i im zweiten Term ersetzen und unter zusätzlicher Ausnutzung der Lipschitz-Eigenschaft von f ergibt sich

$$\begin{aligned} |[\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \cdot [f(\xi_i) - \bar{f}_i]| &= |[\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] \cdot [f(\xi_i) - f(\hat{\xi}_i)]| \\ &\leq V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \cdot |f(\xi_i) - f(\hat{\xi}_i)| \\ &\leq V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) L |\xi_i - \hat{\xi}_i| \\ &\leq V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) L h_i. \end{aligned}$$

Auf den ersten Term wenden wir nun Satz 5.2 an und erhalten damit das gewünschte Resultat. \square

Dieses Korollar liefert zusammen mit Satz 5.2 eine echte Aussage über den Approximationsfehler in der Integral-Näherung (5.2) für ein beliebig wählbares $\xi_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Unser nächstes Ziel ist nun, eine analoge Aussage über die Riemann-Stieltjes-Summe (5.3) zu formulieren. Das Resultat findet sich wieder in [8, Kap. 4.4] in einer leicht abgewandelten Form (vgl. Bemerkung 5.3).

Satz 5.5. *Es seien f und α Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Dabei sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ und α von beschränkter Variation. Dazu betrachten wir auf $[a, b]$ eine Zerlegung der Form $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$ mit den jeweiligen Schrittweiten $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i, i = 0, 1, \dots, n-1$. Dann gilt die Abschätzung*

$$|E_n^{iter}(f)| \leq \frac{5}{4} L \hat{h} V_a^b(\alpha) \quad (5.10)$$

mit

$$E_n^{iter}(f) = \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i)$$

und $\hat{h} = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i$ sowie frei wählbaren $\xi_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Beweis: Für die gegebene Unterteilung von $[a, b]$ gilt mit Eigenschaft (vi) aus Lemma 3.54

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau).$$

Dann können wir durch Anwendung von Korollar 5.4 folgern

$$\begin{aligned} |E_n^{iter}(f)| &= \left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau) d\alpha(\tau) - [\alpha(\tau_{i+1}) - \alpha(\tau_i)] f(\xi_i) \right| \\ &\stackrel{\text{Korollar 5.4}}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{5}{4} L h_i V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\ &\leq \frac{5}{4} L \hat{h} \sum_{i=0}^{n-1} V_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\alpha) \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.3}}{=} \frac{5}{4} L \hat{h} V_a^b(\alpha) \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 5.6. *Im Gegensatz zum Riemann-Integral verliert man hier beim Übergang von der einfachen zur iterierten Quadraturformel keine Ordnung bezüglich der Konvergenz in der Schrittweite. Dies ist genau in der Eigenschaft (iv) der Funktionen beschränkter Variation aus Lemma 3.3 begründet. Diese besagt, dass sich die Einzelvariationen über Teilintervalle zur Gesamtvariation aufaddieren und dadurch die Summation die Konvergenzordnung nicht zerstört.*

5.2.2 Iterierte Trapezregel

Wir betrachten hier die iterierte Trapezregel wie sie in [32, Kap. 3.3] vorgestellt wird. Wir werden sie für ein beliebiges Gitter $a = \tau_0 < \dots < \tau_n = b$ formulieren, die spätere Konvergenzaussage jedoch auf äquidistante Schrittweiten beschränken. Wir nutzen nun die einfache Trapezregel (5.5) aus und erhalten daraus die iterierte Form

$$Q_1^{RS}(f, \alpha; n) := \sum_{i=1}^n \frac{f(\tau_i) + f(\tau_{i-1})}{2} [\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})]. \quad (5.11)$$

Wir wollen hier eine Fehlerabschätzung für diese Formel unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen vorstellen. Dabei sei die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ **Hölder-stetig** mit Exponent $0 < p \leq 1$ und Konstante $L > 0$, d.h.

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq L |s_1 - s_2|^p$$

für $s_1, s_2 \in [a, b]$. Dann gilt folgende Aussage.

Satz 5.7. *Es sei auf dem Intervall $[a, b]$ die Zerlegung $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$ mit äquidistanter Schrittweite $h = \frac{b-a}{n} = \tau_i - \tau_{i-1}, i = 1, \dots, n$ gegeben. Dazu sei eine mit Exponent p und Konstante $L > 0$ Hölder-stetige Funktion f auf $[a, b]$ und $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - Q_1^{RS}(f, \alpha; n) \right| \leq L \left(\frac{h}{2} \right)^p V_a^b(\alpha). \quad (5.12)$$

Beweis: Für die Herleitung dieser Aussage betrachte man den direkten Beweis in [32, Kap. 3.3]. Wir wollen zusätzlich noch für $p = 1$ eine Beweisidee angeben, die unter Ausnutzung der Riemann-Stieltjes-Summe und Satz 5.5 die Konvergenz der iterierten Trapezregel mit einer etwas schlechteren Konstante liefert. Wir wählen dazu in (5.10) $\xi_i = \frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2}$. Unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - Q_1^{RS}(f, \alpha; n) \right| \leq \\ & \leq \left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - \sum_{i=1}^n [\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})] f(\xi_{i-1}) \right| + \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n [\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})] f(\xi_{i-1}) - Q_1^{RS}(f, \alpha; n) \right| \\ & \stackrel{\text{Satz 5.5}}{\leq} \frac{5}{4} L h V_a^b(\alpha) + \sum_{i=1}^n \left| f \left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2} \right) - \frac{f(\tau_i) + f(\tau_{i-1})}{2} \right| \cdot \underbrace{|\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})|}_{\leq V_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\alpha)} =: (\star). \end{aligned}$$

Den ersten Betragsterm können wir dann durch die Dreiecksungleichung und die Lipschitz-Eigenschaft weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned}
 & \left| f\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) - \frac{f(\tau_i) + f(\tau_{i-1})}{2} \right| = \\
 & = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) - f(\tau_i) + f\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) - f(\tau_{i-1}) \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \left[\left| f\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) - f(\tau_i) \right| + \left| f\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) - f(\tau_{i-1}) \right| \right] \\
 & \leq \frac{L}{2} \left[\left| \frac{\tau_i + \tau_{i-1} - 2\tau_i}{2} \right| + \left| \frac{\tau_i + \tau_{i-1} - 2\tau_{i-1}}{2} \right| \right] \\
 & \leq \frac{L}{2} h.
 \end{aligned}$$

Damit folgt für unsere eigentliche Abschätzung

$$\begin{aligned}
 (\star) & \leq \frac{5}{4} Lh V_a^b(\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{L}{2} h \cdot V_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\alpha) \\
 & = \frac{7}{4} Lh V_a^b(\alpha)
 \end{aligned}$$

und der Satz ist für eine etwas schlechtere Konstante bewiesen. \square

Die Hölder-Stetigkeit ist insofern eine gute Voraussetzung, da sie bei Differential- bzw. Integralgleichungen oft für deren Lösbarkeit und zur Formulierung von Existenzsätzen gefordert wird. Außerdem ist diese Annahme für $p = 1$ (Lipschitz-stetige Funktionen) nur minimal mehr, als für die reine Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals gefordert wird.

Neben diesen Aussagen existieren noch wesentlich bessere Fehlerabschätzungen für die Trapezregel. Allerdings werden dabei auch stärkere Forderungen an die Funktionen f und α gestellt. Ein Beispiel dafür ist der folgende Satz, welcher zusammen mit weiteren Aussagen in [19, Kap. 3] zu finden ist.

Satz 5.8. *Wir betrachten die Funktionen $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei f'' und α' stetig sind und α monoton. Es sei $G = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(\tau) d\tau$. Dann existieren $\eta, \sigma \in (a, b)$, so dass*

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - [G - \alpha(a)] f(a) - [\alpha(b) - G] f(b) = -\alpha'(\eta) f''(\sigma) \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Nun fordern wir zusätzlich die Stetigkeit von α'' . Dann existieren $\zeta, \theta, \eta, \sigma \in (a, b)$ und es gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - \frac{f(b) + f(a)}{2} [\alpha(b) - \alpha(a)] = [\alpha''(\zeta) f'(\theta) - \alpha'(\eta) f''(\sigma)] \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Beweis: Für den Beweis der ersten Gleichung betrachte man die Herleitung in der Originalliteratur [19, Kap. 3].

Die zweite Gleichung lässt sich dann mit Hilfe der ersten beweisen. Dazu approximieren wir G durch die klassische Trapezregel

$$G = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(\tau) d\tau = \frac{\alpha(a) + \alpha(b)}{2} - \alpha''(\zeta) \frac{(b-a)^2}{12}$$

mit einem $\zeta \in (a, b)$. Dann erhält man ausgehend von der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) &= [G - \alpha(a)] f(a) + [\alpha(b) - G] f(b) - \alpha'(\eta) f''(\sigma) \frac{(b-a)^3}{12} \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2} f(a) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2} f(b) - \alpha''(\zeta) \frac{(b-a)^2}{12} [f(b) - f(a)] \\ &\quad - \alpha'(\eta) f''(\sigma) \frac{(b-a)^3}{12} \\ &= \frac{f(b) + f(a)}{2} [\alpha(b) - \alpha(a)] + \alpha''(\zeta) f'(\theta) \frac{(b-a)^3}{12} - \alpha'(\eta) f''(\sigma) \frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

mit $\theta \in (a, b)$ aufgrund des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. \square

Korollar 5.9. *Unter den starken Voraussetzungen von Satz 5.8 (f'' und α'' stetig) gilt für die iterierte Trapezregel (5.11) die Abschätzung*

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - Q_1^{RS}(f, \alpha; n) \right| \leq C \frac{h^2}{12}$$

mit einer positiven Konstante $C < \infty$.

Beweis: Aufgrund der Stetigkeitsvoraussetzungen gilt in Satz 5.8

$$|\alpha''(\zeta) f'(\theta) - \alpha'(\eta) f''(\sigma)| \leq \tilde{C}$$

für eine positive Konstante $\tilde{C} < \infty$. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) - Q_1^{RS}(f, \alpha; n) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(\tau) d\alpha(\tau) - \frac{f(\tau_i) + f(\tau_{i-1})}{2} [\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})] \right| \\ &\stackrel{\text{Satz 5.8}}{\leq} \sum_{i=1}^n \tilde{C} \frac{h^3}{12} \\ &= \frac{b-a}{h} \tilde{C} \frac{h^3}{12} \\ &= C \frac{h^2}{12} \end{aligned}$$

und die behauptete Abschätzung ist bewiesen. \square

Bemerkung 5.10. *Der Satz 5.8 zeigt, dass man für die Quadraturformeln des Riemann-Stieltjes-Integrals deutlich bessere Fehlerordnungen, als die in diesem Kapitel bewiesenen, erreichen kann. Allerdings sind dann auch die Forderungen an f und α deutlich stärker und insbesondere ist $\alpha \notin BV$. Mit hinreichend starken Differenzierbarkeitsvoraussetzungen könnte man das Riemann-Stieltjes-Integral etwa mittels Satz 3.52 auf ein Lebesgue-Integral zurückführen und die dafür verfügbaren Fehlerabschätzungen verwenden.*

5.3 Ausblick und weitere Literatur

Für die Numerik von Riemann-Stieltjes-Integralen gibt es eine Vielzahl weiterer Forschungsgebiete. Ein Bereich ist etwa die Herleitung von Fehlerabschätzungen für die geschlossenen Newton-Cotes-Formeln (5.4) unter möglichst schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, wie in [32, Kap. 3.1] am Ende deutlich gemacht wird. Das letztendliche Ziel wäre dabei eine Abschätzung unter den schwächsten denkbaren Voraussetzung, der Stetigkeit von f und α nur von beschränkter Variation, wie wir sie bereits für die iterierte Trapezregel bewiesen haben.

Weiterhin wird in [32, Kap. 3.2] auf sogenannte adaptive Verfahren hingewiesen, bei denen die Schrittweiten h_i verschieden gewählt werden können. Dadurch kann man in Bereiche, in denen die Funktionen stärker schwanken, mehr Teilungspunkte legen und dort, wo die Funktionen glatter sind, entsprechend weniger, um somit die Geschwindigkeit der numerischen Berechnungen zu verbessern.

Ein interessantes Resultat wird in [19] vorgestellt. Der Autor formuliert hier eine Trapez- und eine Mittelpunktsregel, die für das Riemann-Stieltjes-Integral verallgemeinert wurden. Danach wird ein Einschließungssatz auf der Grundlage der Hadamard-Ungleichung bewiesen. Dieser könnte die Basis für numerische Einschließungsverfahren bilden.

In [20] formuliert der Autor eine verallgemeinerte Trapezregel sowie eine Simpson-Regel auf der Basis interpolierender Lagrange-Polynome. Anschließend werden hierfür entsprechende Fehlerabschätzungen bewiesen, die allerdings schlechter sind als die in [8] oder [32] zu findenden Aussagen.

Eine Konvergenzaussage für Quadraturverfahren vom Gaussschen Typ findet sich in [9].

Kapitel 6

Numerik impulsiver Integralgleichungen

Wir wollen in diesem Kapitel die für das Riemann-Stieltjes-Integral erarbeiteten Konzepte anwenden und in Kombination mit bekannten ODE-Lösern zur Analyse impulsiver Systeme bzw. Integralgleichungen der Form

$$\begin{aligned}x(t) &= x_a + \int_a^t F(\tau, x(\tau))d\tau + \int_a^t G(\tau, x(\tau))d\alpha[x](\tau) \\x_a &= x(a)\end{aligned}$$

ausnutzen (vgl. (4.1)). Die folgenden Verfahren konnten dabei in dieser Form nicht in der Literatur gefunden werden und stellen insofern einen ersten Versuch für die numerische Behandlung solcher Systeme dar. Deswegen ist auch ihre Konvergenz und damit die allgemeine Qualität der Rechenergebnisse ungesichert, was jedoch gleichzeitig ein interessanter Ausgangspunkt für zukünftige Untersuchungen sein kann.

Die Ausgangsbasis für alle Verfahren ist die Betrachtung der Systemgleichung (4.1) auf dem Zeitintervall $[a, T]$ mit einem festen $T \in \mathbb{R}$ mit $a < T$ und die Einführung eines äquidistanten Zeitgitters mit $N+1$ Stützstellen. Demzufolge ist die Schrittweite $h := \frac{T-a}{N}$ und das Zeitgitter \mathbb{G} durch

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T \quad (6.1)$$

bzw.

$$\tau_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, N \quad (6.2)$$

gegeben. Wenn wir unser System dann zum Zeitpunkt τ_{j+1} ($j = 0, \dots, N-1$) betrachten, gilt

$$x(\tau_{j+1}) = x(\tau_j) + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} F(\tau, x(\tau))d\tau + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G(\tau, x(\tau)) d\alpha[x](\tau). \quad (6.3)$$

Die exakte Lösung bezeichnen wir dabei mit $x(t)$, die numerische Approximation durch die Gitterfunktion mit $\eta^N = (\eta_0^N, \dots, \eta_N^N)$. Als Abkürzung verwenden wir η_j^N als Bezeichnung für die Gitterfunktion an der Stelle τ_j .

6.1 Das Riemann-Stieltjes-Verfahren

Wir wollen in diesem Kapitel ein einfaches numerisches Verfahren für impulsive Systeme vorstellen, welches sich die Approximation des Riemann-Stieltjes-Integrals durch die entsprechende Riemann-Stieltjes-Summe zunutze macht. Für gewöhnliche Riemann-Integrale kennt man bereits die Näherung durch Rechtecksummen. Letztlich wird hier genau dieser Ansatz auf Riemann-Stieltjes-Integrale verallgemeinert. Dazu approximieren wir das erste Integral in (6.3) durch den Riemann-Ansatz

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} F(\tau, x(\tau)) d\tau &\approx F(\tau_j, x(\tau_j)) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \\ &= F(\tau_j, x(\tau_j)) \cdot h \end{aligned} \quad (6.4)$$

mittels Rechtecksummen. Den Ausdruck (3.25) kann man als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rechteck-Summe auf das Riemann-Stieltjes-Integral interpretieren. Damit nähern wir das zweite Integral in (6.3) durch den Ausdruck

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G(\tau, x(\tau)) d\alpha[x](\tau) \approx G(\tau_j, x(\tau_j)) \cdot [\alpha[x](\tau_{j+1}) - \alpha[x](\tau_j)] \quad (6.5)$$

an. Die beiden Funktionen F und G werden dabei bewusst an der Stelle $x(\tau_j)$ ausgewertet, um hier keine implizite Abhängigkeit zu erzeugen.

Diese beiden Integralnäherungen bilden die Basis unseres numerischen Verfahrens zur Lösung des impulsiven Systems.

Algorithmus 6.1 (Riemann-Stieltjes-Verfahren I). *Wir betrachten das impulsive System (4.1). Wir wählen ein festes $T > a$ und definieren auf dem Zeitintervall $[a, T]$ für $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{T-a}{N}$ das äquidistante Zeitgitter $\mathbb{G}_N := \{\tau_j | \tau_j = a + jh, j \in 0, \dots, N\}$. Zu Beginn setzen wir*

$$\eta_0^N = x(a) = x_a$$

und iterieren dann nach der Vorschrift

$$\eta_{j+1}^N = \eta_j^N + F(\tau_j, \eta_j^N) \cdot h + G(\tau_j, \eta_j^N) \cdot [\alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j)]$$

für $j = 0, \dots, N - 1$.

Bemerkung 6.2. *An dieser Stelle ist nicht ganz klar, welche Bedeutung der Ausdruck $\alpha[\eta_j^N](\tau_j)$ haben soll. Wegen Bemerkung 4.2 wissen wir, dass die Funktion α bezüglich x fest gewählt ist. Weiterhin haben wir für unsere Modellierungen angenommen, dass in ihre Auswertung an einer Stelle τ_j im Wesentlichen $x(\tau_j)$ eingeht. Deswegen genügt es, α hier lediglich die numerische Lösung an der Stelle τ_j , also η_j^N , zu übergeben.*

Die jeweils nächste Iterierte η_{j+1}^N muss bei diesem Algorithmus implizit berechnet werden, da sie zur Auswertung der Funktion beschränkter Variation $\alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1})$ benötigt wird. Dieser Nachteil lässt sich aber abschwächen, indem man die neue Iterierte in zwei Schritten berechnet. Im ersten Schritt wird eine grobe Näherung für η_{j+1}^N ermittelt, welche dann im zweiten Schritt zur Berechnung einer feineren Approximation herangezogen wird. Die konkrete Umsetzung beinhaltet der folgende

Algorithmus 6.3 (Riemann-Stieltjes-Verfahren II). *Wir betrachten das impulsive System (4.1). Wir wählen ein festes $T > a$ und definieren auf dem Zeitintervall $[a, T]$ für $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{T-a}{N}$ das äquidistante Zeitgitter $\mathbb{G}_N := \{\tau_j | \tau_j = a + jh, j \in 0, \dots, N\}$. Zu Beginn setzen wir*

$$\eta_0^N = x(a) = x_a.$$

Für $j = 0, \dots, N-1$ gehen wir dann wie folgt vor:

(1) Zunächst berechnen wir eine erste Näherung $\tilde{\eta}_{j+1}^N$ für die neue Iterierte durch

$$\tilde{\eta}_{j+1}^N = \eta_j^N + F(\tau_j, \eta_j^N) \cdot h.$$

(2) Nun können wir diese Hilfsnäherung in die Funktion beschränkter Variation einsetzen und die neue Iterierte berechnen durch

$$\eta_{j+1}^N = \tilde{\eta}_{j+1}^N + G(\tau_j, \eta_j^N) \cdot [\alpha[\tilde{\eta}_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j)].$$

Dann setzen wir $j = j + 1$ und beginnen wieder bei Schritt (1).

Bemerkung 6.4. *Eine Adaptionsmöglichkeit für diese und die späteren Algorithmen ist die Verwendung der linearen Interpolierenden zwischen den Werten η_j^N und $\tilde{\eta}_{j+1}^N$ in der Auswertung der Funktion α . Die Motivation für ihre Verwendung ist, die Sprunghöhe der Trajektorie bereits innerhalb eines Diskretisierungsintervalls $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ berechnen zu können und damit eine bessere Approximation der Impulse zu erreichen. Zur konkreten Umsetzung übergibt man α im j -ten Schritt die 4 Argumente*

$$(\tilde{\eta}_{j+1}^N, \eta_j^N, \tau_j, \cdot),$$

wobei das letzte die Stelle angibt, an der die Funktion ausgewertet werden soll, also entweder τ_j oder τ_{j+1} . Im Falle der Auswertung in τ_j verfährt man wie üblich (vgl. Bemerkung 6.2). Falls die Auswertung in τ_{j+1} erfolgt, geht man folgendermaßen vor. Detektiert man anhand der ersten beiden Argumente eine Unstetigkeitsstelle t_k , d.h. einen Sprung im Intervall $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, so wertet man die lineare Interpolierende

$$\eta_{j,j+1}^N(t) = \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} \tilde{\eta}_{j+1}^N + \left(1 - \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}\right) \eta_j^N, \quad \tau_j \leq t \leq \tau_{j+1}$$

in t_k aus und verwendet anschließend diesen Wert statt $\tilde{\eta}_{j+1}^N$ bei der weiteren Auswertung von α . Der Gebrauch einer linearen Interpolierenden findet sich auch in der Arbeit [2].

Zur numerischen Untersuchung der bereits analytisch diskutierten Beispiele werden wir den Algorithmus 6.3 verwenden. In einem kurzen Abschnitt soll zudem eine Variante unter Verwendung der linearen Interpolierenden getestet werden. Weitere Beispiele für Algorithmen finden sich in den beiden folgenden Kapiteln.

6.2 Verallgemeinerung von Heun-Verfahren und Mittelpunktsregel

Durch die positiven Ergebnisse bei der Verallgemeinerung der Rechteck-Summe motiviert, haben wir für zwei weitere bekannte Verfahren ebenfalls entsprechende Erweiterungen auf Riemann-Stieltjes-Integrale formuliert.

Zunächst wollen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Heun-Verfahrens vorstellen. Die Grundidee ist dabei für (6.3) von der bisherigen Flächen-Approximation mittels Rechtecken zur Näherung durch Trapeze überzugehen und die Trapezhöhe $h = \tau_{j+1} - \tau_j$ beim Riemann-Stieltjes-Integral durch die Differenz $h_\alpha := \alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j)$ zu ersetzen.

Algorithmus 6.5 (Verallgemeinertes Heun-Verfahren). *Wir betrachten das impulsive System (4.1). Wir wählen ein festes $T > a$ und definieren auf dem Zeitintervall $[a, T]$ für $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{T-a}{N}$ das äquidistante Zeitgitter $\mathbb{G}_N := \{\tau_j | \tau_j = a + jh, j \in 0, \dots, N\}$. Zu Beginn setzen wir*

$$\eta_0^N = x(a) = x_a$$

und iterieren dann nach der Vorschrift

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{j+1}^N &= \eta_j^N + \frac{h}{2} [F(\tau_j, \eta_j^N) + F(\tau_{j+1}, \eta_j^N + hF(\tau_j, \eta_j^N))] \\ &\quad + \frac{h_\alpha}{2} [G(\tau_j, \eta_j^N) + G(\tau_{j+1}, \eta_j^N + h_\alpha G(\tau_j, \eta_j^N))] \end{aligned}}$$

für $j = 0, \dots, N - 1$ mit $h_\alpha := \alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j)$.

Bemerkung 6.6. *Die vorgestellte Verallgemeinerung des Heun-Verfahrens ist zunächst ein implizites Verfahren. Dies lässt sich aber umgehen, indem man in Analogie zum Riemann-Stieltjes-Verfahren die Größe*

$$\tilde{\eta}_{j+1}^N = \eta_j^N + \frac{h}{2} [F(\tau_j, \eta_j^N) + F(\tau_{j+1}, \eta_j^N + hF(\tau_j, \eta_j^N))]$$

berechnet, diese dann anstelle von η_{j+1}^N in den Algorithmus einsetzt und somit eine explizite Vorschrift erhält. Diese Version haben wir anhand einiger Beispiele numerisch getestet und teilweise sehr gute Ergebnisse erzielt. Eine genaue Analyse des Verfahrens könnte allerdings

Gegenstand künftiger Arbeiten sein.

Eine alternative Formulierung ist hinsichtlich der Auswertung von G denkbar. Dazu führt man formal die Ersetzungen

$$G(\tau_{j+1}, \eta_j^N + h_\alpha G(\tau_j, \eta_j^N)) \rightsquigarrow G(\tau_{j+1}, \eta_{j+1}^N) \rightsquigarrow G(\tau_{j+1}, \tilde{\eta}_{j+1}^N)$$

gegenüber Algorithmus 6.5 durch und approximiert damit letztlich nur das Argument von G auf eine andere Weise.

Des Weiteren wollen wir eine Verallgemeinerung der Mittelpunktsregel für (6.3) vorstellen. Hier werden die Funktionen F bzw. G durch einen halben Euler-Schritt an den Zwischenstellen $\frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2}$ ausgewertet und mit den Gewichten h bzw. h_α multipliziert. Daraus ergibt sich folgender Algorithmus.

Algorithmus 6.7 (Verallgemeinerte Mittelpunktsregel). Wir betrachten das impulsive System (4.1). Wir wählen ein festes $T > a$ und definieren auf dem Zeitintervall $[a, T]$ für $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{T-a}{N}$ das äquidistante Zeitgitter $\mathbb{G}_N := \{\tau_j | \tau_j = a + jh, j \in 0, \dots, N\}$. Zu Beginn setzen wir

$$\eta_0^N = x(a) = x_a$$

und iterieren dann nach der Vorschrift

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{j+1}^N &= \eta_j^N + h \cdot F\left(\frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2}, \eta_j^N + \frac{h}{2} F(\tau_j, \eta_j^N)\right) \\ &\quad + h_\alpha \cdot G\left(\frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2}, \eta_j^N + \frac{h_\alpha}{2} G(\tau_j, \eta_j^N)\right) \end{aligned}}$$

für $j = 0, \dots, N-1$ mit $h_\alpha := \alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j)$.

Bemerkung 6.8. Auch dieser Algorithmus ist zunächst auf implizite Weise gegeben. Man kann sich aber erneut durch die Hilfsnäherung

$$\tilde{\eta}_{j+1}^N = \eta_j^N + h \cdot F\left(\frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2}, \eta_j^N + \frac{h}{2} F(\tau_j, \eta_j^N)\right)$$

und deren Verwendung anstatt von η_{j+1}^N ein explizites Schema definieren. Exemplarische numerische Tests haben gezeigt, dass dieses Verfahren teilweise sehr gute Ergebnisse liefert, allerdings ist eine genauere Analyse ein interessanter Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen.

Die hier vorgestellten Verfahren sind in dieser Form erste Ansätze zur numerischen Behandlung impulsiver Systeme. Sie können aber die Grundlage für weitere Forschungen bilden und Ideen für die Entwicklung besserer Algorithmen bereitstellen.

6.3 Weitere Verfahren

Neben den bisher vorgestellten Verfahren gibt es in der Literatur eine Reihe anderer Ansätze zur Lösung impulsiver Systeme.

In dem Werk [18] werden **Runge-Kutta-Verfahren** für lineare impulsive Systeme dargestellt. Die Verfahren sind implizit und haben den Nachteil, dass die Sprungstellen t_k bekannt sein und durch die Gitterpunkte τ_j exakt getroffen werden müssen. Ein Spezialfall dieser Arbeit ist [25]. Hier werden sehr einfache eindimensionale impulsive Systeme betrachtet, bei denen die Funktionen F und G lediglich Konstanten sind. Für solche wird die sogenannte **θ -Methode** vorgestellt, die im Prinzip eine Mittelung zwischen explizitem und implizitem Euler-Verfahren darstellt. Interessant ist allerdings auch der dort zu findende Verweis auf die Arbeit [26]. Die Autoren stellen dort ein sehr konkretes Konzept eines **Lösungsalgorithmus für impulsive Systeme** in der Form (4.4) vor. Im Wesentlichen wird dabei die klassische Lösung \bar{x} des Systems berechnet, solange kein Sprünge auftreten. Beim Auftreten eines Impulses nutzt man die Darstellung mittels Sprungoperator und errechnet die Sprunghöhe der Trajektorie. Am Ende des Verfahrens wird die Summe aller Sprünge zu \bar{x} hinzuaddiert und man erhält die endgültige Lösung x .

Ein davon unabhängiges Lösungskonzept für impulsive Systeme im Rahmen sogenannter Differentialinklusionen wird in [36] vorgestellt. Die erste Approximationsmethode ist dabei eine Folge zeitdiskreter Lösungen ("*sampled trajectories*"), die zweite eine Folge klassischer Systeme ohne Impulse. Das dabei entscheidende Lösungskonzept ist die sogenannte **Graphvervollständigung**. Hier wird anhand einer Zeittransformation während eines Sprunges der Funktion α das Verhalten der Trajektorie x festgehalten, damit die Berechnung des Produktes $G \cdot \alpha$ unmissverständlich ist.

Ein völlig neuer Ansatz wäre die Lösung eines impulsiven Systems auf der Grundlage der drei gekoppelten Gleichungen (4.3). Dazu könnte man im Hinblick auf die erste Gleichung bekannte Differentialgleichungslöser verwenden und die anderen beiden anhand von Integrationsverfahren für das Riemann-Stieltjes-Integral berechnen. Aufgrund der Kopplung der Gleichungen über die Trajektorie x in den Funktion $G(t, x(t))$ und $\alpha[x]$ führt dies jedoch am Ende wieder auf eine gemeinsame Betrachtung der drei Gleichungen und bringt somit keine Vorteile.

6.4 Numerische Analyse

Wir betrachten für die folgenden Untersuchungen eine Folge $(N_l) \subset \mathbb{N}, l = 1, \dots, m$ und definieren dann gemäß (6.2) die zugehörigen äquidistanten Zeitgitter $\mathbb{G}_{N_l} := \{\tau_j | \tau_j = a + jh_l, j \in 0, \dots, N\}$.

6.4.1 Fehlernormen

Zur numerischen Untersuchung unserer vorgestellten Verfahren für impulsive Systeme werden wir zwei Fehlernormen betrachten. Die erste stellt eine Approximation an die L_∞ -Norm dar:

$$\epsilon_{L_\infty} := \max_{j=0, \dots, N} \|x(\tau_j) - \eta_j^N\|_\infty. \quad (6.6)$$

Die zweite Norm, die wir verwenden wollen ist

$$\epsilon_{L_1} := h \sum_{j=0}^N \|x(\tau_j) - \eta_j^N\|_\infty, \quad (6.7)$$

welche die L_1 -Norm approximiert. h ist dabei die im aktuellen Gitter verwendete Schrittweite.

6.4.2 Konvergenzanalyse

Die Konvergenzeigenschaften der numerischen Verfahren soll nun anhand eines Ausgleichsproblems bestimmt werden. Der grundlegende Ansatz dafür lautet

$$\epsilon_l \approx C \cdot h_l^p, \quad (6.8)$$

wobei ϵ_l eine Schätzung für den im Gitter \mathbb{G}_l gemachten Fehler gemäß (6.6) oder (6.7) ist, C eine Konstante und p die Konvergenzordnung. Durch Logarithmus-Bildung erhält man daraus die Gleichung

$$\underbrace{\log(\epsilon_l)}_{\text{bekannt}} \approx \underbrace{\log(C)}_{:=\tilde{C}} + p \cdot \underbrace{\log(h_l)}_{\text{bekannt}}.$$

Im Prinzip haben wir nun den y-Achsenabschnitt \tilde{C} und die Steigung p einer Geraden zu berechnen. Dazu definieren wir

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \log(h_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log(h_m) \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} \log(C) \\ p \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} \log(\epsilon_1) \\ \vdots \\ \log(\epsilon_m) \end{pmatrix}$$

und suchen die Lösung des Ausgleichsproblems

$$\min \|Aw - b\|_2^2. \quad (6.9)$$

oder äquivalent dazu die der Gleichung

$$A^T Aw = A^T b,$$

was in *Matlab* einfach mit dem Befehl $w = A \setminus b$; realisiert werden kann. Anhand der hieraus berechneten optimalen Werte \hat{w}_{L_∞} bzw. \hat{w}_{L_1} kann man die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens in den einzelnen Fehlernormen bewerten. Außerdem lassen sich die Residuen

$$\begin{aligned} r_{L_\infty} &= \|A\hat{w}_{L_\infty} - b\|_2, \\ r_{L_1} &= \|A\hat{w}_{L_1} - b\|_2 \end{aligned}$$

berechnen, welche zur besseren Beurteilung der Güte der Approximation zusätzlich herangezogen werden können.

6.5 Beispiele

Wir wollen nun unsere neu entwickelten Verfahren an den bereits vorgestellten Beispielen der unstetig wachsenden Fischpopulation und des hüpfenden Balles testen. Zum Verweis auf die im folgenden Kapitel verwendeten Algorithmen benutzen wir die Abkürzungen aus Tabelle 6.1. Die dortigen Namen sind im Prinzip selbsterklärend. Die Verfahren `solve_rs_def.m` und `solve_rs_def_linear_linear_Interpol.m` sind Umsetzungen des Algorithmus 6.3, das letztere sogar mit eingebauter linearer Interpolierender nach Bemerkung 6.4. Entsprechend beinhaltet `solve_heun.m` die Implementierung des Algorithmus 6.5 und `solve_mid.m` die des Algorithmus 6.7. Diese beiden letzten Verfahren werden wir hier nicht weiter berücksichtigen, jedoch befinden sich für sie in Analogie zur folgenden Analyse Auswertungstabellen und Plots auf der beiliegenden CD.

Abkürzung	Matlab-File
Ⓐ	<code>solve_rs_def.m</code>
Ⓑ	<code>solve_heun.m</code>
Ⓒ	<code>solve_mid.m</code>
Ⓓ	<code>solve_rs_def_linear_linear_Interpol.m</code>

Tabelle 6.1: Implementierte numerische Verfahren

Bemerkung 6.9. *Die Implementierungen der folgenden Beispiele, der verschiedenen Integralgleichungslöser sowie der zugehörigen Werkzeuge zur numerischen Analyse befinden sich auf der beiliegenden CD im Verzeichnis **Numerische_Verfahren**. Für sämtliche Modellierungen dieses Kapitels findet sich dort auch eine große Sammlung von Abbildungen und Tabellen, welche insbesondere die im folgenden abgedruckten beinhaltet. Für weitere Informationen sei auf Anhang A verwiesen.*

6.5.1 Fischpopulation

Wir betrachten erneut die Fischpopulation, deren Wachstum durch Abfischung eines Prozentsatzes von a_k Fischen zu gegebenen Zeitpunkten $t_k, 1 \leq k \leq M$ beeinflusst wird. Die Systemgleichung für dieses Modell lautet

$$x(t) = x_{t_0} + \int_{t_0}^t Cx(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^i -a_k x(t_k^-) \quad (6.10)$$

für i mit $t_i \leq t < t_{i+1}$. Zur Lösung werden wir dieses Problem auf dem Zeitintervall $t \in [0, 10]$ betrachten. Die übrigen Parameter wählen wir wie in Kapitel 2.1.

Wir wollen für dieses Beispiel auf 4 verschiedene Implementierungen in *Matlab* eingehen. Zur besseren Übersicht werden wir im Folgenden auf diese, anhand der Nummerierungen

Nummer	Matlab-File	Berechnung von α	x -Abhängigkeit von α
①	fischkultur_1.m	$-\sum a_k$	nein
②	fischkultur_2.m	$-a_k$	nein
③	fischkultur_3.m	$-a_k$	ja
④	fischkultur_4.m	$-\sum a_k$	ja

Tabelle 6.2: Modellierungen der Fischkultur

in Tabelle 6.2, verweisen. Die Unterschiede in den einzelnen Modellierungen liegen dabei in verschiedenen Definitionen und Umsetzungen der Funktionen $G(t, x)$ und $\alpha[x](t)$. Alle Beispiele wurden mit der Umsetzung des Riemann-Stieltjes-Verfahrens in [\(a\)](#) gelöst, welches zur Behandlung von Integralgleichungen die grundlegende Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals verwendet.

Die erste Unterscheidung in den Implementierungen haben wir hinsichtlich der x -Abhängigkeit im Riemann-Stieltjes-Integral zu betrachten. In den Umsetzungen [①](#) und [②](#) steckt diese vollständig im Integranden und die Funktion $\alpha[x](t)$ ist nur eine Funktion der Zeit t , also $\alpha[x](t) = \alpha(t)$. Dementsprechend ist

$$G(t, x(t)) := x(t).$$

Im Gegensatz dazu gilt in [③](#) und [④](#)

$$G(t, x(t)) := 1,$$

hier ist also die x -Abhängigkeit in der Funktion beschränkter Variation realisiert.

Die zweite Unterscheidung betrifft die Umsetzung der Funktion α . Wir kennen in diesem Beispiel von vornherein die Zeitpunkte t_k und damit auch die Anzahl der Sprünge. In [②](#) und [③](#) merken wir uns anhand eines internen Sprungzählers den nächsten Sprungpunkt t_k und prüfen, ob wir mit unserer aktuellen diskretisierten Zeit τ_j diesen schon erreicht haben. Demzufolge gilt bei $M = 9$ Sprungpunkten und mit $k := 1$

$$\alpha[x](\tau_j) := x(\tau_j) \cdot \begin{cases} 0, & \text{für } \tau_j < t_9 \text{ und } \tau_j < t_k, \\ -a_k, & \text{für } \tau_j < t_9 \text{ und } t \geq t_k (\rightsquigarrow k := k + 1), \\ -a_9, & \text{für } \tau_j \geq t_9. \end{cases}$$

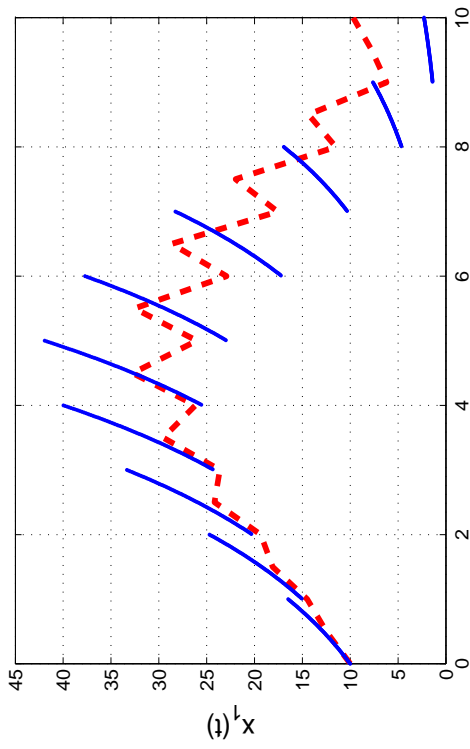
In den anderen beiden Implementierungen ([①](#) und [④](#)) wird für jeden Zeitpunkt explizit geprüft, welche Sprungpunkte bereits überschritten wurden und die Summe aller dieser Sprünge gebildet, d.h.

$$\alpha[x](\tau_j) := x(\tau_j) \cdot \begin{cases} 0, & \text{für } \tau_j < t_9 \text{ und } \tau_j < t_1, \\ -\sum_{j=1}^{k-1} a_j, & \text{für } \tau_j < t_9 \text{ und } t_{k-1} \leq \tau_j < t_k, (k = 2, \dots, 9), \\ -\sum_{j=1}^9 a_j, & \text{für } \tau_j \geq t_9. \end{cases}$$

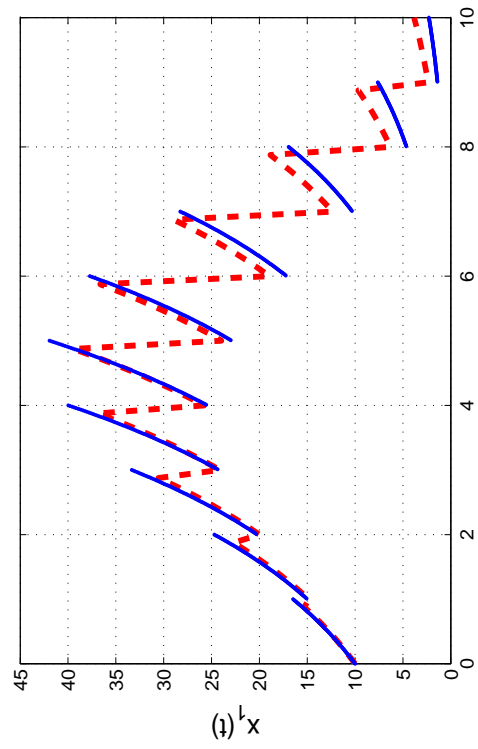
$x(\tau_j)$ ist hierbei immer entsprechend der Unterscheidung nach der x -Abhängigkeit von oben einzusetzen. Außerdem sieht man hier sehr deutlich, dass die Lösung $x(t)$ lediglich in die Berechnung der Sprunghöhen und nicht in die der Sprungzeitpunkte eingeht.

Nach der Vorstellung der verschiedenen Modellierungen wollen wir uns nun mit den Ergebnissen der numerischen Berechnung befassen. Einen ersten Eindruck davon verschafft Abbildung 6.1, die exemplarisch die Approximation des Modells ② mit Hilfe des Lösungsverfahrens ① darstellt. Neben der numerischen Lösung ist hier auch die analytische aufgetragen. Man sieht deutlich wie sich mit wachsender Stützstellenzahl N die numerische Lösung immer besser der exakten annähert und insbesondere die sprunghaften Änderungen der Trajektorie immer genauer nachvollzogen werden. Dieses erste - rein optische - Indiz für die Konvergenz unseres Verfahrens wollen wir nun anhand von Fehlertabellen und Konvergenzanalysen bestätigen.

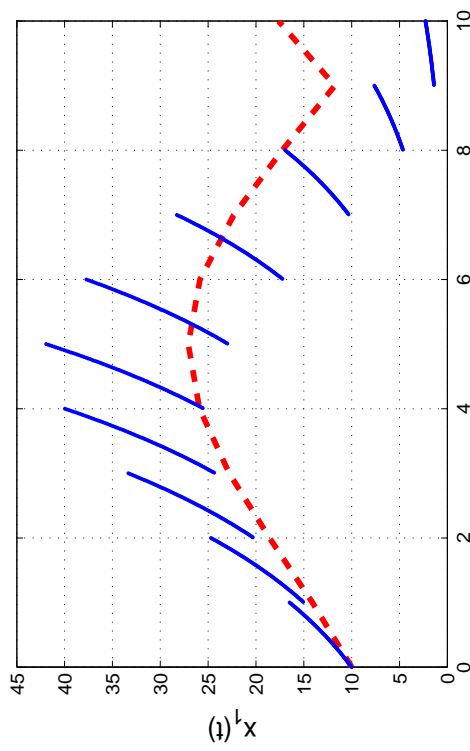
Bemerkung 6.10. *Aufgrund der mit Matlab automatisierten Erstellung von Plots und Tabellen wird dort im folgenden die Lösung $x(t)$ mit $x_1(t)$ bezeichnet. Diese Bezeichnungen sind für dieses Beispiel daher äquivalent.*



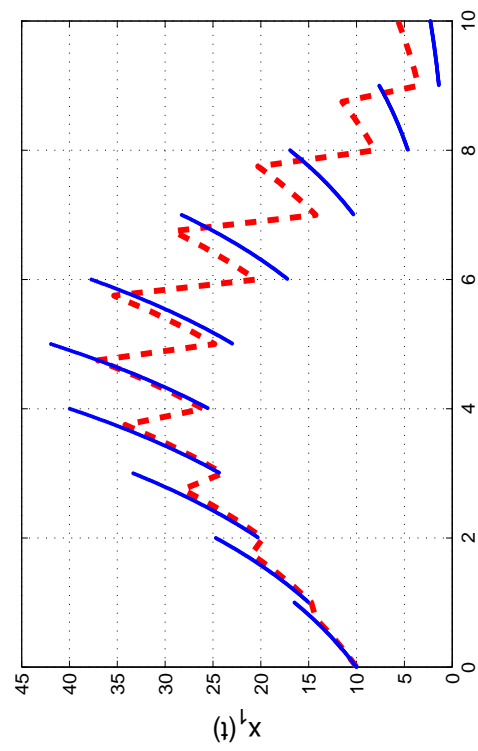
$N=20$



$N=80$



$N=10$



$N=40$

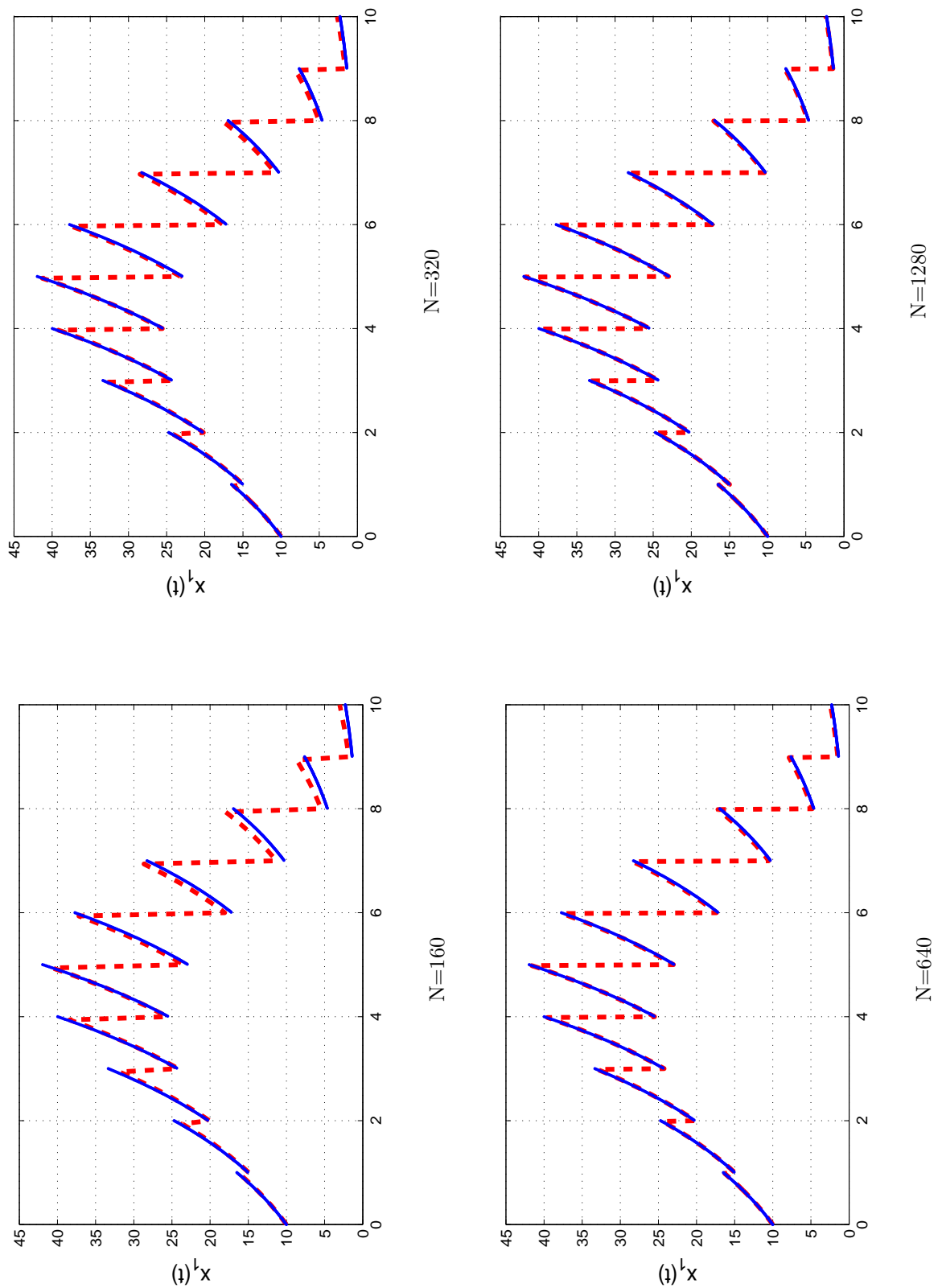


Abbildung 6.1: Numerische Approximation der Fischpopulation ② mit ①. Die analytische Lösung ist in blau dargestellt.

Wir betrachten unsere gewählten Diskretisierungen mit $N + 1$ Stützstellen und berechnen jeweils die entsprechenden Fehlernormen (6.6) und (6.7), um die Güte der einzelnen Approximationen bestimmen zu können. Das Kriterium für die Qualität des gesamten Verfahrens liefert dann die Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems (6.9) anhand der Parameter C und p .

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}
10	15.35975	67.78842
20	8.78720	38.00412
40	5.34293	20.41155
80	2.94273	10.62516
160	1.54281	5.42709
320	0.78963	2.74345
640	0.39941	1.37936
1280	0.20086	0.69161
2560	0.10072	0.34629
5120	0.05043	0.17327
10240	0.02523	0.08666
20480	0.01262	0.04334
40960	0.00631	0.02167
81920	0.00316	0.01084

Tabelle 6.3: Fehler für ② mit ①.

In Tabelle 6.3 sind die Fehlernormen für die Modellierung ② aufgetragen. Man kann hier schon erkennen, dass sich der Fehler bei wachsendem N verringert, jedoch nicht um welchen Faktor. Dies wird erst deutlich, wenn man mittels des Ausgleichsproblems die Parameter p und C berechnet. In Tabelle 6.4 und Abbildung 6.2 ist die Lösung dieses Problems aufgetragen. Die Werte belegen hier in beiden Normen die Approximationsfähigkeit des Verfahrens mit einer Konvergenzordnung von ≈ 1 . Die Konstanten und Residuen sind jeweils leicht unterschiedlich, jedoch beide in einer hinreichend kleinen Größenordnung, so dass die Konvergenz hier experimentell nachgewiesen ist.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	19.40670	0.95665	0.38119	77.63285	0.97969	0.18947

Tabelle 6.4: Konvergenzanalyse für ② mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

Zum Vergleich mit den anderen Modellierungen sind im Folgenden die entsprechenden Tabellen der Fehler und Konvergenzanalysen aufgetragen.

Zunächst betrachten wir die verschiedenen Modellierungen hinsichtlich der x -Abhängigkeit.

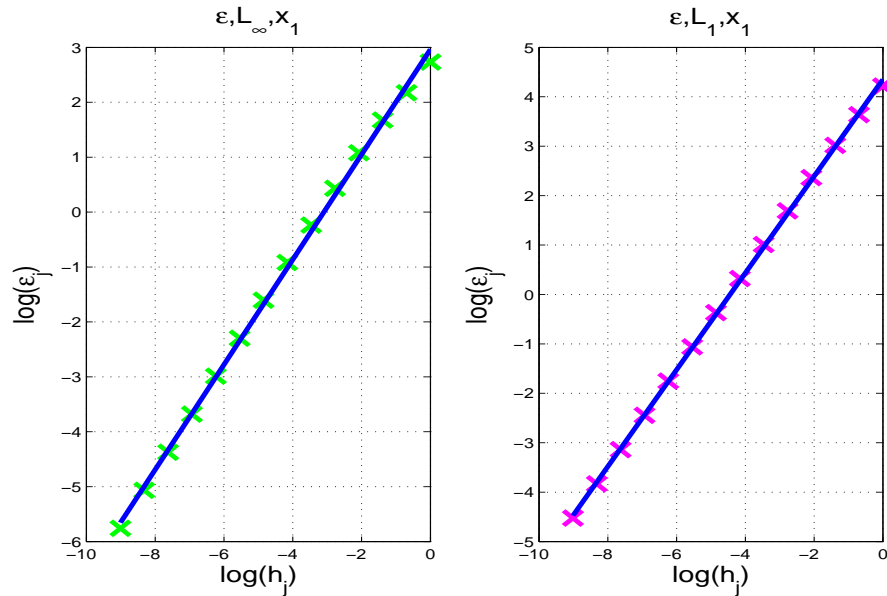


Abbildung 6.2: Konvergenzanalyse und Ausgleichsgerade für (2) mit (a)

An den Tabellen 6.8 und 6.10 sieht man, dass die Konvergenzparameter der beiden Varianten (1) und (4) unwesentlich verschieden sind. Auch die Fehlerentwicklungen in den Tabellen 6.5 und 6.7 zeigt ein ähnliches Bild. Somit ist hier die x -Abhängigkeit von α für die Konvergenzanalyse irrelevant. Anders in den Modellierungen (2) und (3). Die Tabellen 6.4 und 6.9 zeigen neben vergleichbaren Konstanten C eine deutliche Verbesserung bei p und r in (2). Insgesamt ist also eine bessere Konvergenz zu erwarten, wenn die Funktion α nicht von x abhängt.

Vergleicht man die verschiedenen Ansätze für die Funktion α , so sieht man, dass die Verwendung eines internen Sprungzählers keinen merklichen Vorteil gegenüber der expliziten Auswertung aller überwundenen Sprünge bietet. Hier weist sogar die Variante (3) gegenüber allen anderen eine schlechtere Konvergenz auf, wie man anhand der Tabelle 6.9 sieht.

Eine weitere Auffälligkeit ist die vollständige Übereinstimmung der Parameter der Konvergenzanalyse bei Betrachtung der Modellierungen (1) und (2). Die Begründung dafür liegt in dem hier verwendeten Lösungsverfahren (a) und der darin enthaltenen Approximation des Riemann-Stieltjes-Integrals. Die dortige Differenzenbildung der Funktion α führt in beiden Modellierungen auf dasselbe Ergebnis, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} : \alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j) &= - \left(\sum_{k:t_k < \tau_{j+1}} a_k \right) - \left(- \sum_{k:t_k < \tau_j} a_k \right) \\
 &\parallel \\
 \textcircled{2} : \alpha[\eta_{j+1}^N](\tau_{j+1}) - \alpha[\eta_j^N](\tau_j) &= \begin{cases} -a_l, & \tau_j \leq t_l < \tau_{j+1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die interne Summenbildung in ① wird also durch die Differenzenbildung des Integralgleichungslösers rückgängig gemacht und man landet letztendlich wieder bei ②. Da ansonsten keine Unterschiede zwischen den beiden Modellierungen existieren ist die numerische Berechnung identisch und deswegen stimmen auch die Konvergenzparameter überein.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}
10	15.35975	67.78842
20	8.78720	38.00412
40	5.34293	20.41155
80	2.94273	10.62516
160	1.54281	5.42709
320	0.78963	2.74345
640	0.39941	1.37936
1280	0.20086	0.69161
2560	0.10072	0.34629
5120	0.05043	0.17327
10240	0.02523	0.08666
20480	0.01262	0.04334
40960	0.00631	0.02167
81920	0.00316	0.01084

Tabelle 6.5: Fehler für ① mit ②.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}
10	8.61613	44.48493
20	7.51273	33.24807
40	5.09040	20.73636
80	2.98914	11.65949
160	1.62391	6.19471
320	0.84696	3.19461
640	0.43259	1.62243
1280	0.21862	0.81760
2560	0.10990	0.41041
5120	0.05510	0.20561
10240	0.02759	0.10291
20480	0.01380	0.05148
40960	0.00690	0.02575
81920	0.00345	0.01287

Tabelle 6.6: Fehler für ③ mit ②.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}
10	16.32614	83.10939
20	10.39029	45.64680
40	5.99790	24.31131
80	3.24662	12.62665
160	1.69269	6.44680
320	0.86475	3.25900
640	0.43712	1.63870
1280	0.21976	0.82169
2560	0.11019	0.41143
5120	0.05517	0.20586
10240	0.02760	0.10297
20480	0.01381	0.05149
40960	0.00690	0.02575
81920	0.00345	0.01288

Tabelle 6.7: Fehler für ④ mit ①a.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	19.40670	0.95665	0.38119	77.63285	0.97969	0.18947

Tabelle 6.8: Konvergenzanalyse für ① mit ①a und N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	16.08790	0.91420	0.84398	69.93891	0.93754	0.61252

Tabelle 6.9: Konvergenzanalyse für ③ mit ①a und N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	21.60697	0.95917	0.38699	93.25944	0.98143	0.16532

Tabelle 6.10: Konvergenzanalyse für ④ mit ①a und N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920.

6.5.2 Hüpfender Ball

Auch für das Beispiel des hüpfenden Balles wollen wir einige numerische Untersuchungen vorstellen. Die zugrundeliegende Systemgleichung lautet

$$x(t) = x_{t_0} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ -g \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^t G(t, x) d\alpha[x](\tau)$$

mit

$$\alpha[x](t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2[x](t) \end{pmatrix}.$$

und

$$\alpha_2[x](t) = \sum_{\substack{k:t_k \leq t, \\ x_1(t_k^-)=0, x_2(t_k^-) \leq 0}} (1 + \mu)(-x_2(t_k^-)).$$

Zur weiteren Analyse werden wir die Parameter wie in Kapitel 2.3 wählen und dieses Problem auf dem Intervall $[0, \tilde{t}]$ betrachten.

Wir haben für dieses Beispiel 4 Umsetzungen in Matlab implementiert und wollen diese nun hinsichtlich ihrer numerischen Eigenschaften vergleichen. Vereinfachend werden wir im Folgenden auf diese, anhand der Nummerierungen in Tabelle 6.11, verweisen. Die Unterschiede

Nummer	Matlab-File	Sprungbedingung	x -Abhängigkeit von α
⑤	huepf_ball_1.m	direkt	nein
⑥	huepf_ball_2.m	analytisch	nein
⑦	huepf_ball_3.m	analytisch	ja
⑧	huepf_ball_4.m	direkt	ja

Tabelle 6.11: Modellierungen des Hüpfenden Balles

sind dabei in den Funktionen $G(t, x(t))$ und $\alpha[x](t)$ gemacht worden.

Der erste Aspekt dabei ist erneut die x -Abhängigkeit. Diese ist einmal im Riemann-Stieltjes-Integral in der Funktion

$$G(t, x(t)) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2(t) \end{pmatrix}$$

realisiert (⑤ und ⑥). Im anderen Fall (⑦ und ⑧) ist die Funktion α von x abhängig und G ist von der Form

$$G(t, x(t)) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gestalt der Funktion $\alpha_2[x](t)$ wollen wir anhand des zweiten Unterscheidungskriteriums, der Sprungbedingung, betrachten. Eine Möglichkeit ist, naiv an das Problem heranzugehen und diese Bedingung direkt mit der numerischen Lösung zu testen (⑤ und ⑧). Alternativ

dazu können wir unser bereits vorhandenes Wissen aus der analytischen Betrachtung der Lösung verwenden, bei der wir bereits die Sprungpunkte t_k berechnet haben. Diese können wir mit den Zeitpunkten τ_j des Zeitgitters \mathbb{G} vergleichen und entsprechend die Sprungbedingung mit einrechnen (⑥ und ⑦).

Damit erhalten wir die Funktionen

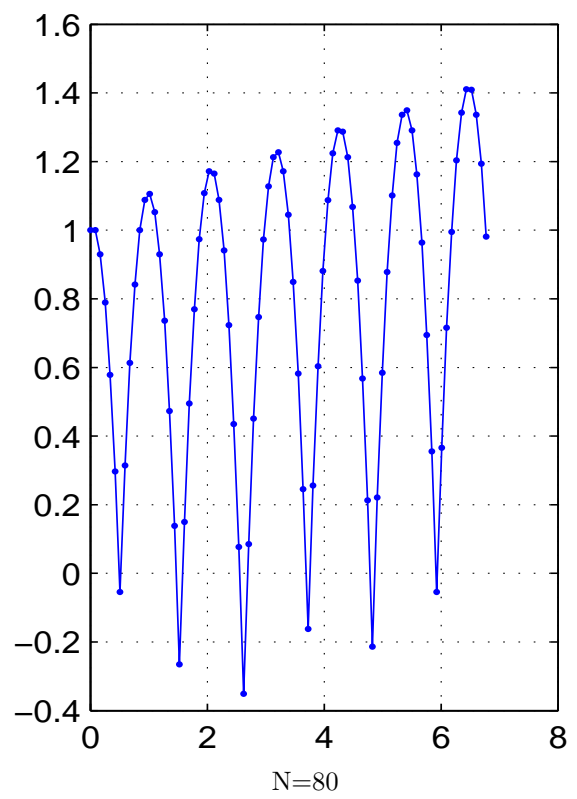
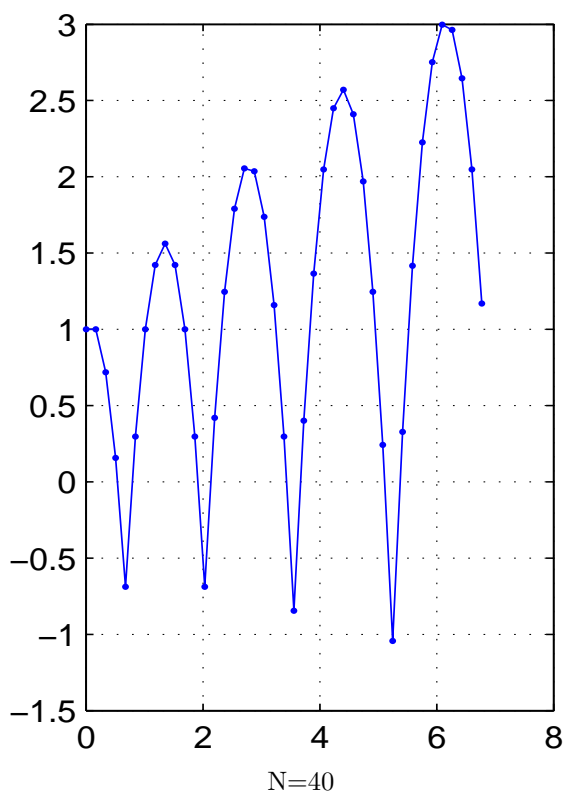
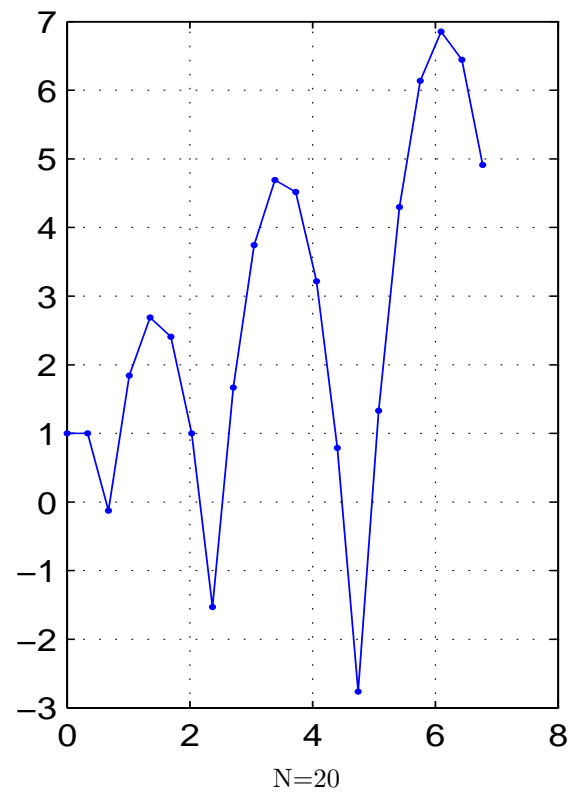
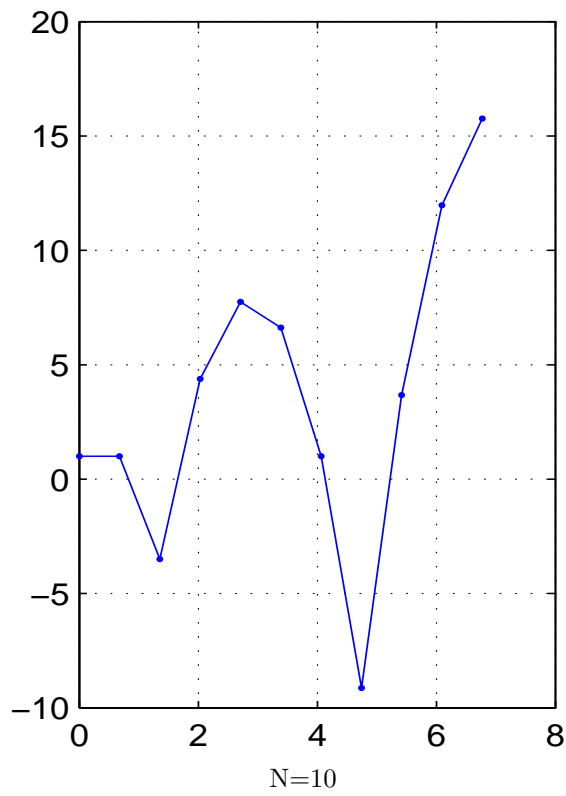
$$\alpha_2[x](\tau_j) := x_2(\tau_j) \cdot \begin{cases} -(1 + \mu), & \text{für } x_1(\tau_j) \leq 0 \text{ und } x_2(\tau_j) \leq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

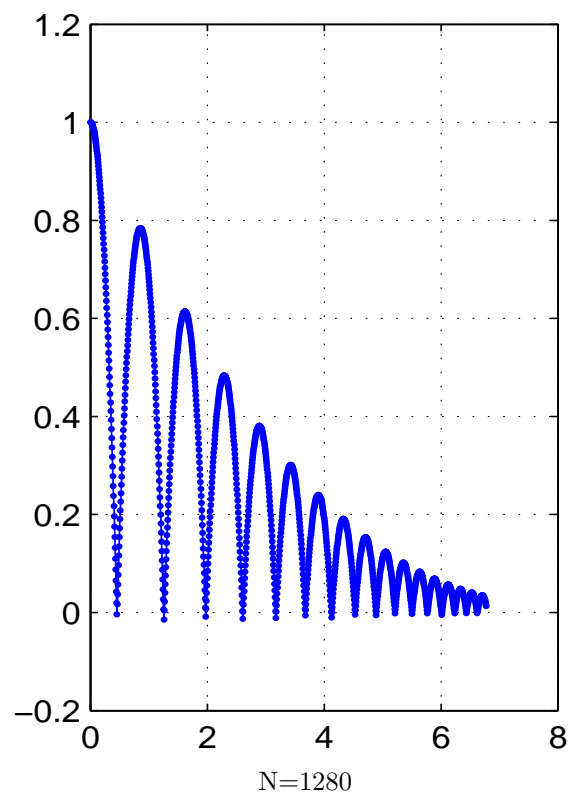
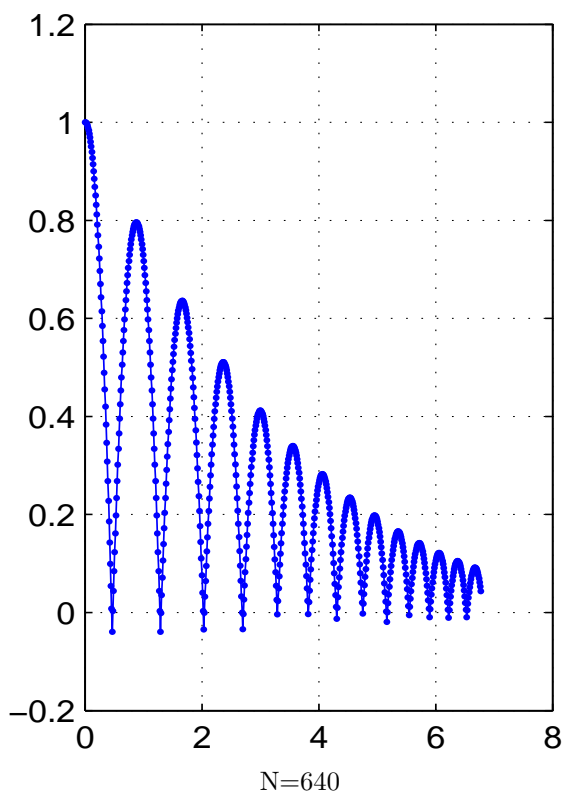
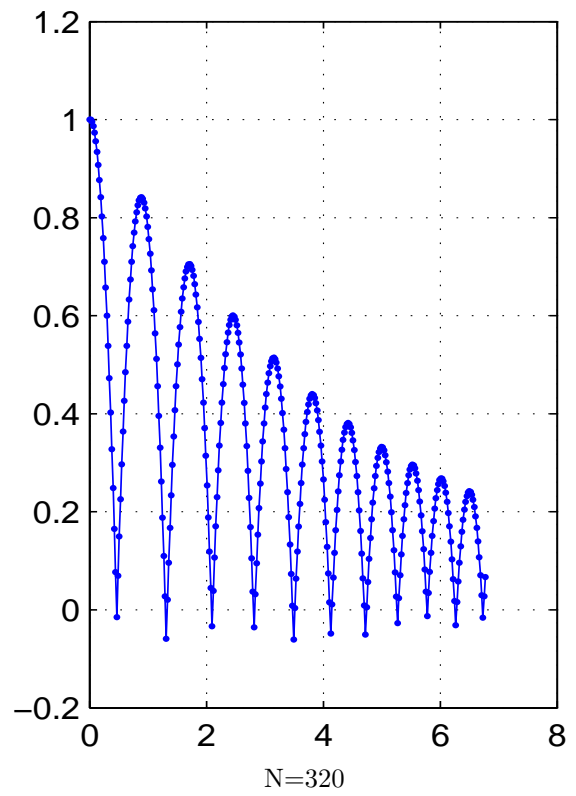
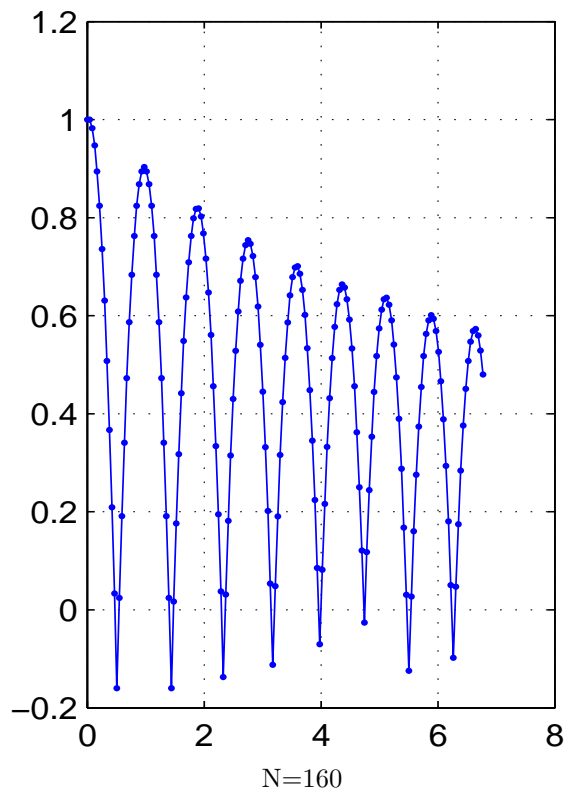
und mit dem Häufungspunkt \tilde{t} der Sprungpunkte t_k und $k := 1$

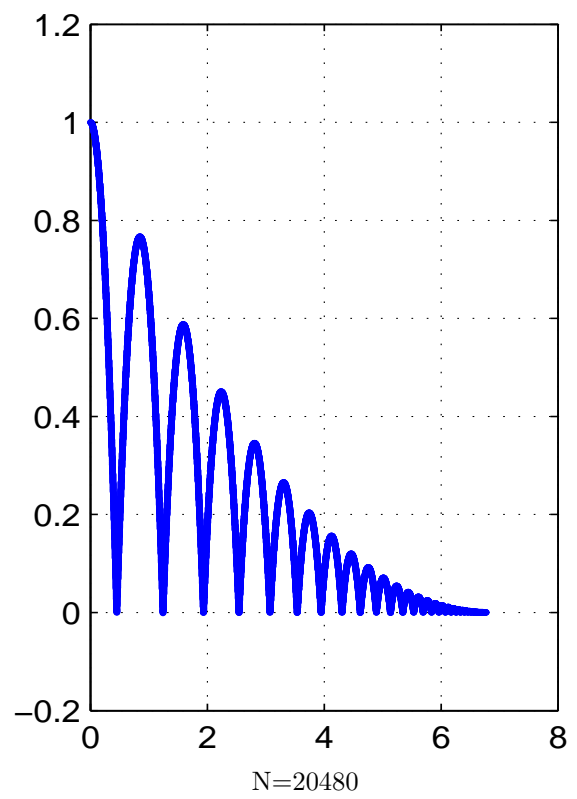
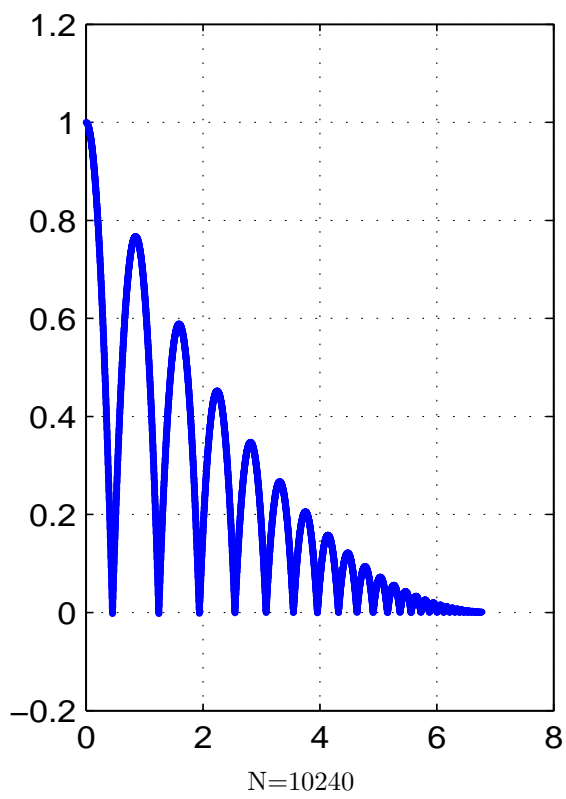
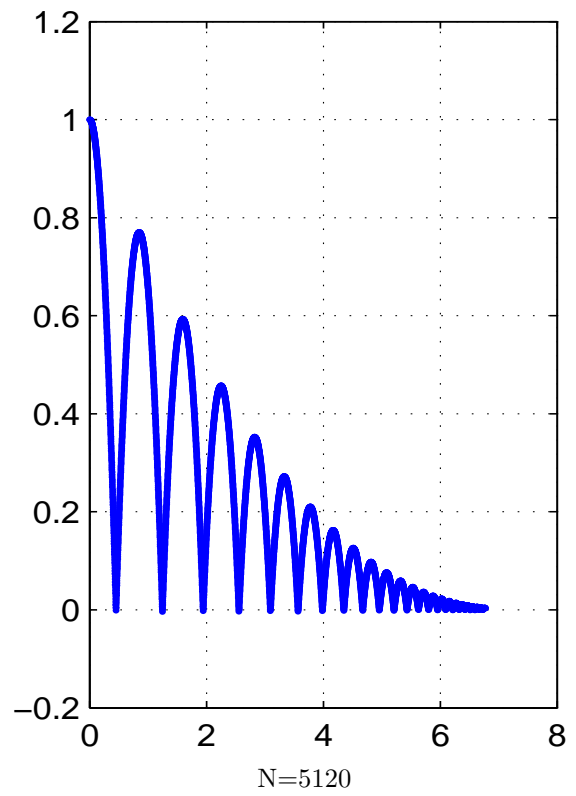
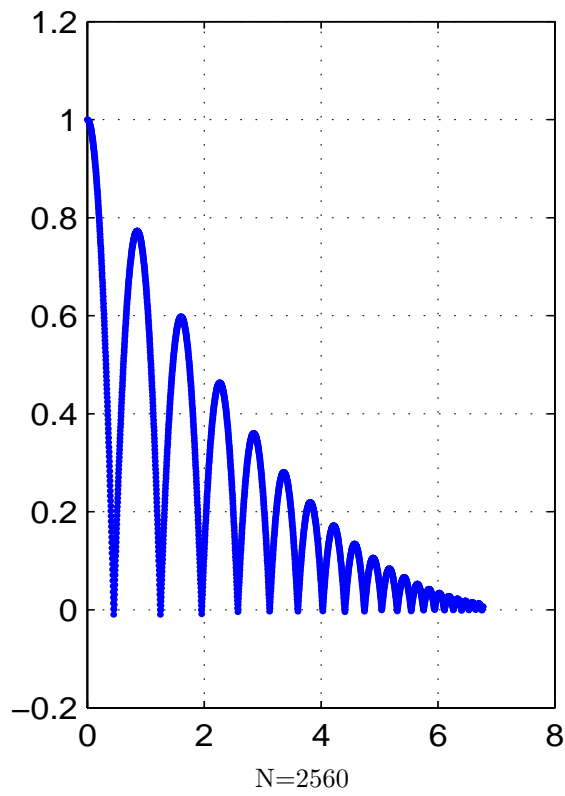
$$\alpha_2[x](\tau_j) := x_2(\tau_j) \cdot \begin{cases} -(1 + \mu), & \text{für } \tau_j < \tilde{t} \text{ und } \tau_j \geq t_k (\rightsquigarrow k := k + 1), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$x_2(\tau_j)$ ist hierbei immer entsprechend der Unterscheidung nach der x -Abhängigkeit von oben einzusetzen. Außerdem sieht man, dass die Lösung $x(t)$ sowohl in die Berechnung der Sprunghöhen als auch die der Sprungzeitpunkte eingeht. Man beachte auch, dass hier für die Sprungbedingung in der ersten Funktion $x_1(\tau_j) \leq 0$ geprüft wird, da die echte Bedingung $x_1(\tau_j) = 0$ in der numerischen Lösung praktisch nie erfüllt sein wird.

Um ein Gefühl für die Entwicklung der numerischen Lösung bezüglich N zu bekommen, sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 die Plots der Modellierung ⑧ aufgetragen. Die ersten vier Abbildungen zeigen dabei in jeder Komponente vollkommen utopische Nachbildungen des Ballverhaltens, da die Sprunghöhen in $x_1(t)$ und die Geschwindigkeiten des Balles bei $x_2(t)$ im Laufe der Zeit sogar zunehmen. Erst ab $N = 160$ entspricht der Verlauf der Trajektorien realen physikalischen Verhältnissen. Außerdem tauchen mit zunehmender Gitterverfeinerung immer mehr Sprungstellen in den Trajektorien auf, da die analytischen Sprungpunkte t_k besser unterschieden werden können und dadurch die Approximation an die Lösung genauer wird. Dies erkennt man auch daran, dass mit wachsendem N die Trajektorien von $x_2(t)$ zusehends kegelförmiger werden und an ihren Enden immer spitzer zusammenlaufen. Um dieses Verhalten nachvollziehen zu können, sind in den beiden Abbildungen auch derart viele Plots dargestellt.







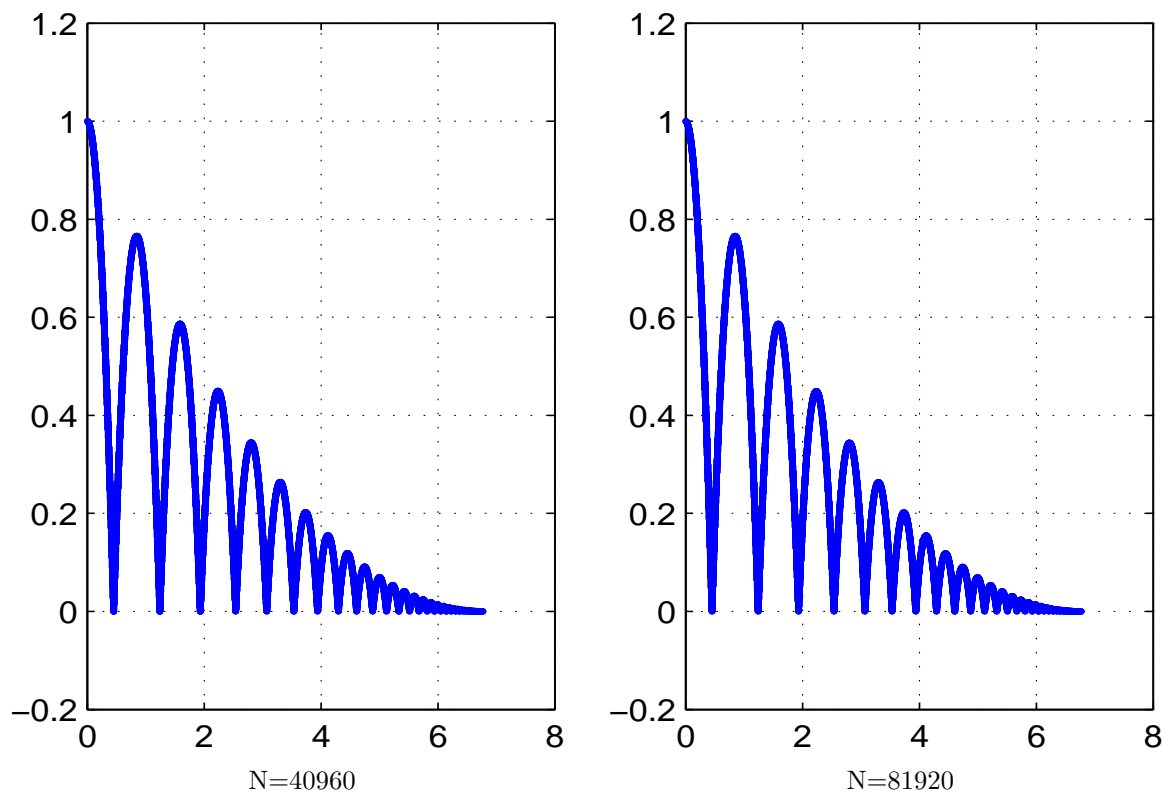
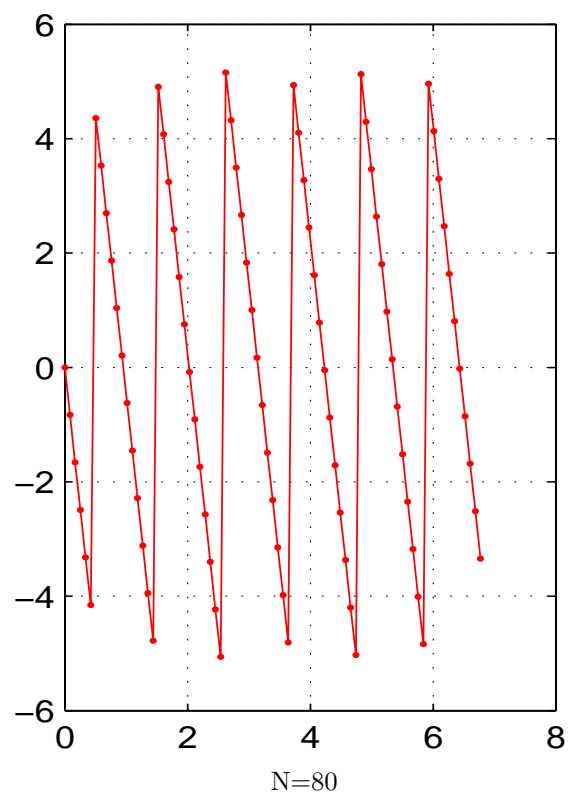
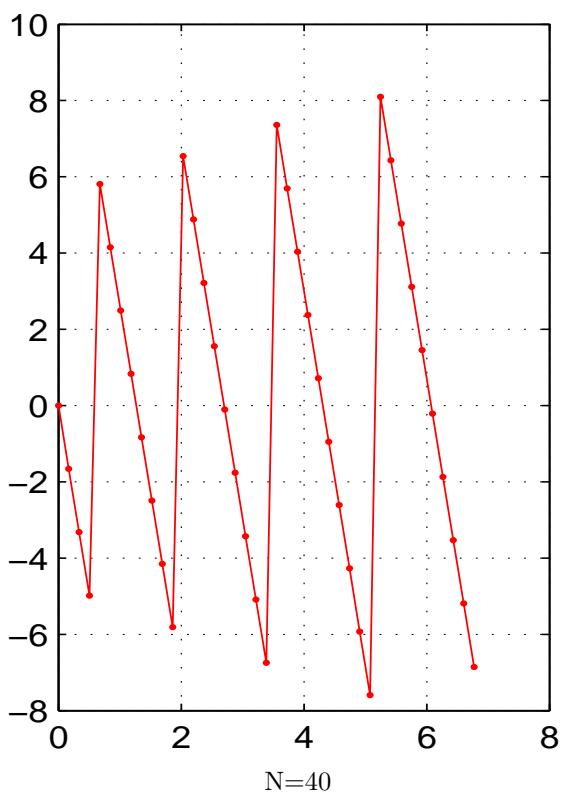
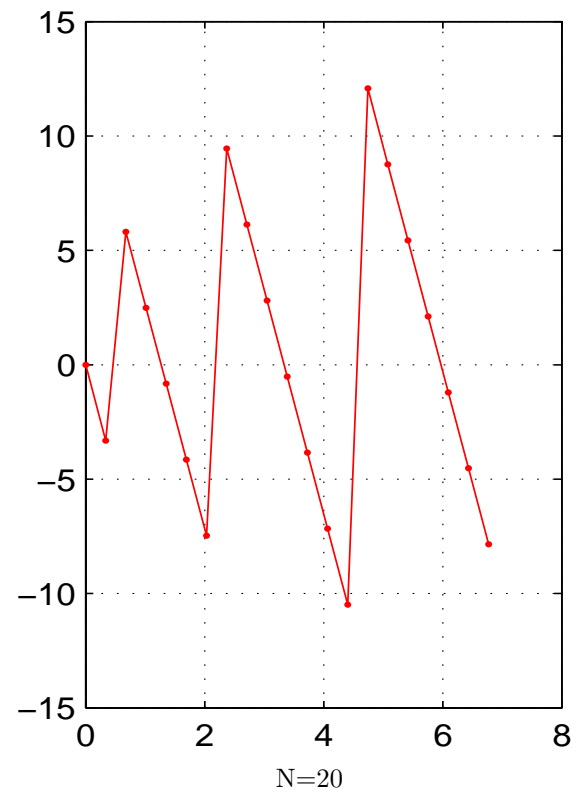
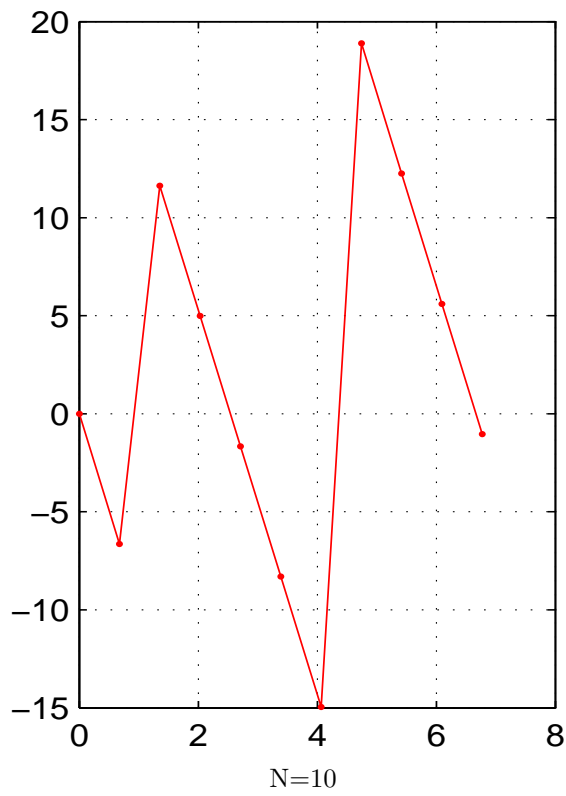
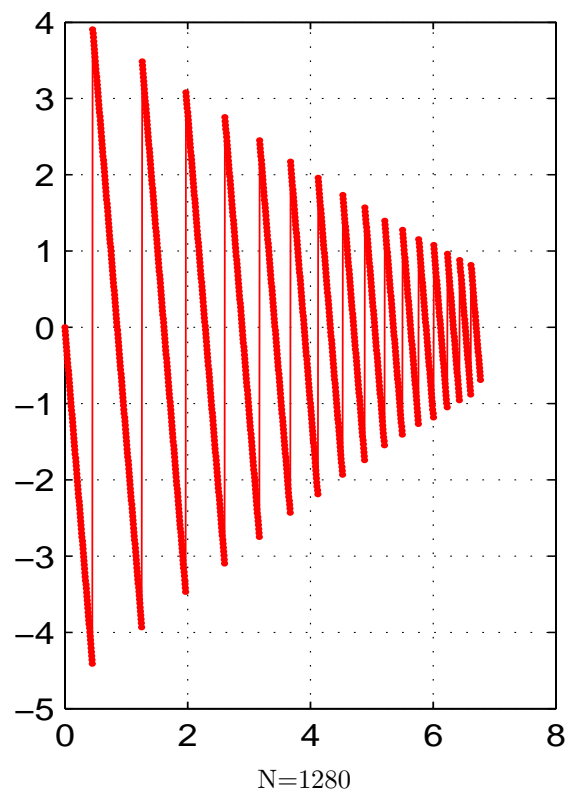
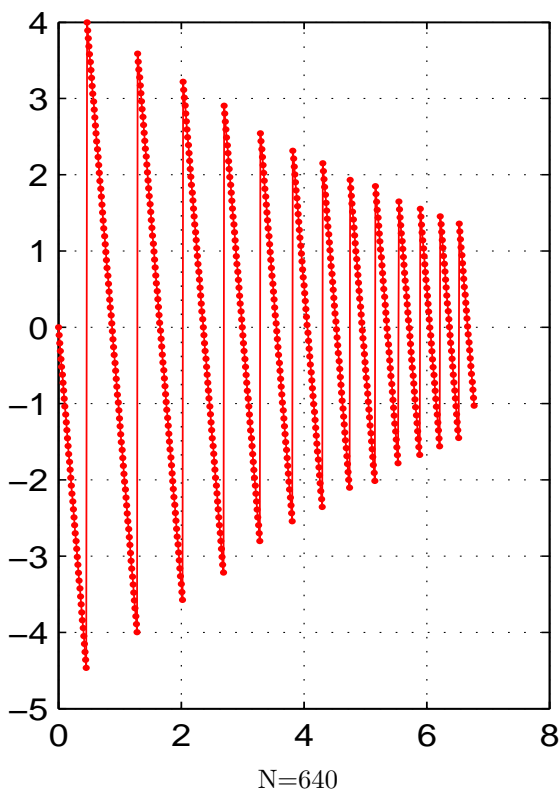
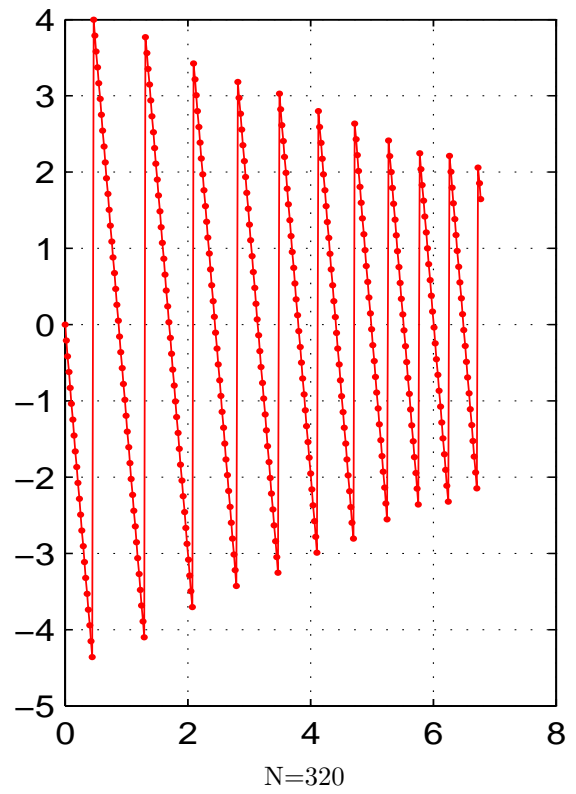
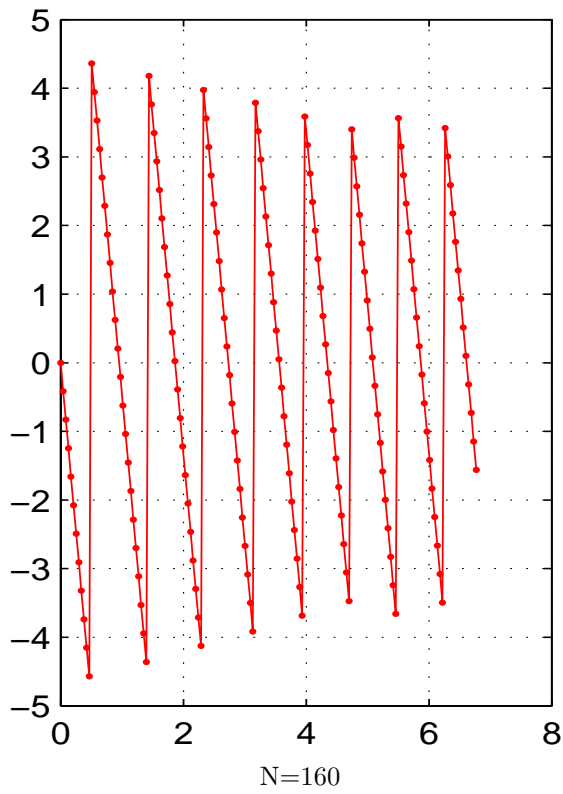
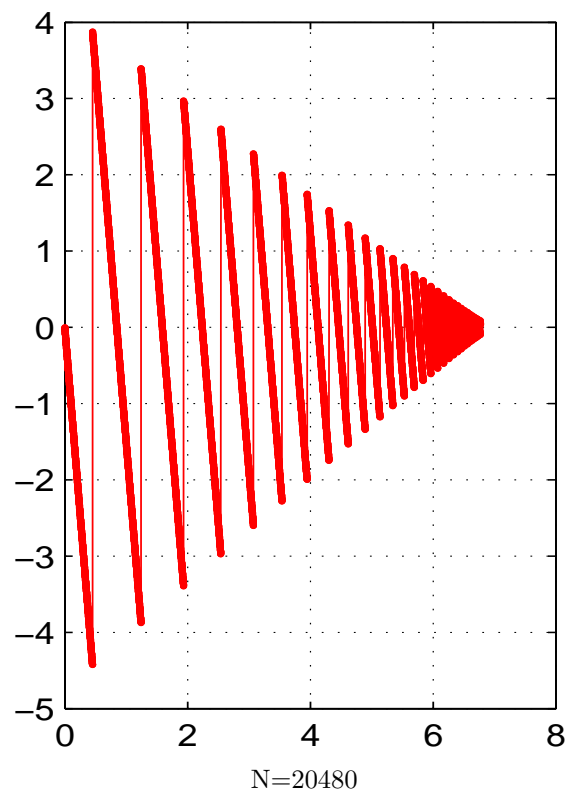
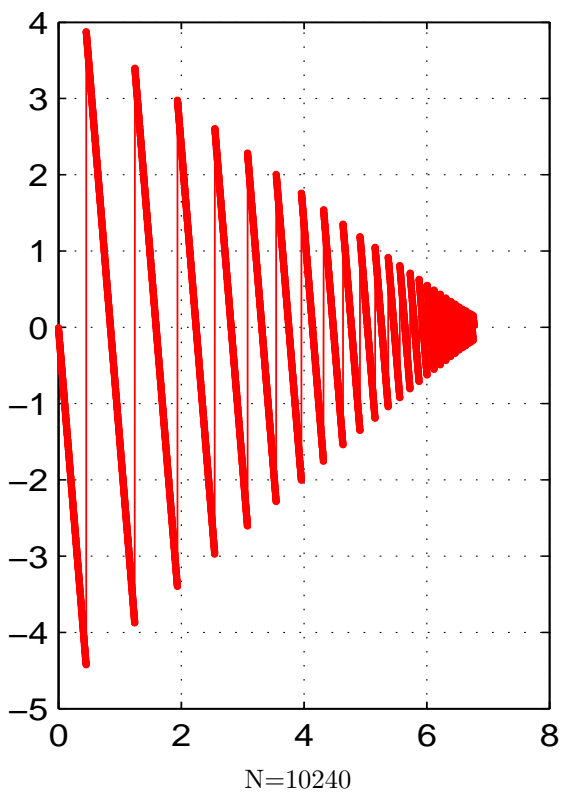
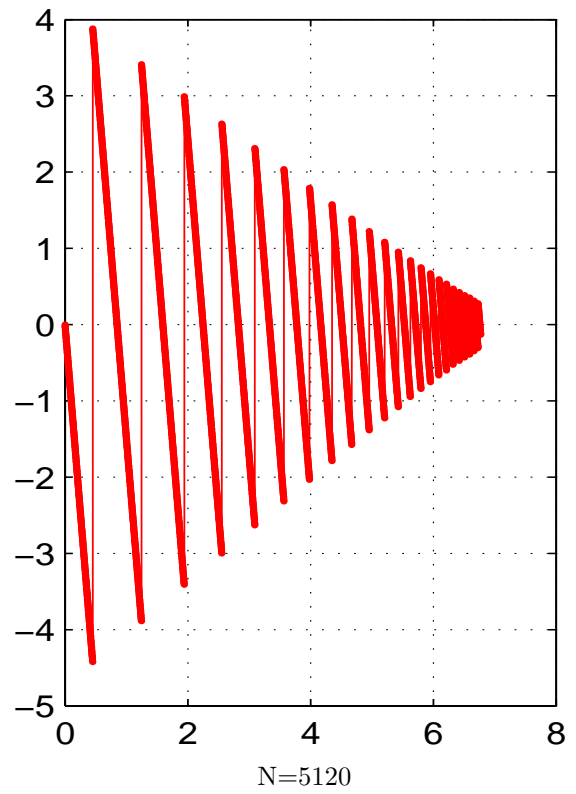
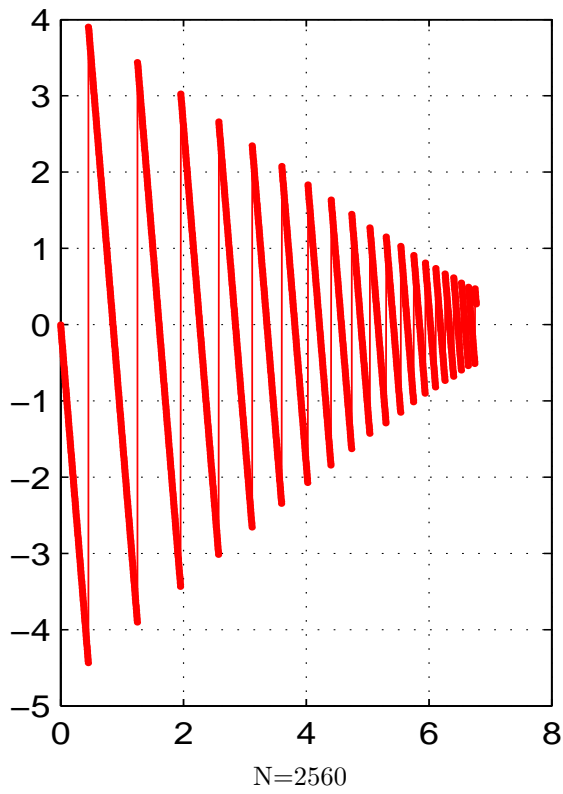


Abbildung 6.3: Numerische Approximation von $x_1(t)$ des hüpfenden Balles ⑧ mit ⑨.







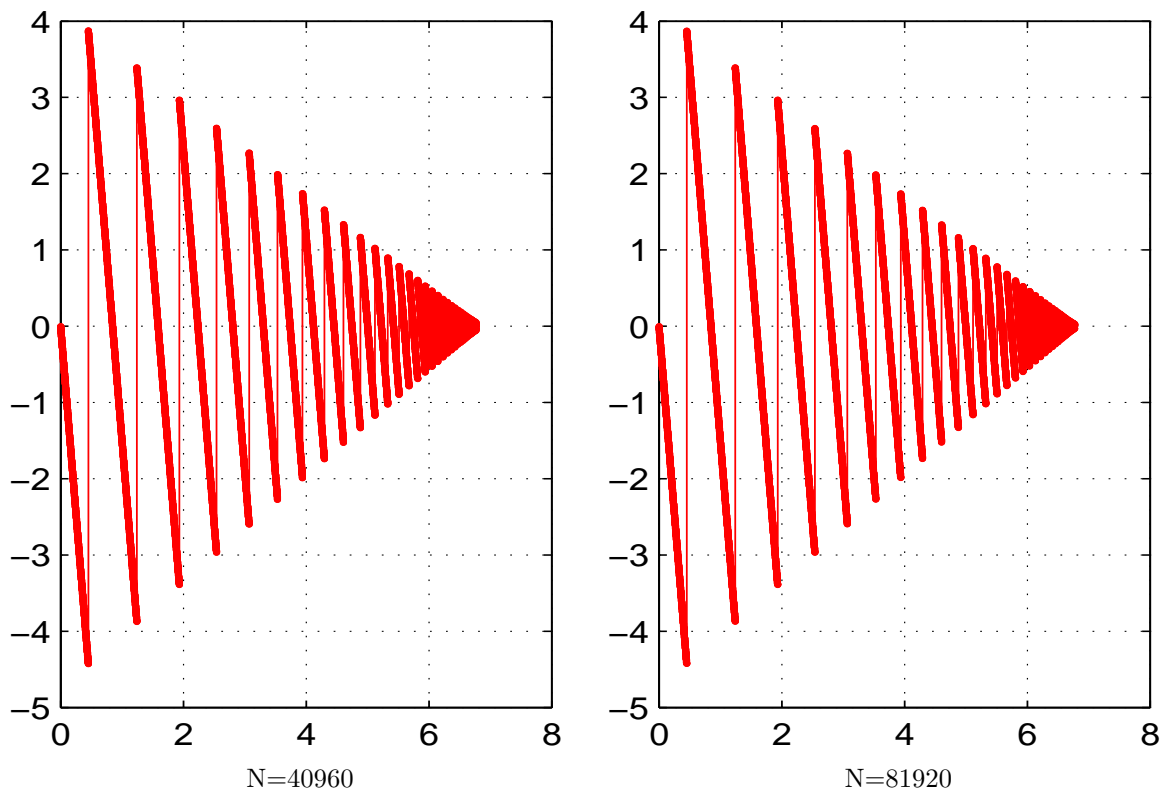


Abbildung 6.4: Numerische Approximation von $x_2(t)$ des hüpfenden Balles ⑧ mit ⑨.

Wie beim Beispiel der Fischpopulation wollen wir hier ebenfalls Fehler- und Konvergenzanalysetabellen sowie die Plots der Ausgleichsgeraden betrachten, um die verschiedenen Modellierungen zu beurteilen und zu vergleichen.

Eine erste Auffälligkeit sind die Unterschiede in den Konvergenzparametern der beiden Fehlernormen. Man sieht, dass diese für jede Implementierung in den approximierten L_∞ -Normen schlechter sind als in den L_1 -Normen. Hier sind zwar die Konstanten C größer, jedoch ist für die Konvergenz der Parameter p wichtiger. Anhand der grafischen Ausgabe der Approximationen und Vergleich mit der analytischen Lösung erkennt man zunächst keinen Grund für dieses unterschiedliche Verhalten der Normen. Deutlich wird es jedoch, wenn man die Sprungstellen in der Komponente x_2 genauer betrachtet. An einigen Zeitpunkten folgt die numerische Lösung der exakten nicht sofort, sondern um einige Gitterpunkte versetzt. Die L_∞ -Norm erkennt hier einen Fehler in der Approximation vom Betrag der Sprunghöhe und unterstellt deswegen eine global schlechte Näherung. Dies wäre bei einer stetigen Trajektorie sicher vernünftig, nicht aber bei der vorliegenden sprunghafteten. So tritt etwa in den Implementierungen ⑤ und ⑧ häufig der Fehler $\epsilon_{L_\infty, x_2} = 8.30521$ auf, welcher genau der Sprunghöhe $|x_2(t_1) - x_2(t_1^-)|$ beim ersten Sprung in t_1 entspricht (vergleiche Abbildung 6.5). Dadurch lässt sich auch der extreme Wert von p_{L_∞} in ⑤ für x_2 erklären, obwohl die Trajektorie für große N gut mit der exakten Lösung übereinstimmt. Festzuhalten bleibt, dass die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm für die numerische Analyse impulsiver Systeme nicht gut geeignet ist.

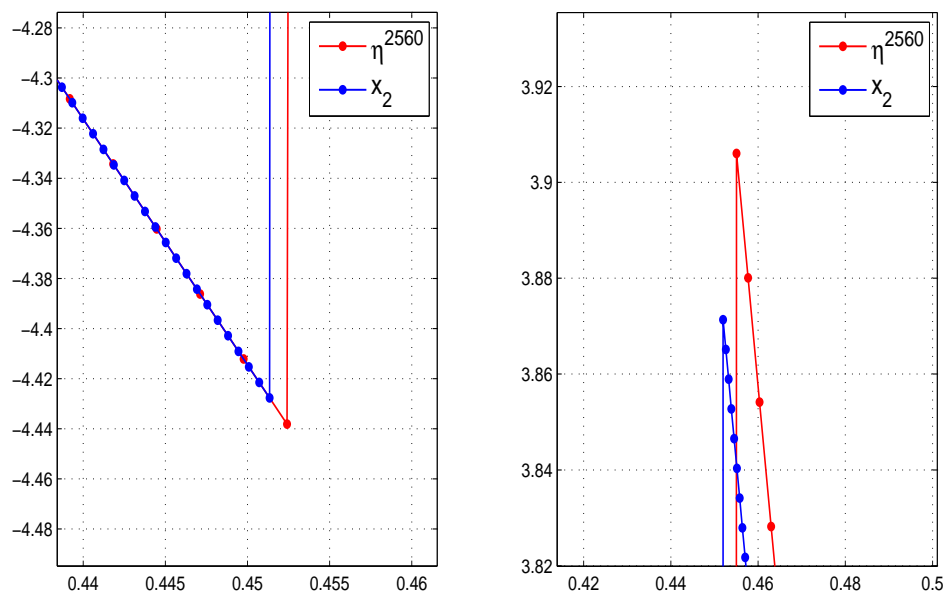


Abbildung 6.5: Sprung in der zweiten Komponente von analytischer und numerischer Lösung

Ein weiterer interessanter Punkt ist der Vergleich der Implementierungen hinsichtlich der Sprungbedingung. Prüft man diese explizit anhand der Näherung η^N (⑤ und ⑧), so lie-

fert der Algorithmus gegenüber den Umsetzungen unter Ausnutzung von Vorwissen über die Lage der Sprungstellen (⑥ und ⑦) wesentlich schlechtere Ergebnisse. So sind für letztere Versionen die Konvergenzordnungen in allen Normen und Komponenten etwa bei 1, bei den ersten ist dagegen $p \leq 0.87010$. Lediglich in ⑤ finden sich in der ersten Komponente zwei positive Ausreisser mit $p_{L_1} = 1.30366$ und $p_{L_\infty} = 1.03588$, die jedoch am folgenden Fazit nichts verändern. Die Implementierungen mit explizitem Sprungtest nutzen zu dessen Auswertung die bisher berechnete numerische Lösung. Da diese fehlerbehaftet ist, verfälscht sich auch der Sprungtest und letztlich die Berechnung der Sprungpunkte. Nutzt man hingegen Vorkenntnisse über deren Lage wie in den anderen Implementierungen, so ist die Sprungbedingung nicht mehr von der Trajektorie sondern lediglich von den Stützstellen τ_j abhängig und dadurch die numerische Lösung genauer.

Zudem wollen wir auch auf die unterschiedliche Implementierung der x -Abhängigkeit in den Funktionen G und α eingehen. Die Paare ⑥ und ⑦ sowie ⑤ und ⑧ sind bis auf diese Abhängigkeit völlig identisch. Für die ersten beiden haben wir bereits festgestellt, dass die Konvergenzordnungen etwa bei 1 liegen. Allerdings ist die Variante ⑥ mit der x -Abhängigkeit in G hinsichtlich p leicht besser, wenn auch erst im Bereich 10^{-2} . Demgegenüber stehen aber schlechtere Werte bei den Konstanten C . Ein Gesamtfazit kann man für diese Paarung anhand der Residuen r ziehen. Diese sind nämlich im Falle des x -unabhängigen α besser, bei r_{L_1} in x_1 sogar um den Faktor 2. Für die Paarung ⑤ und ⑧ erhält man ein ähnliches Ergebnis. Die Implementierung ⑤ mit x -Abhängigkeit in G hat hier Konvergenzordnungen p , die im Bereich 10^{-1} deutlich besser sind. Die Konstanten C fallen dagegen erneut schlechter aus. Zusammenfassend ist also zu sagen, dass eine echte x - bzw. η^N -Abhängigkeit der Funktion α die numerische Lösung der Probleme erschwert.

Zuletzt wollen wir anhand der Modellierung ⑤ auf die Abhängigkeit der Konvergenzeigenschaften von der Stützstellenzahl N eingehen. Wie man in Abbildung 6.6 sieht, scheinen die Fehler in dieser Modellierung in der Komponente x_1 ab hinreichend kleinem h , was äquivalent mit genügend großem N ist, stärker als linear zu fallen. Dies erkennt man auch in der Fehlertabelle 6.12, da sich in der ersten Komponente beide Fehler etwa ab $N = 640$ bei Verdoppelung von N ungefähr um den Faktor 3 verkleinern. Diese Aussagen legen in Verbindung mit der Konvergenztabelle 6.16 die Vermutung nahe, dass man für dieses Beispiel die Konvergenzanalyse durch die Betrachtung kleiner N verzerrt. Als weiterer Beleg für diese Verfälschung finden sich in Tabelle 6.20 die Fehler und in Tabelle 6.21 die Parameter der Konvergenzanalyse für dieses Beispiel mit größeren N (vergleiche auch Abbildung 6.8). Man erkennt, dass die Residuen r in allen Komponenten und Normen kleiner werden während die Konstanten bis auf C_{L_∞} in x_2 teilweise sehr deutlich wachsen. Ein umgekehrtes Verhalten liegt bei den Konvergenzordnungen vor, da sich hier lediglich p_{L_∞} in x_2 verschlechtert. Alle anderen p verbessern sich und für x_1 werden sogar Werte von $p \approx 1.5 = \frac{3}{2}$ erreicht, was gut dem eben erwähnten Verhältnis $\frac{\epsilon}{N}$ von Fehler und Stützstellenzahl entspricht. Man erhält also für dieses Beispiel eine leichte Verbesserung der Konvergenzparameter gegenüber den vorherigen unter Mitbetrachtung kleinerer N . Insgesamt kann man deshalb sagen, dass die Berechnung der Konvergenzparameter von N abhängt und es sich dafür durchaus lohnen kann, die Werte kleinerer N zu ignorieren.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	134.00000	292.24706	53.98388	175.71523
20	174.78125	379.62971	60.21279	194.66160
40	172.62793	357.26374	59.04487	183.17084
80	130.90769	232.02714	51.09754	136.71101
160	89.44506	130.12475	42.09646	93.73055
320	52.69895	58.72887	32.25813	56.90587
640	26.28173	20.83144	22.75940	30.06217
1280	11.83579	6.42640	15.26462	15.49318
2560	4.82060	1.77583	9.73822	7.89669
5120	1.74349	0.45522	7.23361	4.09714
10240	0.61729	0.13888	8.30521	2.30094
20480	0.20355	0.05004	7.25870	1.30187
40960	0.06601	0.02284	8.30521	0.75354
81920	0.02058	0.01096	7.26497	0.42485

Tabelle 6.12: Fehler für ⑤ mit ①.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	44.98602	100.33652	69.56566	97.25457
20	16.98753	40.39810	35.21516	28.75657
40	7.75363	22.38491	15.00317	15.94297
80	3.20734	9.90420	2.15572	5.87093
160	1.53032	4.85364	3.44427	3.08788
320	0.72758	2.34637	2.09863	1.04254
640	0.35859	1.17699	1.05931	0.77073
1280	0.17565	0.58456	0.43015	0.22442
2560	0.08795	0.29275	0.08330	0.15563
5120	0.04369	0.14617	0.11693	0.06706
10240	0.02179	0.07293	0.06126	0.03883
20480	0.01091	0.03659	0.03652	0.02147
40960	0.00544	0.01824	0.02044	0.01051
81920	0.00272	0.00914	0.00555	0.00425

Tabelle 6.13: Fehler für ⑥ mit ①.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	41.23777	97.51231	48.41214	70.98325
20	17.55872	38.91912	30.25873	31.95330
40	4.08646	14.25610	5.17983	13.05708
80	2.49681	8.46281	5.49762	6.89047
160	1.38821	4.59623	2.54883	2.13810
320	0.71100	2.32798	1.84775	1.33214
640	0.35178	1.16945	0.92018	0.50072
1280	0.17337	0.58751	0.12741	0.27027
2560	0.08663	0.29248	0.19974	0.12183
5120	0.04350	0.14701	0.06907	0.09156
10240	0.02182	0.07332	0.06232	0.02662
20480	0.01088	0.03673	0.02528	0.02912
40960	0.00545	0.01832	0.01045	0.00731
81920	0.00272	0.00919	0.00227	0.00611

Tabelle 6.14: Fehler für ⑦ mit ①a.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	15.76563	43.07865	18.93806	57.05524
20	6.84531	20.22954	12.12519	37.54146
40	2.98993	8.56801	8.44087	25.26110
80	1.40998	4.38033	7.64015	17.97391
160	0.76135	2.18047	8.30521	14.02316
320	0.56053	1.13273	7.00752	10.16494
640	0.38526	0.69402	8.30521	8.38068
1280	0.24703	0.39298	7.20218	5.91823
2560	0.14814	0.24899	8.30521	4.52672
5120	0.08846	0.14137	7.25084	3.05769
10240	0.04803	0.08276	8.30521	2.04187
20480	0.02618	0.04396	7.26301	1.26121
40960	0.01336	0.02408	8.30521	0.76072
81920	0.00699	0.01209	7.26605	0.43071

Tabelle 6.15: Fehler für ⑧ mit ①a.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	1155.26078	1.03588	3.06909	3122.01116	1.30366	2.93625
x_2	81.80897	0.29249	0.95708	608.05132	0.74440	1.41726

Tabelle 6.16: Konvergenzanalyse für ⑤ mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	49.64600	1.05790	0.46557	128.81576	1.02182	0.21511
x_2	74.12650	0.98679	1.65919	94.78723	1.07250	0.82602

Tabelle 6.17: Konvergenzanalyse für ⑥ mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	39.99931	1.03007	0.75035	110.71561	1.00131	0.39437
x_2	67.13027	1.02484	1.62520	81.36438	1.05042	0.99762

Tabelle 6.18: Konvergenzanalyse für ⑦ mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	14.11072	0.79427	0.80452	42.59814	0.87010	0.61994
x_2	11.26286	0.05611	0.75937	70.90871	0.50415	0.60500

Tabelle 6.19: Konvergenzanalyse für ⑧ mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

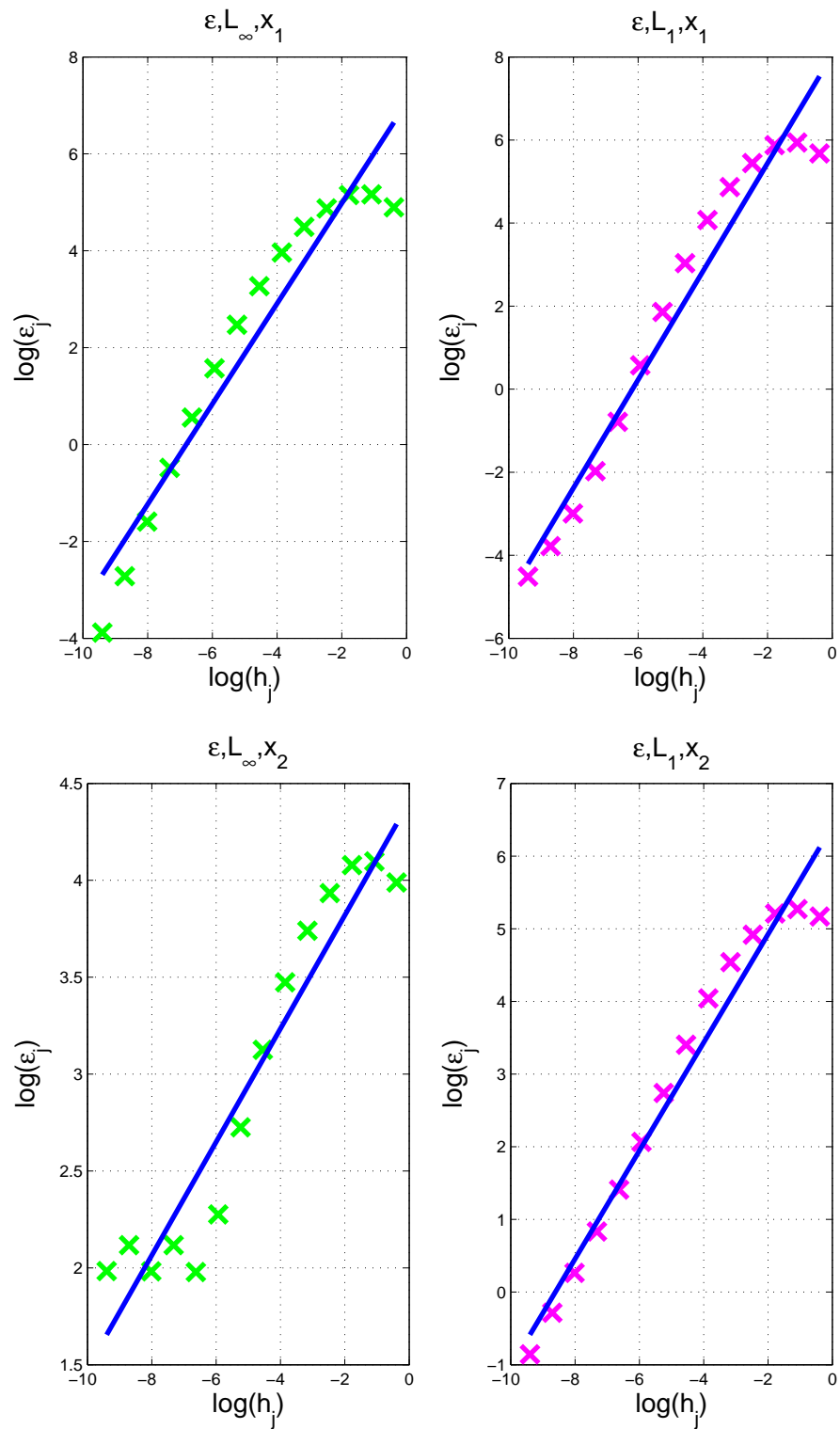


Abbildung 6.6: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für ⑤ mit ①.

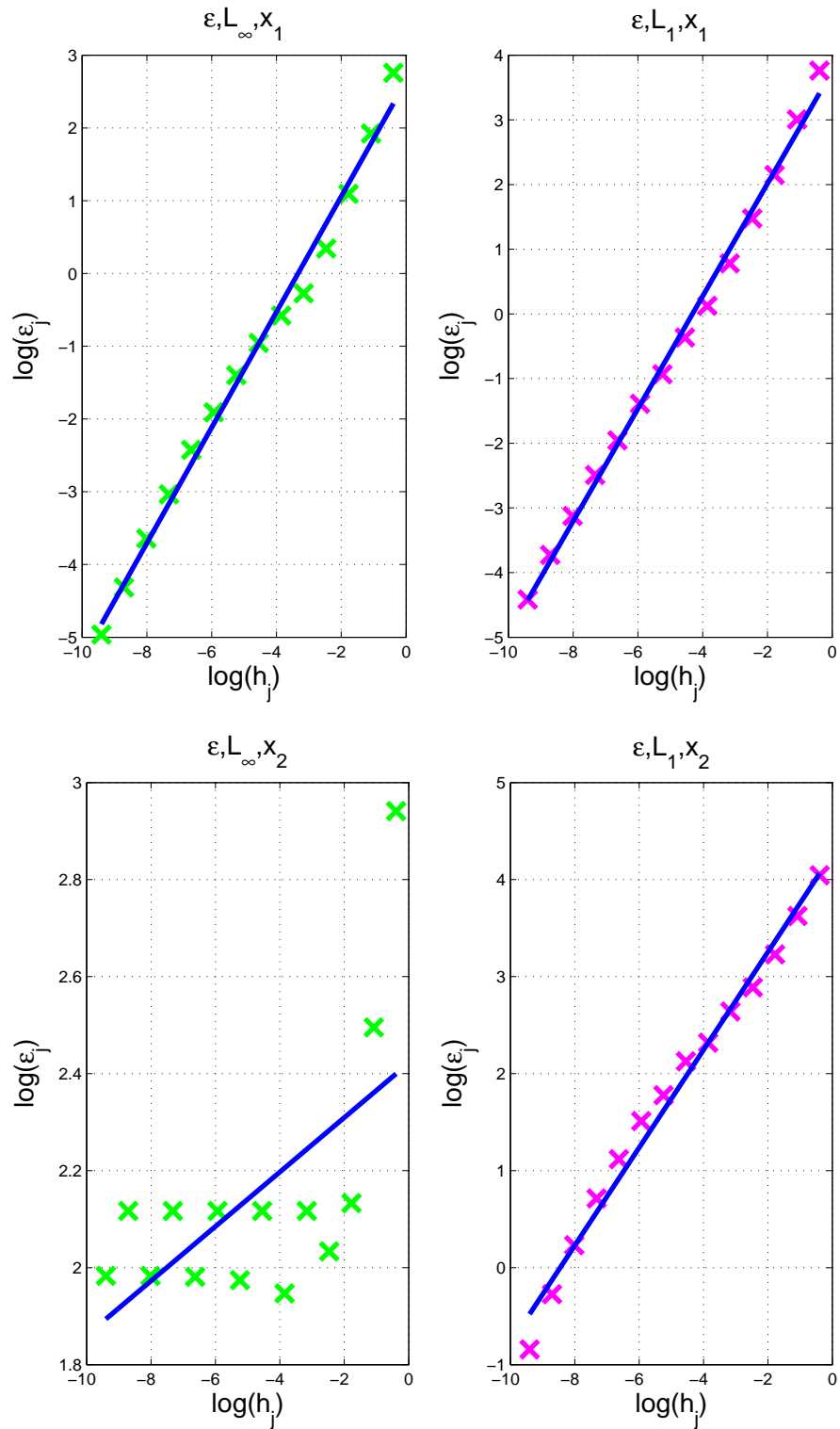


Abbildung 6.7: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für ⑧ mit ①a.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
1280	11.83579	6.42640	15.26462	15.49318
2560	4.82060	1.77583	9.73822	7.89669
5120	1.74349	0.45522	7.23361	4.09714
10240	0.61729	0.13888	8.30521	2.30094
20480	0.20355	0.05004	7.25870	1.30187
40960	0.06601	0.02284	8.30521	0.75354
81920	0.02058	0.01096	7.26497	0.42485
163840	0.00631	0.00559	8.30521	0.23597

Tabelle 6.20: Fehler für (5) mit (a) für große N .

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	50896.47735	1.56243	0.28379	8628.36941	1.45583	0.88350
x_2	17.80005	0.09353	0.50803	1232.91398	0.85107	0.13059

Tabelle 6.21: Konvergenzanalyse für (5) mit (a) und $N=1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920, 163840$.

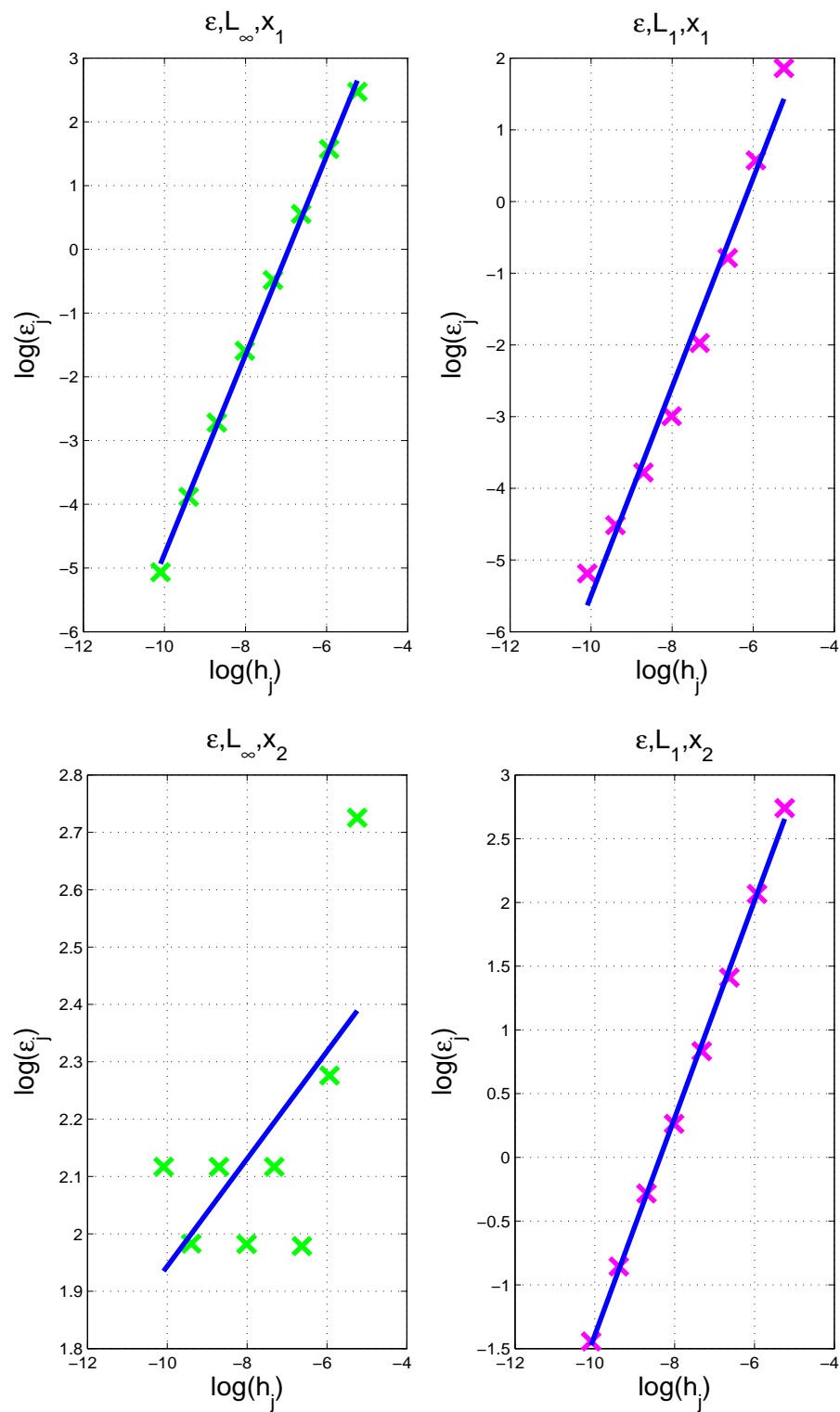


Abbildung 6.8: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für ⑤ mit ① für große N .

6.5.3 Verwendung der linearen Interpolierenden

Zusätzlich zu den bisherigen Untersuchungen haben wir anhand einiger Modellierungen das Riemann-Stieltjes-Verfahren unter Verwendung der linearen Interpolierenden getestet. Da sie sich bei unserer Implementierung nur dann ausnutzen lässt, wenn x direkt in die Berechnung des Funktionswertes von $\alpha[x](t)$ eingeht, braucht man auch nur die entsprechenden Modellierungen und den Löser im Sinne der Bemerkung 6.4 anpassen. Die zugehörigen Dateien tragen alle die Namensweiterung `_linear_Interpol` (vergleiche die Tabellen 6.22 und 6.1).

Nummer	Matlab-File
⑨	<code>fischkultur_3_linear_Interpol.m</code>
⑩	<code>huepf_ball_3_linear_Interpol.m</code>
⑪	<code>huepf_ball_4_linear_Interpol.m</code>

Tabelle 6.22: Modellierungen mit linearer Interpolierender

Zunächst wollen wir erneut die unstetig wachsende Fischpopulation anhand der Modellierung ⑨ betrachten. Da wir für $N = 10 \cdot 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) ein äquidistantes Gitter \mathbb{G}_k der Form

$$\tau_j = t_a + j \cdot h_k, \quad j = 0, \dots, N$$

mit $h_k = \frac{T-t_0}{N}$ und $T - t_0 = 10$ gewählt haben, sind die Sprungpunkte in der Menge der Gitterpunkte enthalten und werden demzufolge immer exakt getroffen. Deswegen ändert die Verwendung der linearen Interpolierenden nichts an der Konvergenzanalyse, da sie immer nur an den Intervallrändern ausgewertet wird. Wir erweitern daher unser Zeitgitter auf $N+2$ Stützstellen und erhalten damit die Schrittweite $h_k = \frac{T-t_0}{N+1}$, mit welcher die Sprungpunkte nun nicht mehr exakt getroffen werden und die lineare Interpolierende im Sprungfall im Inneren des aktuellen Intervalls (τ_j, τ_{j+1}) ausgewertet wird. Man erkennt bereits durch den Vergleich der Tabellen 6.23 und 6.6, dass aufgrund dieser Veränderung die Fehler deutlich kleiner werden. Weiterhin zeigt die Tabelle 6.24, dass gegenüber Tabelle 6.9 in beiden Fehlernormen die Konstanten C und die Residuen r deutlich kleiner werden und die Konvergenzordnungen p leicht wachsen. Den Grund für diese Verbesserung könnte man in der zusätzlichen Stützstelle vermuten. Testet man nun die alte Implementierung ③ mit dieser Anpassung, so stellt man sogar eine Verbesserung in C und p fest. Da diese aber deutlich kleiner ausfällt als bei der linearen Interpolierenden, hat man durch ihre Verwendung eine echte Verbesserung der Approximationseigenschaft erreicht.

Einen weiteren Test der linearen Interpolierenden haben wir für den hüpfenden Ball in den Modellierungen ⑩ und ⑪ durchgeführt. Man sieht an den Ausgleichsgeraden in den Abbildungen 6.9 und 6.10, dass die Entwicklung des Fehlers teilweise unregelmäßiger geschieht und linear nicht mehr so gut wie vorher angenähert werden kann.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}
10	4.89231	22.19646
20	3.33118	12.05924
40	1.96877	6.32489
80	1.07371	3.25644
160	0.56111	1.65758
320	0.28687	0.83732
640	0.14505	0.42086
1280	0.07293	0.21099
2560	0.03657	0.10564
5120	0.01831	0.05286
10240	0.00916	0.02644
20480	0.00458	0.01322
40960	0.00229	0.00661
81920	0.00115	0.00331

Tabelle 6.23: Fehler für ⑨ mit ④.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	6.90901	0.95334	0.46461	24.43791	0.98456	0.13519

Tabelle 6.24: Konvergenzanalyse für ⑨ mit ④ und N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920.

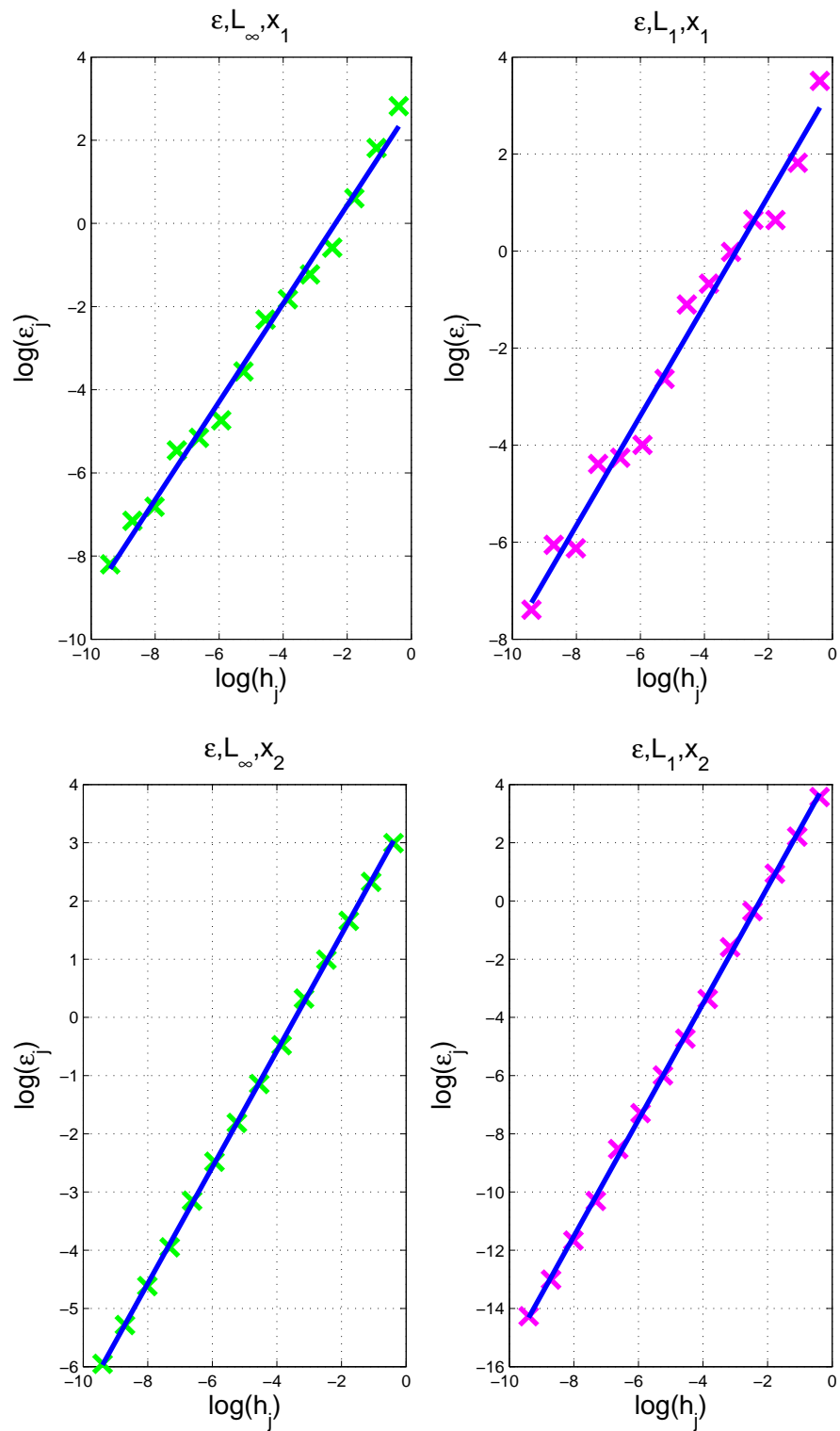


Abbildung 6.9: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für ⑩ mit ④.

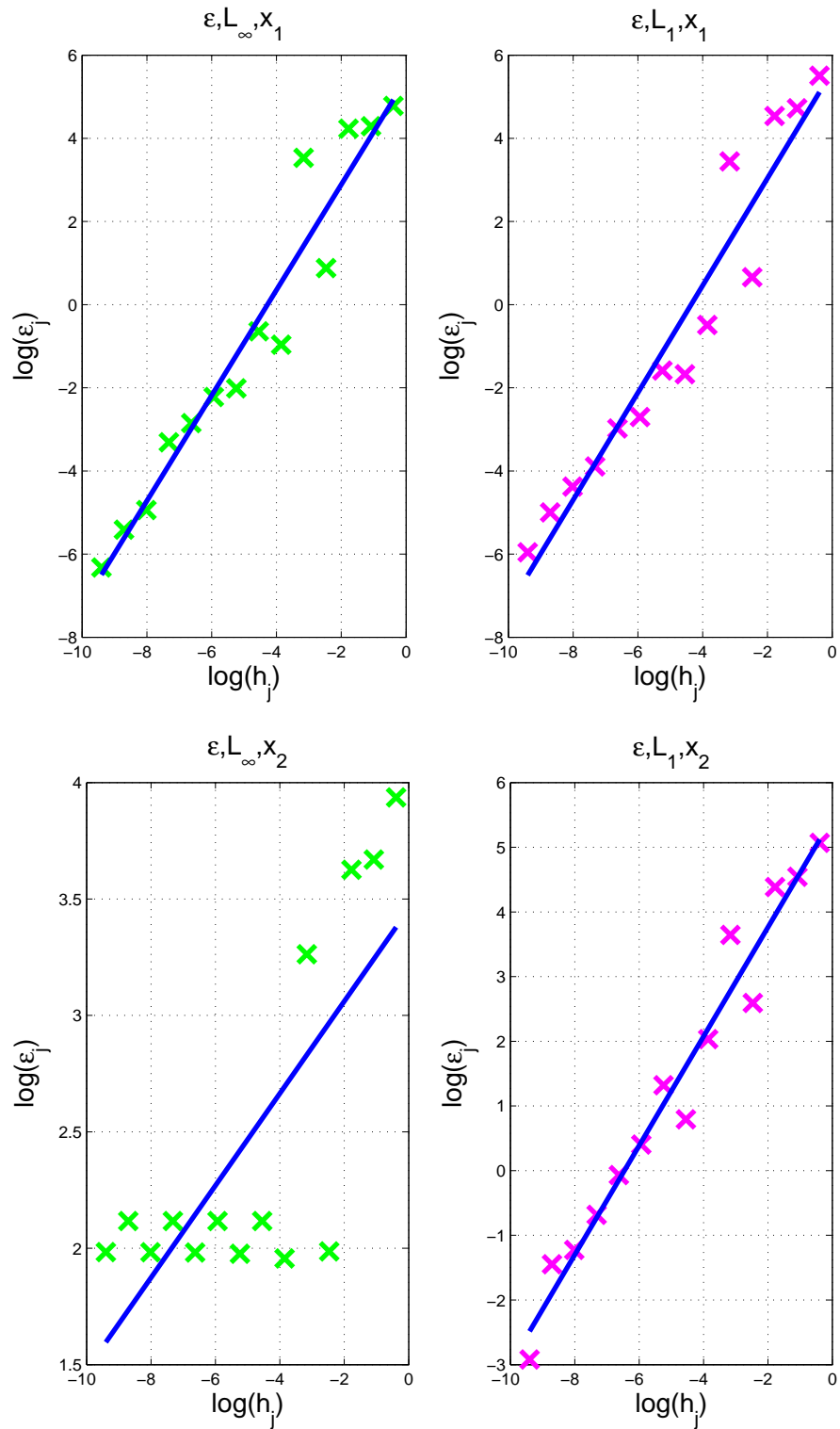


Abbildung 6.10: Ausgleichsgerade und Konvergenzanalyse für (11) mit (d).

Für die Umsetzung ⑩ erkennt man durch Vergleich der Konvergenztabelle 6.26 und 6.18 eine Verbesserung der Approximationseigenschaft, was vor allem in der Komponente x_2 deutlich wird. So werden hier bis auf p_{L_∞} und C_{L_1} alle Parameter deutlich besser, in der L_1 -Norm erzielt man völlig überraschend sogar eine Konvergenzordnung von $p_{L_1} = 1.99806$. Dies ist in x_1 nicht so erkennbar, da der positiven Entwicklung der Konstanten und Konvergenzordnungen merklich schlechtere Residuen gegenüber stehen. Die Tabellen 6.25 und 6.14 zeigen aber, dass die Fehler in beiden Lösungskomponenten bei gleichen N deutlich kleiner ausfallen und man zusammenfassend durch die Verwendung der linearen Interpolierenden eine verbesserte Approximation erzielt.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	16.79279	33.43226	19.97622	35.47512
20	6.13831	6.18665	10.24598	9.09775
40	1.82908	1.90053	5.25525	2.56113
80	0.55832	1.90743	2.69547	0.70445
160	0.29319	0.98255	1.38253	0.20448
320	0.16142	0.51054	0.62047	0.03443
640	0.09887	0.33296	0.31825	0.00883
1280	0.02843	0.07168	0.16323	0.00249
2560	0.00878	0.01840	0.08372	0.00068
5120	0.00575	0.01414	0.04294	0.00020
10240	0.00425	0.01242	0.01927	0.00003
20480	0.00110	0.00218	0.00988	0.00001
40960	0.00078	0.00235	0.00507	0.00000
81920	0.00027	0.00062	0.00260	0.00000

Tabelle 6.25: Fehler für ⑩ mit ①.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	16.38183	1.18102	1.14654	29.96959	1.13265	1.62917
x_2	30.63216	0.99921	0.13280	87.16983	1.99806	0.50486

Tabelle 6.26: Konvergenzanalyse für ⑩ mit ① und $N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920$.

Zuletzt wollen wir noch die Modellierung ⑪ untersuchen. Hier zeigt der Vergleich der beiden Konvergenztabelle 6.28 und 6.19, dass durch die lineare Interpolierende zwar alle Konvergenzordnungen p merklich wachsen, jedoch die Konstanten und Residuen weitaus stärker. Deshalb kann allein anhand dieser Größen keine Aussage über die Approximationseigenschaft getroffen werden. Also muss man erneut die Fehlertabelle 6.27 zu Hilfe nehmen, welche gegenüber der alten Implementierung (siehe Tabelle 6.15) deutlich geringere Fehler aufweist.

Lediglich für x_2 zeigt sich bei ϵ_{L_∞} keine bemerkenswerte Veränderung. Somit verbessert also auch hier die lineare Interpolierende die Approximationseigenschaft des Verfahrens.

N	ϵ_{L_∞, x_1}	ϵ_{L_1, x_1}	ϵ_{L_∞, x_2}	ϵ_{L_1, x_2}
10	119.00000	246.53029	51.21548	158.84023
20	72.99944	112.52921	39.22248	94.04074
40	68.84701	93.45986	37.55660	80.29487
80	2.40575	1.93656	7.28939	13.37936
160	34.22999	31.40484	26.11900	38.26741
320	0.38100	0.61274	7.07138	7.63558
640	0.52627	0.18767	8.30521	2.21014
1280	0.13372	0.20523	7.21833	3.74371
2560	0.10845	0.06705	8.30521	1.49723
5120	0.05785	0.05089	7.25489	0.93400
10240	0.03651	0.02039	8.30521	0.50460
20480	0.00715	0.01256	7.26402	0.29386
40960	0.00447	0.00675	8.30521	0.23511
81920	0.00180	0.00259	7.26630	0.05388

Tabelle 6.27: Fehler für ⑪ mit ④.

Komponente	C_{L_∞}	p_{L_∞}	r_{L_∞}	C_{L_1}	p_{L_1}	r_{L_1}
x_1	226.92629	1.26810	3.33260	274.43960	1.28961	3.66223
x_2	31.69727	0.19785	1.79488	232.21827	0.84381	1.65164

Tabelle 6.28: Konvergenzanalyse für ⑪ mit ④ und N=10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920.

Insgesamt bleibt also festzuhalten, dass die Verwendung der linearen Interpolierenden zu einer verbesserten Berechnung der numerischen Lösung führt. Die Konvergenzparameter sind gegenüber dem vorherigen Lösungsverfahren nur selten schlechter, im Wesentlichen jedoch gleich und teilweise sogar deutlich besser. Auch die Analyse der Fehlertabellen fällt zugunsten der linearen Interpolierenden aus. Diese Variante kann man aber nur dann ausnutzen, wenn die Lösung $x(t)$ tatsächlich direkt in die Berechnung des Funktionswertes von α eingeht. Allerdings zeigen solche Modellierungen - wie wir in den Kapiteln 6.5.1 und 6.5.2 bereits gesehen haben - von vornherein ein schlechteres Approximationsverhalten gegenüber denen mit x -unabhängigem α , was den positiven Effekt durch die lineare Interpolierende wieder relativiert. Ihre Verwendung im Hinblick auf die Verbesserung der Konvergenzeigenschaften ist also von Fall zu Fall nachzuprüfen.

6.6 Besonderheiten bei Implementierung und numerischer Analyse

Zum Abschluss wollen wir auf Besonderheiten und Fallstricke eingehen, auf die wir im Laufe der Entwicklung dieses Kapitels gestoßen sind sowie einige wichtige Inhalte zusammenfassen. Gleichzeitig können manche dieser Punkte Motivation und Ausgangspunkt für zukünftige Arbeiten und weitergehende Untersuchungen sein.

Ein erster wichtiger Aspekt bei der numerischen Analyse impulsiver Systeme ist die Wahl einer geeigneten Fehlernorm. Wir haben exemplarisch Approximationen an die L_∞ - und an die L_1 -Norm gewählt. Dabei haben wir festgestellt, dass in der L_∞ -Norm große Fehler auftreten, falls die numerische und die analytische Lösung eine Schrittweite auseinanderliegen, etwa in der zweiten Komponente beim hüpfenden Ball. Ein Grund für dieses Verhalten ist das numerische Verfahren an sich, welches den Sprüngen der exakten Lösung nicht immer schnell genug folgen kann und diese dadurch in der Approximation zeitverzögert auftreten. Ein anderer Aspekt ist die links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit der Funktionen $\alpha[x](t)$ und $x(t)$. Für die Modellierung ist es egal welche der beiden einseitigen Stetigkeiten man betrachtet, man muss sich aber für eine entscheiden und diese dann konsequent bei der Umsetzung aller Funktionen verwenden, da ansonsten die Ergebnisse der Konvergenzanalyse verfälscht werden. In der tatsächlichen Implementierung ist es jedoch oft schwierig die Funktionsdefinitionen hinsichtlich der Sprünge kompatibel zu gestalten und deswegen die L_∞ - bzw. $\|\cdot\|_\infty$ -Norm für die Analyse impulsiver Systeme eher ungeeignet.

Des Weiteren haben wir am Beispiel des hüpfenden Balles untersucht, ob die Analyse der Konvergenzeigenschaften durch die Berücksichtigung kleiner N gestört wird. Bei der Betrachtung großer N ergaben sich dabei teilweise bessere Konvergenzordnungen p und durchwegs kleinere Residuen r , allerdings auch stark vergrößerte Konstanten C . Die Berechnung dieser Parameter ist demnach stark von N abhängig, insgesamt ergeben sich jedoch keine bemerkenswerten Verbesserungen durch die Vernachlässigung kleinerer N .

Ferner haben wir für den hüpfenden Ball die Modellierungen ⑥ und ⑦ verwendet, in die Vorkenntnisse über die analytische Lösung eingegangen sind und dadurch die Sprungpunkte unabhängig von den Werten der Trajektorie berechnet wurden. Für diese Versionen ergaben sich vor allem in der sprungbehafteten Komponente $x_2(t)$ wesentlich bessere Konvergenzparameter gegenüber den Modellen mit explizitem Test der Sprungbedingung anhand von η^N . In der ersten Komponente konvergierten sie zumindest besser als die x -abhängige Modellierung mit explizitem Sprungtest, jedoch schlechter als deren x -unabhängige Variante. Als Gesamtfazit lässt sich also festhalten, dass die numerische Berechnung unter Ausnutzung von Vorwissen über die exakte Lösung bessere Konvergenzeigenschaften aufweist.

Als Nebenresultat zeigt sich hierbei, dass die x -Abhängigkeit von α numerisch anspruchsvoller ist und zu einem schlechteren Approximationsverhalten des Verfahrens führt. Besonders deutlich sieht man dies in den Modellierungen ⑤ und ⑧ für den hüpfenden Ball. Auch an den Beispielen ② und ③ der Fischkultur erkennt man diese Eigenschaft, wenn auch nicht ganz so offensichtlich.

Eine weitere interessante Fragestellung ist, ob die numerischen Ergebnisse davon abhängen,

wie genau die Sprungpunkte des impulsiven Systems getroffen werden. In unserem Beispiel der Fischkultur werden diese exakt getroffen, da sie für beliebiges N Teil des Gitters \mathbb{G} sind. Beim hüpfenden Ball verhält sich dies jedoch anders. Wie analytisch berechnet wurde sind die Sprungpunkte hier eine unendliche Folge von Zeitpunkten t_k mit einem Häufungspunkt \tilde{t} , so dass diese für kein N komplett im Diskretisierungsgitter enthalten sein können. Trotzdem liefert aber das von uns vorgestellte Riemann-Stieltjes-Verfahren gute Ergebnisse. Dies ist eine echte Verbesserung im Gegensatz zu den etwa in [18] oder [25] vorgestellten Methoden, die ein exaktes Treffen der Sprungpunkte - also im Prinzip deren Kenntnis a priori - durch den Lösungsalgorithmus voraussetzen.

Zum Schluss wollen wir auf einige Möglichkeiten eingehen, das vorgestellte Riemann-Stieltjes-Verfahren anzupassen und zu verbessern.

Eine erste Idee dafür war, in der Approximation des Riemann-Stieltjes-Integrals die Funktion G nicht am linken sondern am rechten Intervallende auszuwerten und dazu die Ersetzung

$$G(t_j, \eta_j^N) \rightsquigarrow G(t_{j+1}, \tilde{\eta}_{j+1}^N)$$

durchzuführen. Dabei ergaben sich allerdings höchstens gleich gute Konvergenzeigenschaften, so dass diese Anpassung nicht weiter betrachtet wurde.

Weiterhin wurde versucht für die Berechnung der nächsten Iterierten η_{j+1}^N eine Fixpunktiteration zu verwenden. Die grundlegende Hoffnung war dadurch vor allem die Sprünge der Trajektorie exakter zu approximieren. Allerdings wurden die numerischen Ergebnisse nicht verbessert und teilweise sogar völlig verfälscht, so dass die berechneten Näherungen und Plots keinerlei Übereinstimmung mehr mit der analytischen Lösung hatten.

Die letzte Idee zur Verbesserung des Algorithmus war die Verwendung einer linearen Interpolierenden in der Auswertung der Funktion α . Die Motivation war durch ihre Verwendung die Sprunghöhe der Trajektorie bereits innerhalb eines Diskretisierungsintervalls $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ berechnen zu können. Durch die Untersuchung einiger Beispiele haben wir festgestellt, dass die lineare Interpolierende tatsächlich die Konvergenzeigenschaften des Riemann-Stieltjes-Verfahrens verbessert. Allerdings setzt ihre Verwendung bei unseren Implementierungen voraus, dass die Lösung $x(t)$ bzw. η^N direkt in den Funktionswert von α eingeht. Wir haben aber auch gesehen, dass diese x -Abhängigkeit von vornherein numerisch anspruchsvoller ist und demzufolge ein schlechteres Approximationsverhalten mit sich bringt. Es ist also von Fall zu Fall zu prüfen, ob die verbesserten Konvergenzeigenschaften durch die Verwendung der linearen Interpolierenden die Nachteile aufgrund der x -Abhängigkeit aufwiegen.

Kapitel 7

Schlusswort und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit gesehen, dass die Beschreibung, welche der Duden [34] dem Wort "impulsiv" zuordnet, durchaus den mathematischen Aspekt derartiger Systeme berührt. Eine erschöpfende wissenschaftliche Erklärung kann er, genau wie diese Arbeit, freilich nicht liefern.

Trotzdem haben wir eine umfassende Sammlung mathematischer Hilfsmittel und Resultate, die eine theoretische Ausgangsbasis für die Analyse impulsiver Systeme bildet, zusammengestellt. Insbesondere mit Hilfe der Funktionen beschränkter Variation und des Riemann-Stieltjes-Integrals konnten wir eine Systemformulierung in Gestalt einer Integralgleichung aufstellen. Die Prüfung ihrer mathematischen Verwendbarkeit ist uns nur zum Teil, anhand der entsprechenden Modellierung der Beispiele aus Kapitel 2 und deren Zuordnung zu größeren Beispielklassen, gelungen. Eine vollständige und mathematisch rigorose Formulierung kann daher das Ziel zukünftiger Untersuchungen darstellen. Dabei sollte man immer optimale Steuerungsprobleme für nicht-impulsive zustandsbeschränkte Systeme im Hinterkopf behalten, damit auch sie in diesem Kontext formuliert werden können.

Um die numerische Analyse dieser Integralgleichung zu ermöglichen, haben wir zunächst Quadraturformeln für das Riemann-Stieltjes-Integral betrachtet. Auch hier gibt es interessante Ansatzpunkte für weitere Forschungen, etwa die Herleitung von Fehlerabschätzungen für die geschlossenen Newton-Cotes-Formeln unter möglichst schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen oder die Entwicklung adaptiver, d.h. schrittweitensteuernder, Verfahren.

Auf der Grundlage dieser Quadraturformeln und bekannter Einschrittverfahren haben wir dann numerische Algorithmen für impulsive Integralgleichungen formuliert. Insbesondere das neu entwickelte Riemann-Stieltjes-Verfahren scheint, aufgrund der durchgeführten numerischen Experimente, ein vielversprechender Ansatz zu sein. Deswegen wäre eine detaillierte Untersuchung hinsichtlich dessen Konvergenzeigenschaften eine logische Konsequenz. Damit verbunden ist dann die Entwicklung einer umfassenden Diskretisierungstheorie für impulsive Systeme, da die von uns entwickelten Algorithmen lediglich heuristisch motiviert sind.

Diese numerischen Ansätze haben wir in einem *Matlab*-Programmpaket umgesetzt, welches sich auf der beiliegenden CD befindet. Auch hier bietet sich Raum, einerseits zur Verbesserung der Implementierungen, z.B. hinsichtlich Rechengeschwindigkeit, Parameterübergabe oder Visualisierung, andererseits zur Ergänzung um weitere numerische Analyse-Werkzeuge.

Anhang A

Daten auf der beiliegenden CD

In diesem Abschnitt wollen wir auf den Inhalt der beiliegenden CD eingehen und vor allem den Gebrauch des neu implementierten Programmpakets zur Lösung impulsiver Systeme erklären.

A.1 Verzeichnisse

Die beiliegende CD enthält die folgenden Verzeichnisse:

- Numerische_Verfahren
- Diplomarbeit

Der erste Ordner enthält dabei das neu implementierte Programmpaket zur Lösung impulsiver Systeme. Zu diesem gehören die Umsetzungen der Lösungsverfahren für impulsive Integralgleichungen aus den Kapiteln 6.1 und 6.2 sowie zusätzliche Werkzeuge zur numerischen Analyse. Außerdem sind in diesem Ordner sämtliche Modellierungen aus dem Kapitel 6.5 und in den weiteren Unterordnern Plots und Tabellen aus deren numerischer Untersuchung enthalten.

Der zweite Ordner enthält eine *pdf*-Version dieser Arbeit.

A.2 Programmpaket für impulsive Systeme

Auf der beiliegenden CD findet sich ein Programmpaket zur Lösung impulsiver Systeme, welches mit *Matlab* erstellt wurde. Das Kernstück ist die Datei `imp_sys_main.m`, in welcher benutzerspezifische Daten und die eigentliche Programmbibliothek zusammengeführt werden. Wir wollen hier die Handhabung des Programmpakets sowie deren Bestandteile kurz vorstellen. Einen schematischen Überblick gibt Abbildung A.1.

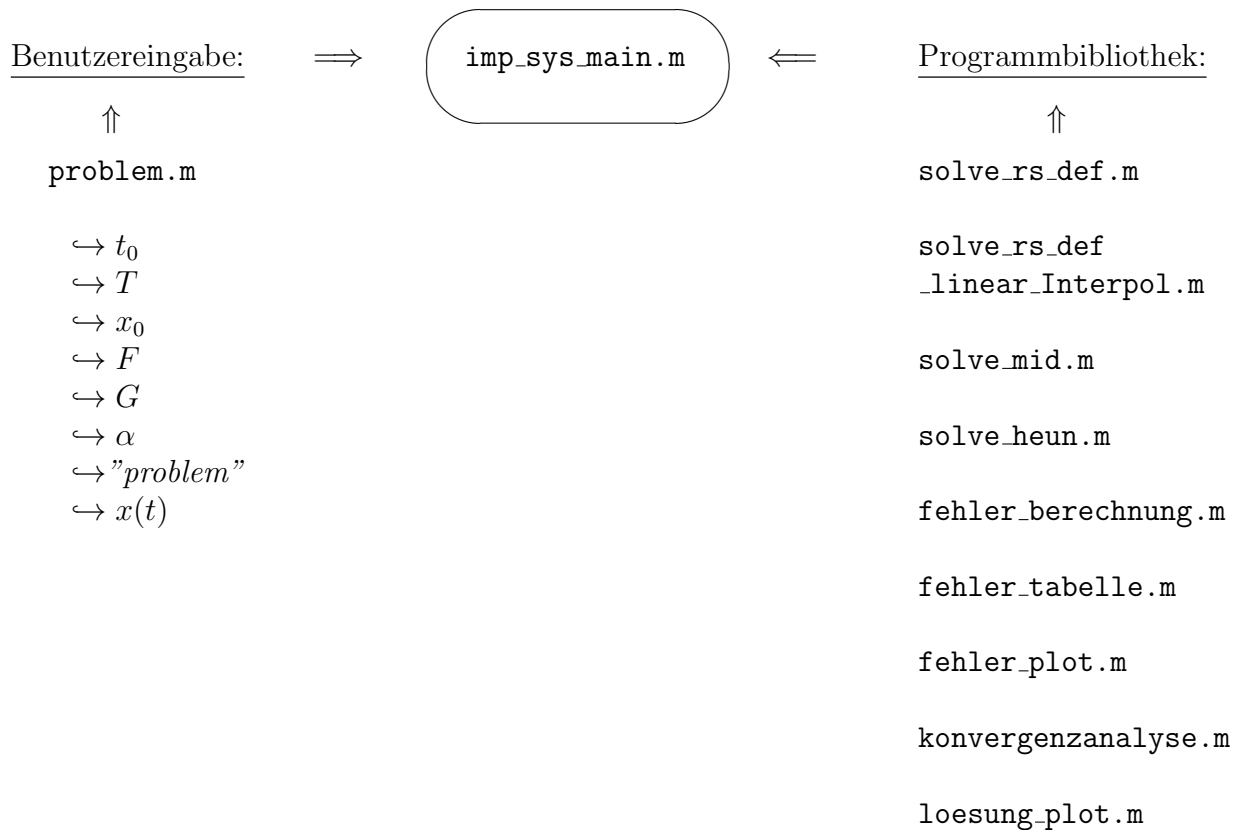


Abbildung A.1: Schematische Darstellung des Programmpakets für impulsive Systeme

Vorbereitungen

Der Nutzer muss entsprechend der Abbildung A.1 die Daten seines spezifischen Problems in einem m-File `problem.m` vorbereiten. Dieses benötigt die folgenden Angaben:

- Startzeit t_0
- Endzeit T
- Startwert x_0
- Systemfunktionen $F(t, x(t))$ und $G(t, x(t))$
- Funktion beschränkter Variation $\alpha[x](t)$
 (in der normalen Variante erhält sie die Übergabeparameter (η_j^N, τ_j) und bei Verwendung der linearen Interpolierenden $(\tilde{\eta}_{j+1}^N, \eta_j^N, \tau_j, t)$, wobei t der Zeitpunkt ist, zu dem α ausgewertet werden soll, also entweder τ_j oder τ_{j+1} (vgl. Bemerkung 6.4))

- Problemname "*problem*" als String
(damit Plots und Tabellen in entsprechenden Verzeichnissen abgespeichert werden)
- analytische Lösung $x(t)$
(damit werden Konvergenzuntersuchungen möglich)

Diese Datei muss im selben Verzeichnis gespeichert werden, in dem sich auch das Programmpaket befindet. Zusätzlich legt der Nutzer noch eine passende Verzeichnisstruktur an, damit vom Programm erzeugte Plots und Tabellen korrekt abgespeichert werden. Die nötigen Unterverzeichnisse sind

- Plots/Trajektorien/problem
(Plots der Trajektorien werden für jedes Problem in separaten Ordnern gespeichert)
- Plots/Fehler/problem
(Plots der Fehler werden für jedes Problem in separaten Ordnern gespeichert)
- Plots/Konvergenzanalyse/problem
(pro n -dimensionalem Problem erzeugt das Programm n Plots)
- Tabellen/problem
(enthält die Konvergenz- und Fehlertabellen)

Die Hauptdatei `imp_sys_main.m`

Diese Datei ist das Kernstück des hier vorgestellten Programmpakets, da über sie der tatsächliche Rechengang gesteuert wird. Außerdem fügt der Benutzer mittels ihr seine selbst vorher angefertigten Problemdateien und die eigentliche Programmbibliothek zur Lösung impulsiver Systeme zusammen. Dabei kann er auf eine Fülle verschiedener Einstellungsmöglichkeiten zurückgreifen, die wir hier erklären wollen.

(i) Diskretisierungsgitter \mathbb{G}

Als erstes kann man die verschiedenen äquidistanten Diskretisierungsgitter \mathbb{G} anhand ihrer Stützstellenanzahl festlegen. Anzahl und Feinheit der Gitter sind dabei (bis auf Unendlichkeit) unbeschränkt. Der entsprechende Befehl lautet etwa

$$N = [10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280];$$

(ii) Schleife `for m=1:length(N)`

Danach läuft das Programm in eine Schleife über die einzelnen Diskretisierungsgitter der Feinheit $N+1$. Darin können folgende Einstellungen vorgenommen werden.

(a) Spezifische Problemdateien

Der Benutzer lädt seine vorher erstellte Problemdatei `problem.m` mit dem Befehl

$$[t_0, T, x_0, F, G, \alpha, \text{problem}, x] = \text{problem};$$

(b) Auswahl des Löser

Anschließend legt der Benutzer fest, welches Lösungsverfahren aus der Bibliothek er verwenden will. Es sind die drei Standardverfahren `solve_rs_def.m`, `solve_mid.m` und `solve_heun.m` sowie `solve_rs_def_linear_Interpol.m` zur Verwendung der linearen Interpolierenden vorhanden. Danach muss der entsprechende Name des Verfahrens (`rs_def`, `rs_def_linear_Interpol`, `heun` oder `mid`) angegeben werden. Dieser String wird für die Dateinamen der später erzeugten Plots und Tabellen verwendet. Dadurch lassen sich diese eindeutig dem dabei verwendeten Verfahren zuordnen. Die nötigen Befehle sind etwa

```
eta = solve_rs_def(N(m),t,x_0,F,G,alpha);
verfahren = 'rs_def';
```

Falls das Problem von der Dimension n ist, erhält man als Rückgabe für `eta` eine $n \times (N + 1)$ -dimensionale Matrix.

(c) Fehlerberechnung

In der Fehlerberechnung

```
err(m,:) = fehler_berechnung(t,eta,N(m),x);
```

werden pro Komponente der Lösung die beiden Fehlernormen (6.6) und (6.7) berechnet, also insgesamt $2n$ Normen pro Gitter. `err(m,:)` ist demnach ein $1 \times 2n$ -Vektor.

(d) Grafische Ausgabe

Die mit dem aktuellen Gitter berechnete Trajektorie η^N wird mit dem Befehl

```
loesung_plot(t,eta,N(m),problem,verfahren,0);
```

geplottet. Das letzte Übergabeargument kann dabei wahlweise 0 oder 1 sein. Setzt man es auf 1, so werden alle Plots zusätzlich noch als *eps*- bzw. *fig*-Dateien abgespeichert. Setzt man es auf 0, erfolgt lediglich die Anzeige. Dazu ist noch eine entsprechende Dateistruktur anzulegen, vergleiche den Abschnitt **Vorbereitungen**.

(iii) Konvergenzanalyse

Hier werden die Konvergenzparameter des aktuellen Problems in den Normen (6.6) und (6.7) anhand des Ausgleichsproblems (6.9) ermittelt.

```
konvergenzanalyse(t_0,T,N,err,problem,verfahren,0,0);
```

Erneut kann der Benutzer durch die letzten beiden Übergabeparameter Datei- und Grafikausgabe beeinflussen. Wählt man für den ersten eine 1, so werden die entscheidenden Parameter C , p und r pro Komponente zeilenweise in eine Tabelle im *tex*-Format übertragen, für

0 nicht. Der zweite Parameter steuert die Speicherung der grafischen Ausgabe. Setzt man ihn auf 1, so werden die zugehörigen Ausgleichsgeraden als *eps*- bzw. *fig*-Dateien abgespeichert. Setzt man ihn auf 0, so erfolgt lediglich die Anzeige. Dazu ist noch eine entsprechende Dateistruktur anzulegen, vergleiche den Abschnitt **Vorbereitungen**.

(iv) Fehlerausgabe

Zuletzt ist es noch möglich, die Ausgabe der Fehler (6.6) und (6.7) festzulegen. Dazu kann man durch den Befehl

```
fehler_tabelle(N,err,problem,verfahren);
```

die Fehler in einer *tex*-Tabelle abspeichern. Es werden dazu vertikal die Gitterdimensionen und horizontal die Fehler in den einzelnen Komponenten aufgetragen.

```
fehler_plot(N,err,problem,verfahren,0);
```

Durch das letzte Übergabeargument wird dabei die grafische Ausgabe gesteuert. Setzt man es auf 1, so werden alle Plots zusätzlich noch als *eps*- bzw. *fig*-Dateien abgespeichert. Setzt man es auf 0, erfolgt lediglich die Anzeige. Dazu ist noch eine entsprechende Dateistruktur anzulegen, vergleiche den Abschnitt **Vorbereitungen**.

Dateien der Programmbibliothek

Zum Programmpaket für impulsive Systeme gehört eine umfangreiche Programmbibliothek, welche in der Hauptdatei eingebunden werden kann. Sie lässt sich in vier Teilbereiche untergliedern.

Integralgleichungslöser

Hierzu zählen die Dateien, in denen die eigentlichen Algorithmen zur Lösung der impulsiven Integralgleichung implementiert sind. Wir haben dazu das Riemann-Stieltjes-Verfahren inklusive einer Variante zur Nutzung der linearen Interpolierenden, das verallgemeinerte Heun-Verfahren sowie die verallgemeinerte Mittelpunktsregel realisiert (vgl. Kapitel 6.1 und 6.2).

- `solve_rs_def.m`
- `solve_rs_def_linear_Interpol.m`
- `solve_mid.m`
- `solve_heun.m`

Fehleranalyse

In diese Kategorie fallen die drei Dateien

- fehler_berechnung.m
- fehler_tabelle.m
- fehler_plot.m

In der ersten Datei werden die Fehler in der Berechnung der numerischen Lösung durch Vergleich mit der analytischen ermittelt. Die Grundlage dafür sind die beiden Fehlernormen (6.6) und (6.7). In der zweiten werden diese Fehler in einer *tex*-Datei in Form einer Tabelle gespeichert. Es werden dazu vertikal die Gitterdimensionen und horizontal die Fehler in den einzelnen Komponenten aufgetragen. Die dritte Datei enthält schließlich die grafische Ausgabe und erzeugt einen Plot, in welchem Fehler ϵ über Stützstellenzahl N aufgetragen werden.

Konvergenzanalyse

Die Analyse der Konvergenz erfolgt auf der Grundlage der obigen Fehlerberechnung mittels der Datei

- konvergenzanalyse.m

Hierin wird das Ausgleichsproblem (6.9) zur Ermittlung von Konvergenzordnung und der zugehörigen Konstante gelöst. Die Datei ermöglicht die Erzeugung einer Tabelle in Form einer *tex*-Datei, in welcher diese Parameter sowie die Residuen gespeichert werden, sowie den Plot und die Speicherung der entsprechenden Ausgleichsgeraden.

Grafische Ausgabe

Der letzte Teil der Programmbibliothek enthält die Datei

- loesung_plot.m

Sie dient dazu, die berechneten numerischen Lösungen zu plotten und gegebenenfalls auch abzuspeichern. Standardmäßig werden die Komponenten der Trajektorie je Diskretisierungsgitter horizontal in einer Matlab-Figure angeordnet. In dieser Datei existiert aber auch eine alternative auskommentierte Implementierung in der sämtliche Komponenten getrennt in eigenen Figure-Fenstern dargestellt werden.

Programmaufruf

Um das Programmpaket schließlich verwenden zu können, muss man in Matlab für "Current Directory" das Verzeichnis wählen, in dem sich die Hauptdatei `imp_sys_main.m` sowie die problemspezifischen Daten und die Programmbibliothek befinden. Die Ausführung des Pakets erfolgt dann über das "Command Window" durch den Befehl

```
>> imp_sys_main;
```

Entsprechend den gewählten Einstellungen werden Plots und Dateien durch eine automatische Namensgebung, innerhalb der vorher bereitgestellten Dateistruktur, abgespeichert. Die einzelnen Dateinamen beginnen dabei immer mit dem betrachteten Problem und dem verwendeten Integralgleichungslöser in der Form "problem_verfahren".

Literaturverzeichnis

- [1] Acary, V. und B. Brogliato: *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*, Band 35 der Reihe *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [2] Baier, R. und T. Donchev: *Discrete Approximation of Impulsive Differential Inclusions*. Numer. Funct. Anal. Optim., 31(6):653–678, 2010.
- [3] Bainov, D. D. und P. S. Simeonov: *Systems with impulse effect*. Ellis Horwood, Chicester, 1989.
- [4] Barbu, V. und Th. Precupanu: *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. Mathematics and its applications: East European Series. Editura Academiei, Bucuresti, 1986.
- [5] Brogliato, B.: *Nonsmooth impact mechanics*, Band 220 der Reihe *Lecture Notes in control and information sciences*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [6] Das, P. C. und R. R. Sharma: *On optimal controls for measure delay-differential equations*. SIAM J. Control, 9(1):43–61, 1971.
- [7] Das, P. C. und R. R. Sharma: *Existence and stability of measure differential equations*. Czech. Math. J., 22(1):145–158, 1972.
- [8] Dragomir, S.S. und T.M. Rassias: *Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [9] Esser, H.: *Konvergenz von Quadraturverfahren vom Gaußschen Typ*. Studia Sci. Math. Hungar., 7:375–378, 1972.
- [10] Fichtenholz, G. M.: *Differential- und Integralrechnung*, Band 3. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1992.
- [11] Folland, G. B.: *Real Analysis*. John-Wiley & Sons, Inc., New York Chicester, 1999.
- [12] Gerdts, M.: *Optimal Control of Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Habilitation, Mathematisches Institut, Universität Bayreuth, Dezember 2006.

- [13] Hewitt, E. und K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975.
- [14] Ioffe, A. D. und V. M. Tichomirov: *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [15] Kamke, E.: *Das Lebesgue-Stieltjes-Integral*. Teubner, Leipzig, 1956.
- [16] Krylov, V. I.: *Approximate calculation of integrals*. Macmillan, New York, 1962.
- [17] Kurzweil, J.: *Generalized ordinary differential equations*. Czechosl. Math. J., 8(1):360–388, 1958.
- [18] Liu, M. Z., H. Liang und Z. W. Yang: *Stability of Runge-Kutta methods in the numerical solution of linear impulsive differential equations*. Appl. Math. Comput., 192(2):346–357, 2007.
- [19] Mercer, P. R.: *Hadamard's inequality and trapezoid rules for the Riemann-Stieltjes integral*. JMAA, 344(2):921–926, 2008.
- [20] Munteanu, M.: *Quadrature formulas for the generalized Riemann-Stieltjes integral*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), 38(1):39–50, 2007.
- [21] Natanson, I. P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Verlag Harri Deutsch, Zürich, Frankfurt am Main, Thun, 1977.
- [22] Pandit, S. G. und S. G. Deo: *Differential Systems Involving Impulses*, Band 954 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [23] Pereira, F. L. und F. L. Silva: *A Maximum Principle for Infinite Time Asymptotically Stable Impulsive Dynamic Control Systems*. Preprints of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 1. – 3. September 2010, Bologna.
- [24] Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Band II. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [25] Ran, X. J., M. Z. Liu und Q. Y. Zhu: *Numerical methods for impulsive differential equation*. Math. Comput. Modelling, 48(1–2):46–55, 2008.
- [26] Randelović, B. M., L. V. Stefanović und B. M. Danković: *Numerical solution of impulsive differential equations*. Facta Univ., Ser. Math. Inf., 15:101–111, 2000.
- [27] Samoilenko, A. M. und N. A. Perestjuk: *Impulsive Differential Equations*, Band 14 der Reihe *World Scientific Series On Nonlinear Science - Series A*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [28] Schmaedeke, W. W.: *Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control, 3(2):231–280, 1965.

- [29] Schwabik, S., M. Tvrdý und O. Vejvoda: *Differential and integral equations*. Reidel, Dordrecht, 1979.
- [30] Stoer, J.: *Numerische Mathematik 1*. Springer, Berlin, 2005.
- [31] Stroud, A. H.: *Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations*. Springer, Heidelberg, 1974.
- [32] Tortorella, M.: *Closed Newton-Cotes quadrature rules for stieltjes integrals and numerical convolution of life distributions*. Siam J. Sci. Stat. Comput., 11(4):732–748, 1990.
- [33] Widder, D. V.: *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [34] Wissenschaftlicher Rat der Dudenredaktion (Hrsg.): *Deutsches Universalwörterbuch*. Duden. Dudenverlag, Mannheim, 2007.
- [35] Wolenski, P. R. und S. Žabić: *A differential solution concept for impulsive systems*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A, Math. Anal, 13B(suppl.):199–210, 2006.
- [36] Wolenski, P. R. und S. Žabić: *A sampling method and approximation results for impulsive systems*. SIAM J. Control Optim., 46(3):983–998, 2007.
- [37] Yang, T.: *Impulsive control theory*, Band 272 der Reihe *Lecture Notes in control and information sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [38] Žabić, S.: *Impulsive Systems*. Dissertation, Louisiana State University, 2005.
- [39] Zavalishchin, S. T. und A. N. Sesekin: *Dynamic Impulse Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

.....
Ort, Datum

.....
Alexander Fick