

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Polynomielles Chaos für zufällige Volatilität und zufälligem Zins in der Optionsbewertung

Diplomarbeit

von

Andreas Brunner

Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Mathematisches Institut

Datum: 28. Februar 2010

Aufgabenstellung/Betreuung
Prof. Dr. L. Grüne

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. Grüne sowohl für die interessante Themenstellung als auch für die hervorragende und freundliche Betreuung, die ich in den letzten Monaten während der Erstellung dieser Arbeit erhalten habe, bedanken.

Besonderer Dank gilt auch meinen Eltern und meiner Freundin Anja Ziegler, die mir während meines Studiums stets zur Seite standen und mich immer unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Aufbau	1
1.2 Computersystem und Auswertungsprogramm	2
2 Grundlagen der Optionsbewertung	5
2.1 Einführung und Definitionen	5
2.1.1 Stochastische Grundlagen	5
2.1.2 Optionen	7
2.1.2.1 Europäische Optionen	8
2.1.2.2 Asiatische Optionen	10
2.1.3 Volatilität	11
2.1.3.1 Begriffserläuterung	11
2.1.3.2 Zufällige Volatilität	12
2.1.4 Zinssatz	14
2.2 Stochastische Differentialgleichungen	15
2.2.1 Wiener-Prozess und die geometrische Brownsche Bewegung	15
2.2.2 Das Itô-Integral	17
2.3 Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen	19
2.3.1 Herleitung der Black-Scholes-Gleichung	19
2.3.2 Lösung der Black-Scholes-Gleichung	21
2.4 Gleichung für asiatische Optionen	21
2.4.1 Herleitung der Gleichung	21
2.4.2 Lösung der Gleichung - Die vertikale Linienmethode	23
2.5 Die Monte-Carlo Methode	25
2.5.1 Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität	27
2.5.2 Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität und zufälligem Zins	29
3 Polynomielle Chaosentwicklung	31
3.1 Orthogonale Polynome	31
3.2 Polynomielle Chaosentwicklung nach Wiener	35
3.2.1 Dimension und Ordnung	37
3.2.2 Erwartungswert und Varianz	41
3.2.3 Stochastische Prozesse	42

3.3	Verallgemeinertes polynomielles Chaos	42
3.4	Berechnung der Koeffizienten	45
3.4.1	Nicht-intrusive Methode	45
3.4.2	Intrusive Methode	47
4	Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität	49
4.1	Europäische Optionen	50
4.1.1	Anwendung der polynomiellen Chaosentwicklung	51
4.1.1.1	Nicht-intrusive Methode	51
4.1.1.2	Intrusive Methode	53
4.1.2	Numerische Untersuchungen	55
4.1.2.1	Festlegungen	55
4.1.2.2	Laufzeitverhalten der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	58
4.1.2.3	Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	58
4.1.2.4	Vergleich mit der Monte-Carlo Methode	64
4.2	Asiatische Optionen	65
4.2.1	Anwendung der polynomiellen Chaosentwicklung	66
4.2.1.1	Nicht-intrusive Methode	66
4.2.1.2	Intrusive Methode	68
4.2.2	Numerische Untersuchungen	71
4.2.2.1	Festlegungen	71
4.2.2.2	Laufzeitverhalten der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	72
4.2.2.3	Konvergenz der Koeffizienten bei der Intrusive Methode	75
4.2.2.4	Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	75
4.2.2.5	Laufzeitvergleich der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	77
4.2.2.6	Vergleich mit der Monte-Carlo Methode	78
5	Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität und Zins	81
5.1	Europäische Optionen	82
5.1.1	Nicht-intrusive Methode	82
5.1.2	Numerische Untersuchungen	85
5.1.2.1	Festlegungen	85
5.1.2.2	Konvergenz der nicht-intrusiven Methode	87
5.1.2.3	Vergleich mit der Monte-Carlo Methode	91
5.2	Asiatische Optionen	91
5.2.1	Anwendung der polynomiellen Chaosentwicklung	92
5.2.1.1	Nicht-intrusive Methode	92
5.2.1.2	Intrusive Methode	94
5.2.2	Numerische Untersuchungen	97

5.2.2.1	Festlegungen	97
5.2.2.2	Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	98
5.2.2.3	Laufzeitvergleich der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung	99
5.2.2.4	Vergleich mit der Monte-Carlo Methode	100
5.3	Schlussfolgerungen	101
6	Zusammenfassung und Ausblick	103
A	Anhang	105
A.1	Inhalt der CD-ROM	105
A.2	Hinweise zu den Programmen	107
	Literaturverzeichnis	109

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gewinnvergleich einer Aktie und eines europäischen Calls auf die Aktie	9
2.2	Dichtefunktion der Uniformen Verteilung mit $\Omega = [0, 1]$, $a = 0.3$ und $b = 0.2$	13
2.3	Dichtefunktion der Gauß-Verteilung mit $\Omega = [-\infty, \infty]$, $a = 0.4$ und $b = 0.05$	13
2.4	Leitzinsen der vergangenen Jahre	14
2.5	Pfade des Wiener-Prozesses	16
2.6	Zwei mögliche Verläufe der MCM	28
3.1	Hermite-Polynome $H_n(x)$, $n = 0, \dots, 3$	34
3.2	Legendre Polynome $Le_n(x)$, $n = 0, \dots, 3$	35
3.3	2-dimensionale Hermite-Polynome $\Psi_n(x)$, $n = 0, \dots, 5$	39
4.1	Optionswert von europäischen Optionen in Abh. von σ und K	57
4.2	Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele in Abh. von p und q	59
4.3	Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q	60
4.4	Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q mit logarithmischer Skala	61
4.5	Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q auf kleinerem Intervall	62
4.6	Absoluter Fehler des Erwartungswertes in Abh. der Intervallgröße	62
4.7	Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T	63
4.8	MCM für Standardbeispiel 1	65
4.9	Optionswert bei asiatischen Optionen in Abh. von σ	72
4.10	Höhe des Fehlers in Abh. von L	74
4.11	Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 1	77
4.12	Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 2	77
5.1	Optionswert von europäischen Optionen mit $K = 0.8$ in Abh. von σ und r	86
5.2	Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele in Abh. von p und $q_1 = q_2$	88
5.3	Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und $q_1 = q_2$	88
5.4	Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T	89
5.5	Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T mit $a_2 = 0.1$ und $b_2 = 0$	90
5.6	MCM für Standardbeispiel 1	91
5.7	Optionswert von asiatischen Optionen in Abh. σ und r	97

5.8	Anzahl der Stützstellen der NIM	99
5.9	Anzahl der Linien bei der IM	99
5.10	Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 1	100
5.11	Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 2	100

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl der Terme $P + 1$ mit Ordnung p und Dimension N	40
3.2	Verteilungen und deren zugehörige OP	43
3.3	Vergleich der Dichtefunktionen mit den Gewichtsfunktionen der OP	43
4.1	Laufzeit der NIM bei europäischen Optionen in Abh. von p und q	53
4.2	Laufzeit der IM bei europäischen Optionen in Abh. von p und q	54
4.3	Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele	59
4.4	Koeffizienten und Summanden für Standardbeispiel 1	64
4.5	Laufzeiten der MCM für Standardbeispiel 2	64
4.6	Laufzeitverhalten in Abh. von q	73
4.7	Laufzeitverhalten in Abh. von p	73
4.8	Laufzeitverhalten in Abh. von L	74
4.9	Konvergenz der Koeffizienten bei der IM für Standardbeispiel 2	75
4.10	Fehler für Standardbeispiel 2 mit der NIM	76
4.11	Fehler für Standardbeispiel 2 mit der IM	76
4.12	Laufzeiten der MCM für Standardbeispiel 2	78
4.13	Fehler der MCM mit $M = 20$ für Standardbeispiel 2	79
5.1	Koeffizienten und Summanden für Standardbeispiel 1	89
5.2	Fehler für Standardbeispiel 2 mit der NIM	98
5.3	Fehler für Standardbeispiel 2 mit der IM	98
5.4	Übersicht über Vor- und Nachteile der NIM und der IM	101
A.1	Überblick über den Inhalt der CD-ROM	106

1 Einleitung

1.1 Motivation und Aufbau

In den letzten drei Jahrzehnten hat sich der Finanzmarkt stark gewandelt. Derivative Finanzinstrumente wie Optionen oder Futures haben mit der Zeit zunehmend an Bedeutung gewonnen. Mittlerweile übertrifft ihr Handelsvolumen bei weitem das der Aktien. Dieser Wandel des Finanzmarktes brachte allerdings auch zahlreiche Risiken mit sich, wie die Finanzkrise 2007 zeigte. Nach Meinung vieler Experten spielten Kreditderivate nämlich eine entscheidende Rolle in der Herbeiführung der Krise. Nichtsdestotrotz sind Derivate in der heutigen Zeit aufgrund ihrer vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten aus dem Investmentbanking nicht mehr weg zu denken. Aufgrund der großen Risiken, die sie mit sich bringen, ist aber ein grundsätzliches Verständnis ihrer Beschaffenheit vonnöten. Dazu gehören natürlich auch die Berechnungsmodalitäten. Der Grundstein wurde hierfür im Jahr 1973 zeitgleich von F. BLACK und M. SHOLES [2] als auch von R. C. MERTON [16] gelegt. Die parabolische partielle Differentialgleichung, die sie herleiteten, kann zur Berechnung von europäischen Optionen angewendet werden. Aber auch komplexere Optionstypen, wie amerikanische oder asiatische Optionen, können mittels partieller Differentialgleichungen gelöst werden. Wir führen unsere Untersuchungen in dieser Arbeit an europäischen und einem bestimmten asiatischen Optionstyp durch. Die Gründe liegen in den höchst unterschiedlichen Berechnungsverfahren, dazu aber später mehr. Bekanntermaßen ist eine exakte Ermittlung des Optionswertes aber nicht möglich. Die Gründe hierfür liegen darin, dass die Eingabeparameter Volatilität und sicherer Zinssatz geschätzt werden müssen. In die Black-Scholes Gleichung gehen beide Werte als Konstanten ein. Da man diese beiden Werte zum Ausgabezeitpunkt nicht sicher kennt, kann man sie aus mathematischer Sicht als Zufallsvariablen auffassen. Damit erhalten wir eine Erweiterung des ursprünglichen Black-Scholes Modells und können so die Realität besser abbilden.

Die Statistik stellt mehrere Methoden zur Verfügung, mit denen man den Zufall in komplexere mathematische Modelle mit einbeziehen kann. Die einfachste und bekannteste ist sicher die Monte-Carlo Methode, bei der man entsprechend einer Verteilung Zufallszahlen zieht, diese einzeln in das ursprüngliche, deterministische Modell einsetzt und schließlich den Erwartungswert durch den Mittelwert der deterministischen Lösungen approximiert. Um gute Näherungslösungen zu bekommen, benötigt man aber eine große Anzahl an Versuchen, was bei aufwändigeren Modellen zu einem horrendem Zeitaufwand führt. Deshalb verwenden wir die etwas komplexere Methode der polynomiellen Chaosentwicklung, die 1938 von N. WIENER [23] entdeckt und danach von R.

H. CAMERON und W. T. MARTIN [4] erweitert wurde. Hier wird mittels orthogonaler Polynome und deren Zusammenhang zu den Dichtefunktionen verschiedener Verteilungen ein wesentlich effizienterer Weg dargestellt.

In Kapitel 2 definieren wir zunächst wichtige und grundlegende Begriffe. Danach leiten wir die Black-Scholes-Gleichung und die parabolische partielle Differentialgleichung, die zur Lösung von den ausgewählten asiatischen Optionen verwendet wird, her und geben für beide Typen Lösungsmöglichkeiten an. Am Ende beschreiben wir die Monte-Carlo Methode sowohl für die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität als auch mit zufälliger Volatilität *und* zufälligem Zins. Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf den Arbeiten von M. GÜNTHER und A. JÜNGEL [11], L. GRÜNE [10], J. C. HULL [12] und M. H. KALOS und P. A. WHITLOCK [13].

Im dritten Kapitel wird eine Einführung in die Theorie der polynomiellen Chaosesentwicklung gegeben. Dafür gehen wir am Beginn näher auf orthogonale Polynome und deren Zusammenhang mit verschiedenen Verteilungen ein. Wir orientieren uns dabei an W. SCHOUTENS [20]. Danach leiten wir die polynomielle Chaosesentwicklung zuerst für Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz her und verallgemeinern die Ergebnisse schließlich. Am Ende des Kapitels beschreiben wir mit der intrusiven Methode und der nicht-intrusiven Methode noch zwei mögliche Lösungsverfahren der polynomiellen Chaosesentwicklung. Wir richten uns bei den Ausführungen in diesem Kapitel nach O. P. LEMAÎTRE [15] und F. AUGUSTIN, A. GILG, M. PAFFRATH, P. RENTROP und U. WEVER [1].

In Kapitel 4 wenden wir die beiden Verfahren der polynomiellen Chaosesentwicklung auf die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität an. Dabei beschreiben wir die Methoden für europäische Optionen und führen anschließend numerische Untersuchungen hinsichtlich des Laufzeitverhaltens und der Konvergenz durch. Zu Vergleichszwecken ziehen wir die Monte-Carlo Methode heran. Danach folgt das selbe Vorgehen für die asiatischen Optionen. Dieses Kapitel wurde in Anlehnung an den Artikel von R. PULCH und C. v. EMMERICH [19] verfasst.

Im fünften Kapitel werden die nicht-intrusive Methode und die intrusive Methode auf die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität *und* zufälligem Zins angewendet. Der Kapitelaufbau ähnelt dem des vierten Kapitels. Die Berechnungen sind jedoch komplexer, da wir hier das 2-dimensionale polynomielle Chaos benötigen.

Im letzten Kapitel werden die erhaltenen Ergebnisse zusammengefasst. Zudem wird ein Ausblick und weitere Anwendungsmöglichkeiten aufgeführt.

Anhang A enthält eine Übersicht der erstellten Programme und eine kurze Beschreibung der Anwendungsmodalitäten.

1.2 Computersystem und Auswertungsprogramm

Die in den Kapiteln 2, 4 und 5 beschriebenen Verfahren sind auf der beiliegenden CD-ROM alle in MATLAB R2010a numerisch umgesetzt. Die Auswertungen in Kapitel 4 und 5 wurden auf dem Prozessor Intel(R) Core(TM) i5 M460 mit 2.53 GHz durchgeführt. Der

Arbeitsspeicher des Systems betrug 4.00 GB, wobei 3.86 GB davon anwendbar waren. Das Betriebssystem des Rechners war Windows 7 Home Premium 64 Bit. Die erhaltenen Laufzeiten werden alle in Sekunden angegeben. Auf unterschiedlichen Rechnern bzw. auf anderen MATLAB Versionen können diese von denen in dieser Arbeit angegebenen Zeiten abweichen.

2 Grundlagen der Optionsbewertung

Im zweiten Kapitel wird dem Leser eine kurze Einführung in die Theorie der Optionsbewertung gegeben. Dazu definieren wir zuerst die relevanten Begriffe. Danach leiten wir sukzessive die Black-Scholes-Gleichung her, die mittlerweile ein wichtiges Instrument in der Optionsbewertung ist. Wir erläutern diese schließlich an zwei Optionstypen, dem europäischen und dem asiatischen. Im letzten Abschnitt geben wir mit der Monte-Carlo Methode (im Folgenden abgekürzt: MCM) einen alternativen Lösungsansatz zur Black-Scholes Gleichung an. Da sie auch auf komplexere Modelle angewendet werden kann, haben wir hier zugleich ein Verfahren, mit dem wir Optionswerte mit zufälliger Volatilität berechnen können. Die Schreibweise orientiert sich hauptsächlich an [10] und [11].

2.1 Einführung und Definitionen

In der Finanzmathematik ist es üblich, vereinfachende Annahmen an den Finanzmarkt zu stellen. Dies hat zur Folge, dass sich die Formeln in vielen Teilen leichter darstellen und beschreiben lassen. Dabei können die meisten der unten genannten Punkte mit mehr oder minder schwerem mathematischen Aufwand an die Realität angepasst werden:

- Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich
- Geldanlagen und Geldaufnahmen können jederzeit zu dem gleichen, risikofreien Zinssatz $r > 0$ für einen beliebigen Zeitraum getätigt werden
- Risikolose Gewinne durch Arbitrage sind nicht möglich

2.1.1 Stochastische Grundlagen

Bekanntlich kann man den zukünftigen Kursverlauf eines Basiswertes wie z.B. einer Aktie nicht sicher voraussagen. Aus diesem Grund müssen wir bei der Optionsbewertung Unsicherheiten mit einberechnen. Außerdem benötigen wir sowohl bei der polynomiellen Chaostwicklung (im Folgenden abgekürzt: PCE) als auch bei deren Anwendung auf die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität Hilfsmittel aus der Stochastik. Grundkenntnisse aus diesem Bereich werden vorausgesetzt. Die folgenden Definitionen legen die Notation der Begriffe im weiteren Verlauf der Arbeit fest.

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die dazugehörige Potenzmenge.

Definiton 2.1 (σ -Algebra und Wahrscheinlichkeitsmaß)

1. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ -Algebra in Ω , falls sie folgende Eigenschaften besitzt:
 - $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
 - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
 - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
2. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra. Eine Funktion $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf \mathcal{A} genau dann, wenn
 - $P(\emptyset) = 0$
 - $P(\Omega) = 1$
 - $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

gilt. □

Definiton 2.2 (Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei Ω eine Menge von Elementarereignissen $\omega \in \Omega$, \mathcal{A} eine σ -Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A} . Dann ist das Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) ein *Wahrscheinlichkeitsraum*. □

Die Menge $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen von \mathbb{R} enthält. Jedes Element $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißt *Borelmenge*. Die Abbildung X heisst *messbar*, falls

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

für alle Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definiton 2.3 (Zufallsvariable und stochastischer Prozess)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable* genau dann, wenn sie messbar ist.
2. Ein (stetiger) *stochastischer Prozess* $X(t)$ mit $t \in [0, \infty)$ ist eine Familie von Zufallsvariablen $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $t \rightarrow X(t, \omega)$ stetig für alle $\omega \in \Omega$ ist. Wir schreiben $X(t) = X(t, \cdot)$. □

Ein *Zufallsfeld* ist eine Erweiterung eines stochastischen Prozesses, sodass die Zufallsvariable von mehreren deterministischen Parametern abhängig ist. Wir verwenden in dieser Arbeit den Begriff des stochastischen Prozesses der Einfachheit halber auch für Zufallsfelder. Auf Konstrukte wie den Erwartungswert $E(X) = \langle X \rangle$, die Varianz $Var(X)$, die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion ρ gehen wir hier nicht näher ein. Definitionen dazu findet man z.B. in [7].

2.1.2 Optionen

Derivative Finanzinstrumente lassen sich grob in 3 Gruppen, nämlich Optionen, Futures bzw. Forwards und Swaps unterteilen. Der Titel der Diplomarbeit lässt schon darauf schließen, dass wir uns vorrangig mit Optionen und ihrer „fairen“ Bewertung beschäftigen.

Definiton 2.4 (Option)

Optionen sind Derivate, die dem Käufer das Recht (aber nicht die Verpflichtung) geben, einen Basiswert (z.B. Aktienpaket, Rohstoffwerte, ...) am oder bis zum Verfallstag zu einem vorher bestimmten Ausübungspreis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option). \square

Wie die Definition schon aussagt, *kann* der Inhaber (Long) der Option das Optionsrecht ausüben, er muss es aber nicht. Der Ausgeber (Short) verlangt für diesen Nachteil ihm gegenüber einen Ausgleich, welcher durch den *Optionspreis* kompensiert werden soll. Nun stellt sich allerdings die Frage nach der Höhe dieses Wertes und welcher Preis denn eigentlich für beide Parteien gerecht wäre. Berechnungsmöglichkeiten sind z.B. durch das Black-Scholes-Modell und die MCM gegeben. Eine exakte Bestimmung ist aber nicht möglich, da die zwei Eingabeparameter Volatilität und sicherer Zinssatz für die zukünftige Laufzeit geschätzt werden müssen. Dazu später mehr.

Der Handel mit derivativen Finanzinstrumenten und speziell mit Optionsscheinen hat in den letzten Jahrzehnten stark zugenommen. Dies liegt vor allem daran, dass sie sowohl von Absicherern (Hedger) als auch von Spekulanten gerne genutzt werden. Die Hedger verwenden die Option dabei im Grunde als Versicherung, um sich gegen negative Kursentwicklungen zu schützen. Zugleich können sie bei positiven Kursverläufen profitieren. Spekulanten bevorzugen Optionen gegenüber anderen Anlagemöglichkeiten wie z.B. Aktien, da diese eine wesentlich größere Hebelwirkung haben. Der Verlust beschränkt sich hingegen auf die Höhe des Optionswertes. In Abbildung 2.1 wird dies graphisch aufgezeigt.

Allgemein unterscheidet man bei den verschiedenen Optionstypen zwischen europäischen, amerikanischen und exotischen Optionen. Bei ersteren hat der Inhaber lediglich am Verfallstag die Möglichkeit das Optionsrecht auszuüben. Beim amerikanischen Typ wird dieses Recht auf die gesamte Laufzeit erweitert. Für die letztgenannten exotischen Optionen gibt es nochmals zahlreiche Unterscheidungen wie z.B. asiatische Optionen, Barrier-Optionen oder Power-Optionen. Unsere Berechnungen hinsichtlich der zufälligen Volatilität und des zufälligen Zinssatzes führen wir an europäischen und speziellen asiatischen Optionsscheinen, dem sogenannten *European-arithmetic-average-strike call*, durch. Eine nähere Erläuterung wird dazu in der Folge noch gegeben. Der Grund für die Verwendung dieser Optionstypen liegt darin, dass sie sich in der Art der Berechnung stark unterscheiden und wir die Berechnungsmethoden somit genereller analysieren können.

In dieser Arbeit verwenden wir folgende Bezeichnungen:

Allgemein:

$T > 0$: Laufzeit der Option
$S(t) \geq 0$: Basiswert zur Zeit $t \in [0, T]$
$\sigma \geq 0$: Volatilität
$r > 0$: sicherer Zins

Europäisch:

$K > 0$: Ausübungspreis
$V(t, S)$: Optionspreis zur Zeit t in Abhängigkeit vom Basiswert $S(t)$

Asiatisch:

$I(t)$: Integral von 0 bis t über S von t
$V(t, S, I)$: Optionspreis zur Zeit t in Abhängigkeit vom Basiswert $S(t)$ und $I(t)$

2.1.2.1 Europäische Optionen

Europäische Optionen stellen aus mathematischer Sicht den am einfachsten zu berechnenden Typ dar. Der Inhaber kann das Optionsrecht nur am Laufzeitende ausüben. Sie werden deshalb häufig zur Absicherung von einmaligen Zahlungen oder Handelsvorgängen, die am Verfalltag vollzogen werden, verwendet. Die Auszahlungsfunktion ist bei einem europäischen Call mit $S = S(T)$ durch

$$V_C(T, S) = \max \{S - K, 0\} = (S - K)^+ \quad (2.1)$$

und bei einem europäischen Put durch

$$V_P(T, S) = \max \{K - S, 0\} = (K - S)^+ \quad (2.2)$$

gegeben.

Beispiel 2.5 (Europäischer Call)

Angenommen wir haben ein Kapital von 400 € zur Verfügung und gehen davon aus, dass die Aktie der Numerik AG in den nächsten 2 Monaten stark steigen wird. Bei einem derzeitigen Kurs von $S(0) = 40$ € haben wir also die Möglichkeit, 10 Wertpapiere zu kaufen.

Eine Alternative dazu wäre ein europäischer Call auf die Numerik AG Aktie, welcher bei einer positiven Kursentwicklung ebenfalls steigt. Es gelten folgende Werte:

$$T = 2 \text{ Monate} = \frac{1}{6}; \quad K = 45 \text{ €}; \quad V(0, 40 \text{ €}) = 2 \text{ €};$$

Mit unserem Kapital könnten wir uns also auch 200 Optionsscheine kaufen. Die Gewinn-
grenze überschreiten wir bei einem Aktienwert von

$$\begin{aligned} S(T) - 45 \text{ €} - 2 \text{ €} &\geq 0 \text{ €} \\ S(T) &\geq 47 \text{ €}. \end{aligned}$$

Die alternative Anlage in Optionsscheine ist ab einem Aktienkurs von

$$200(S(T) - 45 \text{ €} - 2 \text{ €}) \geq 10(S(T) - 40 \text{ €})$$

$$S(T) \geq 47.36 \text{ €}$$

vorteilhaft. In Abbildung 2.1 wird der Gewinnverlauf beider Anlagemöglichkeiten zur Zeit T in Abhängigkeit von $S(T)$ graphisch dargestellt. Die Hebelwirkung, die weiter vorne schon kurz erwähnt wurde, ist in der rechten Bildhälfte deutlich erkennbar.

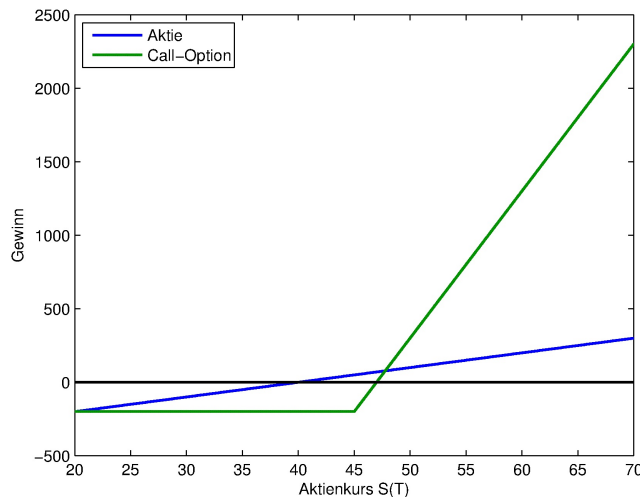


Abbildung 2.1: Gewinnvergleich einer Aktie und eines europäischen Calls auf die Aktie ◇

Eine der Grundvoraussetzungen war die Arbitragefreiheit des Marktes, d.h. es dürfen keine risikofreien Gewinne durch Kombination von verschiedenen Derivaten realisiert werden. Der nächste Satz dient zur Sicherung dieser Bedingung.

Satz 2.6 (Put-Call Parität - Europäische Option)

Für europäische Optionen muss für alle $0 \leq t \leq T$ die *Put-Call Parität*

$$S(t) + V_P(t, S(t)) - V_C(t, S(t)) = Ke^{r(t-T)} \tag{2.3}$$

erfüllt sein. ●

Wäre diese Gleichung nicht erfüllt, so könnte durch Kombination verschiedener Optionen (z.B. Straddles, Spreads,...) risikofreie Gewinne erzielt werden. Hat man den Call (Put) bereits berechnet, so erhält man aus der Put-Call Parität automatisch den Wert des Puts (Calls). Der Beweis der Gleichung steht in [10].

2.1.2.2 Asiatische Optionen

Bei asiatischen Optionsscheinen hängt die Auszahlungsfunktion, im Gegensatz zum europäischen und amerikanischen Typ, nicht nur von einem Wert ab. Vielmehr werden hier mehrere Kurswerte während der Laufzeit herangezogen und anschließend gemittelt. Dies hat den Vorteil, dass sich Kursschwankungen oder Kursmanipulationen, die z.B. von Großkonzernen durchgeführt werden können, nicht so stark auswirken. Grundsätzlich sind asiatische Optionen nicht so teuer wie die Standardtypen. Sie eignen sich u.a. zur Absicherung von Handelsvorgängen, die über einen längeren Zeitraum kontinuierlich vollzogen werden. Dadurch, dass Durchschnittswerte herangezogen werden gehen alle Vorgänge, die während der Laufzeit stattfinden, mit in die Berechnung ein. Grundsätzlich gibt es bei Optionen vom asiatischen Typ zahlreiche Variationen. Wir verwenden den *european-arithmetic-average-strike call*, was im Einzelnen folgendes bedeutet:

- *european* : Das Optionsrecht kann nur am Laufzeitende wahrgenommen werden.
- *arithmetic-average* : Der Mittelwert \hat{S} wird arithmetisch berechnet, d.h.

$$\hat{S} = \int_0^t S(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

- *strike* : Die Auszahlungsfunktion ist für einen Call $S = S(T)$: $(S - \hat{S})^+$.
- *call* : Der Optionsschein ist immer ein Call.

Wenn wir in der Folge von asiatischen Optionsscheinen sprechen, meinen wir immer die gerade beschriebenen Derivate. Dieser spezielle Optionstyp sichert also zu, dass der für einen Basiswert während der Laufzeit gezahlte Durchschnittspreis nicht über dem Endwert liegt. Wir führen hier das Symbol $I(t) = \int_0^t S(\tau) d\tau$ ein, um eine vereinfachende Schreibweise zu erhalten. Für die Auszahlungsfunktion folgt dann mit $S = S(T)$ und $I = I(T)$:

$$V(T, S, I) = (S - \frac{I}{T})^+ = S \cdot (1 - \frac{I}{ST})^+. \quad (2.5)$$

Ähnlich wie bei den europäischen Optionen gibt es bei den asiatischen auch eine Put-Call Paritätsgleichung.

Satz 2.7 (Put-Call Parität - European-arithmetic-average-strike Option)

Bei Optionen vom Typ european-arithmetic-average-strike muss für alle $0 \leq t \leq T$ die Put-Call Parität

$$V_C(t, S(t), I(t)) - V_P(t, S(t), I(t)) = S(t) - \frac{S(t)}{rT} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{T} e^{-r(T-t)} \int_0^t S(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

erfüllt sein. •

2.1.3 Volatilität

2.1.3.1 Begriffserläuterung

Definiton 2.8 (Volatilität)

Die *Volatilität* $\sigma > 0$ ist ein Maß für die Schwankungsbreite eines Wertpapiers, einer Währung oder eines Index. \square

Je größer die Volatilität des Basiswertes ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass dieser stark steigt oder fällt. Der Parameter σ stellt somit eine der wichtigsten Einflussfaktoren bei der Berechnung des Optionswertes dar. Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene Ansätze, um die Höhe der Volatilität zu bestimmen.

Die *historische Volatilität* σ_{hist} ist von früheren Kursen des Basiswertes abhängig. Sie kann als durchschnittliche Schwankungsbreite von diesen Preisen während eines bestimmten Zeitraums in der Vergangenheit aufgefasst werden. Aus mathematischer Sicht ist sie die Standardabweichung der Rendite des Basiswertes, welche mit stetiger Verzinsung ermittelt wird. Seien $S(i)$ die Werte des Basiswertes zum Zeitpunkt t_i . Dann gilt:

$$\Delta_i = \ln S(i+1) - \ln S(i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i$$

$$\sigma_{hist} = \sqrt{N} \left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta_i - \bar{\Delta})^2 \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Falls $t_i - t_{i-1}$ ein Tag ist, so wäre N in diesem Fall die Anzahl der Börsentage pro Jahr. Die Zeitspanne, in der man vergangene Werte einbezieht, ist aber nicht explizit vorgegeben. Deshalb ist σ_{hist} nicht eindeutig bestimmt. Zudem ist es üblich, ältere Kurswerte niedriger zu gewichten, da diese weniger Einfluss auf die derzeitige Situation haben. Wie man dabei genau vorgeht, ist jedem grundsätzlich selbst überlassen. Ein möglicher Ansatz wird in [12] beschrieben.

Die *implizite Volatilität* σ_{impl} ist die vom Markt erwartete Volatilität. Man betrachtet dabei den derzeitigen Wert des Optionsscheines und die Restlaufzeit. Anschließend ermittelt man die Größe der Volatilität mittels einer Umformung der Black-Scholes-Gleichung, welche wir in Abschnitt 2.3 herleiten. Dieser Vorgang ist wesentlich komplizierter als die Berechnung von σ_{hist} und wird deshalb nicht näher behandelt. Es sollte aber noch erwähnt werden, dass σ_{impl} für unterschiedliche Optionen auf den selben Basiswert auch unterschiedliche Werte annimmt.

Es gilt der einfache Grundsatz, dass der Optionswert steigt (fällt), falls die Volatilität des Basiswertes steigt (fällt). Dies liegt daran, dass die Höhe des Verlustes beim Käufer einer Option beschränkt ist. Die Gewinnspanne ist hingegen viel größer. Optionen auf Basiswerte mit hoher Volatilität steigen bei einem positiven Kursverlauf wahrscheinlich stärker als die mit niedrigerer Volatilität, wohingegen sie bei einem extrem negativen Kursverlauf die gleichen Werte annehmen, nämlich 0.

2.1.3.2 Zufällige Volatilität

Die größte Problematik bei der Optionsbewertung ist, wie wir im weiteren Verlauf dieses Kapitles noch sehen werden, die Schätzung der Volatilität und des sicheren Zinssatzes für die Dauer der Laufzeit des Derivates. Betrachtet man beispielsweise σ_{impl} über einen längeren Zeitraum, so fällt auf, dass die Werte schwanken und nicht konstant sind. Eine exakte Vorhersage ist dabei nicht möglich, da viele Einflussfaktoren wie die wirtschaftliche Entwicklung unsicher sind. Um die Realität besser abbilden zu können, sollte man die Volatilität als Zufallsvariable $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathcal{A}, P) beschreiben. Deshalb führen wir die Hilfsfunktion g

$$\sigma(\omega) = g(\xi(\omega)), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.8)$$

ein. Der Parameter $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Zufallsvariable und ω ein Zufallsereignis. Die möglichen Verteilungen für ξ werden im nächsten Kapitel festgelegt. Für g gibt es allerdings eine Einschränkung. Weil $\sigma > 0$ gilt, muss dies für g natürlich auch erfüllt sein. Wir verwenden in der Folge immer

$$g(\xi(\omega)) = \begin{cases} a + b\xi(\omega) & , \text{ falls } a > b\xi(\omega) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.9)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, da wir mit dieser Funktion und den Verteilungen etliche Möglichkeiten haben, um σ zu beschreiben. Normalerweise wählt man die Parameter a und b in Kombination mit einer Verteilungsfunktion aber ohnehin so, dass $g > 0$ gilt. Der einzige Fall, bei dem dies nicht ohne weiteres möglich ist, ist bei der Gauß-Verteilung. Hier gilt aber bei realistischer Wahl von a und b : $\min(a + b\xi(\omega)) \approx 0$. Deshalb schreiben wir in dieser Arbeit

$$g(\xi(\omega)) = a + b\xi(\omega), \quad (2.10)$$

obwohl damit eigentlich (2.9) gemeint ist. In der Programmierung wird korrekterweise auch (2.9) verwendet.

Beispiel 2.9 (Uniforme und Gauß-Verteilung mit zufälliger Volatilität)

Wir schätzen die momentane Volatilität mittels der historischen Volatilität eines Basiswertes auf $\sigma_{hist} = 0.4$. Für die Laufzeit vermuten wir allerdings, dass σ wahrscheinlich in dem Intervall $I = [0.3, 0.5]$ liegt.

Mögliche Verteilungen, die hier herangezogen werden könnten, sind z.B. die Uniforme und die Gauß-Verteilung. Bei ersterer mit dem Träger $\Omega = [0, 1]$ wählt man $a = 0.3$ und $b = 0.2$. Die zugehörige Dichtefunktion sieht dann folgendermaßen aus:

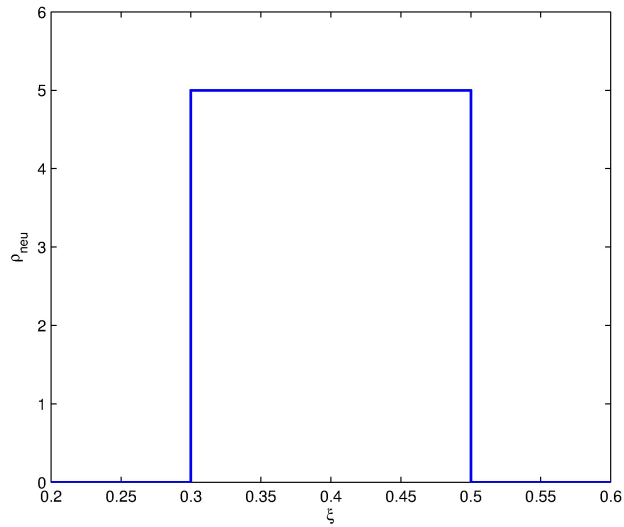


Abbildung 2.2: Dichtefunktion der Uniformen Verteilung mit $\Omega = [0, 1]$, $a = 0.3$ und $b = 0.2$

Für die Gauß-Verteilung mit $\Omega = [-\infty, \infty]$ sei $a = 0.4$ und $b = 0.05$. Hier ergibt sich für die Dichtefunktion:

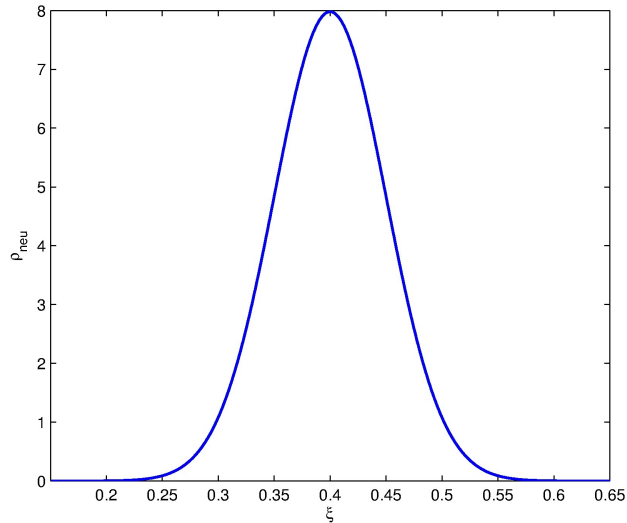


Abbildung 2.3: Dichtefunktion der Gauß-Verteilung mit $\Omega = [-\infty, \infty]$, $a = 0.4$ und $b = 0.05$

Man könnte nun vermuten, dass die Optionswerte bei den beiden obigen Beispielen mit denen von $\sigma = 0.4$ übereinstimmen. Dies ist aber nicht der Fall. Berechnet man sich die Optionswerte für einen europäischen Call (z.B. mit der PCE) mit

$$S = 120, K = 100, T = 1 \text{ und } r = 0.1,$$

so ergeben sich für die drei verschiedenen Volatilitätsmodelle:

- 1) $\sigma = 0.4$: 35.346889,
- 2) Gauß : 35.393947,
- 3) Uniform : 35.409193.

◇

2.1.4 Zinssatz

Definiton 2.10 (Risikoloser Zinssatz)

Der *risikolose Zinssatz* r ist der Zinssatz für einen Kredit bzw. ein Bankguthaben mit infinitesimal kurzer Laufzeit. □

Da der Zinssatz r ein geläufigerer Parameter als die Volatilität σ ist, gehen wir nicht so genau auf die detaillierte Erläuterung ein. Bei der Black-Scholes-Gleichung wird dieser, genauso wie σ , für die Laufzeit der Option als bekannt vorausgesetzt. In Abbildung 2.4¹ ist die Entwicklung der Leitzinsen dargestellt. Speziell für Derivate mit langer Laufzeit ist die exakte Vorhersage kaum möglich. In Kapitel 5 nehmen wir deshalb den sicheren Zinssatz genauso wie die Volatilität als Zufallsvariable an. Die Definition richtet sich nach (2.9).

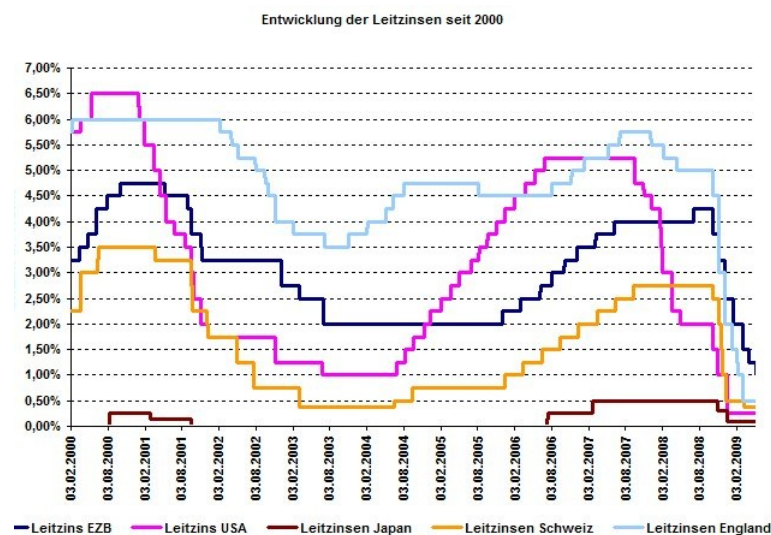


Abbildung 2.4: Leitzinsen der vergangenen Jahre

¹Quelle: <http://www.tagesgeld-vergleich.net/leitzins.html>

2.2 Stochastische Differentialgleichungen

Im letzten Abschnitt wurde bereits deutlich, dass deterministische Prozesse und Modelle oft nicht ausreichen, um die Realität mathematisch abzubilden. Bei den zukünftigen Kursverläufen von Aktien trifft dies ebenfalls zu, da diese nicht sicher vorhergesagt werden können und deshalb in gewisser Weise vom Zufall abhängen. Eine Möglichkeit, mit der wir diese unsicheren Kursverläufe beschreiben können, ist die geometrische Brownsche Bewegung. Die Herleitung basiert zunächst auf logischen Aspekten. Alternativ kann man zur Beschreibung des Kursverlaufs eine stochastische Differentialgleichung (im Folgenden abgekürzt: DGL) verwenden. Um diese berechnen zu können, benötigen wir allerdings die Integrationstheorie von Itô. Wenden wir diese auf die DGL an, so werden wir sehen, dass die Lösung wieder die geometrische Brownsche Bewegung ist.

2.2.1 Wiener-Prozess und die geometrische Brownsche Bewegung

Da der Aktienkurses $S(t)$ nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Zufall abhängig ist kann dieser als stochastischer Prozess $S(t, \omega)$ mit dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) aufgefasst werden. Für ein festes $\omega \in \Omega$ bezeichnen wir $S(\cdot, \omega)$ als *Pfad*. Um $S(t, \omega)$ beschreiben zu können, benötigen wir einen speziellen stochastischen Prozess, den sogenannten Wiener-Prozess.

Definiton 2.11 (Wiener-Prozess)

Ein stetiger stochastischer Prozess $W(t)$ heißt *Wiener-Prozess*, falls folgende Punkte erfüllt sind:

- (i) $W(t)$ ist eine Gauß-verteilte Zufallsvariable mit $E(W(t)) = 0$ und $Var(W(t)) = t$, d.h. $W(t) \sim N(0, t)$.
- (ii) Für $t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W(t_1) - W(t_0)$ Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit $E(W(t_1) - W(t_0)) = 0$ und $Var(W(t_1) - W(t_0)) = t_1 - t_0$, d.h. $W(t_1) - W(t_0) \sim N(0, t_1 - t_0)$.
- (iii) Für $s_1 \geq s_0 \geq t_1 \geq t_0$ sind die Inkremente $W(t_1) - W(t_0)$ und $W(s_1) - W(s_0)$ unabhängige Zufallsvariablen.

□

Dieser Prozess allein reicht aber nicht aus, um den Kursverlauf eines Basiswertes zu beschreiben. In Abbildung 2.5 sind zwei Beispielpfade des Wiener-Prozesses geplottet. Auf den ersten Blick ähneln diese zwar dem Chart einer Aktie, sie fallen aber auch unter 0 und sind allein deswegen nicht geeignet. Zudem kann man keinen Einfluss auf den Verlauf des Wiener-Prozesses nehmen. Unterschiedliche Basiswerte besitzen jedoch verschiedene Volatilitäten und Kurswerte und müssen deshalb auch differenziert beschrieben werden können.

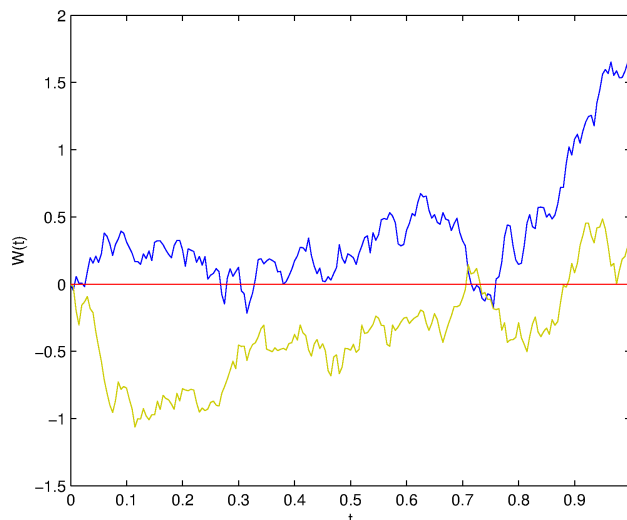


Abbildung 2.5: Pfade des Wiener-Prozesses

Aus diesen Gründen müssen wir unser bisheriges Modell erweitern. Wir setzen dabei folgende Punkte voraus:

1. Die Kurswerte dürfen nicht negativ werden.
2. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Kursanstieg und einen Kursabfall sind gleich groß.
3. Der Basiswert soll sich im Durchschnitt wie eine sichere Anleihe mit der Rendite β über einen Zeitraum t entwickeln.
4. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich.

Eine relativ einfache Lösung dieser Probleme erhält man beispielsweise durch die folgenden äquivalenten Gleichungen:

$$S(t) = S(0) \exp(\beta \cdot t + \sigma \cdot W(t)), \quad (2.11)$$

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \beta \cdot t + \sigma \cdot W(t). \quad (2.12)$$

Diese Darstellung erfüllt alle genannten Voraussetzungen. Der Basiswert $S(t)$ zur Zeit t kann nicht negativ werden, falls $S(0) > 0$ gilt. Punkt 2 wird durch den Wiener-Prozess sicher gestellt, da $E(W(t)) = 0$ gilt. Zudem ist $\text{Var}(\sigma \cdot W(t)) = \sigma^2 t$ die Varianz der Gauß-Verteilung, die sich für die hier aufgeführte Problemstellung gut eignet. Die letzten beiden Punkte sind aus (2.12) ersichtlich, da für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= E(S(0) \exp(\beta \cdot t + \sigma \cdot W(t))) \\ &= S(0) \cdot E(\exp(\beta \cdot t)) \cdot E(\exp(\sigma \cdot W(t))) = S(0) \exp(\beta \cdot t) \end{aligned}$$

gilt. Die Frage nach der Größe von β ist allerdings noch nicht beantwortet. Im nächsten Abschnitt wird bewiesen, dass für die erwartete Rendite oder Rücklaufquote μ

$$\mu = \beta + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.13)$$

gilt und deshalb

$$S(t) = S(0) \exp\left(\mu t + \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \quad (2.14)$$

folgt. Mit der Volatilität σ und der erwarteten Rendite μ haben wir nun auch zwei Parameter, mit denen wir die zukünftigen Kurse auf den Basiswert anpassen können. $S(t)$ aus (2.14) wird als *geometrische Brownsche Bewegung* bezeichnet.

2.2.2 Das Itô-Integral

Wir beschreiben nun den Kursverlauf durch eine stochastische DGL. Eine mögliche und durchaus nachvollziehbare Wahl wäre:

$$\frac{d}{dt}S(t) = f(t, S(t)) = \mu S(t) + \sigma S(t) \frac{d}{dt}W(t). \quad (2.15)$$

Aus der Theorie der DGLen wissen wir, dass $S(t)$ dieses Anfangswertproblem löst, falls

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t \mu S(s) ds + \int_0^t \sigma S(s) \frac{d}{ds}W(s) ds \\ &= S(0) + \int_0^t \mu S(s) ds + \int_0^t \sigma S(s) dW_s \end{aligned} \quad (2.16)$$

gilt. Hier wurde bereits die in der Literatur gängige Schreibweise dW_t benutzt. Bisher haben wir aber für $\frac{d}{dt}W(t)$ sowie für dW_t keine Definition und können die DGL somit noch nicht berechnen. Zur einfacheren Erläuterung verwenden wir im weiteren Verlauf die Terme

$$\int_0^t X(s) \frac{d}{ds}W(s) ds = \int_0^t X(s) dW_s. \quad (2.17)$$

Der Wert $X(s)$ sei wieder ein stochastischer Prozess. Der Versuch, die einzelnen Pfade des Wiener-Prozesses zu betrachten und die Ableitungen $\frac{d}{dt}W(t, \omega)$ diesbezüglich zu berechnen, schlägt allerdings fehl. Man kann beweisen, dass der Wiener-Prozess fast sicher nirgends differenzierbar ist. Deshalb versuchen wir, das komplette Integral mathematisch korrekt zu definieren, obwohl wir bereits wissen, dass $\frac{d}{dt}W(t)$ nicht existiert. Schon Mitte des 20. Jahrhunderts hat Kiyosi Itô eine Lösung für dieses Problem gefunden, die wir hier allerdings nur grob schildern. Genauere Herleitungen findet man z.B. in [10] oder [11]. Itô betrachtete zwar die einzelnen Pfade, approximierte das Integral aber durch eine endliche Summe.

Definiton 2.12 (Itô-Integral)

Sei $X(t)$ ein stochastischer Prozess. Das Intervall $[0, t]$ wird in die Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ mit $\max \{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n\} \rightarrow 0$ falls $n \rightarrow \infty$ geht, zerlegt. Das *Itô-Integral* ist dann durch

$$\int_0^t X(s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (2.18)$$

gegeben. □

Der Trick ist nun sowohl das Integral als auch die Summe aus (2.18) wieder als Zufallsvariable aufzufassen. Die Konvergenz kann man dann mit der *Quadrat-Mittel-Konvergenz* beweisen.

Definiton 2.13 (Itô-stochastische Differentialgleichung)

Eine *Itô-stochastische Differentialgleichung* hat die Form

$$dX(t) = m(t, X(t))dt + n(t, X(t))dW_t. \quad (2.19)$$

$X(t)$ ist ein stochastischer und W_t ein Wiener-Prozess. Der *Drift* m und die *Diffusion* n sind Funktionen mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Im Grunde ist dies aber nur eine symbolische Schreibweise für

$$X(t) = X(0) + \int_0^t m(s, X(s))ds + \int_0^t n(s, X(s))dW_s. \quad (2.20)$$

□

Die Gleichung (2.15) gehört zu diesem Typ. Um sie lösen zu können, benötigen wir noch das bekannte Itô-Lemma, welches auch bei der Herleitung der Black-Scholes-Formel eine wichtige Rolle spielt.

Satz 2.14 (Itô-Lemma)

Sei $X(t)$ die Lösung einer reellwertigen Itô-stochastischen DGL, W der dazugehörige Wiener-Prozess und $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zwei Mal stetig differenzierbare Funktion. Der stochastische Prozess $Y(t) = h(t, X(t))$ erfüllt dann die Gleichung

$$dY(t) = \left(\frac{\partial h}{\partial t} + m \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} n^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) dt + n \frac{\partial h}{\partial x} dW_t. \quad (2.21)$$

Sie wird auch als *Itô-Formel* bezeichnet. ●

Eine Beweisskizze findet man wieder in [10] oder [11]. Mit Hilfe dieses Lemmas kann man zeigen, dass die Lösung der DGL (2.15) die geometrische Brownsche Bewegung ist. Betrachte dafür die stochastische DGL mit $m = 0$ und $n = 1$: $dZ(t) = dW(t)$. Setze

$$\begin{aligned} S(t) &= Y(t) = h(t, Z(t)) \text{ und} \\ Y(t) &= S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z(t) \right). \end{aligned}$$

Aus dem Itô-Lemma folgt nun

$$\begin{aligned} dS(t) &= dY(t) = \left(S(t)\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t) \right) dt + S(t)\sigma dW_t \\ &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \end{aligned} \quad (2.22)$$

also unsere Ausgangsgleichung (2.15). Damit ist bewiesen, dass die Gleichung (2.14) die DGL (2.15) erfüllt.

2.3 Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen

Die Black-Scholes-Formel ist eine partielle Differentialgleichung, die 1973 zur selben Zeit sowohl von FISCHER BLACK und MYRON SCHOLES [2] als auch von ROBERT MERTON[16] entwickelt wurde. Sie stellt eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Optionsbewertung dar und kann zur Berechnung von europäischen und amerikanischen Optionen angewendet werden. Zusätzlich, zu den am Anfang des Kapitels gemachten Voraussetzungen, müssen hier noch folgende Punkte erfüllt sein:

- Der Kurs $S(t)$ genügt der Gleichung (2.14). Die Parameter $\mu = r > 0$ und $\sigma \geq 0$ werden hier noch als bekannt vorausgesetzt.
- Transaktionskosten, Steuern oder sonstige Gebühren existieren nicht.
- Das eigene Kaufverhalten zieht keine Veränderung des Marktes nach sich.
- Auf den Basiswert werden keine Dividenden gezahlt.
- Der Basiswert kann ständig gehandelt und beliebig geteilt werden. Leerverkäufe sind erlaubt (obwohl sie in Deutschland zum Teil verboten wurden).
- Die Bewertung der Optionen erfolgt risikoneutral.

2.3.1 Herleitung der Black-Scholes-Gleichung

Zur Herleitung der Black-Scholes-Formel betrachten wir ein Portfolio $\Pi(t)$, welches aus einer verkauften Option, $\Delta(t)$ Anteilen des Basiswertes und $\beta(t)$ Anteilen eines Bonds besteht:

$$\Pi(t) = -V(t, S(t)) + \Delta(t)S(t) + \beta(t)B(t). \quad (2.23)$$

Dabei soll das Portfolio *selbstfinanzierend* sein, d.h. nach dem Beginn darf weder Geld hinein-, noch herausgenommen werden. Man kann aber die Anteile des Basiswertes und des Bonds, sprich Δ und β , so verändern, dass sich der summierte Wert beider Anlagen nicht verändert. Mit Δ_i und β_i bezeichnen wir die Anteile zur Zeit $t = [t_i, t_{i+1})$. Umschichtungen werden zu den Zeiten t_k , $k = 1, \dots, l - 1$ vollzogen. Dann gilt:

$$\Delta_i S(t_{i+1}) + \beta_i B(t_{i+1}) = \Delta_{i+1} S(t_{i+1}) + \beta_{i+1} B(t_{i+1}). \quad (2.24)$$

Unter Anbetracht der Wertveränderungen der einzelnen Portfolioprodukte berechnet man den Portfoliowert zur Zeit t_l durch

$$\begin{aligned} \Pi(t_l) &= \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t_l, S(t_l)) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \Delta(t_k)(S(t_{k+1}) - S(t_k)) + \sum_{k=0}^{l-1} \beta(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Da wir aber immer handeln können, verlangen wir eine dauerhafte Möglichkeit zur Umschichtung. Mit $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$ ergibt sich deshalb

$$\Pi(t) = \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t_l, S(t_l)) + \int_{t_0}^t \Delta(\tau) dS(\tau) + \int_{t_0}^t \beta(\tau) dB(\tau). \quad (2.26)$$

Um diese Gleichung als Itô-stochastische Differentialgleichung in symbolischer Schreibweise darstellen zu können, muss W durch B bzw. S ersetzt werden. Dadurch erhält man

$$d\Pi(t) = -dV(t, S(t)) + \Delta(t)dS(t) + \beta(t)dB(t). \quad (2.27)$$

Bisher haben wir aber die *risikoneutrale Bewertung* völlig außer Acht gelassen. Dafür müssen wir $V(t, S(t))$ so wählen, dass durch stetige Umschichtung der beiden Parameter Δ und β die Entwicklung des Portfolios dem einer festverzinslichen Anleihe gleicht. Für einen Bond gilt die Gleichung

$$dB(t) = rB(t)dt. \quad (2.28)$$

Folglich muss für unser Portfolio

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt \quad (2.29)$$

gelten. Wenden wir jetzt das Itô-Lemma auf $V(t, S(t))$ an, so erhalten wir die stochastische DGL

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (2.30)$$

Setzen wir (2.14), (2.28) und (2.30) in (2.27) ein, ergibt sich

$$d\Pi = - \left(\mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta r B \right) dt - \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW. \quad (2.31)$$

Da sich unser Portfolio unabhängig vom Zufall wie ein risikoloser Bond entwickeln soll, muss der stochastische Anteil dW , also der letzte Summand von (2.31), entfernt werden. Um dies zu erreichen, muss

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)) \quad (2.32)$$

gelten. Die obige Gleichung bestimmt zugleich die Art der Umschichtung des Portfolios. Der Anteil β kann dann aufgrund der Selbstfinanzierungseigenschaft aus Δ berechnet werden. Letztendlich erhalten wir mit der korrekten Wahl von Δ

$$d\Pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta r B \right) dt. \quad (2.33)$$

Für das Portfolio gilt nach Annahme (2.29) mit (2.28) und (2.32) ohnehin

$$d\Pi = r\Pi dt = \left(-rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\beta B \right) dt. \quad (2.34)$$

Setzt man (2.33) und (2.34) gleich, so erhält man die deterministische partielle DGL

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2.35)$$

welche auch als *Black-Scholes-Gleichung* bekannt ist.

2.3.2 Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Glücklicherweise kann die parabolische DGL, die wir im vorherigen Abschnitt hergeleitet haben, für europäische Optionen explizit gelöst werden. Die Randwerte $V(T, S)$ mit $T > 0$ und $S \in [0, \infty]$ sind durch (2.1) bzw. durch (2.2) bereits festgelegt. Für die Call-Option errechnet sich der Optionswert durch

$$V_c(t, S) = SF(d_1) - Ke^{-r(T-t)}F(d_2), \quad S > 0, 0 \leq t < T, \quad (2.36)$$

und für die Put-Option durch

$$V_p(t, S) = Ke^{-r(T-t)}F(-d_2) - SF(-d_1), \quad S > 0, 0 \leq t < T. \quad (2.37)$$

Die Funktion F ist die Verteilungsfunktion der Gauß-Verteilung

$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (2.38)$$

und für d_1 und d_2 gilt:

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.39)$$

In [11] findet man den Beweis.

2.4 Gleichung für asiatische Optionen

2.4.1 Herleitung der Gleichung

Der Ansatz und die Vorgehensweise bei der Herleitung unterscheiden sich bei den asiatischen Optionen im Vergleich zu den europäischen nur geringfügig. Deshalb gehen wir nicht näher darauf ein und verweisen stattdessen auf [11].

Für einen *arithmetic-average strike call* gilt die parabolische partielle DGL:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + S \frac{\partial V}{\partial I} - rV = 0, \quad S, I > 0, 0 < t < T, \quad (2.40)$$

mit der Endbedingung

$$V(T, S, I) = \left(S - \frac{I}{T}\right)^+ = S\left(1 - \frac{I}{ST}\right)^+. \quad (2.41)$$

Im Gegensatz zur Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen kann (2.40) mit (2.41) nicht analytisch gelöst werden. Deshalb müssen wir hier auf numerische Verfahren zurückgreifen. Bevor wir eine mögliche Methode genauer beschreiben, transformieren wir (2.40) in eine parabolische partielle DGL mit zwei, anstatt drei Variablen. Aus numerischer Sicht kann sie so effizienter gelöst werden.

Sei $y = I/S > 0$ und $u : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wählen u so, dass

$$V(t, S, I) = Su(t, I/S) = Su(t, y) \quad (2.42)$$

gilt. Für die partiellen Ableitungen aus (2.40) folgt dann:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = S \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial I} = S \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{S} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = u - S \frac{\partial u}{\partial y} \frac{I}{S^2} = u - \frac{\partial u}{\partial y} y,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{I}{S^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{I}{S^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{I^2}{S^3} = \frac{y^2}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Wenn wir diese nun in (2.40) einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{y^2}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + rS \left(u - \frac{\partial u}{\partial y} y\right) + S \frac{\partial u}{\partial y} - rSu \\ = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - ry) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die Endbedingung ändert sich in

$$u(y, T) = (1 - y/T)^+, \quad y > 0. \quad (2.44)$$

Den Optionswert erhält man nach dem Lösen der DGL (2.43) mit (2.44) zur Zeit $t = 0$ wie folgt:

$$V(0, S, 0) = Su(0, 0/S) = Su(0, 0). \quad (2.45)$$

2.4.2 Lösung der Gleichung - Die vertikale Linienmethode

Wir haben bereits erwähnt, dass zur Berechnung der parabolischen DGL bei asiatischen Optionen ein numerisches Verfahren eingesetzt werden muss. Die Definitionen der verschiedenen Typen von partiellen DGL findet man z.B. in [8] oder [14]. Wichtig sind die für diese Art gängigen Lösungsmethoden, von denen wir die vertikale Linienmethode gewählt haben.

Generell hängen parabolische DGL von einer räumlichen und einer zeitlichen Komponente ab. Die Lösungsmethoden können hinsichtlich der Art der Diskretisierung in zwei Gruppen unterteilt werden. Bei der *Volldiskretisierung* wird sofort bzgl. der räumlichen *und* der zeitlichen Variable diskretisiert. Die Finite Differenzen Methode verfolgt beispielsweise dieses Konzept. Bei der Linienmethode wird hingegen eine sog. *Semidiskretisierung* durchgeführt, d.h. man diskretisiert eine der beiden Variablen und belässt die andere kontinuierlich. In unserem Fall ist die Variable, die diskretisiert wird, die räumliche. Dadurch erhält man ein Anfangswertproblem von einem *System gewöhnlicher DGLen*. Da man durch die Semidiskretisierung bzgl. der räumlichen Variable vertikale Linien erhält, nennt man die Methode auch dementsprechend. Bei der Wahl des numerischen Löser ist allerdings Vorsicht geboten, da das resultierende System gewöhnlicher DGLen steif ist. Zudem muss noch erwähnt werden, dass die vertikale Linienmethode nur angewendet werden kann, falls sich das neue System als ein Anfangswertproblem erster Ordnung darstellen lässt, was bei uns aber der Fall ist.

Wir stellen die Gleichung (2.43) in die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (1 - ry) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.46)$$

um. Da für $u : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, müssen wir zuerst das Definitionsgebiet einschränken. Wir verwenden hierfür die Konstante $C > 0$ und setzen diese im weiteren Verlauf auf $C = 1$. Damit folgt $u : [0, T] \times [0, C] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Variable y diskretisieren wir auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $h = C/L$ unter Anwendung des Differenzenverfahrens. Wir erhalten folglich $L + 1$ Linien $y_j = jh$ mit $j = 0, \dots, L$. Ab jetzt verwenden wir die Schreibweise $u(t, y_j) = u_j(t)$. Die beiden partiellen Ableitungen in (2.46) ersetzen wir durch die Differenzenquotienten

$$\frac{\partial u_j}{\partial y}(t) = \frac{1}{2h}(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.47)$$

und

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}(t) = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.48)$$

für $j = 1, \dots, L - 1$. Neben der Endbedingung (2.44), für die jetzt

$$u_j(T) = (1 - y_j/T)^+ \text{ für } j = 0, \dots, L \quad (2.49)$$

gilt, müssen wir an den übrigen Rändern auch noch Randwerte festlegen. Setzt man $y(0) = y_0 = 0$ in die DGL ein, so erhält man

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}(t) = -\frac{\partial u_0}{\partial x}(t) = -\frac{1}{2h}(u_1(t) - u_{-1}(t)) + \mathcal{O}(h), \quad t \in [0, T]. \quad (2.50)$$

Die Diskretisierung ist allerdings nicht möglich, da u_{-1} nicht existiert. Deshalb leiten wir eine alternative Approximation mit Hilfe der Taylorentwicklung (siehe [3]) her. Es gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0(t) + h \frac{\partial u_0}{\partial y}(t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(t) + \mathcal{O}(h^3), \\ u_2(t) &= u_0(t) + 2h \frac{\partial u_0}{\partial y}(t) + \frac{(2h)^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(t) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$. Multipliziert man nun die erste Gleichung mit 4 und subtrahiert sie anschließend von der zweiten, so erhält man durch geschicktes Umstellen

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}(t) = -\frac{\partial u_0}{\partial y}(t) = -\frac{1}{2h}(-3u_0(t) + 4u_1(t) - u_2(t)) + \mathcal{O}(h^2), \quad (2.51)$$

mit der gleichen Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$, wie bei den restlichen Differenzenquotienten. Im Fall $y \rightarrow \infty$, ergibt sich für ein konstantes I :

$$y = I/S \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow 0 \Rightarrow u(t, y) \rightarrow 0, \quad t \in [0, T].$$

Da wir das Definitionsgebiet beschränkt haben, setzen wir approximativ

$$u(t, C) = u_L = 0. \quad (2.52)$$

Um die DGL zu lösen, schreibt man die erhaltenen Daten aus (2.47), (2.48), (2.51) und (2.52) in eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{L \times L}$, setzt $z := (u_0, u_1, \dots, u_{L-1})$ und löst das Problem

$$\frac{dz}{dt}(t) = Az(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.53)$$

mit dem Endwert (2.49). Um die Matrix zu beschreiben, definieren wir 3 Hilfsfunktionen:

$$\alpha_i := -\frac{\sigma^2}{2h^2} y_i^2 + \frac{1}{2h}(1 - r y_i), \quad (2.54)$$

$$\beta_i := \frac{\sigma^2}{h^2} y_i^2, \quad (2.55)$$

$$\gamma_i := -\frac{\sigma^2}{2h^2} y_i^2 - \frac{1}{2h}(1 - r y_i) \quad (2.56)$$

für $i = 0, \dots, L - 1$. Für A ergibt sich dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2h} & -\frac{4}{2h} & \frac{1}{2h} & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & 0 \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \alpha_{L-2} & \beta_{L-2} & \gamma_{L-2} & \\ & & & & \alpha_{L-1} & \beta_{L-1} & \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Das erhaltene System gewöhnlicher DGLen ist wegen der Matrix A linear und somit existiert eine Lösung auf dem Definitionsbereich, die zwei Mal differenzierbar und stetig ist. Aufgrund der vielen Nulleinträge in A verwenden wir bei der numerischen Umsetzung eine effizientere Speicherstruktur, die wir in MATLAB mit den Befehlen `sparse` und `diag` erhalten. Genauere Beschreibung der Befehle findet man in [11] oder [21]. Die Matrix A wird demnach wie folgt gespeichert:

$$\begin{aligned} (1, 1) &= \frac{3}{2h} \\ (1, 2) &= -\frac{4}{2h} \\ &\vdots \\ (L, L - 1) &= \alpha_{L-1} \\ (L, L) &= \beta_{L-1} \end{aligned}$$

Da die DGL steif ist, sollte hier auch ein passender Löser verwendet werden. In MATLAB wäre dies z.B. `ode23s`, ein Löser für steife Anfangswertprobleme. Aufgrund der Tatsache, dass wir ein Endwertproblem haben, müssen wir bei der Eingabe die Laufzeit drehen. Ein Beispielaufruf sieht dann so aus:

```
[t,z] = ode23s(odefun, [T,0], max(1-y/T,0), options).
```

Die erste Komponente `odefun` ist das zu lösende Differentialgleichungsproblem (siehe [21]). In `options` werden wir mit `JConstant` die Jacobi-Matrix als konstant festlegen, sodass diese nur einmal berechnet werden muss und die Gesamtlaufzeit geringer wird. Zudem kann hier noch die relative Genauigkeit `RelTol` und die absolute Genauigkeit `AbsTol` definiert werden, die normalerweise für `ode23s` bei 10^{-3} und 10^{-6} liegt.

2.5 Die Monte-Carlo Methode

Zum Abschluss dieses Kapitels beschreiben wir mit der MCM noch ein bekanntes und vielseitig anwendbares Verfahren. Sie kann u.a. auch zur Berechnung von europäischen und asiatischen Optionen (siehe [11]) herangezogen werden. Die MCM ist ein einfach zu implementierendes Verfahren, welches auch für komplizierte Modelle anwendbar ist. Da die Optionsbewertung unter Einbeziehung der zufälligen Volatilität bzw. des zufälligen

Zinssatzes auch zu diesen „komplizierteren“ Modellen gehört, geben wir zugleich die erste Berechnungsmöglichkeit für das eigentliche Thema der Arbeit an. Bei späteren Vergleichen mit der PCE in Punkto Konvergenz und Laufzeit werden wir aber sehen, dass die MCM starke Defizite aufweist. Detailliert wird auf diesen Sachverhalt in den Kapiteln 4 und 5 eingegangen. Erwähnenswert ist noch, dass es zahlreiche Erweiterungen, wie die antithetischen Zufallsvariablen, die Quasi-MCM oder das Importance Sampling, gibt. Die Beschreibungen dieser Methoden findet man z.B. in [13]. Für unsere Belange ist die Standardvariante aber ausreichend, da wie wir später sehen werden, die Unterschiede im Vergleich zu der PCE so gravierend sind, dass diese auch durch Verbesserungen der MCM nicht ausgeglichen werden können.

Generell kann die MCM als Berechnungsmöglichkeit für Integrale, worunter auch der Erwartungswert und die Varianz bei Zufallsvariablen fallen, angesehen werden. Man zieht dabei aus dem Bereich des Trägers in Abhängigkeit von der verwendeten Verteilung zufällig M Zahlen und berechnet sich anschließend den deterministischen Wert für jeden einzelnen Versuch (Sample). Danach approximiert man das Integral durch den Mittelwert der errechneten Lösungen.

Ein Integral der Form $\int_{t_0}^{t_1} X(t)dt$ kann also approximiert werden, indem man zuerst M uniform verteilte Zufallszahlen ω_i mit $i = 1, \dots, M$ aus dem Bereich $\Omega = [t_0, t_1]$ zieht und $X(\omega_i)$ berechnet. Danach folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t)dt \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X(\omega_i). \quad (2.58)$$

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen f die bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) und einer kontinuierlichen Verteilung definiert ist, kann dann wie folgt approximiert werden:

$$E(f(\cdot)) = \int_{\Omega} f(\omega)dP(\omega) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(\omega_i) \quad (2.59)$$

wobei $\omega_i, i = 1, \dots, M$ Zufallszahlen bzgl. der festgelegten Verteilung sind. Die Varianz kann dann durch

$$Var(f(\cdot)) \approx \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(f(\omega_j) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(\omega_i) \right)^2 \quad (2.60)$$

approximiert werden.

Die Anzahl der Zufallsexperimente ist dabei frei wählbar. Jedoch darf nicht vergessen werden, dass die Approximation nur für große M gilt, da die MCM eine Anwendung des Satzes der großen Zahlen aus der Statistik ist (siehe [7]). Häufig verwendete Werte für M liegen zwischen 10^5 und 10^6 Versuchen. Welches M man letztendlich nimmt, hängt vorrangig von der Genauigkeit und der Laufzeit ab. Es ist leicht ersichtlich, dass man mit mehreren Versuchen wahrscheinlich einen geringeren Fehler erhält, dafür aber mehr Berechnungszeit benötigt.

2.5.1 Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität

Wenden wir uns nun etwas ausführlicher dem eigentlichen Thema dieser Diplomarbeit, nämlich der Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität, zu. Hierfür schildern wir zuerst die theoretische Vorgehensweise. Danach gehen wir kurz auf die Programmierung und Umsetzung in MATLAB ein.

Da die Volatilität vom Zufall abhängt, fassen wir sie als Zufallsvariable mit $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) auf. Die Beschreibung erfolgt durch die Funktion $g(\xi(\omega))$ mit der Darstellung (2.9). Die Zufallsvariable $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine aus acht festgelegten Verteilungen (siehe Kapitel 2). Da σ eine Zufallsvariable ist, kann der Optionswert zur Zeit $t = 0$ auch als Zufallsvariable aufgefasst werden. Generell versuchen wir also, den Erwartungswert $E(V(0, S(0), \cdot))$ und die Varianz $Var(V(0, S(0), \cdot))$ der Zufallsvariablen $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) zu berechnen.

Das Vorgehen ist nun relativ simpel: Zuerst zieht man ω_i für $i = 1, \dots, M$ Zufallszahlen bzgl. der ausgewählten Verteilung und berechnet sich damit die Funktion $\sigma_i = g(\omega_i) = a + b\omega_i$. Anschließend ermittelt man M Optionswerte $V_i = V(0, S(0), \sigma_i)$. Zum Schluss wird der Erwartungswert und die Varianz über den Mittelwert approximiert.

Algorithmus: Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität

0. Eingabewerte: S_0, K, r, t, T, a, b , Optionsart, Verteilung, M, L (optional).
1. Ziehe M Zufallszahlen ω_i bzgl. der ausgewählten Verteilung.
2. Berechne $\sigma_i = g(\omega_i) = a + b \cdot \omega_i$ für $i = 1, \dots, M$.
3. Berechne die Optionswerte V_i mit σ_i für $i = 1, \dots, M$.
4. Approximiere den Erwartungswert durch

$$V_0 = E(V(0, S(0), \cdot)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i$$

und die Varianz durch

$$Var(V(0, S(0), \cdot)) \approx \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(V_j - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i \right)^2.$$

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm *eu_mc.m* numerisch umgesetzt.

In Schritt 0 werden die Werte, die zu Beginn eingegeben werden müssen, festgelegt. Der Parameter L gibt die Anzahl der Linien bei der Linienmethode an und ist nur bei dem asiatischen Typ notwendig. Bei europäischen Optionen muss dieser aufgrund der analytischen Lösung der Black-Scholes-Gleichung nicht bestimmt werden. Die Schritte 1 und 2 sind hingegen bei allen Optionstypen gleich. In MATLAB kann man Zufallszahlen, die in Schritt 1 benötigt werden z.B. durch `rand(1, M)` bei der Uniformen Verteilung mit Träger $\Omega = [0, 1]$ leicht bestimmen. Beim 3. Schritt werden die Optionswerte gemäß der bereits beschriebenen Vorgänge berechnet, d.h. für europäische Optionen werden die Formeln aus Abschnitt 1.3.2 angewendet und bei den asiatischen wird der Optionswert mit der Linienmethode aus 1.4.2 ermittelt. Hier gibt es große zeitliche Differenzen, da die analytische Berechnung wesentlich schneller ist als die Lösung eines Systems gewöhnlicher DGLen. Die abschließende Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz ist bei beiden Typen wieder gleich.

Numerische Auswertungen folgen in den Kapiteln 4 und 5. Zum Abschluss geben wir in Abbildung 2.6 noch eine grafische Illustration zu möglichen Verläufen der MCM an (die exakte Lösung wurde mit der PCE berechnet). Man kann deutlich erkennen, dass generell keine sicheren Aussagen über die Genauigkeit der MCM gemacht werden können. Im rechten Bild hat man beispielsweise bei ca. 70000 Zufallszahlen eine bessere Approximation, als bei 100000. Nichtsdestotrotz konvergiert die MCM für sehr viele samples in den meisten Fällen gegen die exakte Lösung.

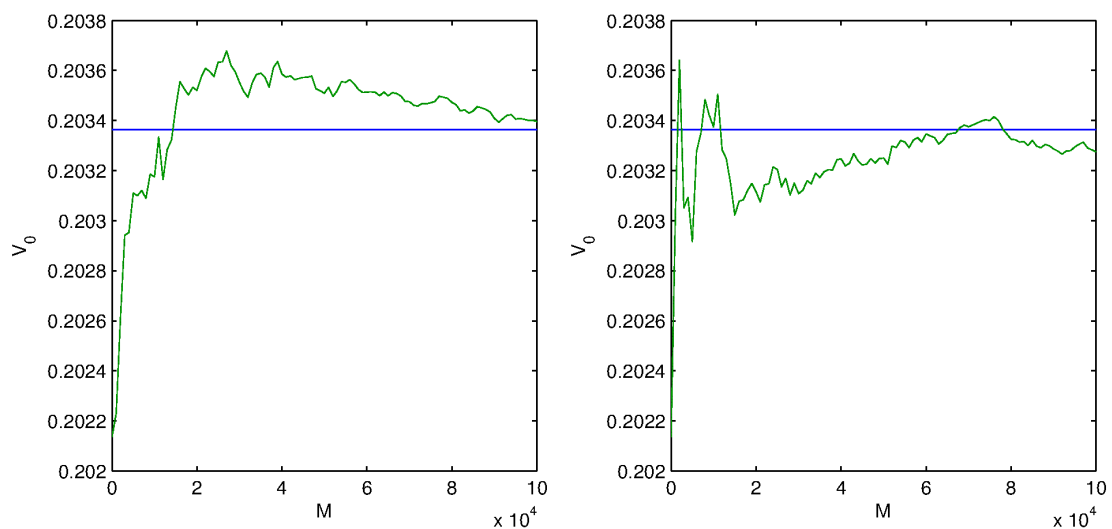


Abbildung 2.6: Zwei mögliche Verläufe der MCM

2.5.2 Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität und zufälligem Zins

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir nun die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität *und* zufälligem Zins. Das Grundgerüst aus dem vorherigem Abschnitt bleibt dabei bestehen. Die Zufallsvariable $\sigma : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ und die Zufallsvariable $r : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ definiert. Zur Zeit $t = 0$ gilt $V : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Da wir hier aber zwei Zufallsvariablen haben, benötigen wir auch zwei Funktionen zur Beschreibung. Wir verwenden $\sigma(\omega_1) = g_1(\xi_1(\omega_1)) = a_1 + b_1\xi_1(\omega_1)$ und $r(\omega_2) = g_2(\xi_2(\omega_2)) = a_2 + b_2\xi_2(\omega_2)$. Die Zufallsvariablen $\xi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ müssen dabei nicht zwangsweise die gleiche Verteilung besitzen.

Wie schon erwähnt, ändert sich das Grundgerüst nicht. Aufgrund der Tatsache, dass jetzt aber zwei Zufallsvariablen in unsere Berechnungen eingehen, müssen wir für beide auch die Anzahl der gezogenen Zufallszahlen festlegen. Diese sind für die Volatilität M_1 und für den sicheren Zinssatz M_2 . Sei $\mathbb{1}^{1 \times k}$ der Einsvektor mit k Einträgen. Es ergeben sich für die Berechnung der deterministischen Werte zwei Möglichkeiten:

1. Wir ziehen M Zufallszahlen ω_{1_i} und M Zufallszahlen ω_{2_i} und berechnen $\sigma_i = g_1(\omega_{1_i}) = a_1 + b_1\omega_{1_i}$ und $r_i = g_2(\omega_{2_i}) = a_2 + b_2\omega_{2_i}$ für $i = 1, \dots, M$. Die deterministischen Optionswerte erhalten wir durch $V_i = V(0, S(0), \sigma_i, r_i)$ für $i = 1, \dots, M$.
2. Zuerst ziehen wir M_1 Zufallszahlen ω_{1_i} und M_2 Zufallszahlen ω_{2_j} . Danach berechnen wir $\sigma_i = g_1(\omega_{1_i}) = a_1 + b_1\omega_{1_i}$ für $i = 1, \dots, M_1$ und $r_j = g_2(\omega_{2_j}) = a_2 + b_2\omega_{2_j}$ für $j = 1, \dots, M_2$. Mit Hilfe des Kronecker-Produktes berechnen wir die Vektoren $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{M_1}) \otimes \mathbb{1}^{1 \times M_2}$ und $\tilde{r} = (r_1, \dots, r_{M_2}) \otimes \mathbb{1}^{1 \times M_1}$. Die deterministischen Optionswerte erhalten wir durch $V_m = V(0, S(0), \tilde{\sigma}_m, \tilde{r}_m)$ für $m = 1, \dots, M_1 \cdot M_2$.

Bei den beigelegten Programmen wurde beides numerisch umgesetzt. Die Effizienz ist nach etlichen Versuchen bei dem ersten Verfahren aber wesentlich besser, weshalb wir dieses für die Vergleiche mit der PCE heranziehen.

Algorithmus: Monte-Carlo Methode für zufällige Volatilität und zufälligen Zins

0. Eingabewerte: S_0, K, r, T, a_1, b_1 , Verteilung₁, a_2, b_2 , Verteilung₂, M , Optionsart, L (optional).
1. Ziehe M Zufallszahlen ω_{1_i} bzgl. der Verteilung₁ und M Zufallszahlen ω_{2_i} bzgl. der Verteilung₂ für $i = 1, \dots, M$.
2. Berechne $\sigma_i = g_1(\omega_{1_i}) = a_1 + b_1\omega_{1_i}$ und $r_i = g_2(\omega_{2_i}) = a_2 + b_2\omega_{2_i}$ für $i = 1, \dots, M$.

3. Berechne die Optionswerte $V_i = V(0, S(0), \sigma_i, r_i)$ für $i = 1, \dots, M$.
4. Approximiere den Erwartungswert durch

$$V_0 = E(V(0, S(0), \cdot, \cdot)) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i$$

und die Varianz durch

$$Var(V(0, S(0), \cdot, \cdot)) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(V_j - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i \right)^2$$

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm *eu2_mc.m* numerisch umgesetzt. Die alternative, zweite Möglichkeit wurde in *eu2_mc2.m* programmiert.

3 Polynomielle Chaonentwicklung

Die PCE ist wie die MCM ein Verfahren, mit dem Unsicherheiten in mathematische Modelle mit einbezogen werden können. Sie ist im Vergleich zur MCM zwar schwieriger zu implementieren, dafür ist sie aber in der Regel auch viel effizienter. Dieses Kapitel dient hauptsächlich der theoretischen Herleitung der PCE. Numerische Betrachtungen und die Umsetzung auf die Optionsbewertung folgen in den Kapiteln 4 und 5.

Den Ursprung hatte die PCE im Jahr 1938. N. WIENER [23] hat gezeigt, dass jede Gauß-verteilte Zufallsvariable mit endlicher Varianz mittels Hermite-Polynomen als unendliche Summe dargestellt werden kann. R. CAMERON und W. MARTIN [4] erweitern das homogene Chaos 1947 auf allgemeine Verteilungen. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [20] und [15].

3.1 Orthogonale Polynome

Zunächst wird eine kurze Einführung in die Theorie der orthogonalen Polynome (im Folgenden abgekürzt: OP) und deren Zusammenhang mit Zufallsvariablen bzw. stochastischen Prozessen gegeben, da sie für die PCE eine wichtige Grundlage darstellen. Eine ausführliche Betrachtung findet man z.B. in [20].

Ein Polynom $\Phi_n(x)$ hat den Grad n , falls

$$\Phi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (3.1)$$

gilt. Das Skalarprodukt bzw. das innere Produkt wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beschrieben. Zur Erinnerung: Der Erwartungswert E ist für eine Zufallsvariable X , die bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) bestimmt ist, durch

$$E(X) = \langle X \rangle = \int_{\Omega} X dP \quad (3.2)$$

definiert.

Definiton 3.1 (Orthogonales System von Polynomen)

Ein System von Polynomen $\{\Phi_n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ vom Grad n ist ein *orthogonales System von Polynomen bzgl. eines reellen positiven Maßes P* , falls das Skalarprodukt von Φ_n und Φ_m für $n \neq m$ verschwindet, d.h.

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \int_{\Omega} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dP(x) = d_n^2 \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3)$$

Ω ist der Träger des Maßes P und $d_n \neq 0$ ist eine Konstante. Das Symbol δ ist das Kronecker-Delta:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.4)$$

Das System heißt *orthonormal*, falls $d_n = 1$ gilt. \square

Die Variable x kann stetig oder diskret gewählt werden. Mit $\tilde{\rho}(x)$ bezeichnen wir im ersten Fall die Dichte bzgl. P . Für die Gleichung (3.3) folgt also

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \int_{\Omega} \Phi_n(x) \Phi_m(x) \tilde{\rho}(x) dx = d_n^2 \delta_{nm} \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.5)$$

Ist x diskret, so hat P eine Gewichtsfunktion $\tilde{\rho}(x_i)$ mit den Stützstellen x_i für $i = 1, \dots, R$. Hier ergibt sich für (3.3)

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \sum_{i=0}^R \Phi_n(x_i) \Phi_m(x_i) \tilde{\rho}(x_i) = d_n^2 \delta_{nm} \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.6)$$

Es ist dabei auch möglich, dass $R = \infty$ ist. In der Theorie der OP bezeichnet man $\tilde{\rho}(x)$ oder ggf. $\tilde{\rho}(x_i)$ als *Gewichtsfunktion*. Zu jeder Gewichtsfunktion existieren eindeutig bestimmte OP, falls $\Phi_0(x) = 1$ gilt (Beweis: siehe [9]). Bei manchen bekannten Familien OP ist sie (fast) identisch mit der Dichtefunktion einiger Verteilungen, was zugleich auf den Zusammenhang zwischen OP und Zufallsvariablen bzw. stochastischen Prozessen schließen lässt. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf acht der bekanntesten Verteilungen und deren zugehörige OP, die in Abschnitt 3.3 aufgelistet werden. Die Familien der Polynome gehören alle zu den *klassischen orthogonalen Polynomen*. Die Zusammenhänge, die sie untereinander haben, werden im Askey-Schema in Baumdarstellung beschrieben (siehe [24]).

Auf die Herleitung der klassischen OP gehen wir nur sehr kurz ein. Detailliertere Ausführungen findet man erneut in [20]. Wir benötigen hier die DGL

$$s(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \tau(x) \frac{dy}{dx}(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (3.7)$$

wobei $s(x)$ und $\tau(x)$ Polynome maximal zweiten bzw. ersten Grades sind und λ konstant ist. Die Lösung $y(x) = y_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n , falls

$$\lambda = \lambda_n = -n \frac{d\tau}{dx}(x) - \frac{1}{2} n(n-1) \frac{d^2 s}{dx^2}(x) \quad (3.8)$$

gilt. Die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{c_1}^{c_2} y_n(x) y_m(x) \tilde{\rho}(x) dx = d_n^2 \delta_{nm}, \quad (3.9)$$

die für uns entscheidende Bedeutung hat, ist erfüllt, falls $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \leq c_2$, $d_n \neq 0$ und zusätzlich für die Gewichtsfunktion $\tilde{\rho}(x)$ die DGL

$$\frac{d(s(x) \tilde{\rho}(x))}{dx} = \tau(x) \tilde{\rho}(x) \quad (3.10)$$

gilt. Im diskreten Fall müssen die Ableitungen lediglich durch die Differenzenoperatoren ersetzt werden. Um die OP zu erhalten, müssen wir also die Polynome s und τ , die Konstante λ und die Gewichtsfunktion $\tilde{\rho}$ so bestimmen, dass die Gleichungen (3.8) und (3.10) erfüllt sind. In Beispiel 3.2 wird dieses Vorgehen für die Hermite-Polynome aufgezeigt.

Die Berechnung der OP bzgl. einer Gewichtsfunktion kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Eine Möglichkeit ist die Anwendung der *Rodrigues-Formel*:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\tilde{\rho}(x)e_n} \frac{d^n}{dx^n} [\tilde{\rho}(x)s^n(x)]. \quad (3.11)$$

Der Wert e_n ist ein willkürlicher Normalisierungsfaktor, der ausschließlich von n abhängt. Das Polynom s wird erneut durch (3.8) und (3.10) bestimmt, wobei λ konstant und τ ein Polynom maximal ersten Grades sein muss. Die zweite Möglichkeit ist die *Drei-Term-Rekursionsgleichung*

$$\Phi_n(x) = (x - \alpha_n)\Phi_{n-1}(x) - \beta_n\Phi_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.12)$$

die mit den Rekursionskoeffizienten

$$\alpha_n = \frac{\langle x\Phi_{n-1}, \Phi_{n-1} \rangle}{\langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1} \rangle} \quad \text{und} \quad \beta_n = \frac{\langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1} \rangle}{\langle \Phi_{n-2}, \Phi_{n-2} \rangle}, \quad (3.13)$$

$\Phi_1(x) = 0$, $\Phi_0(x) = 1$, $\beta_1 = \langle \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ und einer Gewichtsfunktion $\tilde{\rho}$ die OP eindeutig bestimmt, siehe [9]. In [6] wird gezeigt, dass diese Berechnung relativ stabil bzgl. Rundungsfehlern ist, weswegen sie für die numerische Simulation in Kapitel 4 und 5 herangezogen wird. Zudem benötigen wir, wie später noch gezeigt wird, nur OP mit niedrigem Grad (meist ≤ 6), wodurch Rundungsfehler kaum auftreten werden. Die Rekursionskoeffizienten α_n und β_n sind bei manchen Verteilungen konstant und müssen deswegen nur einmal im Vorfeld berechnet werden.

Beispiel 3.2 (Hermite-Polynome)

Bei den Hermite-Polynomen H_n werden die Konstanten wie folgt gewählt:

$$s(x) = 1, \quad \tilde{\rho}(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n = (-1)^n.$$

Die Gewichtsfunktion wurde absichtlich so gewählt, dass sie der Dichtefunktion der Gauß-Verteilung entspricht. Für $\tau(x)$ folgt nach (3.10) ein Polynom ersten Grades

$$\tau(x) = \frac{d(s(x)\tilde{\rho}(x))}{dx} \frac{1}{\tilde{\rho}(x)} = \frac{d\tilde{\rho}(x)}{dx} \frac{1}{\tilde{\rho}(x)} = -2x \quad (3.14)$$

und für λ_n nach (3.8) die Konstante

$$\lambda_n = 2n. \quad (3.15)$$

Der Träger von $\tilde{\rho}$ ist $\Omega = (-\infty, \infty)$. Um die Rekursionsformel anwenden zu können, benötigen wir noch die α_n und β_n , welche wir mit Formel (3.13) berechnen können. Man kann zeigen, dass in diesem Fall $\alpha_n = 0$ und $\beta_n = n - 1$ für $n \geq 1$ gilt. Die Drei-Term-Rekursionsgleichung sieht demnach wie folgt aus:

$$H_n(x) = xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 1, . \quad (3.16)$$

Man kann nun entweder die Rodrigues Formel oder die Drei-Term Rekursionsgleichung anwenden, um die H_n zu berechnen:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

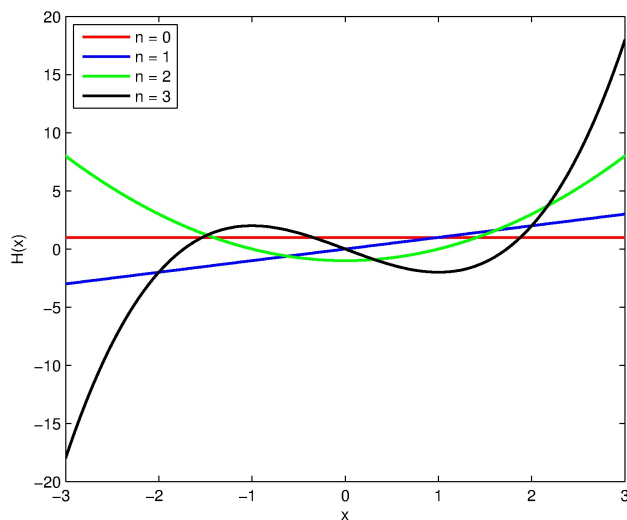


Abbildung 3.1: Hermite-Polynome $H_n(x)$, $n = 0, \dots, 3$

◇

Wir geben außerdem noch die Legendre-Polynome an, da wir uns bei den späteren Untersuchungen hauptsächlich auf diese beiden Familien OP beschränken.

Beispiel 3.3 (Legendre-Polynome)

Die ersten vier Legendre-Polynome bzgl. $\tilde{\rho}(x) = 1/2$ auf dem Träger $\Omega = [-1, 1]$ sind:

$$\begin{aligned} Le_0(x) &= 1 \\ Le_1(x) &= x \\ Le_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ Le_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

Sie erfüllen die Drei-Term-Rekursionsgleichung:

$$Le_n(x) = \frac{2n - 1}{n} x Le_{n-1}(x) - \frac{n - 1}{n} Le_{n-2}(x)$$

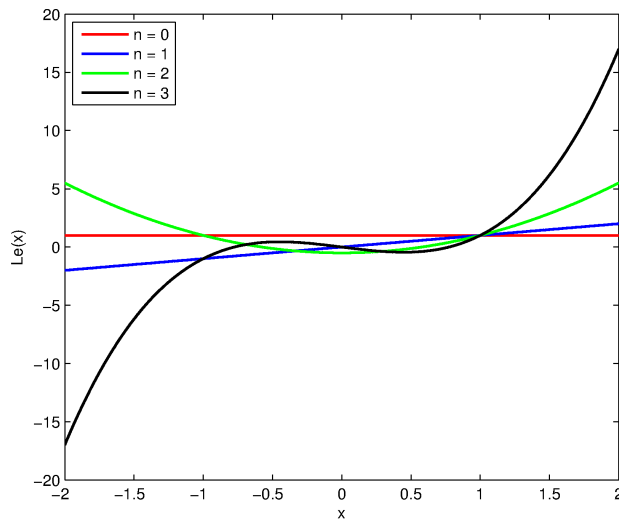


Abbildung 3.2: Legendre Polynome $Le_n(x)$, $n = 0, \dots, 3$

◇

Auf den Zusammenhang zwischen den einzelnen Polynomen und speziell auf das Askey-Schema werden wir nicht näher eingehen, da uns vielmehr der Zusammenhang zwischen den OP und den Dichten der verschiedenen Verteilungen interessiert.

3.2 Polynomielle Chaosentwicklung nach Wiener

In der Einführung haben wir schon kurz erwähnt, dass die PCE nur unter der Voraussetzung der endlichen Varianz einer Zufallsvariablen $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) anwendbar ist. Hierfür betrachten wir die L_2 Funktionenräume.

Definiton 3.4 (L_2 Funktionenräume)

Sei (Ω, A, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und ω ein Zufallsereignis bzgl. Ω . Der Raum $L_2(\Omega, A, P) = L_2(\Omega, P)$ ist dann zusammen mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|_\Omega$ definiert als

$$L_2(\Omega, P) = \left\{ U : \langle U(\omega), U(\omega) \rangle = \int_\Omega \|U(\omega)\|_\Omega^2 dP(\omega) < \infty \right\}. \quad (3.17)$$

□

Die Besonderheit des $L_2(\Omega, P)$ liegt nun darin, dass er wie in [22] gezeigt wird, zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_2 := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ sowohl ein Banachraum, als auch ein Hilbertraum ist. Falls für die Zufallsvariable $U \in L_2(\Omega, P)$ gilt, wobei $L_2(\omega, P)$ ein Hilbertraum ist, so folgt daraus fast sicher

$$P(\{\omega : \langle U(\omega), U(\omega) \rangle < \infty\}) = 1. \quad (3.18)$$

Definiton 3.5 (Polynomielles Chaos)

Die Zufallsvariablen $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ seien Gauß-verteilt und zentriert. Mit $\hat{\Gamma}_p$ bezeichnen wir den Raum derjenigen Polynome, die für die Variablen $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ maximal Grad p besitzen. Die Menge Γ_p besteht aus allen Polynomen, die zu $\hat{\Gamma}_p$ gehören und *orthogonal* zu $\hat{\Gamma}_{p-1}$ sind. Sie wird als *Polynomielles Chaos p -ter Ordnung* bezeichnet. □

Definiton 3.6 (Homogener Chaosraum)

Der Untervektorraum $\tilde{\Gamma}_p$ von $L_2(\Omega, P)$ ist der Raum, der von Γ_p aufgespannt wird. Er wird als *homogener Chaosraum p -ter Ordnung* bezeichnet. □

Eine Folgerung der beiden Definitionen ist, dass die homogenen Chaosräume zueinander orthogonal sind. Den Hilbertraum $L_2(\Omega, P)$ kann man deshalb folgendermaßen zerlegen:

$$L_2(\Omega, P) = \bigoplus_{i=0}^\infty \tilde{\Gamma}_i, \quad (3.19)$$

was auch als *Chaoszerlegung des L_2* bekannt ist. N. WIENER hat in seiner bekannten Arbeit [23] bewiesen, dass jede Gauß-verteilte Zufallsvariable mittels Hermite-Polynomen als unendliche Summe dargestellt werden kann, die im L_2 Sinn konvergiert. In anderen Worten heißt dies, dass jede Zufallsvariable $U \in L_2$ eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} U(\omega) &= u_0 \Gamma_0 \\ &+ \sum_{i_1=1}^\infty u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^\infty \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^\infty \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} u_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

hat, die im Quadrat-Mittel Sinn konvergiert. Das polynomielle Chaos Γ_p mit Ordnung p ist hier die Menge der multidimensionalen Hermite-Polynome aus Beispiel 3.7, auf die wir später noch näher eingehen. Die Berechnung der Koeffizienten u_i , die als *Polynomielle Chaos-Koeffizienten* bezeichnet werden, kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Hiermit befassen wir uns genauer am Ende dieses Kapitels. Der Wert ξ ist ein Vektor, der unabhängige Gauß-verteilte Zufallsvariablen $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ enthält und die Dichte

$$p_{\xi}(y) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_i^2/2) \quad (3.21)$$

besitzt. Man kann (3.20) auch als

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Psi_k(\xi), \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\} \quad (3.22)$$

schreiben, wobei es zwischen den Ψ und Γ einen eindeutigen Zusammenhang gibt, der später noch genauer erläutert wird.

3.2.1 Dimension und Ordnung

Die Begriffe der Dimension N und der Ordnung p spielen in der PCE eine zentrale Rolle. Die Höhe der Dimension ist zu Beginn der Berechnungen bereits bekannt und wird durch die Anzahl der Zufallsvariablen festgelegt. Die Ordnung p ergibt sich dadurch, dass die unendliche Summe aus (3.20) numerisch nicht berechnet werden kann und deshalb verkürzt werden muss. Der Wert p kann frei gewählt werden und entscheidet letztlich über die Genauigkeit, mit der die Zufallsvariable approximiert wird. Je größer N und p sind, desto mehr Rechenaufwand ist allerdings nötig, um die Zufallsvariable zu schätzen. Das N -dimensionale polynomielle Chaos erhält man durch Anwendung von Tensorprodukten bzgl. des 1-dimensionalen polynomiellen Chaos. Eine PCE mit der Ordnung p und der Dimension N besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} U(\omega) &\approx u_0 \Gamma_0 \\ &+ \sum_{i_1=1}^N u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) \\ &\dots \\ &+ \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} u_{i_1 \dots i_p} \Gamma_p(\xi_{i_1}(\omega), \dots, \xi_{i_p}(\omega)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Beispiel 3.7 (PCE mit $N = 2$ und $p = 3$)

Im letzten Kapitel dieser Arbeit sind die Volatilität und der Zins vom Zufall abhängig.

Deshalb geben wir beispielhaft eine PCE der Dimension $N = 2$ und der Ordnung $p = 3$ an.

$$\begin{aligned}
 U &\approx u_0 \Gamma_0 \\
 &\quad + u_1 \Gamma_1(\xi_1) + u_2 \Gamma_1(\xi_2) \\
 &\quad + u_{11} \Gamma_2(\xi_1, \xi_1) + u_{21} \Gamma_2(\xi_2, \xi_1) + u_{22} \Gamma_2(\xi_2, \xi_2) \\
 &\quad + u_{111} \Gamma_3(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + u_{211} \Gamma_3(\xi_2, \xi_1, \xi_1) + u_{221} \Gamma_3(\xi_2, \xi_2, \xi_1) + u_{222} \Gamma_3(\xi_2, \xi_2, \xi_2).
 \end{aligned}$$

◇

Im N -Dimensionalen Fall müssen nun die Dichte und die OP auf N angepasst werden. Für die Zufallsvariable gilt $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. Wegen der Unabhängigkeit der ξ_i folgt für die Dichte

$$\rho_\xi(y) = \prod_{i=1}^N p_{\xi_i}(y_i). \quad (3.24)$$

Um die einzelnen mehrdimensionalen OP zu erhalten, führen wir an dieser Stelle den Multiindex $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ ein. Mit $\nu(p)$ bezeichnen wir dann die Menge

$$\nu(p) = \left\{ \gamma : \sum_{i=1}^N \gamma_i = p \right\}. \quad (3.25)$$

Mit diesen beiden Hilfskonstrukten kann man die Menge der N -dimensionalen OP beschreiben. Das 1-dimensionale Chaos der Ordnung p wird mit $\psi_p(\xi_i)$ bezeichnet:

$$\Gamma_p = \bigcup_{\gamma \in \nu(p)} \left\{ \prod_{i=1}^N \psi_{\gamma_i}(\xi_i) \right\}. \quad (3.26)$$

Beispiel 3.8 (Hermite-Chaos)

Wir betrachten in diesem Beispiel ausschließlich die Hermite-Polynome, d.h. $\psi_p(\xi) = H_p(\xi)$. Mit der Ordnung $p = 3$ und der Dimension $N = 2$ ergibt sich für die Γ_p :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \{H_0(\xi_1)H_0(\xi_2)\} = 1 \\
 \Gamma_1 &= \{H_1(\xi_1)H_0(\xi_2), H_0(\xi_1)H_1(\xi_2)\} \\
 \Gamma_2 &= \{H_2(\xi_1)H_0(\xi_2), H_1(\xi_1)H_1(\xi_2), H_0(\xi_1)H_2(\xi_2)\} \\
 \Gamma_3 &= \{H_3(\xi_1)H_0(\xi_2), H_1(\xi_1)H_2(\xi_2), H_2(\xi_1)H_1(\xi_2), H_0(\xi_1)H_3(\xi_2)\}.
 \end{aligned}$$

Für die Gleichung aus Beispiel 3.7 folgt mit $H_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
 U &\approx u_0 H_0 \\
 &\quad + u_1 H_1(\xi_1) + u_2 H_1(\xi_2) \\
 &\quad + u_{11} H_2(\xi_1) + u_{21} H_1(\xi_2)H_1(\xi_1) + u_{22} H_2(\xi_2) \\
 &\quad + u_{111} H_3(\xi_1) + u_{211} H_1(\xi_2)H_2(\xi_1) + u_{221} H_2(\xi_2)H_1(\xi_1) + u_{222} H_3(\xi_2).
 \end{aligned}$$

Diese doch eher umständliche Schreibweise stellen wir mit der übersichtlicheren, äquivalenten Formel (3.22) dar. Dafür legen wir die multidimensionalen OP Ψ_i mit $i = 0, \dots, 9$ wie folgt fest:

$$\begin{aligned}\Psi_0(\xi_1, \xi_2) &= H_0 = 1, \\ \Psi_1(\xi_1, \xi_2) &= H_1(\xi_1) = \xi_1, \\ \Psi_2(\xi_1, \xi_2) &= H_1(\xi_2) = \xi_2 \\ \Psi_3(\xi_1, \xi_2) &= H_2(\xi_1) = \xi_1^2 - 1, \\ \Psi_4(\xi_1, \xi_2) &= H_1(\xi_1)H_1(\xi_2) = \xi_1\xi_2, \\ \Psi_5(\xi_1, \xi_2) &= H_2(\xi_2) = \xi_2^2 - 1 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Die Zufallsvariable U kann somit für $N = 2, p = 3$ und fortlaufender Nummerierung der Koeffizienten durch

$$U \approx \sum_{i=0}^9 u_k \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \tag{3.27}$$

approximiert werden.

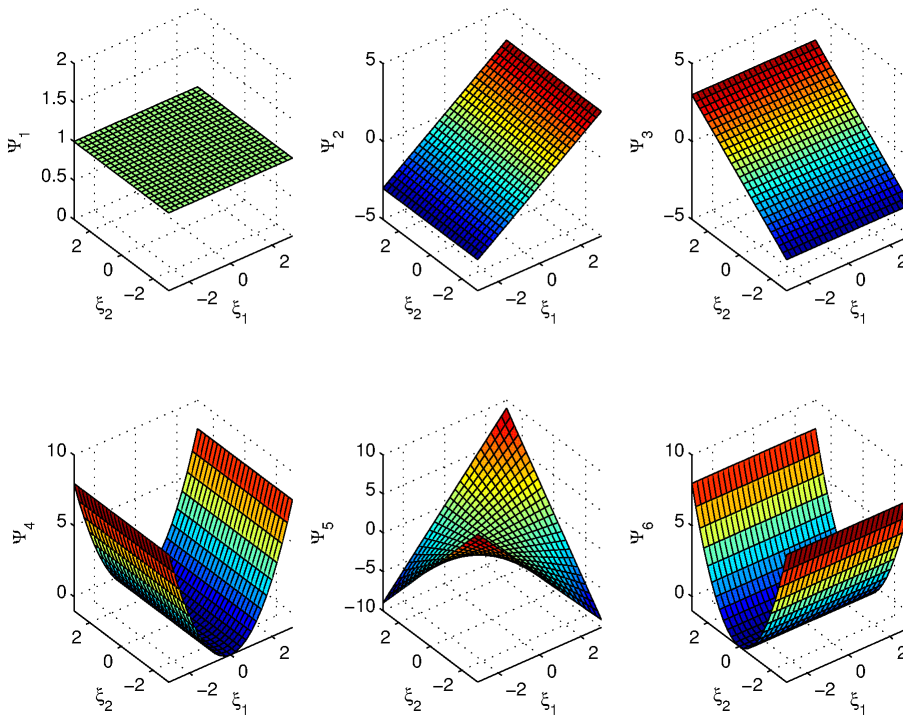


Abbildung 3.3: 2-dimensionale Hermite-Polynome $\Psi_n(x), n = 0, \dots, 5$

◇

Allgemein kann eine Zufallsvariable $U \in L_2$ durch

$$U \approx \sum_{k=0}^P u_k \Psi_k(\xi), \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \quad (3.28)$$

approximiert werden. Es ist klar, dass die Anzahl der Terme $P + 1$ von der Dimension N und der Ordnung p abhängig ist.

Satz 3.9

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, N die Dimension der PCE, p die Ordnung der PCE und $U \in L_2$ eine Zufallsvariable. Dann ist

$$U \approx \sum_{i=0}^P u_i \Psi_i(\xi) \quad (3.29)$$

mit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ eine Approximation der Ordnung p , falls

$$P + 1 = \frac{(N + p)!}{N!p!} \quad (3.30)$$

erfüllt ist. •

Beweis:

Aus dem Abschnitt über OP wissen wir, dass es immer genau ein N -dimensionales OP mit Grad 0, nämlich $\Psi_0 = \psi_0 = 1$, gibt. Außerdem ist klar, dass es immer genau N N -dimensionale OP $\Psi_i = \psi_1(\xi_i)$ für $i = 1, \dots, N$ vom Grad 1 gibt. Da sich alle N -dimensionalen OP vom Grad 2 aus Kombinationen der N -dimensionalen OP vom Grad 1 berechnen lassen, gibt es genau $\binom{N+2-1}{2}$ N -dimensionale OP vom Grad 2. Für N -dimensionale OP vom Grad p folgt deshalb für die Anzahl:

$$\binom{N + p - 1}{p}.$$

Mit Hilfe der Formel

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

erhalten wir für die Anzahl der N -dimensionalen OP bis zum Grad p

$$P + 1 = 1 + \sum_{k=1}^p \binom{N+k-1}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{N+k-1}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{N+k-1}{N-1} = \frac{(N+p)!}{N!p!}.$$

◦

N/p	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	6	10	15	21	28
3	4	10	20	35	56	84
4	5	15	35	70	126	210

Tabelle 3.1: Anzahl der Terme $P + 1$ mit Ordnung p und Dimension N

Für die Zufallsvariable $U \in L_2$ heißt das also:

$$U = \sum_{k=0}^P u_k \Psi_k(\xi) + \epsilon(N, p). \quad (3.31)$$

Der Fehler ϵ , der entsteht wenn man die unendliche Summe kürzt, kann wiederum als Zufallsvariable aufgefasst werden. Bei unseren Anwendung ist N bereits zu Beginn der Berechnung eindeutig bestimmt. In Kapitel 4 verwenden wir eine (Volatilität, $N = 1$) und in Kapitel 5 zwei (Volatilität und Zins, $N = 2$) Zufallsvariablen. Falls p gegen unendlich strebt, dann konvergiert der Fehler im Quadrat-Mittel-Sinn gegen 0, d.h.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle \epsilon^2(N, p) \rangle = 0, \quad (3.32)$$

siehe [4].

3.2.2 Erwartungswert und Varianz

Bei der Verwendung von Zufallsvariablen interessiert man sich generell immer für den Erwartungswert und die Varianz. Diese kann man unter Verwendung der PCE relativ leicht erhalten.

Satz 3.10

Für den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen $U \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi)$$

gilt

$$E(U) = u_0 \quad (3.33)$$

und

$$\sigma^2(U) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \langle \Psi_i, \Psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \langle \Psi_i^2 \rangle \quad (3.34)$$

•

Beweis:

Für den Erwartungswert gilt:

$$E(U) = \langle U \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i \right\rangle$$

Für die (multidimensionalen) OP ist $\Psi_0 = 1$ und die Orthogonalitätsbedingung $\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ erfüllt. Deshalb folgt:

$$\begin{aligned} E(U) &= \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i \right\rangle = \left\langle \Psi_0 \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i \langle \Psi_i, \Psi_0 \rangle = u_0 \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle = u_0. \end{aligned}$$

Um die Varianz von U zu berechnen, verwenden wir die Formel

$$\sigma^2(U) = E(U^2) - E(U)^2.$$

Setzen wir für U die Reihenentwicklung ein und nutzen $E(U) = u_0$, dann folgt für die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma^2(U) &= \left\langle \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i \right)^2 \right\rangle - u_0^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_i u_j \langle \Psi_i, \Psi_j \rangle - u_0^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 \langle \Psi_i, \Psi_i \rangle - u_0^2 = u_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \langle \Psi_i, \Psi_i \rangle - u_0^2 = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \langle \Psi_i, \Psi_i \rangle. \end{aligned}$$

◦

3.2.3 Stochastische Prozesse

Wie wir bereits dargestellt haben, funktioniert die PCE für Gauß-verteilte Zufallsvariablen. In Kapitel 1 wurde aber gezeigt, dass für die Black-Scholes-Formel stochastische Prozesse benötigt werden. Der Grund, warum wir uns bis hierhin nur mit Zufallsvariablen befasst haben liegt darin, dass sich die PCE daran leichter erklären lässt und man sie relativ einfach auf stochastische Prozesse erweitern kann. Die Formeln müssen nur marginal angepasst werden.

Sei U jetzt ein stochastischer Prozess mit

$$U : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \omega) \mapsto U(t, \omega). \quad (3.35)$$

In der Gleichung (3.28) sind die deterministischen Koeffizienten u_i nun von t abhängig. Zudem fassen wir für ein beliebiges $t \in [0, T]$ $U(t, \cdot)$ als Zufallsvariable des $L_2(\Omega, P)$ auf. Wir erhalten

$$U(t, \cdot) = \sum_{k=0}^P u_k(t) \Psi_k(\xi). \quad (3.36)$$

Der Erwartungswert und die Varianz werden hier genauso wie bei den Zufallsvariablen berechnet. Der Beweis verläuft ähnlich wie der für Zufallsvariablen im Abschnitt zuvor, siehe [15].

3.3 Verallgemeinertes polynomielles Chaos

Bisher haben wir uns auf die PCE mit Gauß-verteilten Zufallsvariablen und Hermite-Polynomen beschränkt. In der Praxis benötigt man aber oft andere Verteilungen wie z.B. die Uniforme Verteilung oder die Binomialverteilung. R. H. CAMERON und W. T. MARTIN [4] erweiterten das homogene Chaos von N. WIENER, indem sie gezeigt haben, dass die Chaosentwicklung mit Hermite-Polynomen für willkürliche stochastische

Prozesse des L_2 konvergiert. Die Konvergenzrate ist bei Gauß-verteiltern Zufallsvariablen aber optimal (siehe [24]), da die Dichtefunktion der Verteilung identisch mit der Gewichtsfunktion der OP ist. Das Askey-Schema liefert uns aber auch für andere Verteilungen Familien von OP, bei denen die zugehörige Gewichtsfunktion und die Dichte der Verteilung identisch oder zumindest ähnlich sind. Um schnelle Konvergenz zu erhalten, sollten deswegen für unterschiedliche Verteilungen die OP angepasst werden. In der folgenden Tabelle ist eine Übersicht über die Verteilungen gegeben, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden:

Verteilung	OP	Träger
Gauß	Hermite	$(-\infty, \infty)$
Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
Beta	Jacobi	$[-1, 1]$
Uniform	Legendre	$[-1, 1]$
Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, n\}$
Negativ Binomial	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
Hypergeometrisch	Hahn	$\{0, 1, \dots, n\}$

Tabelle 3.2: Verteilungen und deren zugehörige OP

Verteilung	$\rho(\xi)$	OP	$\tilde{\rho}(\xi)$
Gauß	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$	Hermite	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$
Gamma	$\exp(-\xi)\xi^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$	Laguerre	$\exp(-\xi)\xi^\alpha$
Beta	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)2^{\alpha+\beta-1}}(\xi+1)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}$	Jacobi	$(1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta$
Uniform	$\frac{1}{2}$	Legendre	$\frac{1}{2}$
Poisson	$\frac{\exp(-\alpha)\alpha^\xi}{\xi!}$	Charlier	$\frac{\alpha^\xi}{\xi!}$
Binomial	$\binom{\tilde{N}}{\xi} \tilde{p}^\xi (1-\tilde{p})^{(\tilde{N}-\xi)}$	Krawtchouk	$\binom{\tilde{N}}{\xi} \tilde{p}^\xi (1-\tilde{p})^{(\tilde{N}-\xi)}$
Neg. Binomial	$\frac{(1-\mu)^\gamma \Gamma(\gamma+\xi)\mu^\xi}{\Gamma(\gamma)\xi!}$	Meixner	$\frac{\Gamma(\gamma+\xi)\mu^\xi}{\Gamma(\gamma)\xi!}$
Hypergeo.	$\frac{\binom{\alpha}{\xi} \binom{\beta}{\tilde{N}-\xi}}{\binom{\alpha+\beta}{\tilde{N}}}$	Hahn	$\binom{\alpha+\xi}{\xi} \binom{\beta+\tilde{N}-\xi}{\tilde{N}-\xi}$

Tabelle 3.3: Vergleich der Dichtefunktionen mit den Gewichtsfunktionen der OP

Vorsicht ist allerdings bei den Verteilungen geboten, bei denen die zugehörige Dichte nicht komplett identisch mit der Gewichtsfunktion der OP ist. Die PCE konvergiert nämlich nur gegen den gewünschten Wert, falls man die Parameter in der Dichtefunktion der Verteilung der Gewichtsfunktion der OP anpasst. Konstanten können dabei natürlich vernachlässigt werden. In [24] werden alle Transformationen erläutert. Wir geben hier lediglich ein Beispiel zum besseren Verständnis an.

Beispiel 3.11 (Beta-Verteilung)

Die Beta-Verteilung hat die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)2^{\alpha+\beta-1}}(\xi + 1)^{\alpha-1}(1 - \xi)^{\beta-1}.$$

Die Jacobi-Polynome sind auf $\Omega = [-1, 1]$ definiert und besitzen die Gewichtsfunction

$$\tilde{\rho}(\xi) = (1 - \xi)^\alpha(1 + \xi)^\beta.$$

In diesem Fall ist also $\rho(\xi) \neq \tilde{\rho}(\xi)$. Da Konstanten keine Rolle spielen, müssen wir durch geschickte Wahl von α und β

$$(\xi + 1)^{\alpha-1}(1 - \xi)^{\beta-1} \text{ in } (1 - \xi)^\alpha(1 + \xi)^\beta$$

transformieren. Dazu setzen wir

$$\hat{\beta} = \alpha - 1 \text{ und } \hat{\alpha} = \beta - 1.$$

Die transformierte Dichte ist schließlich mit der angepassten Konstante

$$\rho(\xi) = \frac{\Gamma(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2)}{\Gamma(\hat{\alpha} + 1)\Gamma(\hat{\beta} + 1)2^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}+1}}(\xi + 1)^{\hat{\beta}}(1 - \xi)^{\hat{\alpha}}.$$

◇

Da wir in den folgenden Kapiteln die PCE mit der MCM aus Abschnitt 2.5 vergleichen wollen, müssen die Träger der Verteilungen natürlich gleich gewählt werden. Bei der Uniformen Verteilung zieht man bei der MCM beispielsweise in MATLAB mit `rand(1, M)` M uniform-verteilte Zufallszahlen auf dem Bereich $\Omega = [0, 1]$. Da wir bei der PCE die Uniforme Verteilung mit $\Omega = [-1, 1]$ verwenden, passen wir die Funktion g (siehe (2.9)) an:

$$g(\xi(\omega)) = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\xi(\omega), \tag{3.37}$$

wobei ξ eine uniform-verteilte Zufallsvariable mit $\Omega = [-1, 1]$ ist. Die restlichen Anpassungen können der MATLAB Funktion `zv_pc.m` entnommen werden. In diesem File findet sind auch alle Drei-Term-Rekursionsgleichungen definiert.

Es sollte auch noch erwähnt werden, dass bei $N > 1$ die verschiedenen Zufallsvariablen nicht die selbe Verteilung besitzen müssen. Eine Anpassung der multidimensionalen Dichte und der multidimensionalen OP ist aber notwendig. Die Art der Berechnung verändert sich im Vergleich zu der im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Art nicht.

3.4 Berechnung der Koeffizienten

Bisher haben wir uns nicht näher mit den Koeffizienten u_i befasst und diese mehr oder weniger als gegeben vorausgesetzt. Bei der Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz haben wir aber bereits gesehen, dass diese ausschließlich von den OP und den Koeffizienten abhängen. Tatsächlich ist ihre Ermittlung auch der entscheidende und aufwändigste Schritt in der PCE.

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten, um die u_i zu berechnen, nämlich die intrusive (Galerkin) Methode (im Folgenden abgekürzt: IM) oder die nicht-intrusive Methode (im Folgenden abgekürzt: NIM). Bei der Galerkin Methode setzt man die PCE direkt in das ursprüngliche Modell ein und erhält dadurch ein komplexeres Modell in dem der stochastische Anteil entfernt werden kann. Dieses muss, um alle Koeffizienten zu erhalten, nur einmal gelöst werden. Bei der NIM werden die Koeffizienten hingegen einzeln mittels numerischer Quadratur berechnet. Bei beiden Möglichkeiten gibt es Abweichungen in der Art der Ausführung (siehe [15]), wobei wir hier auf jeweils eine näher eingehen werden. Wie wir später sehen werden, gibt es nicht eine Methode, welche in sämtlichen Fällen die bessere Wahl ist. Dazu aber in Kapitel 4 und 5 mehr.

3.4.1 Nicht-intrusive Methode

Bei der NIM verwenden wir die Folgerung (3.18) die besagt, dass wir für fast jedes Zufallsereignis eine eindeutige Lösung erhalten. Wir haben in den vorherigen Abschnitten gezeigt, dass für eine Zufallsvariable $U \in L_2(\Omega, P)$ die Darstellung

$$U \approx \sum_{i=0}^P u_i \Psi_i(\xi) \quad (3.38)$$

gilt. Der Vektor $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ besteht aus Zufallsvariablen mit der Dichte $\rho_\xi(\xi)$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes P . Multiplizieren wir diese Gleichung mit den OP $\Psi_l(\xi)$ für $l = 0, \dots, P$, so erhalten wir wegen der Orthogonalitätseigenschaft

$$\langle U, \Psi_l \rangle \approx u_l \langle \Psi_l, \Psi_l \rangle, \quad l = 0, \dots, P.$$

Für die Koeffizienten ergibt sich nach dem Umstellen:

$$u_l = \frac{\langle U, \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l, \Psi_l \rangle} = \frac{\int_{\Omega} U(\xi) \Psi_l(\xi) \rho(\xi) d\xi}{\int_{\Omega} \Psi_l^2(\xi) \rho(\xi) d\xi}, \quad l = 0, \dots, P. \quad (3.39)$$

Beispiel 3.12 (Gauß-Verteilung mit $N = 1$)

Für ein Modell mit Dimension $N = 1$ und der Gauß-Verteilung folgt für die u_i :

$$u_l = \frac{\langle U, \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l, \Psi_l \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \Psi_l(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_l(\xi)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2) d\xi}, \quad l = 0, \dots, P.$$

Wollen wir den Erwartungswert berechnen, so folgt mit $\Psi_0 = 1$ in diesem Fall:

$$E(U) = u_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \exp(-\frac{1}{2}\xi^2) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2) d\xi}.$$

◇

Da die Koeffizienten alle einzeln ermittelt werden, wird die Methode als nicht-intrusiv bezeichnet. Aus (3.39) folgt sofort, dass man bei der Anwendung dieses Verfahrens $2(P+1)$ Integrale ermitteln muss. Die Hauptschwierigkeit bei der NIM ist also die Berechnung von (uneigentlichen) ggf. mehrdimensionalen Integralen. Hierzu verwenden wir in dieser Arbeit die Gauß-Quadratur:

$$u_l = \frac{\langle U, \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l, \Psi_l \rangle} = \frac{\int_{\Omega} U(\xi) \Psi_l(\xi) \rho(\xi) d\xi}{\int_{\Omega} \Psi_l^2(\xi) \rho(\xi) d\xi} \approx \frac{\sum_{j=1}^q U(x_j) \Psi_l(x_j) w_j}{\sum_{j=1}^q \Psi_l^2(x_j) w_j}, \quad l = 0, \dots, P. \quad (3.40)$$

Die Stützstellen x_j und Gewichte w_j mit $j = 1, \dots, q$ berechnen wir im kontinuierlichen Fall mit dem Golub-Welsch Algorithmus, welchen wir hier kurz vorstellen. Falls die Verteilung diskret gewählt wurde, sind die Gewichte ohnehin gegeben. Ausführlichere Erläuterungen findet man in [17].

Wie wir bereits wissen, erfüllen alle OP, die wir benötigen, die Drei-Term-Rekursionsgleichung (3.12)

$$\Psi_j(\xi) = (\xi - \alpha_j) \Psi_{j-1}(\xi) - \beta_j \Psi_{j-2}(\xi) \quad j = 1, \dots, q$$

mit $\Psi_1(\xi) = 1$ und $\Psi_0(\xi) = 0$. Die Rekursionskoeffizienten α_j und β_j können mit der Darboux-Formel berechnet werden:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\langle \xi \Psi_{j-1}, \Psi_{j-1} \rangle}{\langle \Psi_{j-1}, \Psi_{j-1} \rangle} \quad j = 1, \dots, q \\ \beta_j &= \frac{\langle \Psi_{j-1}, \Psi_{j-1} \rangle}{\langle \Psi_{j-2}, \Psi_{j-2} \rangle} \quad j = 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Den Wert β_1 erhält man durch $\langle \Psi_1, \Psi_1 \rangle$. Da wir die Träger unserer Verteilungen alle auf $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$ oder $[-1, 1]$ transformieren können, reichen uns Koeffizienten der Hermite-, Laguerre- und Legendre-Polynome aus. Diese können vorab berechnet werden. Beim Golub-Welsch Algorithmus ermittelt man die Stützstellen und die Gewichte nun wie folgt:

Algorithmus: Golub-Welsch Algorithmus

1. Berechne die Rekursionskoeffizienten α_j und β_j für $j = 1, \dots, q$.
2. Stelle die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & & & \\ \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & & & & \\ & \sqrt{\beta_3} & \alpha_3 & \sqrt{\beta_4} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \sqrt{\beta_{q-1}} & \alpha_{q-1} & \sqrt{\beta_q} \\ & 0 & & & & \sqrt{\beta_q} & \alpha_q \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

auf.

3. Berechne die Eigenwerte von J und sortiere diese. Sie sind zugleich die Stützstellen x_j für $j = 1, \dots, q$.
4. Bestimme die erste Komponente $f_{1,j}$ des normalisierten Eigenvektors bzgl. des Eigenwertes x_j .
5. Berechne die Gewichte mittels $w_j = \beta_1 f_{1,j}^2$ für $j = 1, \dots, q$.

Wie schon erwähnt wurde, benötigen wir für unsere Zwecke die Gauß-Hermite, die Gauß-Legendre und die Gauß-Laguerre Quadratur. Wir beschränken uns dabei auf die Standardverfahren. Bei der Gauß-Hermite Quadratur verwenden wir beispielsweise die Gewichtsfunktion $w(\xi) = \exp(-\xi^2)$.

Beispiel 3.13 (Gauß-Hermite Quadratur)

Bei der Gauß-Hermite Quadratur mit $w(\xi) = \exp(-\xi^2)$ erhalten wir:

$$u_l = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \Psi_l(\xi) \rho(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_l(\xi) \Psi_l(\xi) \rho(\xi) d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} z(\xi) d\xi} \approx \frac{\sum_{j=1}^q y(x_j) w_j \exp(x_j^2)}{\sum_{j=1}^q z(x_j) w_j \exp(x_j^2)}, \quad l = 0, \dots, P. \quad (3.43)$$

◇

In den folgenden Kapiteln betrachten wir aber natürlich die allgemeine PCE. Deshalb, und zur einfacheren Schreibweise, geben wir den Extrafaktor (hier: $\exp(x^2)$) nicht mit an. Bei den Berechnungen wird dieser direkt bei den Gewichten, d.h. $w_j = w_j \exp(x_j)$ mit berücksichtigt.

Im N -Dimensionalen Fall verwenden wir bei der Programmierung das Kronecker-Produkt. Wie bei der theoretischen Herleitung können die Verteilungen hier auch beliebig kombiniert werden. Es gilt für Beispiel 3.13:

$$u_l \approx \frac{\sum_{j_1=1}^{q_1} \dots \sum_{j_N=1}^{q_N} y(x_{1j_1}, \dots, x_{Nj_N}) w_{j_1} \dots w_{j_N}}{\sum_{j_1=1}^{q_1} \dots \sum_{j_N=1}^{q_N} z(x_{1j_1}, \dots, x_{Nj_N}) w_{j_1} \dots w_{j_N}}. \quad (3.44)$$

Der Aufwand wächst exponentiell bzgl. der Dimension an. Bei unseren späteren Betrachtung hinsichtlich der Black-Scholes Theorie benötigen wir maximal zwei Zufallsvariablen, weshalb dieser Punkt bei uns nicht so stark ins Gewicht fällt.

3.4.2 Intrusive Methode

Bei der Galerkin- oder intrusiven Methode werden die Koeffizienten nicht mehr einzeln, sondern alle auf einmal berechnet. Die Gleichungen eines mathematisch Modells, wie

z.B. gewöhnlichen DGLen, partiellen DGLen oder Integralgleichungen werden demnach abhängig von p erweitert, sodass man ein neues, zum Teil wesentlich größeres Modell, erhält. Der Lösungsvektor beinhaltet u_0, \dots, u_P . Man muss deshalb die Ordnung p bereits zu Beginn festlegen. Falls man diese im nachhinein erhöhen will, ist eine komplette Neuberechnung nötig. Wir nehmen an, dass das Modell eine stochastische, partielle DGL ist, da dies bei uns ohnehin zutrifft.

Sei

$$\mathcal{M}(U(\xi), \xi) = 0 \tag{3.45}$$

eine stochastische, partielle DGL mit der Zufallsvariablen $U \in L_2$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) . Ersetzen wir $U(\xi)$ mit der Formel (3.22), so ergibt sich

$$\mathcal{M}\left(\sum_{i=0}^P u_i(t)\Psi_i(\xi), \xi\right) = \epsilon(P, U), \tag{3.46}$$

wobei $\epsilon(P, U)$ der Fehler ist, der beim Kürzen der unendlichen Summe auftritt. Dieser kann nun wieder als Zufallsvariable aufgefasst werden, da er von der Zufallsvariablen U abhängt. Aufgrund der endlichen Varianz kann er auch durch

$$\epsilon(P, U) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \Psi_i(\xi) \tag{3.47}$$

dargestellt werden. Wir wenden nun das Galerkin-Verfahren, nachdem diese Methode benannt ist, an. Dabei wird die sog. Fehlerorthogonalität verlangt, d.h. $\epsilon(P, U)$ ist orthogonal zu dem Raum, den die $P + 1$ OP aufspannen. Diese ist auch ungefähr erfüllt, da

$$\left\langle M\left(\sum_{i=0}^P u_i \Psi_i(\xi), \xi\right), \Psi_l(\xi) \right\rangle = \langle \epsilon(P, U), \Psi_l(\xi) \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} r_i \Psi_i(\xi), \Psi_l(\xi) \right\rangle \tag{3.48}$$

$$= \langle r_l \Psi_l(\xi), \Psi_l(\xi) \rangle \approx 0, \quad l = 0, \dots, P.$$

gilt. Wir erhalten dadurch ein System von $(P + 1)$ partiellen Differentialgleichungen. Diese sind nun deterministisch, weil man den „Zufall“ in die Basispolynome transferiert hat. Dieses Verfahren wurde zunächst noch sehr allgemein beschrieben, in den nächsten beiden Kapiteln folgt aber die exakte Anwendung auf die Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zinssatz für europäische und asiatischen Optionsscheine.

4 Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität

In diesem Kapitel gehen wir auf mehrere Aspekte ein. Zum einen wenden wir die PCE sowohl intrusiv als auch nicht-intrusiv auf die Bewertung von europäischen und asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität an. Nachdem wir die einzelnen Methoden für die jeweilige Optionsart erläutert haben, zeigen wir mit Hilfe numerischer Untersuchungen Vor- und Nachteile beider Verfahren auf. Als Vergleichsverfahren ziehen wir die MCM aus Abschnitt 2.5 heran. Wir werden aber durch Versuchsreihen zeigen, dass es immer mindestens ein Verfahren der PCE gibt, welches effizienter als die MCM ist. Am Ende des Kapitels wird deutlich, dass es allgemein nicht eine „bessere“ Methode der PCE gibt, sondern dass beide Verfahren in gewissen Fällen vorteilhaft sein können.

Um die zufällige Volatilität mit einbeziehen zu können, stellen wir sie im gesamten Kapitel als Zufallsvariable $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) mit der Darstellung

$$\sigma(\omega) = g(\xi(\omega)) = a + b\xi(\omega) \text{ mit } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.1)$$

dar, obwohl damit eigentlich (2.9) gemeint ist. Der Wert $\omega \in \Omega$ ist eine Zufallszahl und $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Zufallsvariable mit einer der in Kapitel 3 festgelegten Verteilungen. Da die Volatilität die einzige Zufallsvariable darstellt, benötigen wir ausschließlich die PCE mit Dimension $N = 1$. In diesem speziellen Fall erhalten wir durch Anwendung der Gleichung (3.30) für die Anzahl der Terme

$$P + 1 = \frac{(p + 1)!}{p!} = p + 1,$$

also $p = P$, weshalb wir P in diesem Kapitel durch p ersetzen. Wir beschreiben die beiden Methoden der PCE für kontinuierliche Verteilungen. Diese sind in der Regel schwieriger zu approximieren, da durch die Gauß-Quadratur zusätzliche Fehler gemacht werden. Für diskrete Verteilungen werden in den Algorithmen die Stützstellen nach den Einträgen aus Tabelle 3.2 ermittelt und die Gewichte der Gauß-Quadratur auf 1 gesetzt.

Als Auswertungsprogramm wurde MATLAB verwendet. Die wichtigsten Funktionen werden hier, ähnlich wie bei der Lösung von asiatischen Optionen und der MCM, kurz erläutert.

4.1 Europäische Optionen

Wir passen zunächst die zwei möglichen Verfahren der PCE auf das Black-Scholes-Modell für den hiesigen Optionstyp an. Danach führen wir eine Reihe von Untersuchungen durch, mit deren Hilfe wir zeigen, welche Methode am schnellsten konvergiert und wie die Ordnung p und die Anzahl der Stützstellen q gewählt werden sollten.

Die meisten Eingabeparameter sind bei beiden Methoden gleich und werden folgend aufgelistet:

- S_0 : Basiswert zur Zeit $t = 0$
- K : Ausübungspreis
- T : Laufzeit der Option
- r : sicherer Zinssatz
- a : Faktor aus g
- b : Faktor aus g
- Optionsart: Put oder Call
- Verteilung: Eine der acht Verteilungen
- p : Ordnung der PCE
- q : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur
- L : Anzahl der Linien bei der Linienmethode (nur bei IM)

Der eigentlich deterministische faire Optionswert $V(t, S(t))$ ist wegen der Zufallsvariable $\sigma(\omega)$, die direkt in die Berechnung mit eingeht (siehe (2.36) bzw. (2.37)), natürlich selbst vom Zufall abhängig und ist deshalb nun ein stochastischer Prozess mit

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (4.2)$$

Das Symbol \mathbb{R}^+ steht für die Menge der reellen positiven Zahlen und 0. Um die PCE anwenden zu können, muss $V \in L_2$ gelten. Dies können wir bei der Optionsbewertung ohne Einschränkung annehmen, da das Kapital auf den Finanzmärkten beschränkt ist. Die PCE lässt sich demnach als

$$V(t, S(t), \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t, S(t)) \Psi_i(\xi) \quad (4.3)$$

beschreiben, wobei v_i die Koeffizienten der PCE und Ψ_i die eindimensionalen OP bzgl. der ausgewählten Verteilung sind. Grundsätzlich berechnen wir uns aber o.B.d.A. den Optionswert zur Zeit $t = 0$, d.h.

$$V(0, S_0, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(0, S_0) \Psi_i(\xi). \quad (4.4)$$

Den fairen Optionspreis erhalten wir dann durch die Berechnung des Erwartungswertes $V_0 = E(V(0, S_0, \cdot))$. Zudem ermitteln wir die Varianz $Var(V(0, S_0, \cdot))$, da dieser Wert uns ebenfalls zusätzliche Informationen liefert.

4.1.1 Anwendung der polynomiellen Chaonentwicklung

4.1.1.1 Nicht-intrusive Methode

Um den Optionswert $V_0 = E(V(0, S_0, \cdot))$ und die Varianz $Var(V(0, S_0, \cdot))$ zu berechnen, benötigen wir nach Satz (3.10) die Koeffizienten $v_i : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der PCE und die OP bzgl. der gewählten Verteilung. Letztere können mittels der Drei-Term-Rekursionsgleichung (3.12) numerisch berechnet werden. Die Koeffizienten werden bei der NIM mit der Formel

$$v_i = \frac{\langle V, \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_i, \Psi_i \rangle} \text{ für } i = 0, \dots, p \quad (4.5)$$

ermittelt. Ausführlich dargestellt gilt für die v_i also

$$\begin{aligned} v_i(0, S_0) &= \frac{\int_{\omega \in \Omega} V(0, S_0, \omega) \Psi_i(\xi(\omega)) dP(\omega)}{\int_{\omega \in \Omega} \Psi_i(\xi(\omega))^2 dP(\omega)} \\ &= \frac{\int_{\omega \in \Omega} V(0, S_0, \omega) \Psi_i(\xi(\omega)) \rho(\xi(\omega)) d\xi}{\int_{\omega \in \Omega} \Psi_i(\xi(\omega))^2 \rho(\xi(\omega)) d\xi} \end{aligned} \quad (4.6)$$

für $i = 0, \dots, p$. Der Wert $V(0, S_0, \omega)$ kann bei den europäischen Optionen bekanntlich analytisch berechnet werden. Die Formel dafür findet man in Abschnitt 2.3.2. Dabei darf man allerdings nicht vergessen, die Volatilität σ durch die Funktion $\sigma(\omega) = g(\xi(\omega)) = a + b\xi(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ zu ersetzen. Die Integrale werden nun mittels der Gauß-Quadratur abgeschätzt. Welche der drei angegebenen Möglichkeiten (Gauß-Hermite, Gauß-Legendre oder Gauß-Laguerre) man benötigt, ist von der Verteilung und deren Träger abhängig. Mit x_j bezeichnen wir die Stützstellen und mit w_j die dazugehörigen Gewichte für $j = 1, \dots, q$. Für $\sigma(\omega)$ ergibt sich somit $\sigma_j = g(x_j) = a + bx_j$ und für den deterministischen Optionswert mit σ_j gilt $V_j = V(0, S_0, \sigma_j)$ für $j = 1, \dots, q$. Es folgt:

$$v_i(0, S_0) \approx \frac{\sum_{j=1}^q V_j \Psi_i(x_j) \rho(x_j) w_j}{\sum_{j=1}^q \Psi_i(x_j)^2 \rho(x_j) w_j}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (4.7)$$

Wir fassen die soeben durchgeführte Herleitung in einem Algorithmus zusammen.

Algorithmus: NIM für europäische Optionen mit zufälliger Volatilität

0. Eingabewerte: S_0, K, T, r, a, b , Optionsart, Verteilung, p, q .
1. Berechne die Stützstellen x_j und die Gewichte w_j bzgl. der ausgewählten Verteilung für $j = 1, \dots, q$ der Gauß-Quadratur mit dem Golub-Welsch Algorithmus.

2. Bestimme die Funktion $\sigma_j = g(x_j) = a + bx_j$ und die Dichte $\rho_j = \rho(x_j)$ für $j = 1 \dots, q$.
3. Ermittle die OP $\Psi_{i_j} = \Psi_i(x_j)$ über die Drei-Term-Rekursionsgleichung für $i = 0, \dots, p$ und $j = 1 \dots, q$.
4. Berechne mit den Lösungsformeln aus Abschnitt 2.3.2 q Optionswerte $V_j = V(0, S_0, \sigma_j)$ für $j = 1 \dots, q$.
5. Approximiere die Koeffizienten durch

$$v_i \approx \frac{\sum_{j=1}^q V_j \Psi_{i_j} \rho_j w_j}{\sum_{j=1}^q \Psi_{i_j}^2 \rho_j w_j}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (4.8)$$

6. Gib den approximierten Erwartungswert v_0 und die approximierte Varianz

$$Var \approx \sum_{i=1}^p v_i^2 \left(\sum_{j=1}^q \Psi_{i_j}^2 \rho_j w_j \right) \quad (4.9)$$

aus.

Bei genauerer Betrachtung des Algorithmus fällt auf, dass die Ordnung der PCE in den Schritten 1, 2 und 4 nicht vorkommt. Zudem werden die Koeffizienten in Schritt 5 alle einzeln berechnet. Möchte man nun p auf $p + 1$ erhöhen um einen geringeren Fehler bei der Varianz zu erhalten, müssen lediglich die Schritte 3, 5 und 6 für $p + 1$ ausgeführt werden, d.h. eine nachträgliche Erhöhung der Ordnung der PCE ist relativ schnell durchführbar. Der Parameter p hat hier keinen Einfluss auf den Erwartungswert, da v_0 unabhängig von diesem berechnet wird (siehe Schritt 5). Deshalb ist die Anzahl der Stützstellen q der ausschlaggebende Faktor für die Genauigkeit des Optionswertes. Bei der Varianz ist dies nicht so, da diese, wie in Schritt 6 deutlich wird, von p und q abhängt. Bemerkenswert ist, dass selbst bei sehr hohen Werten von p und q die Laufzeit extrem gering ist.

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm *eu_pc_ni.m* numerisch umgesetzt.

Beispiel 4.1

Wir verwenden folgende Daten:

$S_0 = 100$, $K = 80$, $T = 1$, $r = 0.1$, $a = 0.3$, $b = 0.1$, Optionsart: Call, Verteilung: Uniform.

An den Laufzeiten aus Tabelle (4.1) wird deutlich, wie schnell die Methode tatsächlich ist. Wählt man die Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur allerdings zu

klein, kann dies speziell bei der Berechnung der Varianz schnell zu enorm großen Fehlern führen, wie man in den unteren beiden Fällen gut erkennen kann. Darauf gehen wir später aber noch genauer ein.

p, q	V_0	Var	Laufzeit (Sek.)
10,100	30.472755	0.394276	0.012
5, 50	30.472755	0.394276	0.003
5, 20	30.472755	0.394276	0.001
5, 5	30.472755	49.733549	0.001
3, 2	30.472703	929.293762	< 0.000

Tabelle 4.1: Laufzeit der NIM bei europäischen Optionen in Abh. von p und q

◇

4.1.1.2 Intrusive Methode

Bei dieser Methode lassen wir die analytische Berechnung außer Acht und betrachten die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit den Endbedingungen (2.1) bzw. (2.2) in ihrer Ursprungsform. Auch hier ersetzen wir σ wieder durch $\sigma(\omega) = g(\xi(\omega)) = a + b\xi(\omega)$. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}g^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (4.10)$$

Wie wir schon im Abschnitt 3.4.2 beschrieben haben, verwenden wir nun die verkürzte PCE

$$V(t, S(t), \cdot) \approx \sum_{i=0}^p v_i(t, S(t)) \Psi_i(\xi) \quad (4.11)$$

um die Zufallsvariable V zu approximieren. Setzen wir (4.11) in (4.10) ein, so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^p \frac{\partial v_i}{\partial t} \Psi_i + \frac{1}{2}S^2 \sum_{i=0}^p \frac{\partial^2 v_i}{\partial S^2} g^2 \Psi_i + rS \sum_{i=0}^p \frac{\partial v_i}{\partial S} \Psi_i - r \sum_{i=0}^p v_i \Psi_i = \epsilon(p, V). \quad (4.12)$$

Jetzt wenden wir die Galerkin Methode an und verlangen somit die Fehlerorthogonalität, d.h. dass der Fehler $\epsilon(p, V)$ orthogonal bzgl. des Raumes ist, der von den $p + 1$ OP aufgespannt wird. Mathematisch ausgedrückt bedeutet das

$$\langle \epsilon(p, V) \Psi_l(\xi) \rangle = 0, \quad l = 0, \dots, p. \quad (4.13)$$

Der Fehler kann also aus der partiellen DGL entfernt werden. Da für OP, die zur gleichen Familie gehören $\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ gilt, erhalten wir ein System partieller DGLen:

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} \langle \Psi_l^2 \rangle + \frac{1}{2}S^2 \sum_{i=0}^p \frac{\partial^2 v_i}{\partial S^2} \langle g^2 \Psi_i \Psi_l \rangle + rS \frac{\partial v_l}{\partial S} \langle \Psi_l^2 \rangle - r v_l \langle \Psi_l^2 \rangle = 0, \quad l = 0, \dots, p \quad (4.14)$$

oder

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sum_{i=0}^p \frac{\partial^2 v_i}{\partial S^2} \frac{\langle g^2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_i^2 \rangle} + r S \frac{\partial v_l}{\partial S} - r v_l = 0, \quad l = 0, \dots, p. \quad (4.15)$$

Die Besonderheit ist nun, dass sich der stochastische Anteil auf den zweiten Term beschränkt. Berechnet man sich die beiden inneren Produkte, so erhält man deterministische Werte und kann somit den „Zufall“ entfernen. Für das obige System partieller DGLen gibt es aber keine bekannte analytische Lösung, weswegen wir hier z.B. die Liniemethode aus Abschnitt 2.4.2 heranziehen müssten. Die Anzahl der Gleichungen des daraus resultierenden Systems gewöhnlicher DGLen beläuft sich dabei auf $L \cdot (p + 1)$. In dem Beispiel, das wir bei der NIM angegeben haben, wurde bereits deutlich, wie schnell diese Methode bei europäischen Optionen konvergiert und welcher geringere Zeitaufwand dafür nötig ist. Die Lösung eines Systems gewöhnlicher DGLen mit $L \cdot (p + 1)$ Gleichungen ist wesentlich komplizierter und nimmt mehr Zeit in Anspruch. Bei den asiatischen Optionen werden wir die IM programmieren und ausführlicher beschreiben. Die dort erhaltenen Laufzeiten sind vergleichbar mit denen, die wir hier bekommen würden. Sie betragen aber ein Vielfaches im Vergleich zu den Zeiten, die man mit der NIM erhält. Wir geben trotzdem das gleiche Beispiel wie bei der IM an. Allein daraus kann man schon erkennen, wie ineffizient die NIM bei der Bewertung von europäischen Optionen ist. Bei den nachfolgenden numerischen Untersuchungen werden wir sie deshalb nicht weiter berücksichtigen.

Beispiel 4.2

Wir verwenden folgende Daten:

$S_0 = 100$, $K = 80$, $T = 1$, $r = 0.1$, $a = 0.3$, $b = 0.1$, Optionsart: Call, Verteilung: Uniform, $q = 50$.

p, L	V_0	Var	Laufzeit(Sek.)
4, 300	30.461607	0.394802	11.22
4, 200	30.447378	0.395367	3.59
3, 200	30.447378	0.395367	1.90
2, 200	30.447378	0.395369	0.80

Tabelle 4.2: Laufzeit der IM bei europäischen Optionen in Abh. von p und q

◇

Die korrekten Werte, die uns die NIM geliefert hat, waren: $V_0 = 30.472755$, $Var = 0.394276$. In Tabelle 4.2 erkennt man, dass die IM gegen diese Werte konvergiert, aber bei weitem nicht so effizient ist.

4.1.2 Numerische Untersuchungen

4.1.2.1 Festlegungen

Aufgrund der zahlreichen Eingabeparameter, die wir bei beiden Methoden haben, werden wir einige davon festsetzen. Die bevorstehenden Untersuchungen werden dementsprechend alle mit $S_0 = 1$ durchgeführt. Die nachfolgenden Sätze begründet diese Entscheidung.

Satz 4.3

Seien V_1 und V_2 europäische Optionen auf unterschiedliche Basiswerte mit derselben Laufzeit und $S = S(t)$. Die Gleichung

$$V_1(t, S, \cdot) = SV_2(t, 1, \cdot) \quad (4.16)$$

gilt, falls die Bedingung $K_2 = \frac{K_1}{S}$ erfüllt ist. •

Beweis:

Die Schreibweise wurde aus 2.3.2 übernommen. Sei $K_2 = \frac{K_1}{S}$. Für einen europäischen Call gilt:

$$\begin{aligned} V_1(t, S, \cdot) &= SF(d_1) - K_1 e^{-r(T-t)} F(d_2) = SF(d_1) - K_2 S e^{-r(T-t)} F(d_2) \\ &= S \left(F(d_1) - K_2 e^{-r(T-t)} F(d_2) \right) = SV_2(t, 1, \cdot). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Für einen europäischen Put gilt:

$$\begin{aligned} V_1(t, S, \cdot) &= S(F(d_1) - 1) - K_1 e^{-r(T-t)} (F(d_2) - 1) \\ &= S(F(d_1) - 1) - K_2 S e^{-r(T-t)} (F(d_2) - 1) \\ &= S \left((F(d_1) - 1) - K_2 e^{-r(T-t)} (F(d_2) - 1) \right) = SV_2(t, 1, \cdot). \end{aligned} \quad (4.18)$$

◦

Satz 4.4

Für den Erwartungswert einer europäischen Option mit zufälliger Volatilität gilt

$$E(V(t, S, \cdot)) = SE(V(t, 1, \cdot)) \quad (4.19)$$

und für die Varianz gilt

$$Var(V(t, S, \cdot)) = S^2 Var(V(t, 1, \cdot)). \quad (4.20)$$

•

Beweis:

Erwartungswert:

$$E(V(t, S, \cdot)) = E(SV(t, 1, \cdot)) = SE(V(t, 1, \cdot)).$$

Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}(V(t, S, \cdot)) &= E(V(t, S, \cdot)^2) - E(V(t, S, \cdot))^2 = E(S^2 V(t, 1, \cdot)^2) - E(SV(t, 1, \cdot))^2 \\ &= S^2 E(V(t, 1, \cdot)^2) - S^2 E(V(t, 1, \cdot))^2 = S^2 (E(V(t, 1, \cdot)^2) - E(V(t, 1, \cdot))^2) \\ &= S^2 \text{Var}(V(t, 1, \cdot)) \end{aligned}$$

◦

Die Gleichungen gelten natürlich auch für den Spezialfall $t = 0$. Der relative Fehler ϵ_{rel} , der durch die Verkürzung der PCE auf p und durch die Abschätzung der Gauß-Quadratur für den Erwartungswert und die Varianz entsteht, ist unabhängig von S_0 :

$$\begin{aligned} \epsilon_{rel}(E) &= \left| \frac{v_0(0, S_0) - E(V(0, S_0, \cdot))}{E(V(0, S_0, \cdot))} \right| = \left| \frac{S_0 v_0(0, 1) - S_0 E(V(0, 1, \cdot))}{S_0 E(V(0, 1, \cdot))} \right| \\ &= \left| \frac{v_0(0, 1) - E(V(0, 1, \cdot))}{E(V(0, 1, \cdot))} \right| \end{aligned} \quad (4.21)$$

und

$$\begin{aligned} \epsilon_{rel}(\text{Var}) &= \left| \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_i(0, S_0)^2 \langle \Psi_i^2 \rangle - \text{Var}(V(0, S_0, \cdot))}{\text{Var}(V(0, S_0, \cdot))} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_i(0, 1)^2 \langle \Psi_i^2 \rangle - \text{Var}(V(0, 1, \cdot))}{\sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(V(0, 1, \cdot))} \right| \end{aligned} \quad (4.22)$$

Den absoluten Fehler ϵ_{abs} erhält man für den Erwartungswert mittels

$$\epsilon_{abs}(E) = |v_0(t, S_0) - E(V(t, S_0, \cdot))| = S_0 |v_0(t, 1) - E(V(t, 1, \cdot))| \quad (4.23)$$

und bei der Varianz mittels

$$\epsilon_{abs}(\text{Var}) = S_0^2 \left| \sum_{i=1}^p v_i(t, 1)^2 \langle \Psi_i^2 \rangle - \text{Var}(V(t, 1, \cdot)) \right|. \quad (4.24)$$

Die Gleichungen beinhalten, dass der absolute Fehler bei dem Erwartungswert und bei der Varianz mit der Höhe des Basiswertes wächst. Hinsichtlich des Optionswertes genügt uns normalerweise eine Genauigkeit von $\epsilon_{abs}(E) = 10^{-2}$, da in den meisten Fällen auf diesem Niveau gehandelt wird. Bei einem hohen Kurs des Basiswertes (z.B. 10000) müssen wir die Berechnungen exakter (10^{-6}) durchführen. Bei der Varianz wird die Ungenauigkeit sogar noch verstärkt, da der Fehler mit S_0^2 multipliziert wird. Hier ist es allerdings nicht nötig, eine Fehlergenauigkeit von $\epsilon_{abs}(\text{Var}) = 10^{-2}$ vorauszusetzen, weshalb wir den relativen Fehler als Maßstab nehmen. In MATLAB rechnen wir mit einer Genauigkeit von 10^{-16} . Die exakten Werte für die Varianz und den Erwartungswert ermitteln wir in diesem Abschnitt mit $p = 10$ und $q = 100$. Der Fehler, der dabei entsteht

ist, wie wir noch sehen werden, kleiner als 10^{-16} . Deshalb können wir diese Werte als exakt annehmen.

Den Zinssatz belassen wir bei den europäischen Optionen auf $r = 0.1$, da wir im nächsten Kapitel darauf sowieso noch genauer eingehen werden. Ebenso können wir uns bei den Berechnungen auf eine Optionsart festlegen. Über die Put-Call Paritätsgleichung (2.3) kann der Wert für den nicht gewählten Typ alternativ schnell berechnet werden. Wir verwenden in der Folge immer einen Call. Für die Laufzeit gilt zunächst $T = 1$.

Klar ist nun, dass der Ausübungspreis K wegen Satz 4.3 angepasst werden muss. Das Verhältnis, in dem dieser zu dem Kurs des Basiswertes steht, ist generell nicht festgelegt. Wir beschränken uns allerdings auf Fälle, bei denen das Hinzuziehen der zufälligen Volatilität und die damit verbundene Anwendung der PCE besonders sinnvoll ist. Hierzu betrachten wir die Abbildung 4.1.

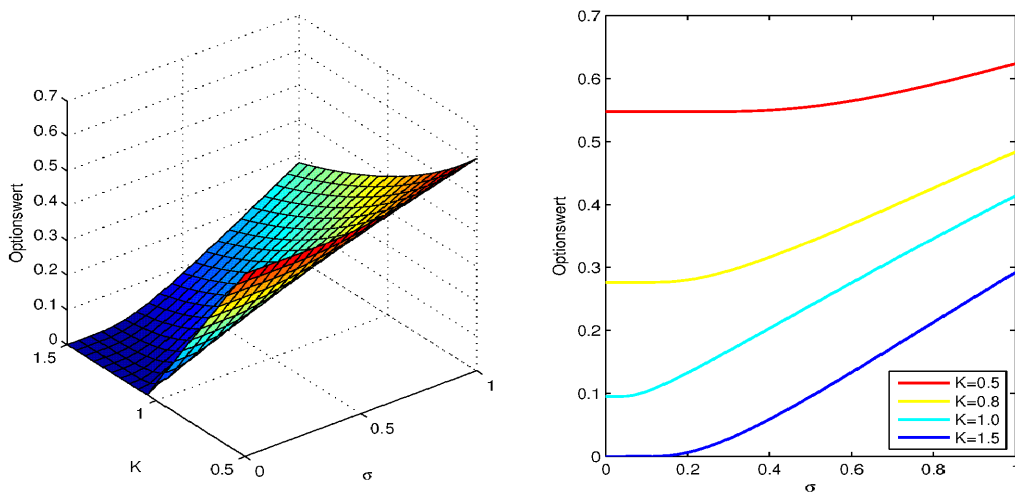


Abbildung 4.1: Optionswert von europäischen Optionen in Abh. von σ und K

Bei $K = 1$ ist der Verlauf des Graphen bereits ab einer Volatilität von ca. 0.1 fast linear. Die Unterschiede in

$$E(V(0, S_0, \sigma(\cdot))) - V(0, S_0, E(\sigma(\cdot))) \quad (4.25)$$

sind deshalb wahrscheinlich sehr gering. Führen wir beispielsweise eine Berechnung mit zufälliger Volatilität und Uniformer Verteilung mit dem Träger $\Omega = [0, 1]$ auf einem Intervall $I = [0.2, 0.4]$ (d.h. $a = 0.2$ und $b = 0.2$) mit der NIM durch, so unterscheidet sich der ermittelte Wert V_0 kaum von dem, wesentlich einfacher zu berechnenden, deterministischen Optionswert mit Volatilität $E(\sigma(\cdot)) = 0.3$:

- | | | |
|-----------------------------|---|-----------------------|
| 1. NIM | : | $V_0 = 0.167531,$ |
| 2. $E(\sigma(\cdot)) = 0.3$ | : | $V_0 = 0.167341,$ |
| Differenz | : | $0.000190,$ |
| rel. Differenz | : | $1.13 \cdot 10^{-3}.$ |

Dies ist bei $K = 0.8$ anders, da hier zwischen 0.2 und 0.4 eine Krümmung vorhanden ist:

- | | | |
|-----------------------------|---|-----------------------|
| 1. NIM | : | $V_0 = 0.295523,$ |
| 2. $E(\sigma(\cdot)) = 0.3$ | : | $V_0 = 0.294317,$ |
| Differenz | : | 0.001206 |
| rel. Differenz | : | $4.08 \cdot 10^{-3}.$ |

Für unsere folgenden Untersuchungen verwenden wir deshalb, falls nicht anders festgelegt, $K = 0.8$. Die Volatilität soll sich diesbezüglich hauptsächlich auf dem Intervall $I = [0.2, 0.4]$ befinden.

Wir legen noch zwei Standardbeispiele fest, an denen wir die Untersuchungen in diesem Abschnitt hauptsächlich durchführen werden:

1. $S = 1, K = 0.8, T = 1, r = 0.1, a = 0.2, b = 0.2$, Optionsart: Call, Verteilung: Uniform.
2. $S = 1, K = 0.8, T = 1, r = 0.1, a = 0.3, b = 0.05$, Optionsart: Call, Verteilung: Gauß.

Die Beispiele wurden dabei so gewählt, dass sich die Volatilität hauptsächlich auf dem Intervall $I = [0.2, 0.4]$ befindet. Dabei unterscheiden sich die Dichten der beiden Verteilungen relativ stark voneinander, so dass wir die Laufzeitabhängigkeit und die Fehleranalyse abhängig von der verwendeten Dichte besser untersuchen können.

4.1.2.2 Laufzeitverhalten der Methoden der polynomiellen Chaosexwicklung

Da die Laufzeit bei der NIM sehr klein ist, würde eine Laufzeituntersuchung bzgl. der Parameter p und q an dieser Stelle große Messungenauigkeiten nach sich ziehen. Die erhaltenen Ergebnisse wären in den meisten Fällen stark verzerrt und hätten nur bedingte Aussagekraft. Bei den asiatischen Optionen gehen wir auf diesen Sachverhalt genauer ein, da die NIM und die IM dort konkurrenzfähig sind und die Laufzeit bedeutend höher ist und somit auch besser untersucht werden kann.

4.1.2.3 Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaosexwicklung

Wir gehen nun ausführlich auf die Konvergenz der PCE ein. Es gelten die Festlegungen, die bereits getätigt wurden. Grundsätzlich hängt die Größe des Fehlers bei dem Erwartungswert, wie man aus dem Algorithmus der NIM auslesen kann, nicht von der Ordnung der PCE p ab. In Abbildung 4.2 wird dies veranschaulicht. Nun stellt sich allerdings noch die Frage, wie hoch q in Abhängigkeit von der Verteilung oder der Größe des Intervalls gewählt werden muss. Symbolisch verwenden wir bei unseren Untersuchungen

die Gauß-Verteilung und die Uniforme Verteilung, da hier die Träger und die Dichten extrem unterschiedlich sind und sich Unregelmäßigkeiten somit schnell aufzeigen würden. Für die beiden Standardbeispiele ergibt sich:

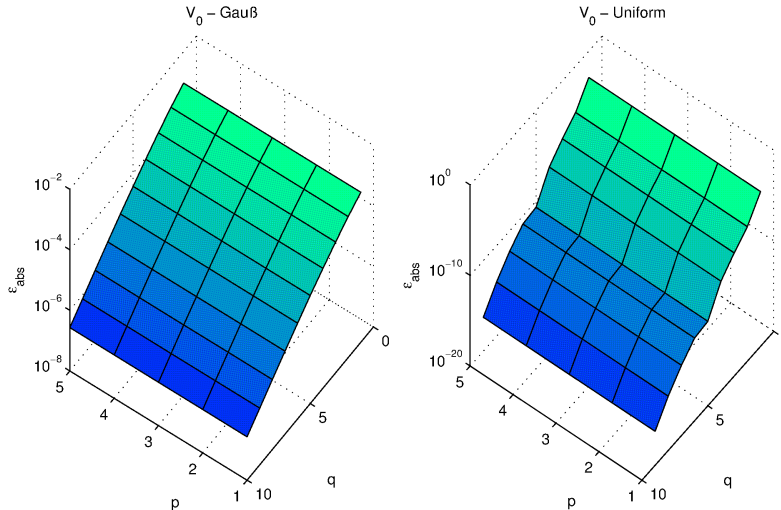


Abbildung 4.2: Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele in Abh. von p und q

Erwartungswert:

Verteilung/ q	2	3	5	10
$\epsilon_{abs}(E)$ - Gauß	$4.58 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-5}$	$2.69 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon_{abs}(E)$ - Uniform	$7.21 \cdot 10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$2.12 \cdot 10^{-11}$	$2.78 \cdot 10^{-16}$

Tabelle 4.3: Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele

Man kann deutlich erkennen, dass der Erwartungswert bei der Uniformen Verteilung wesentlich schneller konvergiert, obwohl sich bei beiden Verteilungen die zufällige Volatilität $\sigma(\omega)$ hauptsächlich auf dem selben Intervall befindet. In Abbildung 4.2 wird der Optionswert bei der Uniformen Verteilung bei $q = 10$ schon als exakt interpretiert. Es liegt die Vermutung nahe, dass sowohl die Größe des Intervalls als auch die Dichte der Verteilung eine wichtige Rolle bei der Genauigkeit der Gauß-Quadratur spielen. Dafür betrachten wir die Abschätzungsformel (vgl. [5]), die für die Gauß-Quadratur mit $f \in C^{2q+2}$ und $\tau \in [y_1, y_2]$ gilt:

$$\int_{y_1}^{y_2} f(\tau) - \sum_{i=1}^q f(\tau_i)w_i = \frac{\langle \Psi_{q+1}, \Psi_{q+1} \rangle}{(2q+2)!} \cdot \left\| \frac{d^{(2q+2)} f}{d\tau^{(2q+2)}} \right\|_{\infty} \quad (4.26)$$

Diese Gleichung impliziert, dass die Gauß-Quadratur mit q Stützstellen Polynome vom

Grad $\leq 2q + 1$ exakt integriert. Approximieren wir den Nenner aus der Gleichung

$$v_i(0, S_0) = \frac{\int_{\omega \in \Omega} V(0, S_0, \omega) \Psi_i(\xi(\omega)) \rho(\xi(\omega)) d\xi}{\int_{\omega \in \Omega} \Psi_i(\xi(\omega))^2 \rho(\xi(\omega)) d\xi},$$

so ist der Fehler, der bei der Gauß-Quadratur für die Uniforme Verteilung ($\rho = \frac{1}{2}$) gemacht wird, bereits bei $q = 1$ gleich 0, da die Legendre-Polynome $L_{e_0} = \Psi_0$ Grad 1 haben und der Grad von Ψ_0^2 auch 1 beträgt. Bei der Gauß-Verteilung geht $\frac{d^{(2q+2)} f}{d\tau^{(2q+2)}}$ nie exakt gegen 0, weil die Dichte die Exponentialfunktion enthält und diese beim Differenzieren nicht verschwindet. Der Fehler ist folglich größer. Im Zähler gelten die gleichen Argumente, jedoch ist da die Abschätzung wegen V und der damit verbundenen Nichtlinearität komplizierter. Aufgrund der eben aufgezählten Punkte benötigen wir bei der Gauß-Verteilung gegenüber der Uniformen Verteilung mehr Stützstellen, um den gleichen absoluten Fehler beim Erwartungswert zu erhalten.

Bei der Varianz tragen beide Werte p und q zur Genauigkeit bei. In den Abbildung 4.3 und 4.4 wird deutlich, dass man bei der Berechnung der Varianz die beiden Parameter nicht einfach beliebig hoch wählen darf.

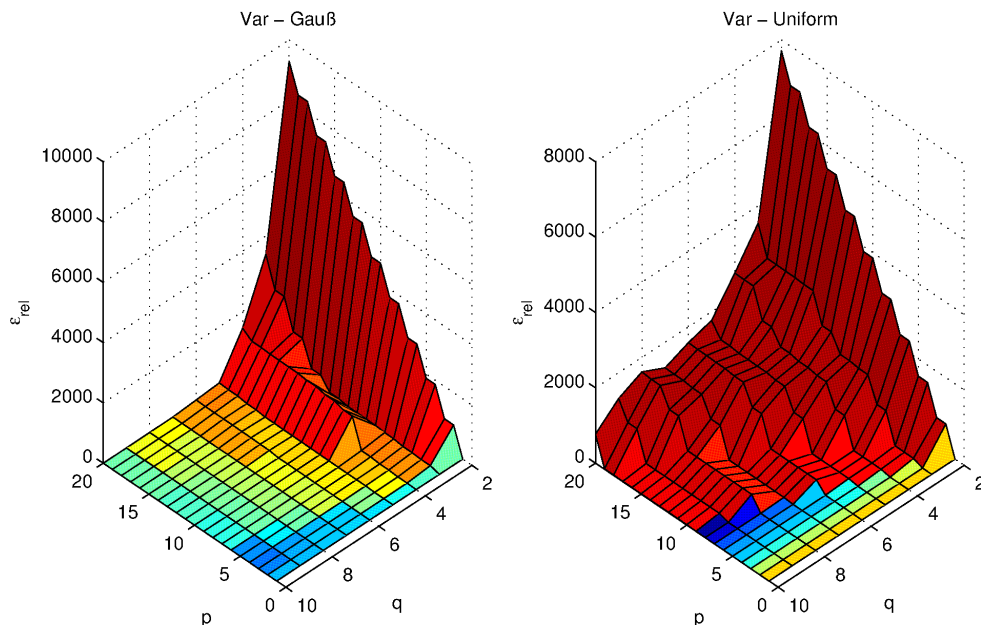


Abbildung 4.3: Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q

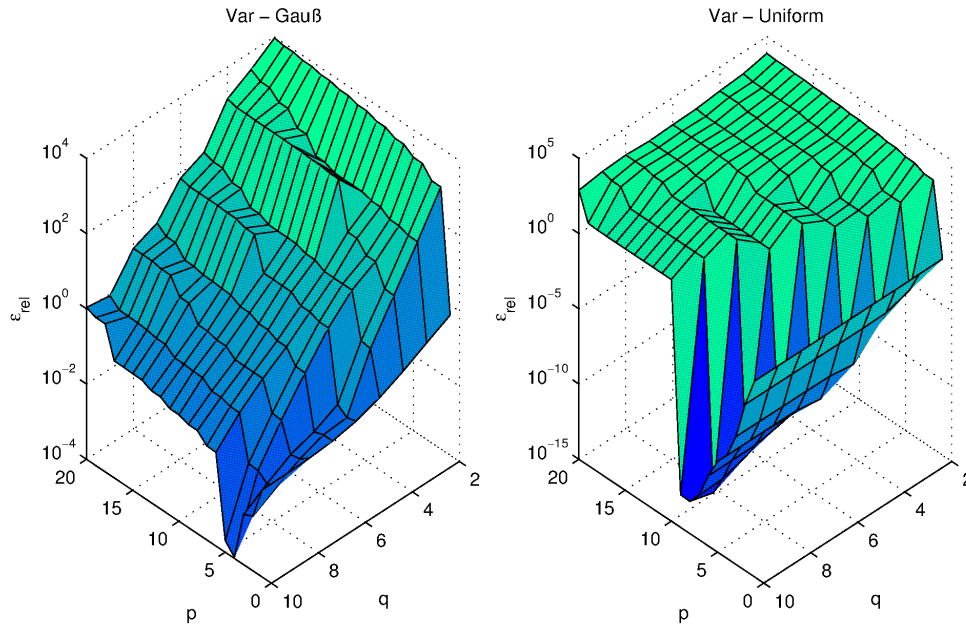


Abbildung 4.4: Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q mit logarithmischer Skala

Problematisch wird es, speziell bei der Uniformen Verteilung, falls man $p > q$ setzt. Die großen Fehler resultieren daraus, dass die Gauß-Quadratur lediglich Integrale über Polynome mit $\text{Grad} \leq 2q+1$ exakt integriert. Dazu blicken wir nochmal auf die Gleichung

$$v_i(0, S_0) = \frac{\int_{\omega \in \Omega} V(0, S_0, \omega) \Psi_i(\xi(\omega)) \rho(\xi(\omega)) d\xi}{\int_{\omega \in \Omega} \Psi_i(\xi(\omega))^2 \rho(\xi(\omega)) d\xi}.$$

Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass der maximale Grad der Legendre-Polynome, die bei der Uniformen Verteilung von der PCE verwendet werden, p ist. Da wir im Nenner das Quadrat bilden und die Dichte $\rho = \frac{1}{2}$ ist, hat das Polynom Grad $2p$. Bei der Uniformen Verteilung heißt das also, dass für eine exakte Berechnung aller Koeffizienten $p \leq q$ gelten muss. Wir erhalten somit bei den selben Werten von q für kleinere Werte von p zum Teil bessere Approximationen, weil die hohen Koeffizienten sonst nicht mehr korrekt abgeschätzt werden können. Bei der Gauß-Verteilung wird dieser Sachverhalt durch die Dichte etwas relativiert. Nichtsdestotrotz halten wir hier auch $p \ll q$ in der Folge ein.

Abbildung 4.5 zeigt nochmal die Konvergenz für besser gewählte Werte von p und q auf. Dabei kann man erkennen, dass auch die Varianz bei richtig gewählten Werten bei der Uniformen Verteilung schneller konvergiert, als bei der Gauß-Verteilung.

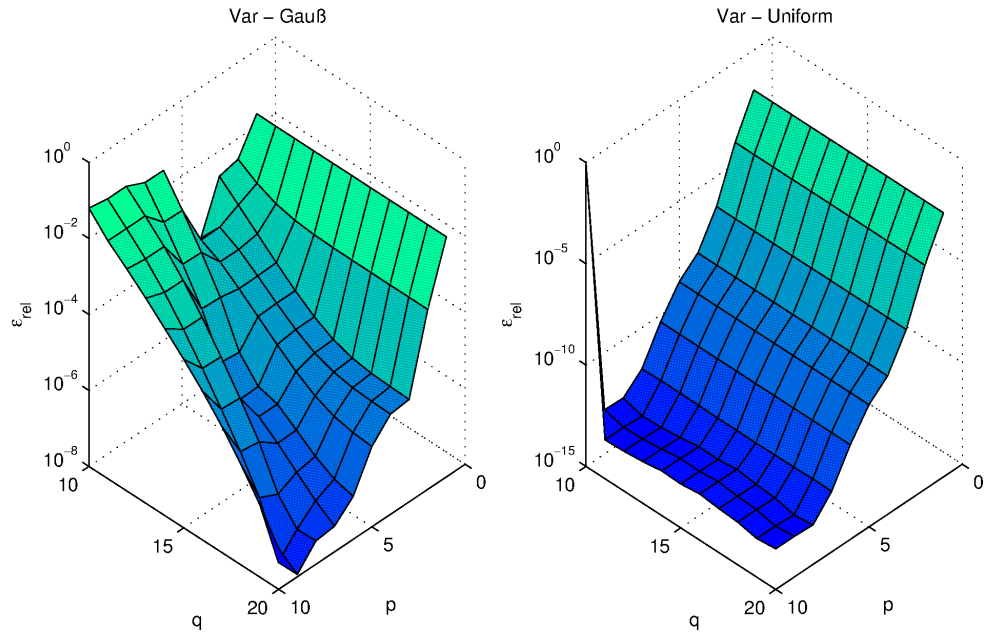


Abbildung 4.5: Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und q auf kleinerem Intervall

Jetzt untersuchen wir die Abhängigkeit der Konvergenz von der Größe des Intervalls I . Wir verwenden das Standardbeispiel 1 mit der Ordnung der PCE $p = 4$. Das Intervall wird von $I = [0.2, 0.4]$ sukzessive auf $I = [0.1, 0.5]$ vergrößert. In Abbildung 4.6 kann man gut erkennen, dass bei einer wachsenden Intervallgröße mehr Stützstellen nötig sind, um die gleiche Genauigkeit zu erlangen.

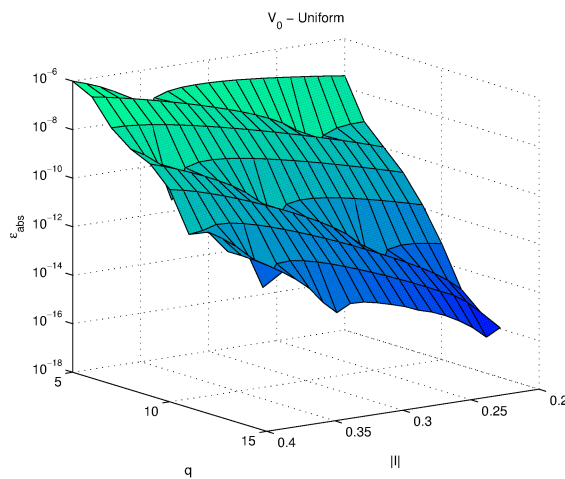


Abbildung 4.6: Absoluter Fehler des Erwartungswertes in Abh. der Intervallgröße

Wir haben durch die bisherigen Versuche gezeigt, dass eine generelle Aussage über die Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur nicht möglich ist. Diese hängt im wesentlichen von der Verteilung, der Größe des Intervalls und von der Höhe des Basiswertes ab. In diesem Kapitel ist die Wahl von q aufgrund der geringen Laufzeit eher unwichtig und kann ohne Probleme genügend hoch gewählt werden. Bei den asiatischen Optionen werden wir aber sehen, dass q entscheidend zur Laufzeit beiträgt.

Abschließend gehen wir auf das Konvergenzverhalten der Varianz in Abhängigkeit von p ein. Dazu wählen wir q groß genug, um die Koeffizienten v_i mit $i = 0, \dots, p$ exakt zu approximieren ($q = 100$). Um einen universelleren Eindruck zu erlangen, streichen wir vorübergehend die Vorgaben $K = 0.8$ und $T = 1$. Die restlichen Parameter wurden nach Standardbeispiel 1 gewählt.

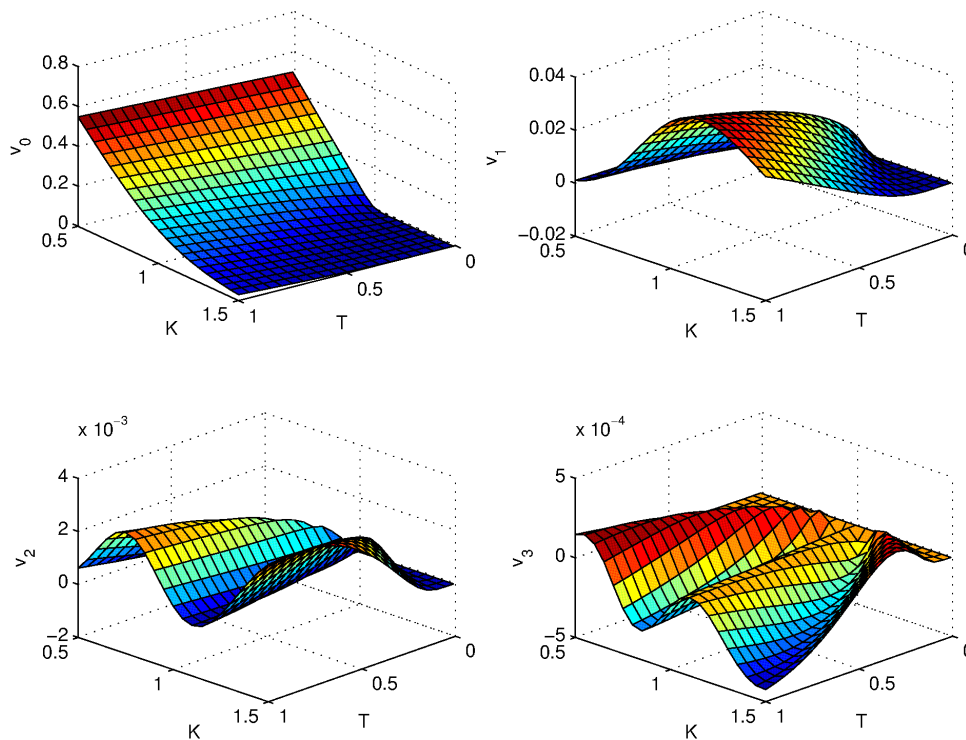


Abbildung 4.7: Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T

Aus Abbildung 4.7 kann man die schnelle Konvergenz der PCE bereits vermuten. Auf dem dargestellten Bereich sind die Maximalwerte der Koeffizienten und der Summanden bei der Varianz:

Koeffizienten	v_1	v_2	v_3
$\max v_i $	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$1.64 \cdot 10^{-4}$
$\max v_i ^2 \langle \Psi_i^2 \rangle$	$5.29 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-6}$	$3.86 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 4.4: Koeffizienten und Summanden für Standardbeispiel 1

Im schlechtesten Fall heißt das also, dass sich die Varianz bei einer Erhöhung der Ordnung der PCE von $p = 2$ auf $p = 3$ nur noch im Bereich 10^{-9} verändert, was für unserer Berechnungen im Normalfall bereits ausreichend ist. Die Werte bei Standardbeispiel 2 sind ähnlich, weshalb diese hier nicht mehr explizit angegeben werden. An dieser Stelle wurden mehrere Versuchsreihen durchgeführt, wobei auch die Parameter a und b verändert wurden. Die hohe Konvergenzrate der PCE änderte sich aber nur bedingt. In [24] wird auf die Konvergenz mehrerer Verteilungen genauer eingegangen.

Nach diesen Untersuchungen wird deutlich, dass es im allgemeinen nicht leicht ist, die perfekte Wahl für p und q zu finden, da diese abhängig von der Verteilung, dem Verhältnis von p zu q , der Intervallgröße $|I|$ und natürlich der gewünschten Genauigkeit ist. Generell gilt aber, dass eine relative geringe Wahl der Ordnung (ca. $p = 2 - p = 4$) aufgrund der exponentiellen Konvergenz bereits ausreicht, um hinreichend gute Ergebnisse zu erhalten. Mit der richtigen Anzahl an Stützstellen ($p \ll q$) können dann exzellente Konvergenzraten erreicht werden.

4.1.2.4 Vergleich mit der Monte-Carlo Methode

Wie wir bereits gezeigt haben, konvergiert die NIM in kurzer Zeit. Um dies zu verdeutlichen, ziehen wir nun die MCM aus Kapitel 2 heran. Das Laufzeitverhalten bei der MCM ist für genügend große M fast linear. Betrachte dazu Tabelle 4.5.

M	10^3	10^4	10^5	10^6	$2 \cdot 10^6$
Laufzeit	0.001	0.006	0.039	0.2150	0.4132
$\frac{\text{Laufzeit}}{M}$	$9.0 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 4.5: Laufzeiten der MCM für Standardbeispiel 2

In Abbildung 2.6 haben wir gesehen, dass die MCM zwar gegen den korrekten Wert konvergiert, dafür aber fast immer sehr viele Zufallszahlen gezogen werden müssen. Abbildung 4.8 zeigt den Optionswert und die Varianz des Standardbeispiels 2 für $M = [1, 10^5]$. Der exakte Wert wurde mit der PCE für $q = 20$ und $p = 4$ ermittelt. Die Konvergenz der MCM gegen diesen Wert ist klar zu erkennen. Die Laufzeit der NIM betrug in diesem Fall ca. 0.001 Sekunden, d.h. bereits ab $M = 10^3$ ist die MCM langsamer, obwohl der Fehler in den meisten Fällen erheblich größer ist.

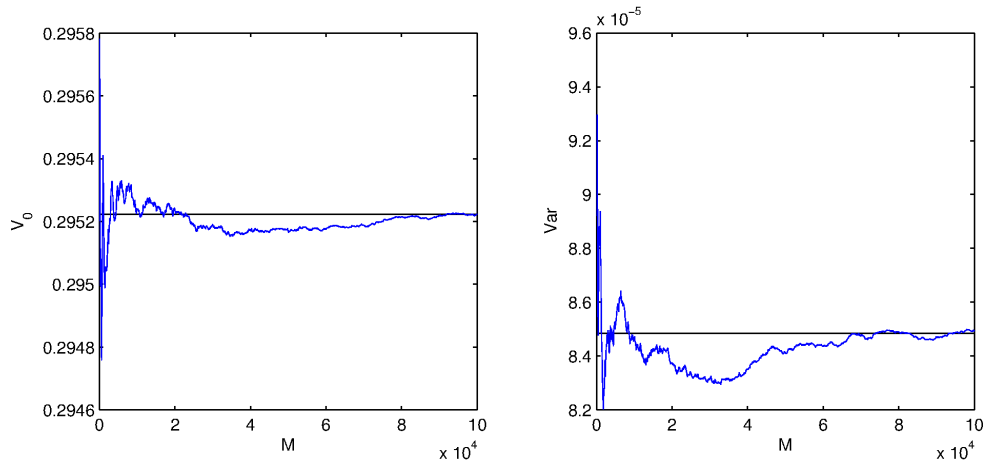


Abbildung 4.8: MCM für Standardbeispiel 1

Generell kann man die MCM für europäische Optionen mit zufälliger Volatilität aufgrund der geringen Laufzeit auch in der Praxis anwenden. Dennoch ist die NIM im Regelfall wesentlich effizienter und sollte deshalb bevorzugt verwendet werden. Bei den asiatischen Optionen hingegen ist der Laufzeitunterschied im Vergleich zu den *beiden* Methoden der PCE wesentlich größer.

4.2 Asiatische Optionen

Grundsätzlich werden wir bei den asiatischen Optionen genauso vorgehen wie bei den europäischen, d.h. wir beschreiben zuerst die zwei angegebenen Verfahren der PCE mit Bezug auf die zufällige Volatilität und gehen danach näher auf die Effizienz ein.

Als Eingabeparameter benötigen wir bei beiden Methoden:

- S_0 : Basiswert zur Zeit $t = 0$
- T : Laufzeit der Option
- r : sicherer Zins
- a : Faktor aus g
- b : Faktor aus g
- Verteilung: Eine der acht Verteilungen
- p : Ordnung PCE
- q : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur
- L : Anzahl der Linien bei der Linienmethode

Der ursprünglich deterministische Optionswert $V(t, S(t), I(t))$ ist, ähnlich wie bei den europäischen Optionen, wegen der Zufallsvariable $\sigma(\omega)$ natürlich selbst vom Zufall abhängig und ist deshalb ein stochastischer Prozess mit

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (4.27)$$

In Abschnitt 2.4 haben wir aber bereits gezeigt, dass bei der Lösung der partiellen DGL die Transformation $V(t, S(t), I(t)) = S(t)u(t, y(t))$ vorteilhaft ist. Deshalb verwenden wir den stochastischen Prozess

$$u : [0, T] \times [0, C] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (4.28)$$

auf dem bereits eingeschränkten Bereich für y (siehe Abschnitt 2.4.2). Auch hier setzen wir wieder, um die PCE anwenden zu können, endliche Varianz von u , also $u \in L_2$ voraus. Die PCE lässt sich als

$$u(t, y(t), \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t, y(t)) \Psi_i(\xi) \quad (4.29)$$

beschreiben, wobei v_i die Koeffizienten der PCE und Ψ_i die OP bzgl. der ausgewählten Verteilung sind. Grundsätzlich berechnen wir o.B.d.A. den Optionswert zur Zeit $t = 0$, d.h.

$$u(0, y(0), \cdot) = u(0, 0, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(0, 0) \Psi_i(\xi). \quad (4.30)$$

Der faire Optionspreis ergibt sich durch die Berechnung des Erwartungswertes

$$V_0 = E(V(0, S_0, \cdot)) = S_0 E(u(0, 0, \cdot)). \quad (4.31)$$

Für die Varianz folgt

$$Var = (Var(V(0, S_0, \cdot))) = S_0^2 (Var(u(0, 0, \cdot))). \quad (4.32)$$

4.2.1 Anwendung der polynomiellen Chaonentwicklung

4.2.1.1 Nicht-intrusive Methode

Für asiatische Optionen ändert sich die NIM im Vergleich zu den europäischen von der Art der Ausführung nur geringfügig. Der Hauptunterschied liegt bei der Berechnung der deterministischen Optionswerte V bzw. u . Diese erhält man bei den asiatische Wertpapieren durch numerische Berechnung mit der Linienmethode (siehe Abschnitt 2.4.2). Deshalb benötigen wir bei den Eingabeparametern noch zusätzlich die Anzahl der Linien L , die entscheidenden Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung hat. Mit $u_j = u(0, 0, \sigma_j)$ bezeichnen wir den Wert mit der Volatilität $\sigma_j = g(x_j) = a + bx_j$ für $j = 1, \dots, q$.

Algorithmus: NIM für asiatische Optionen mit zufälliger Volatilität

0. Eingabewerte: S_0, T, r, a, b , Optionsart, Verteilung, p, q, L .
1. Berechne die Stützstellen x_j und die Gewichte w_j bzgl. der ausgewählten Verteilung für $j = 1, \dots, q$ der Gauß-Quadratur mit dem Golub-Welsch Algorithmus.
2. Bestimme die Funktion $\sigma_j = g(x_j) = a + bx_j$ und die Dichte $\rho_j = \rho(x_j)$ für $j = 1, \dots, q$.
3. Ermittle die OP $\Psi_{i_j} = \Psi_i(x_j)$ über die Drei-Term-Rekursionsgleichung für $i = 0, \dots, p$ und $j = 1, \dots, q$.
4. Berechne mit der *Linienmethode aus Abschnitt 2.4.2* q Werte $u_j = u(0, 0, \sigma_j)$ für $j = 1, \dots, q$.
5. Approximiere die Koeffizienten durch

$$v_i \approx \frac{\sum_{j=1}^q u_j \Psi_{i_j} \rho_j w_j}{\sum_{j=1}^q \Psi_{i_j}^2 \rho_j w_j}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (4.33)$$

6. Gib den approximierten Erwartungswert $S_0 v_0$ und die approximierte Varianz

$$Var \approx S_0^2 \left(\sum_{i=1}^p v_i^2 \left(\sum_{j=1}^q \Psi_{i_j}^2 \rho_j w_j \right) \right) \quad (4.34)$$

aus.

Die Laufzeit der NIM ist bei den asiatischen Optionsscheinen wesentlich höher als bei den europäischen. Dies liegt natürlich am 4. Schritt des Algorithmus, da dieser nun nicht mehr analytisch berechnet werden kann. Es muss letztendlich q -Mal ein System gewöhnlicher DGLen mit L Gleichungen gelöst werden. Der Zeitaufwand für die restlichen Schritte kann, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, eher vernachlässigt werden. Eine nachträgliche Erhöhung der Ordnung der PCE ist aber genauso schnell durchführbar, wie bei den europäischen Optionen, da sich die Schritte 3, 5 und 6 nicht ändern. Das Hauptproblem ist also die schnelle und effiziente Lösung der DGLen. Dabei spielen die Anzahl der Linien und die Fehlereinstellungen des Löser `ode23s` eine wichtige Rolle.

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm `as_pc_ni.m` numerisch umgesetzt.

4.2.1.2 Intrusive Methode

Die Vorgehensweise bei der Galerkin-Methode für asiatische Optionen unterscheidet sich nur geringfügig von dem bei europäischen Optionen. Bei dem hiesigen Optionstyp ist die IM aber von der Laufzeit und vom Konvergenzverhalten im Vergleich zu der NIM für asiatische Optionen konkurrenzfähig, weshalb wir sie ausführlicher beschreiben.

Zur Erinnerung: Um asiatische Optionswerte effizient zu berechnen, mussten wir zuerst die partielle DGL

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - ry) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (4.35)$$

mit der Endwert

$$u(T, y) = (1 - y/T)^+ \quad (4.36)$$

lösen. Der Optionswert ergibt sich dann aus

$$V(0, S_0, 0) = S_0 u(0, 0). \quad (4.37)$$

Wir ersetzen σ durch g (siehe (2.9)). Zudem verwenden wir die verkürzte PCE

$$u(t, y(t), \cdot) \approx \sum_{i=0}^p v_i(t, y(t)) \Psi_i(\xi). \quad (4.38)$$

Dadurch erhalten wir

$$\sum_{i=0}^p \frac{\partial v_i}{\partial t} \Psi_i + (1 - ry) \sum_{i=0}^p \frac{\partial v_i}{\partial y} \Psi_i + \frac{y^2}{2} \sum_{i=0}^p \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} g^2 \Psi_i = \epsilon(p, u). \quad (4.39)$$

Nun wenden wir das Galerkin-Verfahren an und fordern die Fehlerorthogonalität. Daraus folgt die Gleichung

$$\langle \epsilon(p, u) \Psi_l(\xi) \rangle = 0, \quad l = 0, \dots, p. \quad (4.40)$$

Wegen der Orthogonalitätsbedingung der OP erhalten wir

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} \langle \Psi_l^2 \rangle + (1 - ry) \frac{\partial v_l}{\partial y} \langle \Psi_l^2 \rangle + \frac{y^2}{2} \sum_{i=0}^p \langle g^2 \Psi_i \Psi_l \rangle \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (4.41)$$

oder

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + (1 - ry) \frac{\partial v_l}{\partial y} + \frac{y^2}{2} \sum_{i=0}^p \frac{\langle g^2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (4.42)$$

für $l = 0, \dots, p$. Der stochastische Anteil, der sich auf den letzten Term beschränkt, verschwindet durch die Berechnung der inneren Produkte. Deswegen wird aus der stochastischen partiellen DGL (4.39) ein System partieller DGLen. Die Koeffizienten, die man erhält, sind aber lediglich Approximationen, da man die exakten Werte nur durch Einsetzen der unendliche Summe erhalten würde. Darauf gehen wir bei den numerischen

Untersuchungen genauer ein. Wir führen an dieser Stelle die Matrix $B \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ mit

$$B_{li} = \frac{\langle g^2 \Psi_i, \Psi_j \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} \quad (4.43)$$

für $i = 0, \dots, p$ und $l = 0, \dots, p$ ein. Sie kann für unsere festgelegten Verteilungen analytisch berechnet werden. Wir greifen aber trotzdem auf numerische Hilfsmittel (Gauß-Quadratur) zurück, da wir den Nenner aus (4.43) ohnehin bei der Ermittlung der Varianz berechnen müssten. Somit ist der zusätzliche Aufwand gering. Jetzt ist noch eine Anpassung der Randbedingungen, ähnlich wie in Abschnitt 2.4 nötig, da wir eine stochastische partielle DGL in ein System partieller DGLen transformiert haben. Für $y = 0$ (siehe (2.51)) ergibt sich

$$\frac{\partial v_l}{\partial t}(t, 0) = -\frac{\partial v_l}{\partial x}(t, 0) \approx -\frac{1}{2h}(-3v_l(t, y_0) + 4v_l(t, y_1) - v_l(t, y_2)), \quad t \in [0, T], \quad l = 0, \dots, p. \quad (4.44)$$

Ähnlich passen wir die zweite Randbedingung (2.52) an:

$$v_l(t, C) = 0, \quad t \in [0, T], \quad l = 0, \dots, p. \quad (4.45)$$

Bei der Auszahlungsfunktion ist aber Vorsicht geboten. Da diese sich lediglich auf den Optionswert am Ende der Laufzeit bezieht, darf sie auch nur auf die dafür notwendigen Koeffizienten, in unserem Fall v_0 , angewendet werden:

$$v_0(T, y) = (1 - y/T)^+, \quad v_l(T, y) = 0, \quad l = 1, \dots, p. \quad (4.46)$$

Für die Lösung dieses Systems verwenden wir die Linienmethode aus Abschnitt 2.4. Eine Anpassung ist aber erforderlich. Wie bereits bekannt ist, wird bei der Linienmethode eine partielle DGL in ein System gewöhnlicher DGLen umgewandelt. Da wir bei der IM für asiatische Optionen jedoch bereits ein *System* von $p + 1$ partiellen DGLen haben, erhalten wir letztendlich ein System gewöhnlicher DGL mit $L(p + 1)$ Gleichungen. Um dies mathematisch möglichst einfach definieren zu können, führen wir die Hilfsvariable $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{L(p+1)}$ mit

$$z_{l,j}(t) = v_l(t, y_j), \quad t \in [0, T], \quad l = 0, \dots, p, \quad j = 0, \dots, L - 1 \quad (4.47)$$

ein. Wir legen für z die Anordnung

$$z := (z_{0,0}, z_{1,0}, \dots, z_{p,0}, z_{0,1}, \dots, z_{p,L-2}, z_{p,L-1}) \quad (4.48)$$

fest. Die Matrix A (siehe (2.57)) spalten wir in zwei Matrizen auf. Wir erstellen mit

$$\alpha_j := 1 - ry_j, \quad (4.49)$$

$$\beta_j := -y_j^2 \quad (4.50)$$

für $j = 1, \dots, L - 1$ bzgl. den beiden Differenzenquotienten (siehe (2.47) und (2.48)):

$$A_1 = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & & & & \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & & 0 & & \\ & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \alpha_{L-2} & 0 & -\alpha_{L-2} & \\ & & & & +\alpha_{L-1} & 0 & \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

$$A_2 = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ \beta_1 & -2\beta_1 & \beta_1 & & 0 & & \\ & \beta_2 & -2\beta_2 & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \beta_{L-2} & -2\beta_{L-2} & \beta_{L-2} & \\ & & & & \beta_{L-1} & -2\beta_{L-1} & \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Mit A_1 , A_2 und z können wir durch Anwendung des Kronecker-Produktes das System

$$\frac{d}{dt}z = (A_1 \otimes I + A_2 \otimes B)z \quad (4.53)$$

aufstellen, welches unser Problem mit den gegebenen Endwerten (4.46) löst. Mit $I \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ bezeichnen wir die Einheitsmatrix. Die Koeffizienten der PCE findet man in z :

$$v_l(0, 0) = z_{l,0} \quad (4.54)$$

für $l = 0, \dots, p$.

Algorithmus: IM für asiatische Optionen mit zufälliger Volatilität

0. Eingabewerte: S_0, T, r, a, b , Verteilung, p, q, L .
1. Berechne die Stützstellen x_j und die Gewichte w_j bzgl. der ausgewählten Verteilung für $j = 1, \dots, q$ der Gauß-Quadratur mit dem Golub-Welsch Algorithmus.
2. Bestimme die Funktion $g(x_j) = a + bx_j$ und die Dichte $\rho_j = \rho(x_j)$ für $j = 1 \dots, q$.
3. Ermittle die OP $\Psi_{i_j} = \Psi_i(x_j)$ über die Drei-Term-Rekursionsgleichung für $i = 0, \dots, p$ und $j = 1 \dots, q$.
4. Berechne die Matrix B (4.43) mit der Gauß-Quadratur.
5. Bestimme die Matrizen A_1 (4.51) und A_2 (4.52).

6. Verwende die Linienmethode um das System gewöhnlicher DGLen $\frac{d}{dt}z = (A_1 \otimes I + A_2 \otimes B)z$ mit dem Endwert (4.46) zu lösen.
7. Lese die approximierten Koeffizienten mit Formel (4.54) aus.
8. Gib den approximierten Erwartungswert S_0v_0 und die approximierte Varianz

$$Var \approx S_0^2 \left(\sum_{i=1}^p v_i \left(\sum_{j=1}^q w_j \Psi_{i_j}^2 \rho_j \right) \right) \quad (4.55)$$

aus.

Die Abspeicherung der Matrizen A_1 und A_2 erfolgt in MATLAB erneut mit `sparse` und `diag`. Den Löser `ode23s` können wir weiter verwenden. Dazu müssen wir das ursprüngliche Endwertproblem wie in Abschnitt 2.4.2 in ein Anfangswertproblem umwandeln.

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm `eu_pc_i.m` numerisch umgesetzt.

4.2.2 Numerische Untersuchungen

4.2.2.1 Festlegungen

Wir beschränken die Wahl von S_0 , aus den selben Gründen wie bei den europäischen Optionen, auf $S_0 = 1$. Aus der Umformung der DGL wissen wir, dass

$$E(V(0, S_0, 0, \cdot)) = E(S_0 u(0, 0, \cdot)) = S_0 E(u(0, 0, \cdot)) \quad (4.56)$$

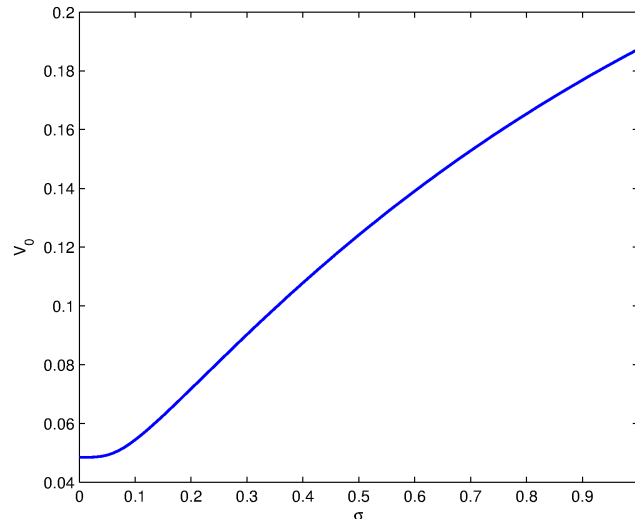
und

$$Var(V(0, S_0, 0, \cdot)) = Var(S_0 u(0, 0, \cdot)) = S_0^2 Var(u(0, 0, \cdot)) \quad (4.57)$$

gilt. Den Zinssatz belassen wir auf $r = 0.1$ und die Zeit T , falls nicht anders bestimmt, bei $T = 1$. Um die Wahl des Bereichs für die zufällige Volatilität festzulegen, betrachten wir Abbildung 4.9. Man kann fast auf dem kompletten Bereich eine leichte Krümmung erkennen, weshalb die Differenz

$$E(V(0, S_0, 0, \sigma(\cdot))) - V(0, S_0, 0, E(\sigma(\cdot))) \quad (4.58)$$

nicht in der Nähe von 0 ist und man somit durch die PCE neue Informationen erhält. Wir verwenden in der Folge $I = [0.3, 0.5]$.

Abbildung 4.9: Optionswert bei asiatischen Optionen in Abh. von σ

Bei den Fehleruntersuchungen gehen wir genauso wie bei den europäischen Optionen vor, d.h. bei dem Erwartungswert betrachten wir den absoluten und bei der Varianz den relativen Fehler. Wir haben bei den asiatischen Optionen drei Fehlerquellen:

1. Fehler, der durch Gauß-Quadratur verursacht wird.
2. Fehler, der durch Verkürzung der PCE entsteht.
3. Fehler, der bei der numerischen Lösung der DGL entsteht.

Im Endeffekt interessiert uns natürlich der Gesamtfehler. Deshalb ist es wichtig, *alle* drei Fehler zu minimieren.

Wir definieren auch bei den asiatischen Optionsscheinen zwei Standardbeispiele:

1. $S_0 = 1$, $r = 0.1$, $T = 1$, $a = 0.3$, $b = 0.2$, Verteilung: Uniform.
2. $S_0 = 1$, $r = 0.1$, $T = 1$, $a = 0.4$, $b = 0.05$, Verteilung: Gauß.

Bei beiden Beispielen wurden die Parameter a und b so gewählt, dass sich die Volatilität hauptsächlich auf dem Intervall $I = [0.3, 0.5]$ befindet.

4.2.2.2 Laufzeitverhalten der Methoden der polynomiellen Chaosesentwicklung

Bevor wir uns näher mit Fehleruntersuchungen befassen, gehen wir bei den asiatischen Optionen auf einige essentielle Punkte genauer ein. Dies betrifft vor allem die Abhängigkeit der Laufzeit von den einzelnen Faktoren p , q und L bei den Methoden der PCE. Diesbezüglich betrachten wir eine Versuchsreihe, die uns bei dem Grundverständnis behilflich sein wird und symbolisch für andere Eingabewerte aufgefasst werden kann. Dabei

halten wir stets zwei der drei Eingabeparameter p , q und L fest, verändern den dritten und vergleichen die Unterschiede in der Laufzeit. Es sollte aber erwähnt werden, dass die NIM und die IM unterschiedlich schnell konvergieren, d.h. falls man p , q und L bei beiden Methode gleich wählt, so ergeben sich durchaus unterschiedlich große Fehler.

Versuchsreihe:

Eingabewerte: Standardbeispiel 2.

1) $p = 4$ und $L = 200$:

Methode/ q	5	10	15	50
NIM	0.32	0.62	0.97	6.50
IM	6.64	5.85	6.00	6.07

Tabelle 4.6: Laufzeitverhalten in Abh. von q

Man kann deutlich erkennen, dass die Anzahl der Stützstellen fast keine Auswirkung auf die Laufzeit der IM hat, da die Hauptschwierigkeit in der Berechnung des Systems gewöhnlicher DGLen mit $L(p + 1)$ Gleichungen liegt. Die höhere Laufzeit bei $q = 5$ resultiert aus der Ungenauigkeit der Gauß-Quadratur bei der Berechnung der Matrix B . Wir lösen mit weniger Stützstellen praktisch ein anderes System, welches nicht zu Vergleichszwecken herangezogen werden kann. Bei der NIM wird zunächst ein linearer Anstieg der Laufzeit deutlich, was auch zu erwarten war. Für sehr hohe Werte von q ergibt sich aber ein progressiver Anstieg, welcher wahrscheinlich auf die Rechnerarchitektur zurückzuführen ist.

2) $q = 15$ und $L = 200$:

Methode/ p	1	2	3	4
NIM	0.97	0.97	0.97	0.97
IM	0.66	1.74	3.82	5.94

Tabelle 4.7: Laufzeitverhalten in Abh. von p

Bei der Abhängigkeit der Laufzeit der einzelnen Methoden von der Ordnung der PCE p ist im Vergleich zu der Abhängigkeit von q genau das gegenteilige Verhalten zu sehen. Auf die Laufzeit der NIM bei asiatischen Optionen hat p fast keine Auswirkungen. Die IM wächst progressiv an.

3) $p = 4$ und $q = 15$:

Methode/ L	100	200	300	400
NIM	0.35	1.03	3.51	7.08
IM	1.04	6.37	19.65	41.90

Tabelle 4.8: Laufzeitverhalten in Abh. von L

Die Anzahl der Linien L wirkt sich auf die Laufzeit beider Methoden progressiv aus. Sie sollte demnach nicht zu hoch gewählt werden. Wir verwenden in der Folge $L = 200$, da man damit bereits relativ exakte Ergebnisse erhält (siehe Abbildung 4.10). Falls wir noch genauere Werte benötigen, erhöhen wir die Fehlertoleranzen des Lölers `ode23s`. Dieses Vorgehen ist nach etlichen durchgeführten Versuchen, die nicht alle explizit angegeben werden, effizienter.

In den nächsten Abschnitten, in denen wir die Methoden vergleichen, werden wir bei der NIM die Ordnung der PCE und bei der IM die Anzahl der Stützstellen hinreichend hoch wählen ($p = 4$ bzw. $q = 50$).

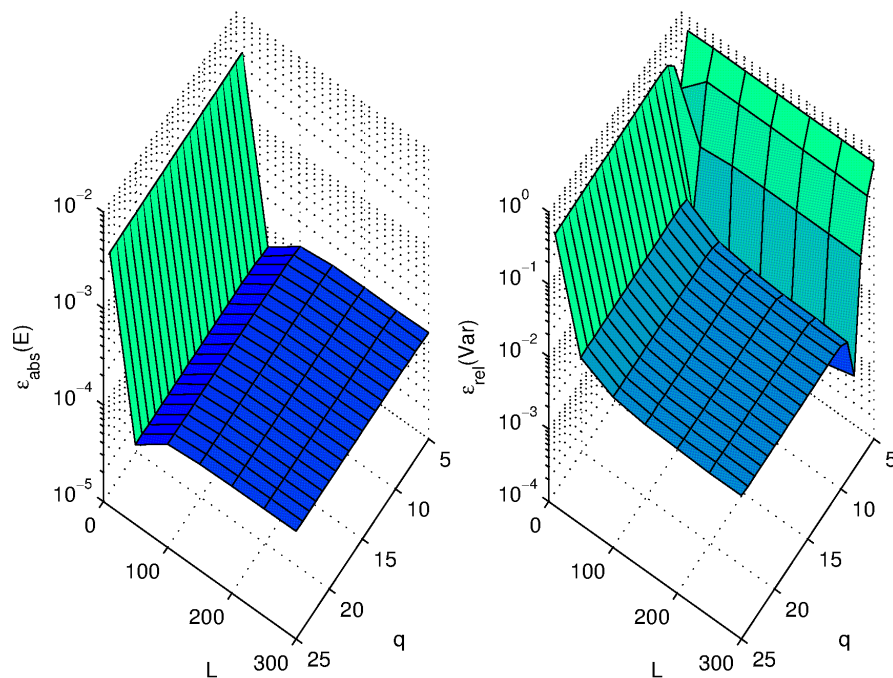


Abbildung 4.10: Höhe des Fehlers in Abh. von L

4.2.2.3 Konvergenz der Koeffizienten bei der Intrusive Methode

Da wir keine numerischen Untersuchungen bei den europäischen Optionen für die IM durchgeführt haben, gehen wir auf diesen Sachverhalt nun etwas genauer ein. Wie schon erwähnt, sind die berechneten Koeffizienten lediglich Approximationen. Deshalb können wir bei dieser Methode nicht einfach davon ausgehen, dass der Erwartungswert „nur“ von der Anzahl der Stützstellen der Gauß-Quadratur abhängt. Da q aber ohnehin keinen Einfluss auf die Zeit hat, untersuchen wir die Konvergenz der Koeffizienten in Abhängigkeit von p .

Beispiel:

Eingabeparameter: Standardbeispiel 2 mit $q = 50$ und $L = 200$.

v_i/p	1	2	3	4
v_0	$1.076572 \cdot 10^{-1}$	$1.076475 \cdot 10^{-1}$	$1.076481 \cdot 10^{-1}$	$1.076480 \cdot 10^{-1}$
v_1	$8.390779 \cdot 10^{-3}$	$8.467477 \cdot 10^{-3}$	$8.469419 \cdot 10^{-3}$	$8.469457 \cdot 10^{-3}$
v_2	-	$-1.509408 \cdot 10^{-4}$	$-1.556041 \cdot 10^{-4}$	$-1.557403 \cdot 10^{-4}$
v_3	-	-	$-4.016654 \cdot 10^{-6}$	$-4.077846 \cdot 10^{-6}$
v_4	-	-	-	$9.079484 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 4.9: Konvergenz der Koeffizienten bei der IM für Standardbeispiel 2

Man sieht, dass die Koeffizienten sehr schnell gegen ihre korrekten Werte konvergieren. Um den Erwartungswert gut abschätzen zu können, sollte dennoch mindestens $p = 2$ gewählt werden. In [24] wird die Konvergenz der errechneten Werte für die IM für mehrere Verteilungen untersucht. Dabei werden für alle Verteilungen exponentielle Konvergenzraten nachgewiesen.

4.2.2.4 Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung

Aus den Tabellen 4.6, 4.7 und 4.8 kann man ablesen, dass die NIM für die gleichen Eingabewerte schneller als die IM ist. Zudem haben wir in Abschnitt 4.2.2.3 gezeigt, dass die IM lediglich Approximationen der einzelnen Koeffizienten liefert. Daraus könnte man eine höhere Effizienz der NIM folgern. Diese Annahme wäre aber, wie wir in der Folge zeigen werden, generell nicht richtig.

Wir haben bei der Anwendung der PCE auf asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität drei Fehlerquellen. Die ersten beiden wurden im Abschnitt über europäische Optionen schon näher analysiert. Wir haben gezeigt, dass diese Fehler bei geschickter Wahl der Parameter p und q sehr schnell gegen 0 konvergieren. In [19] wird dieses Verhalten für asiatische Wertpapiere gezeigt, weshalb wir nicht weiter darauf eingehen. Vielmehr beschäftigen wir uns mit dem zusätzliche Fehler, der durch die Lösung des Systems der DGLen entsteht. Dieser ist wiederum von der Anzahl der Linien und der Fehlertoleranzen des Löser abhängig. Um größtmögliche Effizienz zu erreichen, müssen wir also versuchen, alle drei Fehler im Vergleich zu der Laufzeit möglichst schnell zu

minimieren. Da wir bei den Methoden der PCE jedoch unterschiedliche Systeme gewöhnlicher DLGen lösen, muss der Fehler für die selben Werte von L und den gleichen Fehlertoleranzen nicht identisch sein.

Versuchsreihe:

Eingabeparameter: Standardbeispiel 2.

Das exakte Ergebnis haben wir mit der NIM mit $p = 6$, $q = 50$, $L = 400$ und einer niedrigeren Fehlertoleranz, nämlich $tol_{rel} = 10^{-5}$ und $tol_{abs} = 10^{-8}$, berechnet. Für den Erwartungswert erhält man dann $V_0 = 0.107684$ und für die Varianz $Var = 7.155087 \cdot 10^{-5}$.

1) Für die NIM verwenden wir $L = 200$ und $p = 4$:

q	5	10	15	20	25
$\epsilon_{abs}(E)$	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$
$\epsilon_{rel}(Var)$	$1.94 \cdot 10^0$	$5.51 \cdot 10^{-3}$	$5.78 \cdot 10^{-3}$	$5.75 \cdot 10^{-3}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.10: Fehler für Standardbeispiel 2 mit der NIM

2) Für die IM verwenden wir $L = 200$ und $q = 25$:

p	1	2	3	4
$\epsilon_{abs}(E)$	$3.02 \cdot 10^{-5}$	$4.01 \cdot 10^{-5}$	$3.94 \cdot 10^{-5}$	$3.95 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon_{rel}(Var)$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.11: Fehler für Standardbeispiel 2 mit der IM

Auch wenn man die Anzahl der Stützstellen erhöht, ändert sich bei der NIM bzgl. der Genauigkeit fast nichts, da der Fehler der Gauß-Quadratur bereits ab $q = 10$ gegen 0 konvergiert. Dieses Verhalten ist keine Besonderheit, sondern wurde schon bei den europäischen Optionen beobachtet. Der verbleibende Fehler resultiert demnach vor allem aus der numerischen Approximation der DGL. Die IM weist ab $p = 3$ ähnliches Verhalten auf. Der kleinste Fehler des Erwartungswertes tritt bei $p = 1$ auf, was womöglich daran liegt, dass sich zwei der drei Fehler gegenseitig neutralisieren. Die Konvergenz von v_0 ist jedoch eindeutig erkennbar. Die hervorgehobenen Lösungen weisen auf gleiche Werte von p , q und L für beide Methoden hin. Die Fehler unterscheiden sich deutlich. Daran kann man erkennen, dass bei der IM der Fehler, der durch die numerische Lösung der DGLen erfolgt, verkleinert wird. Die Gründe hierfür liegen wahrscheinlich darin, dass das System gewöhnlicher DGLen größer ist und somit genauer berechnet wird. Um beide Methoden bzgl. der Laufzeit vergleichen zu können, erhöhen wir deshalb bei der NIM die Fehlertoleranzen um eine Potenz auf $tol_{rel} = 10^{-4}$ und $tol_{abs} = 10^{-7}$. Für die Werte $L = 200$, $p = 4$ und $q = 25$ ist der absolute Fehler beim Erwartungswert

$\epsilon_{abs}(E) = 1.89 \cdot 10^{-5}$ und der relative Fehler bei der Varianz $\epsilon_{rel}(Var) = 2.15 \cdot 10^{-3}$. Die Methoden sind dadurch bzgl. des Laufzeitverhaltens besser vergleichbar.

4.2.2.5 Laufzeitvergleich der Methoden der polynomiellen Chaosentwicklung

Wir vergleichen nun die Laufzeiten der NIM und der IM für die beiden Standardbeispiele. Bei den europäischen Optionen haben wir gezeigt, dass die Anzahl der Stützstellen genügend groß gewählt werden sollte, da sonst die Fehler exponentiell wachsen. Wir haben allerdings auch gesehen, dass das Konvergenzverhalten von der Wahl der Verteilung abhängt. Bei der Uniformen Verteilung waren die Fehler im Vergleich zu der Gauß-Verteilung bei der gleichen Anzahl an Stützstellen geringer. Deshalb benötigen wir für die Uniforme Verteilung weniger Stützstellen. Wir haben für das Standardbeispiel 1 $q = 10$ und für das Standardbeispiel 2 $q = 15$ gewählt. Bei der NIM wurden die niedrigeren Fehlertoleranzen berücksichtigt.

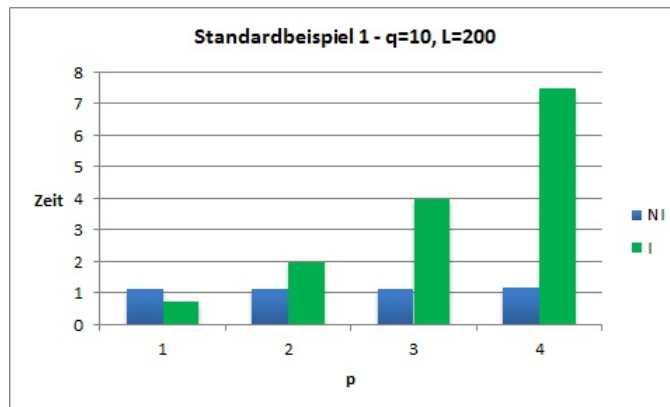


Abbildung 4.11: Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 1

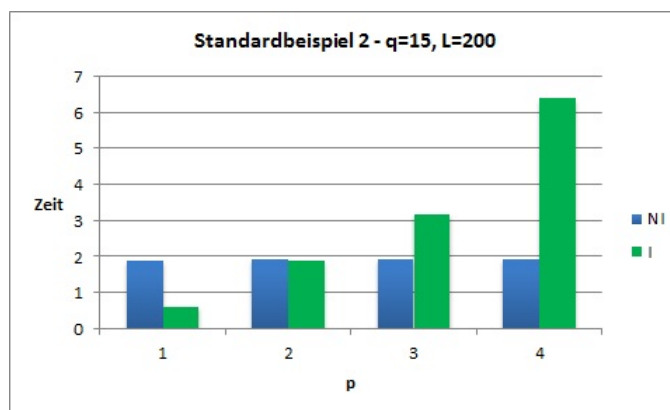


Abbildung 4.12: Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 2

Die Diagramme zeigen, dass keines der Verfahren wirklich effizienter ist. Beide Methoden besitzen aufgrund der unterschiedlichen Berechnungsvorgänge Vorteile. Generell ist bei der Uniformen Verteilung die NIM womöglich effizienter, weil die Anzahl der Stützstellen nicht so groß gewählt werden muss. Bei der Gauß-Verteilung ist eine höhere Wahl von q aufgrund der langsameren Konvergenz ratsam. Deshalb empfiehlt sich hier eine Anwendung der IM, bei der die die Höhe von q keine Auswirkungen auf die Laufzeit hat.

Aus den Diagrammen kann außerdem noch eine weitere Besonderheit abgeleitet werden. Die Laufzeiten hängen diesbezüglich auch von der Art der Verteilung ab. Wir haben zu Beginn gezeigt, dass die Laufzeit der IM nicht von q abhängig ist. Die Werte in beiden Diagrammen unterscheiden sich jedoch, was nur auf die unterschiedliche Wahl der Verteilung zurückgeführt werden kann. Ebenso hängt die Laufzeit beider Verfahren von dem Verhältnis der Parameter a und b ab, da dadurch die DGLen verändert werden und die Lösungsdauer somit schwankt. Die Verhältnisse zwischen den Zeiten der NIM und der IM ändern sich aber nur bedingt, weswegen die bis hierhin gemachten Aussagen Bestand haben.

4.2.2.6 Vergleich mit der Monte-Carlo Methode

Bei den europäischen Optionen konnte man die MCM noch als Alternative zu der NIM betrachten. Für asiatische Optionen werden wir sehen, dass der Unterschied in Anbetracht der Effizienz zwischen der MCM und den Methoden der PCE extrem groß ist. Die Laufzeit der MCM bei Standardbeispiel 1 mit $L = 200$, $tol_{rel} = 10^{-3}$ und $tol_{abs} = 10^{-6}$ kann für verschiedene Werte von M aus Tabelle 4.12 entnommen werden. Der Anstieg der Laufzeit ist, wie bereits zu vermuten war, linear.

M	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	10^4
Laufzeit	5.95	30.10	58.3	601.42
$\frac{\text{Laufzeit}}{M}$	$5.95 \cdot 10^{-2}$	$6.02 \cdot 10^{-2}$	$5.83 \cdot 10^{-2}$	$6.01 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 4.12: Laufzeiten der MCM für Standardbeispiel 2

In Kapitel 4.2.2.2 haben wir ebenso bei der NIM einen linearen Laufzeitanstieg in Abhängigkeit von q beobachtet. Diese Methode benötigt mit $L = 200$, $tol_{rel} = 10^{-3}$, $tol_{abs} = 10^{-6}$ (d.h. die NIM und die MCM konvergieren gegen den selben Optionswert), $p = 3$ und $q = 100$ 6.03 Sekunden, also ungefähr genauso lang wie die MCM mit $M = 100$. Grundsätzlich reichen aber 20 Stützstellen für hinreichend kleine Fehler. Wählt man bei der MCM $M = 20$, so erhält man fast sicher für den approximierten Erwartungswert und die approximierte Varianz sehr ungenaue Werte. Die exakten Werte werden mit der NIM mit $p = 3$ und $q = 100$ berechnet. In Tabelle 4.13 werden einige Beispiele aufgezeigt. Bei $q = 20$ liefert die NIM $\epsilon_{abs}(E) = 4.08 \cdot 10^{-7}$ und $\epsilon_{rel}(Var) = 5.57 \cdot 10^{-5}$, wobei der zusätzlich gemachte Fehler durch die numerische Berechnung der DGL aus Vergleichsgründen außer Acht gelassen wird.

M	20	20	20	20
$\epsilon_{abs}(E)$	$3.52 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$4.76 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon_{rel}(Var)$	$4.95 \cdot 10^{-1}$	$3.94 \cdot 10^{-1}$	$8.85 \cdot 10^{-2}$	$2.24 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 4.13: Fehler der MCM mit $M = 20$ für Standardbeispiel 2

Da die IM mit der NIM in Punkto Effizienz vergleichbar ist, kann man behaupten, dass die Methoden der PCE für komplexere Modelle wesentlich schneller als die MCM konvergieren und praktisch bevorzugt verwendet werden sollten.

5 Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität und Zins

Im letzten Kapitel haben wir angenommen, dass die Volatilität σ der einzigen Parameter ist, der bei der Optionsbewertung vom Zufall abhängt. Der sichere Zinssatz r wurde hingegen als bekannter Wert vorausgesetzt. Im allgemeinen ist dies aber nicht der Fall, da sich während der Laufzeit einer Option r verändern kann (siehe Abbildung 2.4). Um ein besseres Modell zur Berechnung von Optionen zu erhalten, werden wir deshalb in der Folge den sicheren Zinssatz ebenfalls als Zufallsvariable $r(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) auffassen. In unsere Berechnungen gehen ab jetzt also zwei Zufallsvariablen, nämlich r und σ , mit ein. Diese müssen aber grundsätzlich nicht zu dem selben Wahrscheinlichkeitsraum gehören, da die Entwicklung des Zinssatzes nicht direkt mit der eines Basiswertes zusammenhängt. Wir definieren demnach zwei unabhängige Zufallsvariablen auf unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsräumen. Für die Beschreibung des Zufalls verwenden wir wieder die Darstellung (2.9). Für die Zufallsvariable $\sigma : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, die zu dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ gehört, gilt

$$\sigma(\omega_1) = g_1(\xi_1(\omega_1)) = a_1 + b_1 \xi_1(\omega_1) \text{ mit } g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

und für die Zufallsvariable $r : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, die zu dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ gehört, gilt

$$r(\omega_2) = g_2(\xi_2(\omega_2)) = a_2 + b_2 \xi_2(\omega_2) \text{ mit } g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Die Parameter $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ sind Zufallszahlen, $\xi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit einer der acht festgelegten Verteilungen. Mit $\tilde{\Omega}$ bezeichnen wir den Raum

$$\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \quad (5.3)$$

und $\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ ist der Vektor, der die Zufallsvariablen beinhaltet. Die zugehörigen Dichten werden mit ρ_i bzgl. ξ_i für $i = 1, 2$ bezeichnet. Die multidimensionale Dichte erhalten wir für die unabhängigen Zufallsvariablen durch

$$\tilde{\rho}(\tilde{\xi}) = \prod_{i=1}^2 \rho_i(\xi_i) = \rho_1(\xi_1) \cdot \rho_2(\xi_2). \quad (5.4)$$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich in diesem Kapitel im Vergleich zum vorherigen kaum. Wir gehen wieder zuerst auf europäische Optionen ein und beschreiben die Anwendung der NIM auf diesen Typ. Das intrusive Verfahren wird nicht erläutert, weil wir schon im Kapitel zuvor gezeigt haben, dass es für diesen Typ zu ineffizient ist. Anschließend führen wir numerische Untersuchungen durch. Danach folgt das gleiche Vorgehen

für die asiatischen Optionsscheine.

In Kapitel 4 galt die Annahme $p = P$ aufgrund der Tatsache, dass wir lediglich eine Zufallsvariable hatten und die Dimension der PCE deswegen $N = 1$ war. Da wir nun zwei Zufallsvariablen haben und somit $N = 2$ gilt, ist die Annahme hinfällig. Im zweidimensionalen Fall lässt sich P mit Formel (3.30) aber auch leicht berechnen:

$$P + 1 = \frac{(p \cdot 2)!}{p!2!} = \frac{(p+2)(p+1)p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{2p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(p+2)(p+1)}{2} = \sum_{i=1}^{p+1} i. \quad (5.5)$$

Die Beschreibung der beiden Methoden erfolgt für kontinuierlichen Verteilungen. Die Gründe für diese Entscheidung wurden zu Beginn des vierten Kapitels genannt.

5.1 Europäische Optionen

5.1.1 Nicht-intrusive Methode

Im Grunde gelten alle Annahmen, die bereits im Abschnitt 4.1 gemacht wurden. Die Eingabeparameter ändern sich jedoch situationsbedingt:

- S_0 : Basiswert zur Zeit $t = 0$
- K : Ausübungspreis
- T : Laufzeit der Option
- a_1 : Faktor aus g_1 (Volatilität)
- b_1 : Faktor aus g_1 (Volatilität)
- q_1 : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur (Volatilität)
- Verteilung₁: Eine der acht Verteilungen (Volatilität)
- a_2 : Faktor aus g_2 (Zinssatz)
- b_2 : Faktor aus g_2 (Zinssatz)
- q_2 : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur (Zinssatz)
- Verteilung₂: Eine der acht Verteilungen (Zinssatz)
- Optionsart: Put oder Call
- p : Ordnung der PCE

Der ursprünglich deterministische Optionswert $V(t, S(t))$ ist in diesem Kapitel von zwei Zufallsvariablen abhängig. Folglich wird er als stochastischer Prozess mit

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (5.6)$$

oder

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (5.7)$$

aufgefasst. Auch hier nehmen wir wieder $V \in L_2(\tilde{\Omega})$ an. Die PCE besitzt die Darstellung

$$V(t, S(t), \cdot, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t, S(t)) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t, S(t)) \Psi_i(\tilde{\xi}). \quad (5.8)$$

Mit Ψ_i werden die 2-dimensionalen OP bezeichnet. Wie diese bestimmt werden, wurde in Abschnitt 3.2.1 gezeigt. Der Vektor $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ besteht aus zwei Zufallszahlen bzgl. $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2$. Damit folgt:

$$V(t, S(t), \omega_1, \omega_2) = V(t, S(t), \tilde{\omega}). \quad (5.9)$$

Wir berechnen wieder o.B.d.A. den Optionswert zur Zeit $t = 0$, d.h.

$$V(0, S_0, \cdot, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(0, S_0) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (5.10)$$

Zur Erinnerung: Um den Erwartungswert $V_0 = E(V(0, S_0, \cdot, \cdot))$ und die Varianz $Var(V(0, S_0, \cdot, \cdot))$ zu berechnen, benötigen wir die Koeffizienten der PCE, die bei der NIM mit

$$v_i = \frac{\langle V, \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_i, \Psi_i \rangle}, \quad i = 0, \dots, P \quad (5.11)$$

ermittelt werden. Die Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten steigt im Vergleich zum 1-dimensionalen polynomiellen Chaos von $p + 1$ auf $\frac{(p+2)(p+1)}{2}$ an. Für die Gleichung (5.11) gilt im 2-dimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} v_i(0, S_0) &= \frac{\int_{\omega_1 \in \Omega_1} \int_{\omega_2 \in \Omega_2} V(0, S_0, \omega_1, \omega_2) \Psi_i(\xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) dP(\omega_1) dP(\omega_2)}{\int_{\omega_1 \in \Omega_1} \int_{\omega_2 \in \Omega_2} \Psi_i^2(\xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) dP(\omega_1) dP(\omega_2)} \\ &= \frac{\int_{\omega_1 \in \Omega_1} \int_{\omega_2 \in \Omega_2} V(0, S_0, \omega_1, \omega_2) \Psi_i(\xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) \rho_1(\xi_1(\omega_1)) \rho_2(\xi_2(\omega_2)) d\xi_1 d\xi_2}{\int_{\omega_1 \in \Omega_1} \int_{\omega_2 \in \Omega_2} \Psi_i^2(\xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) \rho_1(\xi_1(\omega_1)) \rho_2(\xi_2(\omega_2)) d\xi_1 d\xi_2} \\ &= \frac{\int_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}} V(0, S_0, \tilde{\omega}) \Psi_i(\tilde{\xi}(\tilde{\omega})) \tilde{\rho}(\tilde{\xi}(\tilde{\omega})) d\tilde{\xi}}{\int_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}} \Psi_i^2(\tilde{\xi}(\tilde{\omega})) \tilde{\rho}(\tilde{\xi}(\tilde{\omega})) d\tilde{\xi}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$i = 0, \dots, P$. Wir approximieren (5.12) mit der Gauß-Quadratur. Mit dem Golub-Welsch Algorithmus berechnen wir die Stützstellen $x_1 := (x_{1_1}, \dots, x_{1_{q_1}})$ und $x_2 := (x_{2_1}, \dots, x_{2_{q_2}})$

und die dazugehörigen Gewichte $w_1 := (w_{1_1}, \dots, w_{1_{q_1}})$ und $w_2 := (w_{2_1}, \dots, w_{2_{q_2}})$ bzgl. den beiden ausgewählten Verteilungen. Die diskreten Werte für $\sigma(\omega_1)$ ergeben sich durch $\sigma_j = g_1(x_{1_j}) = a_1 + b_1 x_{1_j}$ für $j = 1, \dots, q_1$ und für $r(\omega_2)$ durch $r_k = g_2(x_{2_k}) = a_2 + b_2 x_{2_k}$ für $k = 1, \dots, q_2$. Mit $\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_{q_1}) \in \mathbb{R}^{1 \times q_1}$ und $r := (r_1, \dots, r_{q_2}) \in \mathbb{R}^{1 \times q_2}$ erhalten wir durch Anwendung des Kronecker-Produktes:

$$\tilde{\sigma} := (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{q_1 \cdot q_2}) = \sigma \otimes \mathbb{1}^{1 \times q_2}, \quad (5.13)$$

$$\tilde{r} := (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{q_2 \cdot q_1}) = \mathbb{1}^{1 \times q_1} \otimes r, \quad (5.14)$$

$$\tilde{w} := (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{q_1 \cdot q_2}) = w_1 \otimes w_2, \quad (5.15)$$

$$\tilde{\rho} := (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{q_1 \cdot q_2}) = \rho_1(x_1) \otimes \rho_2(x_2). \quad (5.16)$$

Die deterministischen Optionswerte definieren wir in Vektordarstellung:

$$\begin{aligned} \tilde{V} &:= (V(0, S_0, \sigma_1, r_1), V(0, S_0, \sigma_1, r_2), \dots, V(0, S_0, \sigma_1, r_{q_2}), V(0, S_0, \sigma_2, r_1), \\ &\quad \dots, V(0, S_0, \sigma_2, r_{q_2}), \dots, V(0, S_0, \sigma_{q_1}, r_{q_2})) \\ &= (V(0, S_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{r}_1), V(0, S_0, \tilde{\sigma}_2, \tilde{r}_2), \dots, V(0, S_0, \tilde{\sigma}_{q_1 \cdot q_2}, \tilde{r}_{q_1 \cdot q_2})). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Der Vektor \tilde{V} hat $q_1 \cdot q_2$ Einträge, wobei \tilde{V}_m den m -ten Eintrag liefert, d.h. für $m = 2$ erhält man $V_2 = V(0, S_0, x_{1_1}, x_{2_2}) = V(0, S_0, \tilde{\sigma}_2, \tilde{r}_2)$. Gleichung (5.12) wird somit durch

$$\begin{aligned} v_i(0, S) &\approx \frac{\sum_{j=1}^{q_1} \sum_{k=1}^{q_2} V(0, S_0, x_{1_j}, x_{2_k}) \Psi_i(x_{1_j}, x_{2_k}) \rho_1(x_{1_j}) \rho_2(x_{2_k}) w_{1_j} w_{2_k}}{\sum_{j=1}^{q_1} \sum_{k=1}^{q_2} \Psi_i^2(x_{1_j}, x_{2_k}) \rho_1(x_{1_j}) \rho_2(x_{2_k}) w_{1_j} w_{2_k}} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \tilde{V}_m \Psi_{i_m} \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m}{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m} \end{aligned} \quad (5.18)$$

approximiert. Die 2-dimensionalen OP ergeben sich aus dem Kronecker-Produkt von zwei 1-dimensionalen OP, welche wiederum durch die Drei-Term-Rekursionsgleichung berechnet werden können. Wie diese dabei kombiniert werden müssen, findet man in Abschnitt 3.2.1.

Algorithmus: NIM bei europäischen Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins

0. Eingabewerte: S_0, K, T, a_1, b_1, q_1 , Verteilung₁, a_2, b_2, q_2 , Verteilung₂, Optionsart, p .
1. Berechne die Stützstellen x_{1_j} und die Gewichte w_{1_j} bzgl. der Verteilung₁ für $j = 1, \dots, q_1$ und die Stützstellen x_{2_k} und die Gewichte w_{2_k} bzgl. der Verteilung₂ für $k = 1, \dots, q_2$ mit dem Golub-Welsch Algorithmus.

2. Bestimme die Funktion $\sigma_j = g_1(x_{1_j}) = a_1 + b_1 x_{1_j}$ und die Dichte $\rho_{1_j} = \rho_1(x_{1_j})$ für $j = 1, \dots, q_1$.
3. Bestimme die Funktion $r_k = g_2(x_{2_j}) = a_2 + b_2 x_{2_k}$ und die Dichte $\rho_{2_k} = \rho_2(x_{2_k})$ für $k = 1, \dots, q_2$.
4. Berechne die Vektoren $\tilde{\sigma}$, \tilde{r} , \tilde{w} , $\tilde{\rho}$ mit Hilfe des Kronecker-Produktes.
5. Ermittle die multidimensionalen OP Ψ_{i_m} für $i = 0, \dots, P$ und $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$ mittels des Kronecker-Produktes der 1-dimensionalen OP, welche über die Drei-Term-Rekursionsgleichung bestimmt werden.
6. Berechne mit den Lösungsformeln aus Abschnitt 2.3.2 $q_1 \cdot q_2$ Optionswerte $\tilde{V}_m = \tilde{V}(0, S_0, \tilde{\sigma}_m, \tilde{r}_m)$ für $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$.
7. Approximiere die Koeffizienten durch

$$v_i \approx \frac{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \tilde{V}_m \Psi_{i_m} \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m}{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m} \tilde{w}_m, \quad i = 0, \dots, p. \quad (5.19)$$

8. Gib den approximierten Erwartungswert v_0 und die approximierte Varianz

$$Var \approx \sum_{i=1}^p v_i \left(\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m \right) \quad (5.20)$$

aus.

Eine nachträgliche Erhöhung der Ordnung der PCE von p auf $p + 1$ ist auch im 2-dimensionalen Fall sehr schnell durchführbar. Es müssen lediglich die Schritte 5, 7 und 8 für $P + 1, \dots, P + p + 2$ ausgeführt werden. Die Höhe des Parameters q hat für $N = 2$ ebenso wie für $N = 1$ keinen Einfluss auf die Genauigkeit des Erwartungswertes. Die Laufzeit ist zwar höher, als die im 1-dimensionalen Fall, sie beträgt auf dem verwendeten Rechner aber immer noch weit weniger als 1 Sekunde mit genügend hohen Werten von p und q .

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm `eu2_pc_ni.m` numerisch umgesetzt.

5.1.2 Numerische Untersuchungen

5.1.2.1 Festlegungen

Die Festlegungen, die in Abschnitt 4.1.2.1 gemacht wurden, haben auch im 2-dimensionalen Fall Bestand. In der Folge werden wir die Untersuchungen deshalb mit den Werten

$S_0 = 1$, $K = 0.8$ und $T = 1$ für einen Call durchführen. Die Volatilität wird demnach hauptsächlich auf dem Intervall $I_1 = [0.2, 0.4]$ vermutet. Unklar ist aber noch, aus welchem Bereich der Zinssatz gewählt werden sollte, sodass die Untersuchungen hinsichtlich der Anwendung der PCE möglichst viele neue Informationen enthalten. Dafür betrachten wir Abbildung 5.1.

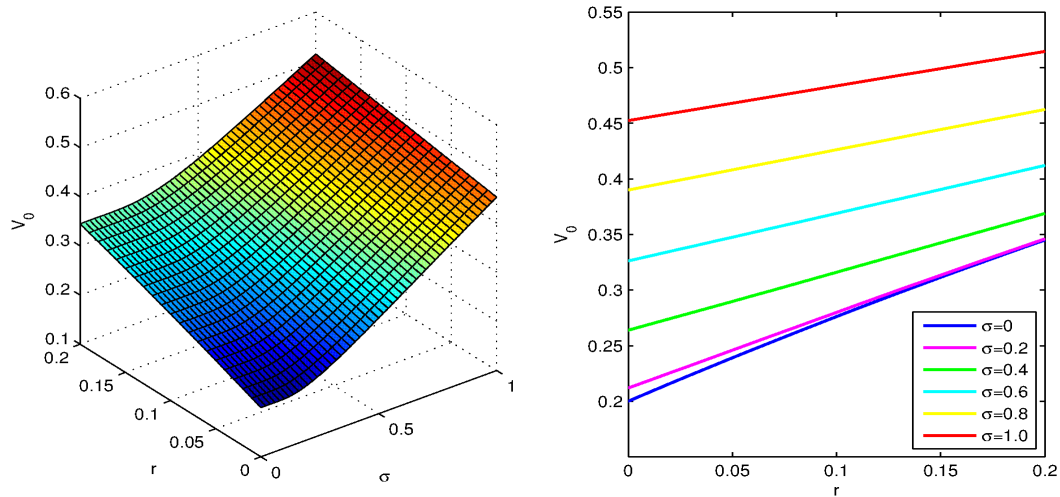


Abbildung 5.1: Optionswert von europäischen Optionen mit $K = 0.8$ in Abh. von σ und r

Im rechten Bild ist die lineare Abhängigkeit des fairen Optionspreises von dem sicheren Zinssatz für alle dargestellten Volatilitätswerte gut zu erkennen. Die Unterschiede in

$$E(V(0, S_0, \sigma_j, r(\cdot))) - V(0, S_0, \sigma_j, E(r(\cdot))) \quad (5.21)$$

bzw.

$$E(V(0, S_0, \sigma(\cdot), r(\cdot))) - E(V(0, S_0, \sigma(\cdot), E(r(\cdot)))) \quad (5.22)$$

sind deshalb eher marginal. Beispielhaft nehmen wir σ als uniform verteilte Zufallsvariable auf dem Bereich $I_1 = [0.2, 0.4]$ und den Zins als Gauß-verteilte Zufallsvariable mit $a_2 = 0.1$ und $b_2 = 0.02$ an, d.h. $r(\omega)$ befindet sich hauptsächlich auf $I_2 = [0.06, 0.14]$. Für den Erwartungswert von r gilt dann $E(r(\cdot)) = 0.1$. Die berechneten Optionswerte sind:

1. NIM - $N = 2$: $V_0 = 0.2955221$,
2. NIM - $N = 1$: $V_0 = 0.2955225$,
- Differenz : 0.0000004
- rel. Differenz : $1.35 \cdot 10^{-6}$.

Dieses Beispiel zeigt auf, dass eine Veränderung des sicheren Zinssatzes von einer als bekannt vorausgesetzten Größe in eine Zufallsvariable zwar durchaus Sinn macht (wie bereits in Kapitel 2 erläutert wurde), der faire Optionswert aber effizienter über die Berechnung des Erwartungswertes der Zufallsvariable r erhalten werden kann. Wo sich allerdings Unterschiede ergeben, ist bei der Größe der Varianz:

1.	NIM - $N = 2$:	$Var = 2.5715645 \cdot 10^{-4}$,
2.	NIM - $N = 1$:	$Var = 1.1324179 \cdot 10^{-4}$,
	Differenz	:	$1.4391466 \cdot 10^{-4}$,
	rel. Differenz	:	0.5596386.

Wir werden die PCE im 2-dimensionalen Fall folglich trotzdem näher untersuchen, da durch die Unterschiede in der Varianz der Zufallsvariablen V schneller Risiken erkannt werden können. Bei anderen Optionstypen spielt der Zinssatz zudem eine wichtigere Rolle (z.B. Zinsderivate, siehe [11]), weshalb ein linearer Zusammenhang zwischen dem fairen Optionswert und der Höhe der Zinsen nicht automatisch vorausgesetzt werden kann.

Die Standardbeispiele sind in diesem Abschnitt:

1. $S = 1$, $K = 0.8$, $T = 1$, $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.2$, Verteilung₁: Uniform, $a_2 = 0.06$, $b_2 = 0.08$, Verteilung₂: Uniform, Optionsart: Call.

2. $S = 1$, $K = 0.8$, $T = 1$, $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.2$, Verteilung₁: Uniform, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 0.02$, Verteilung₂: Gauß, Optionsart: Call.

5.1.2.2 Konvergenz der nicht-intrusiven Methode

Zu Beginn überprüfen wir im 2-dimensionalen Fall, wie das Verhältnis von der Anzahl der Stützstellen der Gauß-Quadratur $q_1 \cdot q_2$ zu der Ordnung der PCE p gewählt werden sollte. Wir setzen $q_1 = q_2$ voraus. In den Abbildungen 5.2 und 5.3 ist der Zusammenhang zum 1-dimensionalen Fall (siehe Abbildungen 4.2 und 4.4) deutlich zu erkennen. Es empfiehlt sich, um möglichst kleine Fehler zu erhalten,

$$p \ll q_1 \text{ und } p \ll q_2$$

zu setzen.

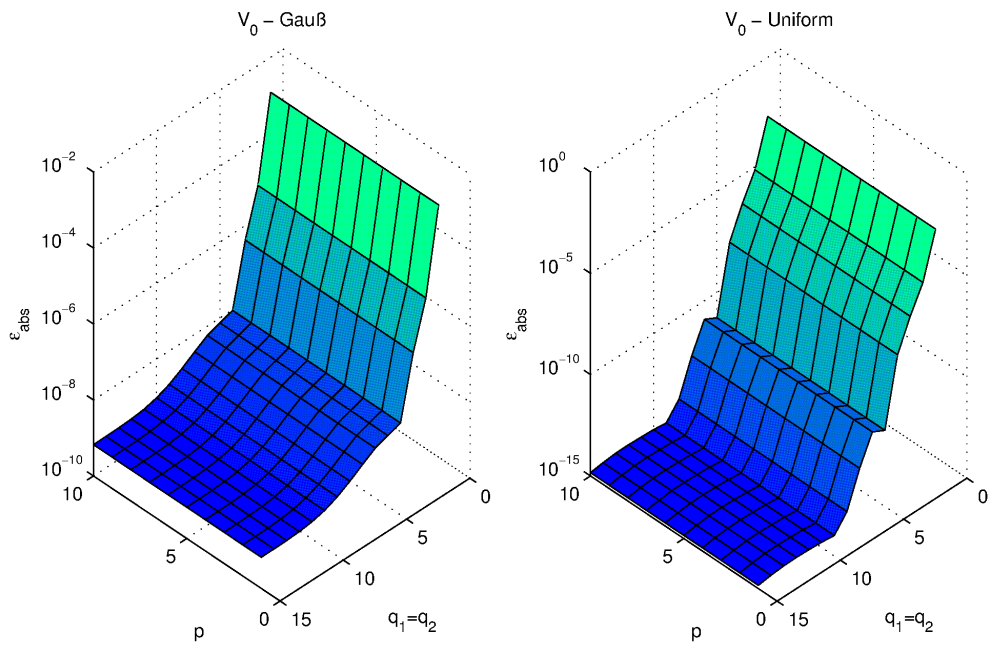


Abbildung 5.2: Absoluter Fehler des Erwartungswertes für die Standardbeispiele in Abh. von p und $q_1 = q_2$

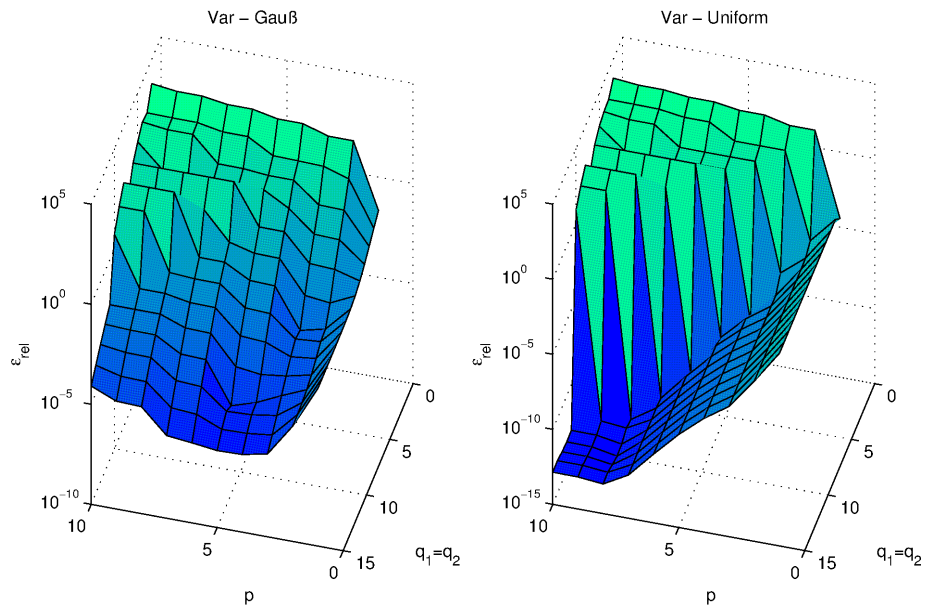


Abbildung 5.3: Relativer Fehler der Varianz für die Standardbeispiele in Abh. von p und $q_1 = q_2$

Nun gehen wir, ähnlich wie bei der Optionsbewertung mit zufälliger Volatilität, nochmals auf die Konvergenz der Varianz in Abhängigkeit der Koeffizienten ein. Diese werden mit $p = 2$ für Standardbeispiel 1 in Abbildung 5.4 dargestellt.

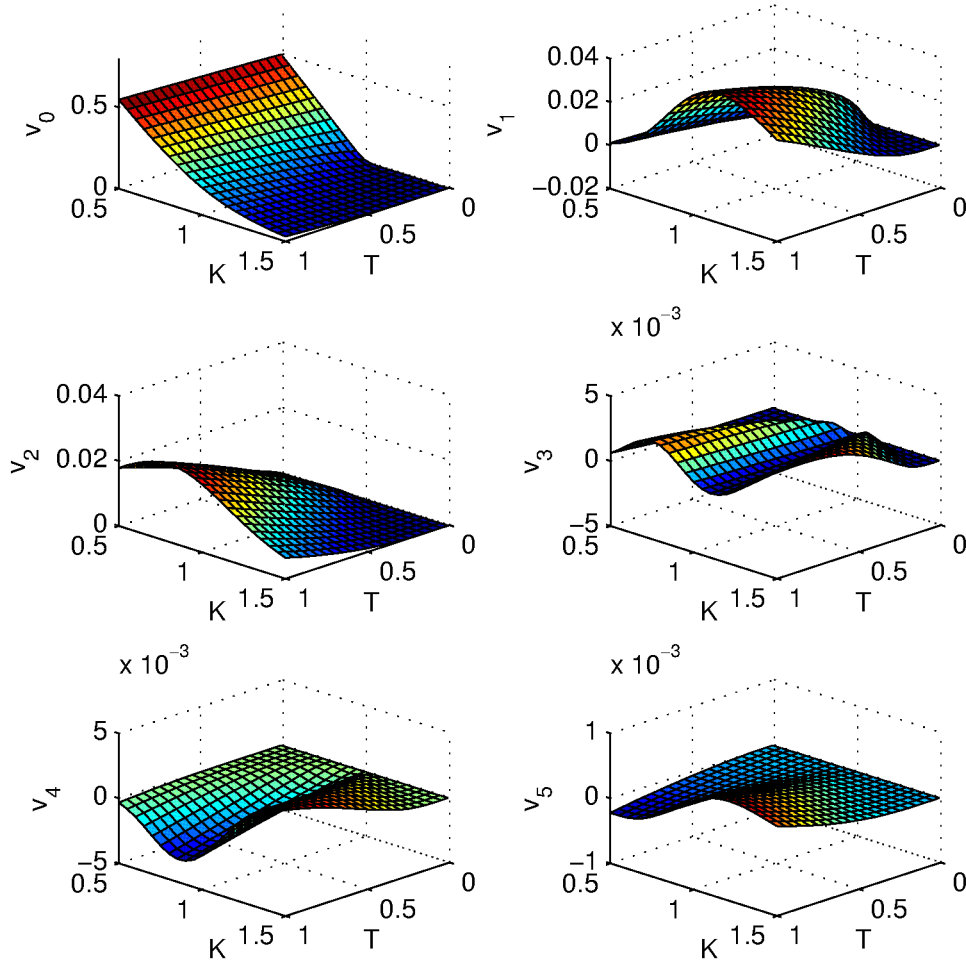


Abbildung 5.4: Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T

Koeffizienten	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$\max v_i $	$3.97 \cdot 10^{-2}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$	$3.23 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-3}$	$5.32 \cdot 10^{-4}$
$\max v_i ^2 \langle \Psi_i^2 \rangle$	$5.26 \cdot 10^{-4}$	$1.90 \cdot 10^{-4}$	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$5.68 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.1: Koeffizienten und Summanden für Standardbeispiel 1

Die Varianz konvergiert in Abhängigkeit der Ordnung p im 2-dimensionalen Fall ähnlich schnell wie im 1-dimensionalen Fall (siehe Tabelle 4.4). Falls man für Standardbeispiel 1

1 die Werte $a_2 = 0.1$ und $b_2 = 0$ setzt, so erhalten wir die gleichen Koeffizienten wie in Abbildung 4.7, jedoch sind diese nun verschoben. Die Werte v_1 und v_3 sind in Abbildung 4.7 v_1 und v_2 . Die Koeffizienten v_2 , v_4 und v_5 sind eigentlich alle gleich 0. In den Plots treten aber minimale Rundungsfehler auf.

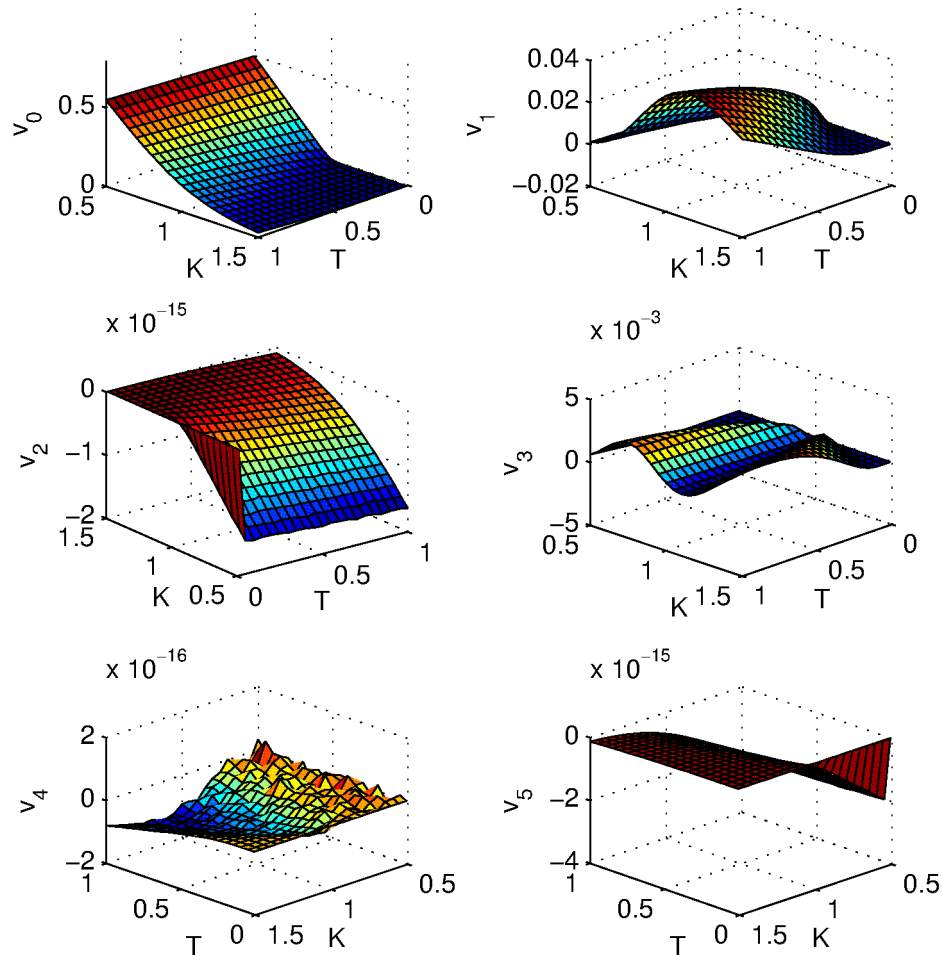


Abbildung 5.5: Koeffizienten der PCE für Standardbeispiel 1 in Abh. von K und T mit $a_2 = 0.1$ und $b_2 = 0$

Grundsätzlich kann man die erzielten Ergebnisse des 1-dimensionalen Falls auf den 2-dimensionalen übertragen. Die Gesamtzahl der Stützstellen und die Anzahl der Summanden der PCE müssen aber erhöht werden, um die gleiche Fehlergenauigkeiten zu erhalten. Diese Tatsachen werden sich speziell bei den asiatischen Optionen im Laufzeitverhalten extrem widerspiegeln.

5.1.2.3 Vergleich mit der Monte-Carlo Methode

Die Laufzeit der MCM für zufällige Volatilität und zufälligem Zins ändert sich im Vergleich zum 1-dimensionalen Fall fast nicht. Jedoch sind die Fehler bei dem Erwartungswert und bei der Varianz für die gleiche Anzahl an gezogenen Zufallszahlen M aufgrund der höheren Varianz wahrscheinlich größer, siehe Abbildung 5.6.

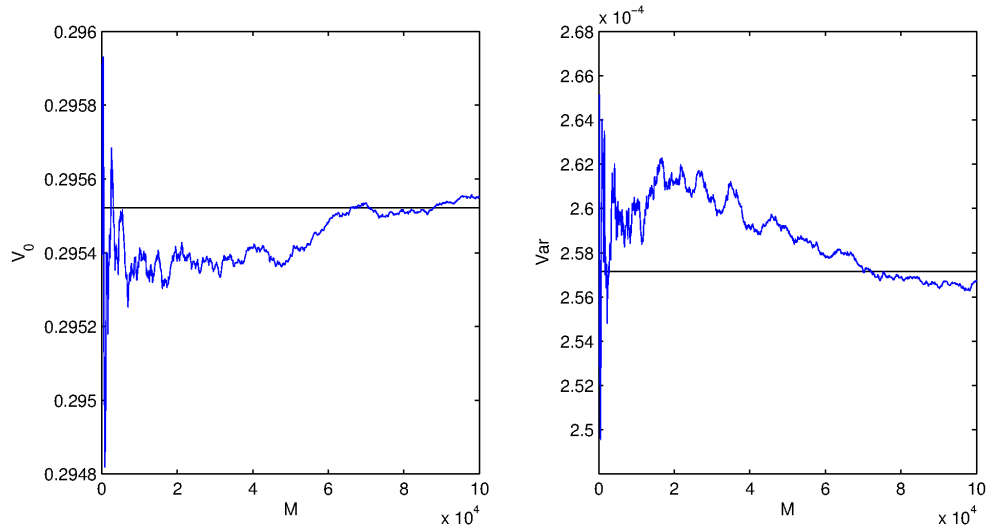


Abbildung 5.6: MCM für Standardbeispiel 1

Die NIM benötigt mit $q_1 = q_2 = 20$ und $p = 4$ 0.01 Sekunden. Bei der MCM erreicht man diese Laufzeit bei $M = 10000$ Zufallszahlen. Dabei liefert die NIM aber fast sicher exaktere Werte.

5.2 Asiatische Optionen

Wir beschreiben bei den asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins beide Methoden.

Als Eingabeparameter benötigen wir:

- S_0 : Basiswert zur Zeit $t = 0$
- T : Laufzeit der Option
- a_1 : Faktor aus g_1 (Volatilität)
- b_1 : Faktor aus g_1 (Volatilität)
- q_1 : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur (Volatilität)

- a_2 : Faktor aus g_2 (Zinssatz)
- b_2 : Faktor aus g_2 (Zinssatz)
- q_2 : Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur (Zinssatz)
- Verteilung: Eine der acht Verteilungen
- p : Ordnung der PCE
- L : Anzahl der Linien bei der Linienmethode

Der Optionswert $V(t, S(t), I(t))$ ist von zwei Zufallsvariablen, nämlich $\sigma(\omega_1)$ und $r(\omega_2)$ abhängig und wird deshalb selbst als stochastischer Prozess mit

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (5.23)$$

aufgefasst. Nach der aus numerischer Sicht hilfreichen Transformation (siehe Abschnitt 2.4) mit

$$V(t, S(t), I(t)) = S(t)u(t, y(t)) \quad (5.24)$$

verwenden wir in der Folge den stochastischen Prozess auf dem eingeschränkten Intervall

$$u : [0, T] \times [0, C] \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (5.25)$$

bzw.

$$u : [0, T] \times [0, C] \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (5.26)$$

Mit der Annahme $V \in L_2$ lässt sich die PCE als

$$u(t, y(t), \cdot, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t, S(t)) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (5.27)$$

mit den 2-dimensionalen OP Ψ_i darstellen. Wir berechnen den fairen Optionswert o.B.d.A. zur Zeit $t = 0$, d.h.

$$u(0, 0, \cdot, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(0, 0) \Psi_i(\xi_1, \xi_2). \quad (5.28)$$

5.2.1 Anwendung der polynomiellen Chaotentwicklung

5.2.1.1 Nicht-intrusive Methode

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass sich die NIM für europäische Optionen nur geringfügig von der NIM für asiatischen Optionen unterscheidet. Dieser Sachverhalt ändert sich mit der Erhöhung der Dimension auf $N = 2$ nicht. Der einzige Unterschied tritt bei der Berechnung der deterministischen Werte von V bzw. u auf. Diese werden auch hier mit der Linienmethode gelöst. Mit $\tilde{u}_m = u(0, 0, \tilde{\sigma}_m, \tilde{r}_m)$ bezeichnen wir die Werte für $\tilde{\sigma}_m$ und \tilde{r}_m , $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$. Den Erwartungswert erhalten wir durch $V_0 = E(V(0, S_0, \cdot, \cdot)) = S_0 E(u(0, 0, \cdot, \cdot))$ und die Varianz durch $Var(V(0, S_0, \cdot, \cdot)) = S_0^2 Var(u(0, 0, \cdot, \cdot))$.

Algorithmus: NIM bei asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins

0. Eingabewerte: S_0, T, a_1, b_1, q_1 , Verteilung₁, a_2, b_2, q_2 , Verteilung₂, p, L .
1. Berechne die Stützstellen x_{1_j} und die Gewichte w_{1_j} bzgl. der Verteilung₁ für $j = 1, \dots, q_1$ und die Stützstellen x_{2_k} und die Gewichte w_{2_k} bzgl. der Verteilung₂ für $k = 1, \dots, q_2$ mit der Gauß-Quadratur mit dem Golub-Welsch Algorithmus.
2. Bestimme die Funktion $\sigma_j = g_1(x_{1_j}) = a_1 + b_1 x_{1_j}$ und die Dichte $\rho_{1_j} = \rho_1(x_{1_j})$ für $j = 1, \dots, q_1$.
3. Bestimme die Funktion $r_k = g_2(x_{2_j}) = a_2 + b_2 x_{2_k}$ und die Dichte $\rho_{2_k} = \rho_2(x_{2_k})$ für $k = 1, \dots, q_2$.
4. Berechne die Vektoren $\tilde{\sigma}, \tilde{r}, \tilde{w}, \tilde{\rho}$ mit Hilfe des Kronecker-Produktes.
5. Ermittle die multidimensionalen OP Ψ_{i_m} für $i = 0, \dots, P$ und $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$ mittels des Kronecker-Produktes der eindimensionalen OP, welche über die Drei-Term-Rekursionsgleichung bestimmt werden.
6. Berechne mit der *Linienmethode aus Abschnitt 2.4.2* $q_1 \cdot q_2$ Werte $\tilde{u}_m = \tilde{u}(0, 0, \tilde{\sigma}_m, \tilde{r}_m)$ für $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$.
7. Approximiere die Koeffizienten durch

$$v_i \approx \frac{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \tilde{u}_m \Psi_{i_m} \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m}{\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (5.29)$$

8. Gib den approximierten Erwartungswert $S_0 v_0$ und die approximierte Varianz

$$Var \approx S_0^2 \left(\sum_{i=1}^p v_i \left(\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m \right) \right) \quad (5.30)$$

aus.

Der Großteil der Laufzeit der NIM für zufällige Volatilität bei asiatischen Optionen resultierte hauptsächlich aus der Berechnung der Werte u_i für $i = 1, \dots, q$. Um diese zu erlangen, musste q Mal ein System gewöhnlicher DGLen mit L Linien gelöst werden. Bei der Anwendung der NIM auf asiatische Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins treten zusätzliche Berechnungen, wie die Ermittlung der Werte \tilde{w} auf, für die das Kronecker-Produkt benötigt wird. Diese fallen im Vergleich zur Gesamtlaufzeit aber

sehr gering aus, was wir aus der NIM für europäische Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins erkennen können. Dort wurden diese Berechnungen nämlich ebenfalls durchgeführt und die Gesamtlaufzeit betrug trotzdem weniger als 1 Sekunde. Bei der in diesem Abschnitt geschilderten Methode erhöht sich die Laufzeit jedoch um ein Vielfaches im Vergleich zu der mit $N = 1$. Man muss letztendlich anstatt q Systeme mit L gewöhnlichen DGLen, $q_1 \cdot q_2$ Systeme mit L gewöhnlichen DGLen lösen. Grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass bei gleicher Verteilung die Werte $q = q_1 = q_2$ gewählt werden müssen, um die selbe Fehlergenauigkeit zu erreichen.

5.2.1.2 Intrusive Methode

Bei der IM ist der Ansatzpunkt des Verfahrens bei der partiellen DGL

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - ry)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (5.31)$$

mit der Endwert

$$u(T, y) = (1 - y/T)^+. \quad (5.32)$$

gegeben. Die Gleichung (5.31) schreiben wir in diesem Kapitel zur einfacheren Erläuterung in

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} - ry\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (5.33)$$

um. Wir ersetzen die Zufallsvariablen σ durch g_1 und r durch g_2 . Mit der verkürzten PCE

$$u(t, y(t), \cdot, \cdot) = \sum_{i=0}^P v_i(t, y(t)) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (5.34)$$

erhalten wir

$$\sum_{i=0}^P \frac{\partial v_i}{\partial t} \Psi_i + \sum_{i=0}^P \frac{\partial v_i}{\partial y} \Psi_i - y \sum_{i=0}^P \frac{\partial v_i}{\partial y} g_2 \Psi_i + \frac{y^2}{2} \sum_{i=0}^P \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} g_1^2 \Psi_i = \epsilon(p, u) \quad (5.35)$$

Mittels des Galerkin-Verfahrens (siehe (4.40)) ergibt sich für unser System

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + \frac{\partial v_l}{\partial y} - y \sum_{i=0}^P \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\langle g_2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} + \frac{y^2}{2} \sum_{i=0}^P \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \frac{\langle g_1^2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < t < T \quad (5.36)$$

für $l = 0, \dots, P$. Die Zufallsvariablen werden durch die inneren Produkte in deterministische Werte umgewandelt. Wir erhalten also ein Endwertproblem mit $(P+1)$ partiellen DGLen. Wir führen zwei Hilfsmatrizen $B_1 \in \mathbb{R}^{(P+1) \times (P+1)}$ mit

$$B_{1_{li}} = \frac{\langle g_1^2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} \quad (5.37)$$

und $B_2 \in \mathbb{R}^{(P+1) \times (P+1)}$

$$B_{2_{li}} = \frac{\langle g_2 \Psi_i \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle} \quad (5.38)$$

erstellen, welches unser Problem mit dem gegebenen Endwert (5.39) löst. Die Koeffizienten der PCE findet man in z :

$$v_i(0, 0) = z_{i,0} \quad (5.46)$$

für $i = 0, \dots, P$.

Algorithmus: IM bei asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins

0. Eingabewerte: S_0, T, a_1, b_1, q_1 , Verteilung₁, a_2, b_2, q_2 , Verteilung₂, p, L .
1. Berechne die Stützstellen x_{1_j} und die Gewichte w_{1_j} bzgl. der Verteilung₁ für $j = 1, \dots, q_1$ und die Stützstellen x_{2_k} und die Gewichte w_{2_k} bzgl. der Verteilung₂ für $k = 1, \dots, q_2$ mit der Gauß-Quadratur mit dem Golub-Welsch Algorithmus.
2. Bestimme die Funktion $\sigma_j = g_1(x_{1_j}) = a_1 + b_1 x_{1_j}$ und die Dichte $\rho_{1_j} = \rho_1(x_{1_j})$ für $j = 1, \dots, q_1$.
3. Bestimme die Funktion $r_k = g_2(x_{2_k}) = a_2 + b_2 x_{2_k}$ und die Dichte $\rho_{2_k} = \rho_2(x_{2_k})$ für $k = 1, \dots, q_2$.
4. Berechne die Vektoren $\tilde{\sigma}, \tilde{r}, \tilde{w}, \tilde{\rho}$ mit Hilfe des Kronecker-Produktes..
5. Ermittle die multidimensionalen OP Ψ_{i_m} für $i = 0, \dots, P$ und $m = 1, \dots, q_1 \cdot q_2$ mittels des Kronecker-Produktes der eindimensionalen OP, welche über die Drei-Term-Rekursionsgleichung bestimmt werden.
6. Berechne die Matrizen B_1 (5.37) und B_2 (5.38).
7. Bestimme die Matrizen A_1 (5.42), A_2 (5.43) und A_3 (5.44).
8. Verwende die Linienmethode um das System gewöhnlicher DGLen $\frac{d}{dt}z = (A_1 \otimes I + A_2 \otimes B_2 + A_3 \otimes B_1)z$ mit dem Endwert (5.39) zu lösen.
9. Lese die approximierten Koeffizienten mit Formel (5.46) aus.
10. Gib den approximierten Erwartungswert $S_0 v_0$ und die approximierte Varianz

$$Var \approx S_0^2 \left(\sum_{i=1}^P v_i \left(\sum_{m=1}^{q_1 \cdot q_2} \Psi_{i_m}^2 \tilde{\rho}_m \tilde{w}_m \right) \right) \quad (5.47)$$

aus.

Der Algorithmus ist auf der beiliegenden CD in dem Programm `as_pc_i.m` numerisch umgesetzt.

5.2.2 Numerische Untersuchungen

5.2.2.1 Festlegungen

Wir gehen abschließend noch auf die Numerik von asiatischen Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zinssatz ein. Die bereits bei den europäischen Optionen erhaltenen Ergebnisse hinsichtlich der Wahl von p und q können größtenteils übernommen werden. Die festgesetzten Werte bleiben gleich, d.h. $S_0 = 1$ und $T = 1$. Für asiatische Optionen ist ebenfalls eine lineare Entwicklung des Optionswertes in Abhängigkeit des Zinssatzes in Abbildung 5.7 zu erkennen. Wie bei den europäischen Derivaten bereits gezeigt wurde, könnte man alternativ den Erwartungswert $E(r(\cdot))$ berechnen und mittels der 1-dimensionalen PCE bzgl. der zufälligen Volatilität ähnliche gute Ergebnisse erlangen.

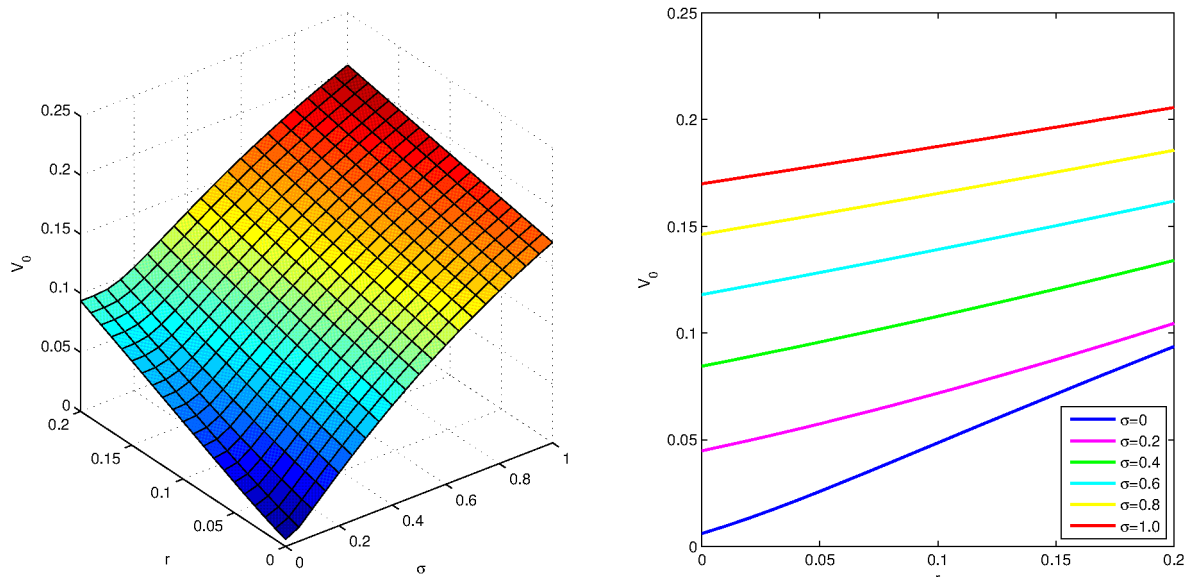


Abbildung 5.7: Optionswert von asiatischen Optionen in Abh. σ und r

Bei asiatischen Optionen entsteht jedoch noch ein weiteres Problem. Da sich die Zufallsbetrachtungen nur in sehr geringem Ausmaß unterscheiden, müssten wir um zusätzliche Informationen zu erhalten, das System gewöhnlicher DGLen auch auf diese Genauigkeit lösen. Bei europäischen Optionen, für die ohne Probleme exakte Ergebnisse berechnet werden konnten, lag der Unterschied zwischen

$$E(V(0, S_0, 0, \sigma_j, r(\cdot))) - V(0, S_0, 0, \sigma_j, E(r(\cdot))) \quad (5.48)$$

bei 10^{-7} , d.h. wir müssten die Toleranzen des Löser und die Anzahl der Linien extrem verbessern. Angesichts der kleinen Unterschiede ist dieses Vorgehen wenig sinnvoll.

Trotzdem erhalten wir auch bei asiatischen Optionen hinsichtlich der Varianz Unterschiede. Als Beispiel nehmen wir σ als uniform verteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $I_1 = [0.3, 0.5]$ und r als Gauß-verteilte Zufallsvariable mit $a_2 = 0.1$, $b_2 = 0.02$ und $E(r(\cdot)) = 0.1$ an:

- | | | | |
|----|----------------|---|-----------------------------------|
| 1. | NIM - $N = 2$ | : | $Var = 1.2046798 \cdot 10^{-4}$, |
| 2. | NIM - $N = 1$ | : | $Var = 9.5785377 \cdot 10^{-5}$, |
| | Differenz | : | $2.4682603 \cdot 10^{-5}$ |
| | rel. Differenz | : | 0.20488948. |

Die Standardbeispiele definieren wir in diesem Kapitel wie folgt:

1. $a_1 = 0.3$, $b_1 = 0.2$, Verteilung₁: Uniform, $a_2 = 0.06$, $b_2 = 0.08$, Verteilung₂: Uniform.
2. $a_1 = 0.3$, $b_1 = 0.2$, Verteilung₁: Uniform, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 0.02$, Verteilung₂: Gauß.

5.2.2.2 Konvergenz der Methoden der polynomiellen Chaonentwicklung

Wir gehen nicht mehr so ausführlich auf die Konvergenz der einzelnen Methoden wie im 1-dimensionalen Fall ein, da sich von den Grundaussagen nichts ändert. Wir zeigen an Standardbeispiel 2, dass die bereits bekannten Erkenntnisse noch gültig sind. Das exakte Ergebnis wurde mit der NIM und $q_1 = q_2 = 25$, $p = 4$, $L = 400$, $tol_{rel} = 10^{-5}$ und $tol_{abs} = 10^{-8}$ berechnet. Für den Erwartungswert erhält man $V_0 = 0.107688$ und für die Varianz $Var = 1.2044908 \cdot 10^{-4}$:

- 1) Für die NIM verwenden wir $L = 200$ und $p = 4$:

$q_1 = q_2$	5	10	15	20	25
$\epsilon_{abs}(E)$	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$
$\epsilon_{rel}(Var)$	$1.16 \cdot 10^0$	$6.39 \cdot 10^{-3}$	$6.50 \cdot 10^{-3}$	$6.49 \cdot 10^{-3}$	$6.48 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 5.2: Fehler für Standardbeispiel 2 mit der NIM

- 2) Für die IM verwenden wir $L = 200$ und $q_1 = q_2 = 25$:

p	1	2	3	4
$\epsilon_{abs}(E)$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$1.79 \cdot 10^{-5}$	$1.79 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon_{rel}(Var)$	$8.86 \cdot 10^{-3}$	$7.83 \cdot 10^{-5}$	$1.58 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.3: Fehler für Standardbeispiel 2 mit der IM

Bei den hervorgehobenen Werten sind beide Parameter gleich. Erneut sind hohe Unterschiede bei den Fehlern zwischen den einzelnen Methoden ersichtlich. Wir erhöhen folglich die Toleranzen für die Laufzeituntersuchungen bei der NIM um eine Potenz.

5.2.2.3 Laufzeitvergleich der Methoden der polynomiellen Chaotentwicklung

Wir setzen in diesem Abschnitt wieder $q_1 = q_2 = q$. Bevor wir näher auf die Laufzeit direkt eingehen, betrachten wir zwei Abbildungen:

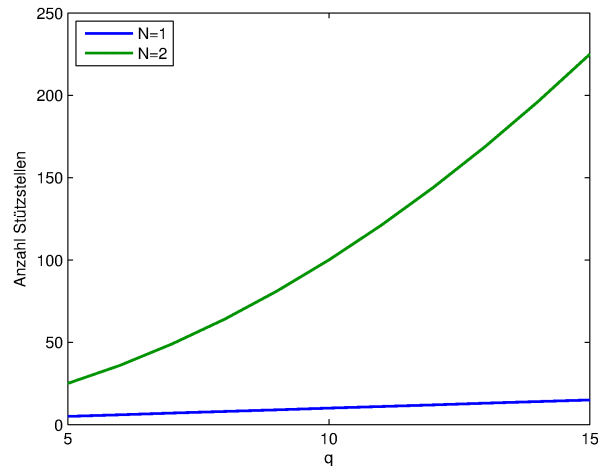


Abbildung 5.8: Anzahl der Stützstellen der NIM

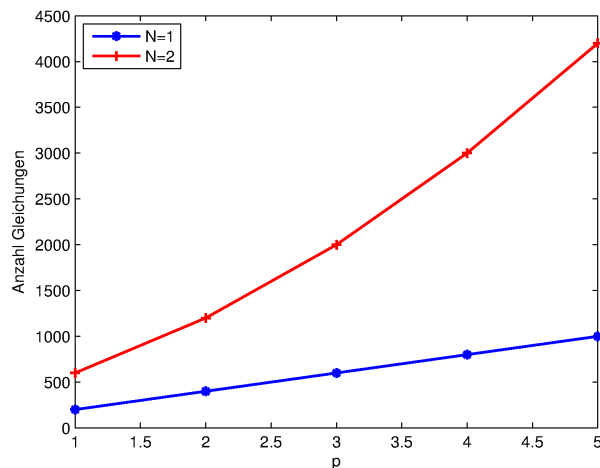


Abbildung 5.9: Anzahl der Linien bei der IM

Die Laufzeit der NIM war für $N = 1$ linear von der Anzahl der Stützstellen abhängig. In Abbildung 5.8 ist dies grafisch veranschaulicht. Des weiteren kann man aber erkennen, dass für $N = 2$ die Anzahl der Stützstellen exponentiell anwächst, was sich in dieser

Form auch auf die Laufzeit auswirkt. Bei der IM ist ähnliches Verhalten für p abzulesen. Da die Laufzeit aber ohnehin mit der Anzahl der Gleichungen exponentiell wächst (siehe Kapitel 4) und nun auch noch die Anzahl der Gleichungen exponentiell von p abhängt, erhalten wir für hohe Ordnungen horrende Laufzeiten. In den Abbildungen 5.10 und 5.11 ist dieses Verhalten veranschaulicht.

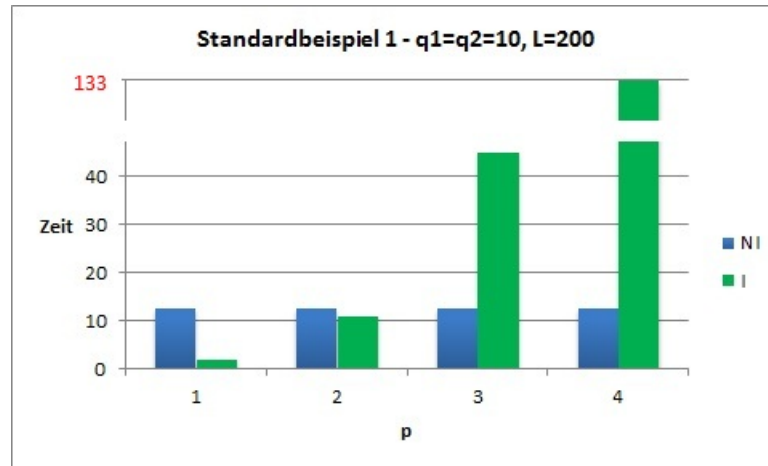


Abbildung 5.10: Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 1

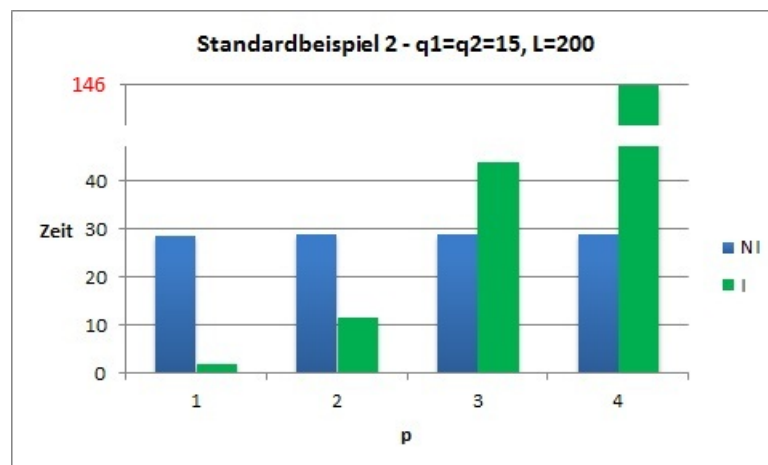


Abbildung 5.11: Laufzeit der NIM und der IM für Standardbeispiel 2

Man sollte also speziell bei der IM die Ordnung der PCE nicht zu hoch wählen. Diese ist im Normalfall aber auch nicht nötig, da bereits bei $p = 2$ (siehe Tabelle 5.3) relativ gute Ergebnisse erzielt werden.

5.2.2.4 Vergleich mit der Monte-Carlo Methode

Der Vergleich mit der MCM wird in diesem Abschnitt nicht mehr explizit durchgeführt. Bereits in der Sektion 4.2.2.6 haben wir gezeigt, dass die Laufzeit der MCM mit M

Zufallszahlen mit der, der NIM mit q Stützstellen ungefähr übereinstimmt. Nehmen wir an, dass wir maximal 25 Stützstellen pro Integral verwenden, dann dürften wir bei der MCM maximal 625 Zufallszahlen ziehen. Die Fehler sind dabei wieder wesentlich größer.

5.3 Schlussfolgerungen

In der nachfolgenden Tabelle sind Vor- und Nachteile der beiden Methoden der PCE nochmals übersichtlich dargestellt:

	NIM	IM
Vorteile	<ul style="list-style-type: none"> ++ Schnelle Berechnung bei einfachen Modellen möglich + Erhöhung der Ordnung der PCE nachträglich schnell durchführbar +/- Relativ schnelle Konvergenz bei komplexen Modellen 	<ul style="list-style-type: none"> ++ Fehler bei Berechnung der DGL werden reduziert + Laufzeit unabhängig von der Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Quadratur + Schnelle Konvergenz bei komplexen Modellen
Nachteile	<ul style="list-style-type: none"> - Laufzeit wächst im N-dimensionalen Fall abh. von q exponentiell schnell an - Fehler extrem von der Anzahl der Stützstellen der Gauß-Quadratur abhängig 	<ul style="list-style-type: none"> - Laufzeit wächst im N-dimensionalen Fall abh. von p exponentiell schnell an - Bei einfachen Modellen nicht immer effizient anwendbar

Tabelle 5.4: Übersicht über Vor- und Nachteile der NIM und der IM

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde mit der PCE ein sehr effizientes Verfahren zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in mathematischen Modellen erläutert. Angewendet wurde sie schließlich auf die in Kapitel 2 beschriebenen europäischen und asiatischen Optionen, indem die sonst als bekannt vorausgesetzten Eingabegrößen Volatilität und sicherer Zinssatz als Zufallsvariablen aufgefasst wurden. Durch diese Veränderung konnte eine der realitätsverzerrenden Annahmen, die im Black-Scholes-Modell gemacht wurden, abgeschwächt werden. Besonders für die asiatischen Optionen wurden bei den Methoden der PCE enorme Laufzeit- und Konvergenzvorteile gegenüber der bekannteren MCM aufgezeigt. An dieser Stelle sollte noch angemerkt werden, dass bei sehr vielen Optionsarten, die hier nicht näher behandelt wurden, der faire Optionswert durch Lösung einer DGL, ähnlich wie bei den asiatischen Optionsscheinen, erhalten werden kann. Ein Beispiel für solch ein Derivat wäre durch eine Power-Option (siehe [11]) gegeben. In diesem Fall können ähnlich signifikante Unterschiede zwischen der NIM bzw. IM und der MCM erwartet werden.

Sowohl für europäische als auch für asiatische Optionen erwies sich speziell die Erweiterung der Modelle im Hinblick auf die zufällige Volatilität als nützlich, da man dadurch neue Informationen bzgl. des fairen Optionswertes erhält. In Kapitel 5 wurde das 2-dimensionale Chaos mit Bezug auf die zufällige Volatilität und dem zufälligem Zinssatz erläutert. Dabei wurde bei den numerischen Untersuchungen deutlich, dass die zusätzlichen Informationen, die man durch die Erweiterung auf dem zufälligem Zinssatz erhält, nicht so weitreichend, wie die der Erweiterung auf die zufällige Volatilität, sind. Nichtsdestotrotz zeigten die numerischen Ergebnisse im mehrdimensionalen Fall sogar noch größere Unterschiede in der Länge der Laufzeit zwischen den Methoden der PCE und der MCM auf. Bei anderen, komplexeren Optionstypen benötigt man ohnehin mehrere Zufallsvariablen. Die Basket-Optionen sind beispielsweise von nicht nur von einem Basiswert abhängig, d.h. in die Berechnung gehen bereits mehrere verschiedene Volatilitätskennzahlen ein, die folglich alle als Zufallsvariablen betrachtet werden können. Speziell bei solchen Optionstypen ist die Anwendung des multidimensionalen Chaos sinnvoll.

A Anhang

A.1 Inhalt der CD-ROM

Die beiliegende CD-ROM ist in sechs Verzeichnisse unterteilt, wobei darin die Diplomarbeit als PDF und die in dieser Arbeit erläuterten Algorithmen als MATLAB-Codes zu finden sind. Zudem werden einige Programme, die zum erstellen der Grafiken verwendet wurden, bereitgestellt.

Ordner	File	Beschreibung
Diplomarbeit	Diplomarbeit.pdf	Komplette Ausfertigung der Diplomarbeit im PDF-Format
EU	bs.m eu_mc.m eu_pc_ni.m Gausshermite.m Gausslaguerre.m Gausslegendre.m zv_mc.m zv_pc.m	Alle notwendigen MATLAB-Codes zur Berechnung des fairen Optionswertes und der Varianz für europäische Optionen mit zufälliger Volatilität
AS	as_mc.m as_pc_i.m as_pc_ni.m func.m Gausshermite.m Gausslaguerre.m Gausslegendre.m zv_mc.m zv_pc.m	Alle notwendigen MATLAB-Codes zur Berechnung des fairen Optionswertes und der Varianz für asiatische Optionen mit zufälliger Volatilität
EU2	bs.m eu2_mc.m eu2_mc2.m eu2_pc_ni.m Gausshermite.m Gausslaguerre.m Gausslegendre.m zv_mc.m zv_pc.m	Alle notwendigen MATLAB-Codes zur Berechnung des fairen Optionswertes und der Varianz für europäische Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins

AS2	as2_mc.m as2_pc_i.m as2_pc_ni.m func.m Gausshermite.m Gausslaguerre.m Gausslegendre.m zv_mc.m zv_pc.m	Alle notwendigen MATLAB-Codes zur Berechnung des fairen Optionswertes und der Varianz für asiatische Optionen mit zufälliger Volatilität und zufälligem Zins
Plot	koeffizienten.m koeffizienten2.m plot_eu_mc_pc_2.m plot_eu2_mc_pc_2.m plot_wiener.m verteilung_ew_var_fehler.m verteilung2_ew_var_fehler.m	Programme zur Erstellung einiger Grafiken. Zur Anwendung die eingefügten Kommentare beachten

Tabelle A.1: Überblick über den Inhalt der CD-ROM

Die in der Arbeit erwähnten M-Files sind die Ausgangsprogramme, in die die Daten eingegeben werden. Die restlichen Funktionen sind Unterprogramme, die bei Bedarf aufgerufen werden.

Bemerkungen zu den M-Files:

- Der Anfang `as` bzw. `eu` weist auf die Optionsart hin.
- Die 2 dahinter impliziert zufällige Volatilität *und* zufälligem Zins.
- Nach `_` wird die Berechnungsweise angegeben: `mc` steht für MCM und `pc` für PCE
- Nach `_` folgt bei der polynomielle Chaosentwicklung die Angabe der Methode: `i` steht für intrusiv und `ni` für nicht-intrusiv.
- Die Files, die mit `Gauss` beginnen, liefern die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadratur, mit der das File endet. Sie werden von der Funktion `zv_pc.m` aufgerufen.
- Die Funktion `bs.m` gibt den Black-Scholes Wert zurück.
- `func.m` ist eine Hilfsfunktion für den Löser `ode23s`.
- `zv_mc.m` berechnet Zufallszahlen und wird von den Files, die die MCM verwenden, aufgerufen.
- Die Funktion `zv_pc.m` liefert die Stützstellen und die Gewichte der Gauß-Quadratur, die angepasste Dichte und die 1-dimensionalen OP für die Programme der PCE.

A.2 Hinweise zu den Programmen

1. Die Ausgangsprogramme haben alle die gleiche Struktur. Sie sind in MATLAB als Funktionen programmiert, die durch Aufruf im Command Window gestartet werden. Den fairen Optionswert und die Varianz einer europäischen Option mit zufälliger Volatilität erhält man beispielsweise durch:

```
[V0,Var] = as_pc_ni(T,a,b,Verteilung,q,p,L)
```

2. Die Variablen sind wie in den zugehörigen Algorithmen definiert. Diejenigen, die nicht im Funktionsaufruf direkt stehen, können in den Programmen selbst geändert werden:

```
17 S = 1;
18 r = 0.1;
```

3. Die Toleranzen des Löfers müssen auch in den Programmen festgelegt werden:

```
53 options = odeset('JConstant','on','RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-6);
```

4. Bei europäischen Optionen kann man für die Variable `Put_Call` entweder `'Put'` oder `'Call'` eingeben.

5. Für die Eingabe der Verteilung hat man folgende Wahlmöglichkeiten:

```
- 'Gauß'           - 'Uniform'
- 'Beta'          - 'Gamma'
- 'Binomial'     - 'Poisson'
- 'Hypergeometrisch' - 'Negativbinomial'
```

6. Zudem kann man durch einkommentieren, d.h. man löscht `%`, die Koeffizienten ausgeben:

```
75 % display(v)
```

7. Die Parameter der Verteilungen sind in den Files `zv_mc.m` und `zv_pc.m` definiert. Sie müssen in beiden Files geändert werden. Für die Betaverteilung findet man sie beispielsweise bei:

`zv_mc.m`

```
20 alpha = 3;
21 bet = 1;
```

`zv_pc.m`

```
59 alphad = 3;
60 betad = 1;
```


Literaturverzeichnis

- [1] F. Augustin, A. Gilg, M. Paffrath, P. Rentrop, U. Wever: *Polynomial chaos for the approximation of uncertainties: chances and limits*. Euro. Jnl. of Applied Mathematics 19 (2008), 149-190.
- [2] F. Black, M. Scholes: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Jnl. of Political Economy 81 (1973), 637-659.
- [3] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005.
- [4] R. H. Cameron, W. T. Martin: *The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals*. Ann. of Math. 48 (1947) 2, 385-392.
- [5] P. Deuffhard, A. Hohmann: *Numerische Mathematik 1. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. 4. Auflage, de Gruyter, Berlin, 2008.
- [6] W. Gautschi: *Computational aspects of orthogonal polynomials*. Paper, Purdue University, 1990, in: *Orthogonal polynomials: Theory and practice*, Kluwer Academic Publishers, 181-216.
- [7] H.-O. Georgii: *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Auflage, de Gruyter, Berlin, 2009.
- [8] C. Großmann, H.-G. Roos: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. 2. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1994.
- [9] L. Grüne: *Numerische Mathematik I*. Skript zur Vorlesung, Universität Bayreuth, 2004. www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/.
- [10] L. Grüne: *Numerische Methoden der Finanzmathematik*. Skript zur Vorlesung, Universität Bayreuth, 2009. www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/.
- [11] M. Günther, A. Jüngel: *Finanzderivate mit MATLAB. Mathematische Modellierung und numerische Simulation*. 2. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2010.
- [12] J. C. Hull: *Optionen, Futures und andere Derivate*. 7. Auflage, Pearson Studium, München, 2009.
- [13] M. H. Kalos, P. A. Whitlock: *Monte Carlo Methods*. 2. Auflage, Wiley-VCH, Weinheim, 2008.

- [14] P. Knabner, L. Angermann: *Numerik partieller Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, Berlin, 2000.
- [15] O. P. Le Maître, O. M. Knio: *Spectral Methods for Uncertainty Quantification. With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, Heidelberg 2010.
- [16] R. C. Merton: *Theory of rational option pricing*. Bell Jnl. of Economics and Management Science 4 (1973), 141-183.
- [17] G. Onorato, G. J. A. Loeven, G. Ghorbaniasl, H. Bijl, C. Lacor: *Comparison of intrusive and non-intrusive polynomial chaos methods for CFD applications in aeronautics*. V European Conference on Computational Fluid Dynamics, Lissabon, 2010.
- [18] A. B. Owen: *Monte Carlo, Quasi-Monte Carlo, and Randomized Quasi-Monte Carlo*. Conference at the Claremont Graduate Univeristy, Claremont, 1998.
- [19] R. Pulch, C. v. Emmerich: *Polynomial chaos for simulating random volatilities*. Mathematics and Computers in Simulation 80 (2009), 245-255. Preprint, Universität Wuppertal, 2007. www.math.uni-wuppertal.de/org/Num/
- [20] W. Schoutens: *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. Springer, New-York, 2000.
- [21] W. Schweizer: *MATLAB kompakt*. 3. Auflage, Oldenburg, München, 2008.
- [22] D. Werner: *Funktionalanalysis* 5. Auflage, Springer, Berlin 2005.
- [23] N. Wiener: *The homogeneous chaos*. Amer. J. Math. 60 (1938), 897-936.
- [24] D. Xiu, G. E. Karniadakis: *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*. SIAM J. Sci. Comput. 24 (2002) 2, 619-644.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Neuhaus a.d. Pegnitz, 28.02.2011

.....

Andreas Brunner