

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Hedging mit Monte Carlo Algorithmen

Diplomarbeit

von

Thomas Höllbacher

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 30. Oktober 2011

Aufgabenstellung und Betreuung:
Prof. Dr. L. Grüne

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Grüne für die interessante Themenstellung und die hervorragende Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit, sowie für das Heranführen an die Themengebiete Numerik und Finanzmathematik durch seine Vorlesungen und Seminare bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Europäische Optionen	5
2.2 Optionsbewertung	6
2.3 Stochastische Differentialgleichungen	7
2.3.1 Stochastische Grundlagen	7
2.3.2 Der Wiener Prozess	11
2.3.3 Stochastische Differentialgleichungen	13
2.3.4 Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen	15
2.4 Die geometrische Brownsche Bewegung	16
2.5 Das Black-Scholes Modell	20
2.6 Hedging	25
3 Monte Carlo Simulation	31
3.1 Theoretischer Hintergrund	31
3.2 Monte Carlo zur Optionsbewertung	36
3.3 Hedging mit Monte Carlo	38
3.4 Varianzreduktion	38
3.4.1 Antithetische Zufallsvariablen	39
3.4.2 Control Variates	45
3.5 Simulation der Entwicklung eines Portfolios	50
4 Stochastische Volatilität	53
4.1 Mean Reverting Volatility	53

4.2	Numerische Simulation	55
4.3	Hedging im Mean Reverting Volatility Modell	57
5	Asiatische Optionen	67
5.1	Grundlagen	67
5.2	Bewertung asiatischer Optionen	69
5.2.1	Geometric average rate option	69
5.2.2	Discrete arithmetic average rate option	76
5.3	Varianzreduktion	79
5.3.1	Antithetische Zufallsvariablen	79
5.3.2	Control Variates	80
5.3.3	Vergleich der Methoden	86
5.4	Hedging	88
5.4.1	Summe der Kurswerte als Control Variate	89
5.4.2	Geometrische asiatische Option als Control Variate	89
5.4.3	Numerische Simulation	92
6	Zusammenfassung	103
A	Inhalt der beiliegenden CD	105
	Literaturverzeichnis	111

Abbildungsverzeichnis

2.1	Auszahlungsfunktion einer europäischen Call- und Put-Option	6
2.2	Entwicklung des DAX 01/1960 - 05/2011	8
2.3	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung . . .	12
2.4	Realisierung des Wiener Prozesses	13
2.5	Kursverlauf auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung	18
2.6	Komponenten der geometrischen Brownschen Bewegung	19
2.7	Wert einer europäischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von $S(t)$ für verschiedene t	24
2.8	Dreidimensionale Darstellung des Wertes einer europäischen Call- und Put- Option mit Verlauf eines Pfades	25
2.9	Dreidimensionale Darstellung des Delta einer europäischen Call- und Put- Option mit Verlauf eines Pfades	28
2.10	Portfolio-Entwicklung auf Basis der Black-Scholes Formel	30
3.1	Monte Carlo Approximation des Wertes einer europäischen Call-Option für verschiedene N	37
3.2	Antithetischer Pfad der geometrischen Brownschen Bewegung	40
3.3	Monte Carlo Approximation des Delta einer europäischen Call-Option für verschiedene N nach Standard Monte Carlo und Control Variates Ansatz . .	49
3.4	Optionswert und Delta nach Monte Carlo und Black-Scholes	50
3.5	Entwicklung eines Portfolios nach Monte Carlo und Black-Scholes	51
4.1	Entwicklung der Mean Reverting Volatility Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$	55
4.2	Entwicklung der Mean Reverting Volatility Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$	56
4.3	Durchschnittliche Entwicklung der Mean Reverting Volatility Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$	57
4.4	Durchschnittliche Entwicklung der Mean Reverting Volatility Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$	57
4.5	Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell	60
4.6	Verlauf der Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$	61
4.7	Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell	62

4.8	Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell	63
5.1	Wert einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von $S(t)$ für verschiedene t	74
5.2	Vergleich der Werte einer geometrischen asiatischen und einer europäischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von S_0	75
5.3	Dreidimensionale Darstellung des Wertes einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option und Verlauf eines Pfades	76
5.4	Wert einer arithmetischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von $S(t)$ für verschiedene t	78
5.5	Vergleich der Werte einer arithmetischen und geometrischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von S_0	79
5.6	Monte Carlo Approximation des Wertes einer arithmetischen asiatischen Call-Option für verschiedene N nach Standard Monte Carlo Methode und Methode antithetischer Zufallsvariablen	80
5.7	Monte Carlo Approximation des Wertes einer arithmetischen asiatischen Call-Option für verschiedene N nach Standard Monte Carlo Methode und Summe der Kurswerte als Control Variate	84
5.8	Monte Carlo Approximation des Wertes einer arithmetischen asiatischen Call-Option für verschiedene N nach Standard Monte Carlo Methode und geometrischer asiatischer Option als Control Variate	86
5.9	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung von Plain Monte Carlo mit $M = 100$ und $N = 1000$	94
5.10	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung von Plain Monte Carlo mit $M = 200$ und $N = 10000$	95
5.11	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate mit $M = 100$ und $N = 1000$	96
5.12	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate mit $M = 200$ und $N = 10000$	97
5.13	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate mit $M = 100$ und $N = 1000$	98
5.14	Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate mit $M = 200$ und $N = 10000$	99

Tabellenverzeichnis

3.1	Größenvergleich der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode und Methode antithetischer Zufallsvariablen	43
3.2	Größenvergleich der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode und Methode antithetischer Zufallsvariablen mit $N/2$ Simulationen . .	44
3.3	Größenvergleich der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode und Control Variates Ansatz	49
4.1	Rechenzeiten zur Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell für verschiedene M und N	64
4.2	Durchschnittliche relative Quadratmittelabweichung bei Simulation auf Basis des Black-Scholes Modells und Mean Reverting Volatility Modells	65
5.1	Vergleich der Werte einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option für verschiedene Anzahlen von Betrachtungszeitpunkten	74
5.2	Vergleich der Optionswerte nach den vier Verfahren für verschiedene Stichprobengrößen N	87
5.3	Vergleich der Größen der 95%-Konfidenzintervalle nach den vier Verfahren für verschiedene Stichprobengrößen N	87
5.4	Vergleich der Verkleinerung des 95%-Konfidenzintervalls bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen und dem Control Variates Ansatz für verschiedene Stichprobengrößen N	88
5.5	Vergleich der relativen Rechenzeit bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen und dem Control Variates Ansatz für verschiedene Stichprobengrößen N	88
5.6	Durchschnittliche relative Quadratmittelabweichung der Approximationsverfahren	100
5.7	Rechenzeiten der Approximationsverfahren für verschiedene M und N	101

Kapitel 1

Einleitung

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.

Carl Friedrich Gauß

Die Finanzmathematik ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, das sich mit Finanzmärkten beschäftigt und das in den letzten Jahren verstärkte Aufmerksamkeit aus der gesamten Gesellschaft erfahren hat. Spätestens mit dem Börsengang der Deutschen Telekom 1996 als sog. "Volksaktie" war auch das Interesse der privaten Anleger in Deutschland für den Aktienmarkt geweckt.

Neben dem Handel mit Wertpapieren ist aber auch die Bedeutung derivativer Finanzinstrumente gestiegen. Der Wert eines Derivats (von lat. *derivare*: ableiten) ist abhängig von der Kursentwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes, beispielsweise einer Aktie. Der Handel mit Derivaten kann aus verschiedenen Motivationen heraus erfolgen. Zum einen lockt durch die gezielte Übernahme von Risiken ein kurzfristiger Gewinn ("Spekulation"), oft ist das Ziel jedoch auch die Absicherung der eigenen Position gegen Kursschwankungen des Basiswertes ("Hedging"). Die Bewertung von Finanzinstrumenten und damit verbunden die Modellierung von Kursverläufen spielen also eine zentrale Rolle in der Finanzmathematik.

Ein grundlegender Baustein der Entwicklung der Finanzmathematik war das in den 70er Jahren von Fischer Black und Myron Scholes veröffentlichte Black-Scholes Modell. Mit Hilfe der daraus abgeleiteten Black-Scholes Formel kann der Preis für eine europäische Option

über den Zeitverlauf analytisch bestimmt werden. 1997 erhielten Scholes und Merton, der ebenfalls zur Entwicklung des Modells beigetragen hatte, nach dem Tod von Black im Jahr 1995, den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Die zentrale Idee bei der Herleitung der Formel beruht auf der Zusammenstellung und Umschichtung eines Portfolios, das aus der Option, dem Basiswert und einem risikofreien Bond besteht. Die Umschichtungen haben dabei das Ziel, das Risiko des Portfolios zu eliminieren. Diese Strategie der Absicherung beim Handel mit Optionen wird Delta-Hedging genannt und soll später wieder aufgegriffen werden.

Werden andere Optionstypen als die europäische Option oder kompliziertere Kursmodelle als die geometrische Brownsche Bewegung, die dem Black-Scholes Modell zugrunde liegt, betrachtet, ist eine analytische Bestimmung des Optionswertes meist nicht mehr möglich. In diesem Fall stellt die Monte Carlo Simulation eine Alternative dar, um den gesuchten Optionswert approximativ zu bestimmen oder die oben genannte Hedging-Strategie umzusetzen.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie die Monte Carlo Simulation genutzt werden kann, um den Wert einer Option und schließlich auch eine Hedging-Strategie beim Optionshandel zu bestimmen. Dazu werden zunächst in Kapitel 2 die Grundlagen der Optionsbewertung am Beispiel der leicht verständlichen europäischen Optionen (Plain Vanilla Optionen) erarbeitet. Mit Hilfe stochastischer Differentialgleichungen wird ein Kursmodell, die geometrische Brownsche Bewegung, formuliert. Trotz der Einfachheit dieses Modells lassen sich damit Kursverläufe des Basiswertes, bspw. Aktienkurse, gut abbilden und Erkenntnisse gewinnen, die im Lauf der Arbeit auf andere Situationen angewendet werden. Weiterhin wird die Herleitung der Black-Scholes Formel, die auf dem Kursmodell der geometrischen Brownschen Bewegung basiert, sowie das daraus resultierende Verfahren zur Portfolio-Umschichtung betrachtet. In diesem Zuge wird auch gezeigt, dass sich die Durchführung dieser Hedging-Strategie auf die Berechnung zweier Optionswerte zurückführen lässt. Kapitel 2 basiert auf den Arbeiten von L. Grüne [7], M. Günther und A. Jüngel [8], D. Higham [9] und R. Seydel [20].

In Kapitel 3 wird die Monte Carlo Simulation eingeführt und untersucht. Sie stellt das zentrale Verfahren dar, auf dessen Basis die Optionsbewertung und damit auch die Risikoelimination durch Portfolio-Umschichtungen in dieser Arbeit realisiert werden. Da die Monte Carlo Simulation einen sehr hohen Aufwand erfordert, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, werden in diesem Kapitel neben der Standard Monte Carlo Methode auch einige Möglichkeiten betrachtet, mit denen das Konvergenzverhalten verbessert werden kann. Abschließend wird die Monte Carlo Methode verwendet, um ein Portfolio basierend auf einer europäischen Option zu simulieren. Dieses Kapitel orientiert sich an den Arbeiten von L. Grüne [7], D. Higham [9] und P. Brandimarte [3].

Im folgenden Kapitel werden die restriktiven Annahmen, die in Kapitel 2 zur Herleitung des Black-Scholes Modells auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung getroffen wurden, gelockert. Die Modellierung der Volatilität als im Betrachtungszeitraum konstanten Parameter wird aufgegeben. Stattdessen wird ein Modell stochastischer Volatilität betrachtet. Dies bedeutet, dass nun nicht nur die Kursentwicklung des Basiswertes, sondern auch die Volatilität durch einen stochastischen Prozess dargestellt werden. Weiterhin wird ein Gleichgewichtsniveau für die Volatilität, das sog. Mean Reversion Level, eingeführt und durch eine

deterministische Differentialgleichung modelliert. Das betrachtete Mean Reverting Volatility Modell wird in dieser bzw. ähnlicher Form von R. Seydel ([20, Example 1.15]) bzw. L. Grüne ([7, Kapitel 4.3]) vorgeschlagen. Es wird gezeigt, dass in diesem Kursmodell kein perfektes Hedging mehr möglich ist, das bedeutet, dass das Risiko nicht vollständig eliminiert werden kann. Ein Vergleich der durchschnittlichen Portfolio-Abweichungen zeigt aber, dass mit Hilfe der Monte Carlo Methode die Kenntnis über die Marktsituation genutzt werden kann und somit bessere Ergebnisse als bei Verwendung der analytischen Black-Scholes Formel erzielt werden.

Das fünfte Kapitel befasst sich mit asiatischen Optionen. Diese gehören zur Klasse der pfadabhängigen Optionen. Der Optionswert hängt demnach nicht, wie bei Plain Vanilla Optionen, allein vom Kurs des Basiswertes im Endzeitpunkt ab, sondern vom Kursverlauf über die ganze Laufzeit. Es wird gezeigt, dass für eine bestimmte Art asiatischer Optionen, die geometrische asiatische Option, auch hier eine geschlossene Formel für den Optionswert existiert. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht zutreffend. Deshalb werden die Optionsbewertung sowie die Portfolio-Umschichtungen mittels der Monte Carlo Methode durchgeführt und die in Kapitel 3 betrachteten Methoden zur Verbesserung der Genauigkeit auf den asiatischen Optionstyp übertragen. Abschließend erfolgt ein differenzierter Vergleich der verschiedenen Verfahren zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit. Dieses Kapitel orientiert sich an den Arbeiten von Y.K. Kwok [12] und P. Brandimarte [3].

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren und Algorithmen sind in MATLAB[®] Version R2009b implementiert. Ebenso sind alle in dieser Arbeit verwendeten Graphiken mit MATLAB[®] erzeugt worden. Falls absolute Rechenzeiten für die Durchführung der einzelnen Simulationen angegeben sind, beziehen sich diese auf das verwendete System (Intel[®] Core[™] 2 Duo T9550 @ 2.66GHz, 4GB DDR3 RAM unter Windows 7 64bit) und können auf anderen Systemen abweichen.

Bayreuth, im Oktober 2011

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Europäische Optionen

Eine *Option* ist ein bedingtes Termingeschäft. Sie verleiht dem Inhaber der Option (dem Optionskäufer) das Recht (jedoch nicht die Pflicht), einen bestimmten *Basiswert* S (underlying asset) zu einem späteren Zeitpunkt zu einem vorher festgelegten *Ausübungspreis* K (strike price) zu kaufen (*Call-Option*) oder zu verkaufen (*Put-Option*). In der Praxis erfolgt bei Ausübung der Option meist kein Handel des Basiswertes, sondern eine Glattstellung durch ein kompensierendes Geldgeschäft.

Man unterscheidet zwischen verschiedenen Typen von Optionen. Zu Beginn wird die *europäische Option*, auch *Plain Vanilla Option* genannt, näher betrachtet. Die daraus gewonnenen Einsichten werden dann auf andere Modelle übertragen.

Eine europäische Option zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Ausübung nur im Fälligkeitszeitpunkt T möglich ist (im Gegensatz zu amerikanischen Optionen, deren Ausübung jederzeit bis zum Laufzeitende möglich ist). Der Wert der europäischen Option hängt dabei vom Kurs des Basiswertes im Fälligkeitszeitpunkt $S(T)$ sowie vom Ausübungspreis K ab.

Definition 2.1 (Auszahlungsfunktion europäischer Optionen).

Die *Auszahlungsfunktion* $\Lambda(S(T))$ (der *Payoff*) einer europäischen Option (und damit auch der Optionswert im Fälligkeitszeitpunkt) ist gegeben durch

$$V(T, S(T)) = \Lambda(S(T)) = \begin{cases} (S(T) - K)^+, & \text{für eine Call-Option} \\ (K - S(T))^+, & \text{für eine Put-Option,} \end{cases} \quad (2.1)$$

wobei $(S(T) - K)^+ := \max\{S(T) - K, 0\}$ bzw. $(K - S(T))^+ := \max\{K - S(T), 0\}$. ◦

Abbildung 2.1 stellt den Optionswert einer europäischen Call- und Put-Option im Fälligkeitszeitpunkt graphisch dar. Es lässt sich gut erkennen, dass für Kurswerte des Basiswertes $S(T) < K$ im Fall einer Call-Option bzw. $S(T) > K$ im Fall einer Put-Option keine Ausübung stattfindet. In diesem Fall ist es für den Inhaber der Option vorteilhaft, diese verfallen zu lassen und den Basiswert stattdessen zum Kurswert zu handeln. In diesem Fall ergibt sich für den Optionswert also $V_C(T, S(T)) = 0$ (Call-Option) bzw. $V_P(T, S(T)) = 0$ (Put-Option). Diese Diagramme nennt man aufgrund der Form der Graphen *Hockeystick-Diagramme*.

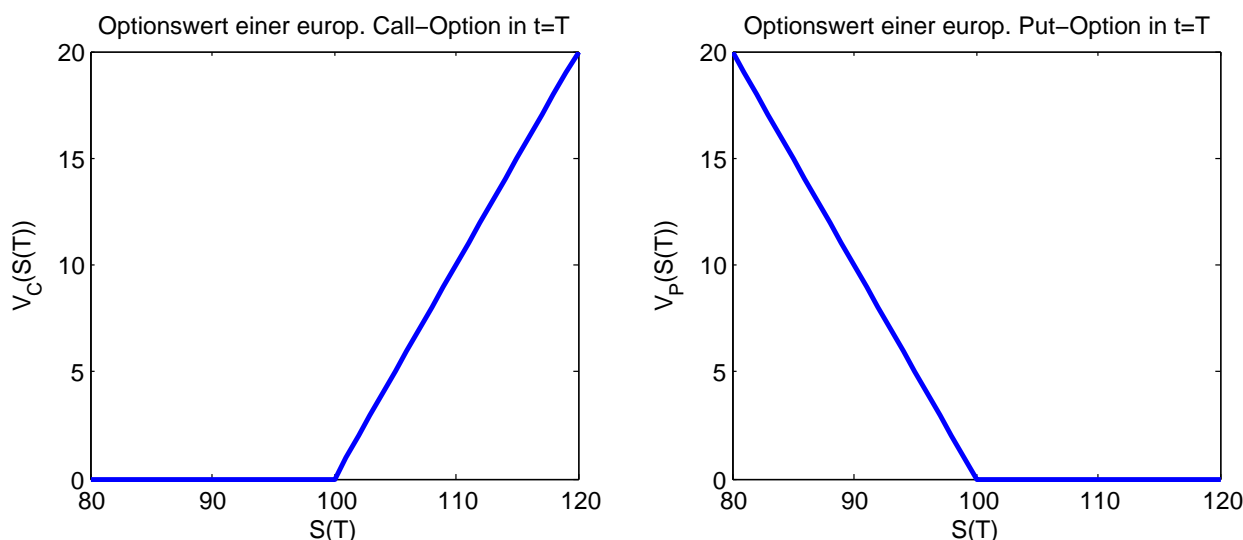


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung der Auszahlungsfunktionen europäischer Call- und Put-Optionen im Fälligkeitszeitpunkt in Abhängigkeit des Kurswerts $S(T)$ des Basiswertes in $t = T$ für $S(T) \in [80, 120]$ und $K = 100$

2.2 Optionsbewertung

Das Ziel ist nun, den Optionswert nicht erst zum Laufzeitende T , sondern schon zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T)$ zu betrachten. Wie in (2.1) gesehen, ist der Optionswert in $t = T$ vom Kurs des Basiswertes abhängig. Da dieser jedoch zu früheren Zeitpunkten $t < T$ nicht bekannt ist, wird er durch eine Zufallsvariable auf Basis eines stochastischen Kursmodells modelliert. Damit lässt sich ausgehend vom aktuellen Kurswert der Kurs des Basiswertes im Fälligkeitszeitpunkt der Option simulieren. Dadurch ist es möglich, mittels (2.1) den Wert der Option im Endzeitpunkt zu berechnen.

Schließlich wird der Optionswert zum aktuellen Zeitpunkt ermittelt, indem der Erwartungswert des Optionswertes bei Fälligkeit mit dem risikofreien Zinssatz abgezinst wird. Dieses Vorgehen nennt man risikoneutrale Bewertung. Der Anleger erhält hier keine Vergütung für übernommenes Risiko, sondern es wird eine Rendite in Höhe des risikofreien Zinssatzes erwartet (d.h. man setzt $\mu = r$). Der Optionspreis, der unter diesen Annahmen errechnet

wird, ist allerdings auch in der Realität (bei risikoaversen oder risikofreudigen Anlegern) zutreffend.¹

Das Vorgehen bei der Optionsbewertung lässt sich durch den folgenden Algorithmus beschreiben.

Algorithmus 2.2 (Algorithmus zur Optionsbewertung²).

- (1) Bestimme eine Formel für den Optionswert $V(T, S(T))$ zum Laufzeitende in Abhängigkeit von $S(T)$
- (2) Bestimme den Kurswert zum Endzeitpunkt $S(T)$ ausgehend von $S(t)$ zum Zeitpunkt $t < T$ anhand des gewählten Kursmodells
- (3) Berechne den Optionswert im Zeitpunkt t durch Abzinsen des Erwartungswertes

$$V(t, S(t)) = e^{r(t-T)} \mathbb{E}(V(T, S(T)))$$

◦

2.3 Stochastische Differentialgleichungen

Um in Algorithmus 2.2 den Optionswert in Schritt (3) zu bestimmen, muss zuerst in Schritt (2) eine mathematische Beschreibung des Kursverlaufs des zugrunde liegenden Basiswertes gefunden werden. Dies soll mit Hilfe stochastischer Differentialgleichungen geschehen.

Abbildung 2.2 zeigt – beispielhaft für eine Kursentwicklung, wie sie in der Realität auftritt – die Entwicklung des DAX Performance-Index (der dem reinen DAX Kurs-Index gegenüber gebräuchlichere Wert) über den Zeitraum von Januar 1960 bis Mai 2011 (die Daten stammen von http://www.bundesbank.de/statistik/statistik_zeitreihen.php?func=row&tr=WU3141, Stand: 01.06.2011).

2.3.1 Stochastische Grundlagen

Zunächst werden einige Grundbegriffe aus der Stochastik eingeführt (siehe dazu auch [1], [2], [18], [19], [21]).

Definition 2.3 (σ -Algebra).

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ ihre Potenzmenge. Ein System von Mengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ -Algebra genau dann, wenn gilt:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

¹siehe [10, Kapitel 11.2]

²aus [7, Kapitel 2.2]

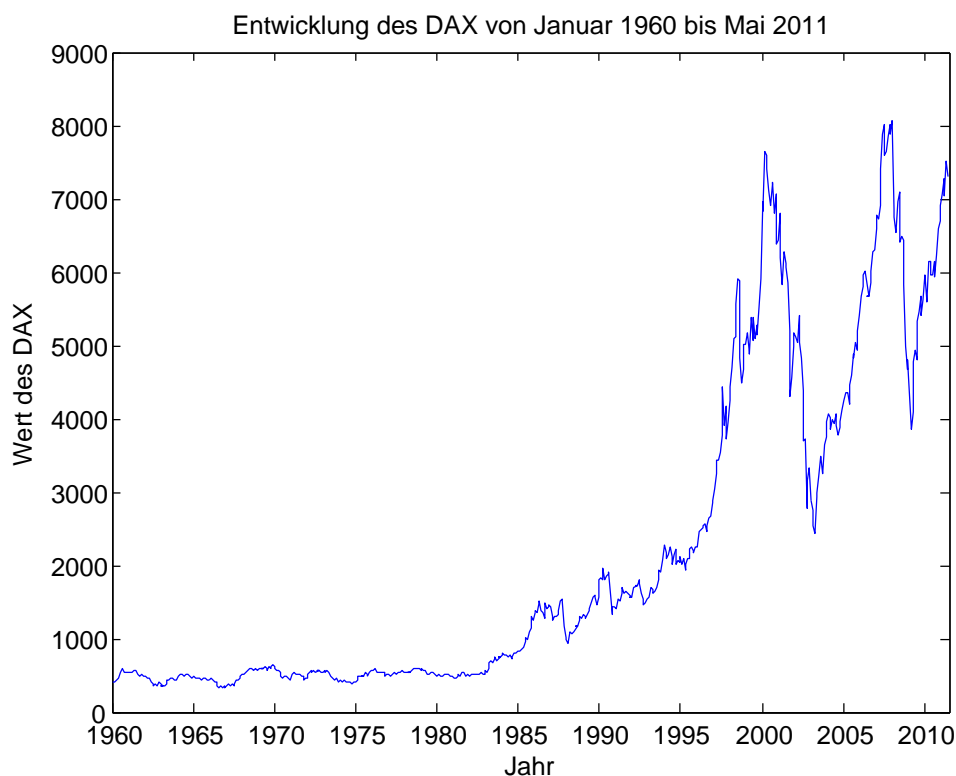


Abbildung 2.2: Entwicklung des DAX Performance-Index von Januar 1960 bis Mai 2011

$$(iii) A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \quad \circ$$

Definition 2.4 (Wahrscheinlichkeitsmaß).

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra.

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften

$$(i) P(\Omega) = 1$$

(ii) Für $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ gilt:

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*. ○

Definition 2.5 (Wahrscheinlichkeitsraum).

Sei Ω eine nichtleere Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Das Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*. ○

Nun lässt sich auch der Begriff der Zufallsvariablen konkretisieren.

Definition 2.6 (Zufallsvariable).

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die messbar bzgl. der zugrunde liegenden σ -Algebra ist, heißt (reelle) *Zufallsvariable*. \circ

Die Voraussetzung der Messbarkeit dient dazu, sicherzustellen, dass das Urbild jeder Borelschen Menge bzgl. der Abbildung in \mathcal{A} enthalten ist, also jedem Element der σ -Algebra eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

Eine Zufallsvariable ordnet demzufolge einem Ereignis des Wahrscheinlichkeitsraums $\omega \in \Omega$ eine sog. Realisierung $X(\omega)$ zu. Sie stellt den mathematischen Zusammenhang zwischen einem Zufallsexperiment und seinem Ausgang dar.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen lässt sich durch ihre Verteilungsfunktion beschreiben.

Definition 2.7 (Verteilungsfunktion und Dichtefunktion).

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

- (1) Die *Verteilungsfunktion* F von X ist für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \quad (2.2)$$

- (2) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Dichtefunktion* der Zufallsvariablen X , falls gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds. \quad (2.3)$$

\circ

Nun lassen sich noch einige Eigenschaften von Zufallsvariablen betrachten. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen bezeichnet den Wert, der sich bei wiederholter Durchführung des Zufallsexperiments als Mittelwert der Realisierungen ergibt. Formal ist er als Integral bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes definiert. Die Varianz gibt ein Maß für die Streuung der realisierten Werte der Zufallsvariablen an.

Definition 2.8 (Eigenschaften von Zufallsvariablen).

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

- (1) Ist X eine kontinuierliche Zufallsvariable, so ist ihr *Erwartungswert* (falls das Integral über X existiert) gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (2.4)$$

Ist X eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $(x_i)_{i \in I}$ annimmt, dann ist ihr Erwartungswert gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i). \quad (2.5)$$

Sei Y eine weitere Zufallsvariable, die unabhängig von X ist, dann gilt

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y). \quad (2.6)$$

(2) Die *Varianz* der Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\text{var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2). \quad (2.7)$$

(3) Die *Standardabweichung* ist gegeben durch

$$\sigma_X := \sqrt{\text{var}(X)} \quad (2.8)$$

und somit gilt $\sigma_X^2 = \text{var}(X)$.

(4) Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Zufallsvariable. Dann ist die *Kovarianz* der Zufallsvariablen X und Y definiert als

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))). \quad (2.9)$$

Die Zufallsvariablen X und Y nennt man *unkorreliert*, falls $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Sei Y eine weitere Zufallsvariable, die unabhängig von X ist, dann folgt

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y), \quad (2.10)$$

denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) &= \mathbb{E}(XY - X \mathbb{E}(Y) - Y \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - 2 \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

da $\mathbb{E}(X)$ bzw. $\mathbb{E}(Y)$ Konstanten sind. Nach (2.6) gilt dann weiterhin

$$\text{cov}(X, Y) = 0. \quad (2.12)$$

◦

Die Kovarianz gibt den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen an. Bei positiver Kovarianz besteht zwischen ihnen ein tendenziell positiver linearer Zusammenhang. Umgekehrt bedeutet eine negative Kovarianz tendenziell einen gegenläufig linearen Zusammenhang.

Im Folgenden wird vor allem ein bestimmter Typ von Zufallsvariablen verwendet, die sog. normalverteilte Zufallsvariable. Sie ist wie folgt charakterisiert.

Definition 2.9 (Normalverteilung).

Eine stetige Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.13)$$

heißt (μ, σ^2) -normalverteilt (kurz: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), d.h. sie ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ und Varianz $\text{var}(X) = \sigma^2$. Die durch Transformation erzeugte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2.14)$$

hat Erwartungswert $\mathbb{E}(Z) = 0$ und Varianz $\text{var}(Z) = 1$, also $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Eine solche Zufallsvariable heißt *standard-normalverteilt*. Die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung $\phi(x)$ lautet also

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.15)$$

Ihre Verteilungsfunktion bezeichnet man meist mit Φ und es gilt

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds. \quad (2.16)$$

◦

Abbildung 2.3 illustriert die Eigenschaften der Standard-Normalverteilung graphisch.

2.3.2 Der Wiener Prozess

Um den Kursverlauf des Basiswertes in Algorithmus 2.2 mathematisch zu beschreiben, soll der Kurswert als Zufallsvariable modelliert werden. Ausgehend vom Kurs S_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist eine zeitkontinuierliche Darstellung des Kursverlaufs das Ziel. Um dies umzusetzen, verwendet man einen stochastischen Prozess.

Definition 2.10 (Stochastischer Prozess).

Ein stetiger *stochastischer Prozess* X_t , $t \in [0, T]$, ist eine Familie von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in [0, T]$, also eine Funktion

$$X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, t) \mapsto X(\omega, t) = X_t(\omega) \quad (2.17)$$

wobei $t \mapsto X(t, \omega)$ stetig ist für alle $\omega \in \Omega$.

◦

Für festes t ist $X(t, \cdot)$ also eine Zufallsvariable. Betrachtet man hingegen die Abbildung für festes $\omega \in \Omega$, ergibt sich die (stetige) reelle Abbildung $X(\cdot, \omega) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto X(t, \omega)$. Diese Abbildungen werden *Pfade* des stochastischen Prozesses bzw. *Realisierungen* genannt.

Ein spezieller zeitstetiger stochastischer Prozess ist der Wiener Prozess. Dieser wird normalerweise mit W_t bezeichnet.

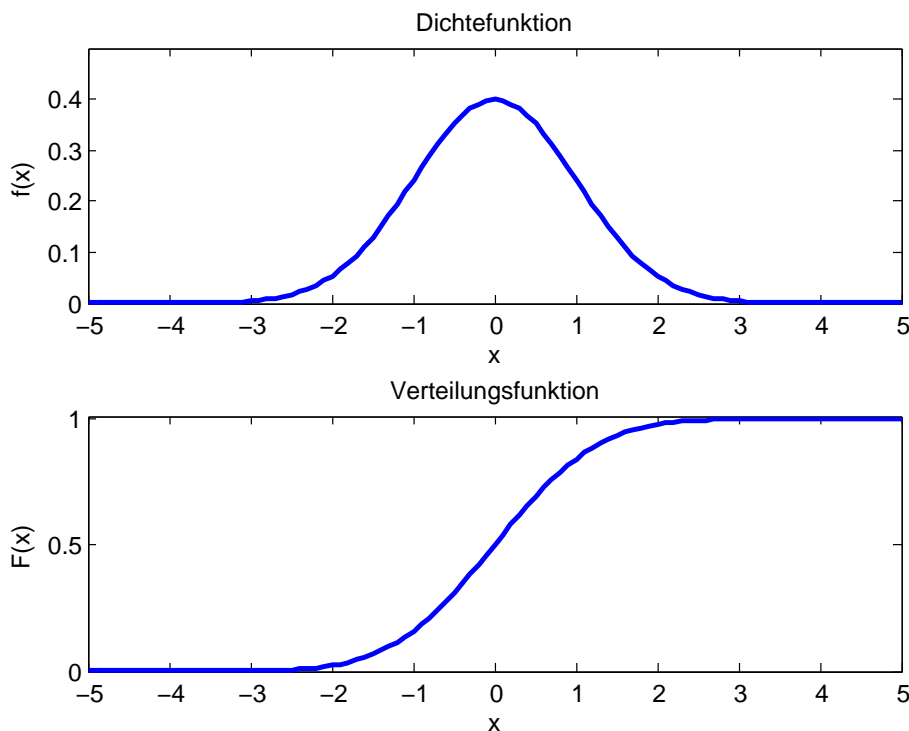


Abbildung 2.3: Graphische Darstellung der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung

Definition 2.11 (Wiener Prozess).

Ein stochastischer Prozess W_t heißt *Wiener Prozess*, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $W_0 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega \in \Omega : W_0(\omega) = 0\}) = 1$.
- (ii) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \forall t \geq 0$, d.h. W_t ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(W_t) = 0$ und $\text{var}(W_t) = t$.
- (iii) Für $t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W_{t_1} - W_{t_0}$ ebenfalls normalverteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(W_{t_1} - W_{t_0}) = 0$ und $\text{var}(W_{t_1} - W_{t_0}) = t_1 - t_0$.
- (iv) Für $s_1 \geq s_0 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W_{t_1} - W_{t_0}$ und $W_{s_1} - W_{s_0}$ unabhängige Zufallsvariablen.

◦

Der Wiener Prozess wird auch als *Brownsche Bewegung* bezeichnet.

Abbildung 2.4 zeigt den Pfad eines Wiener Prozesses mit $t \in [0, 1]$, ausgewertet in $M = 2000$ diskreten Zeitpunkten.

Vergleicht man diesen Verlauf mit dem von Abbildung 2.2, so sieht man, dass der Wiener Prozess alleine noch nicht ausreicht, einen sinnvollen Kursverlauf zu modellieren. Zum einen

muss sichergestellt werden, dass der Kurswert nicht negativ wird und zum anderen möchte man bestimmte Parameter vorgeben können, die den Kursverlauf beeinflussen, bspw. das durchschnittliche Kurswachstum.

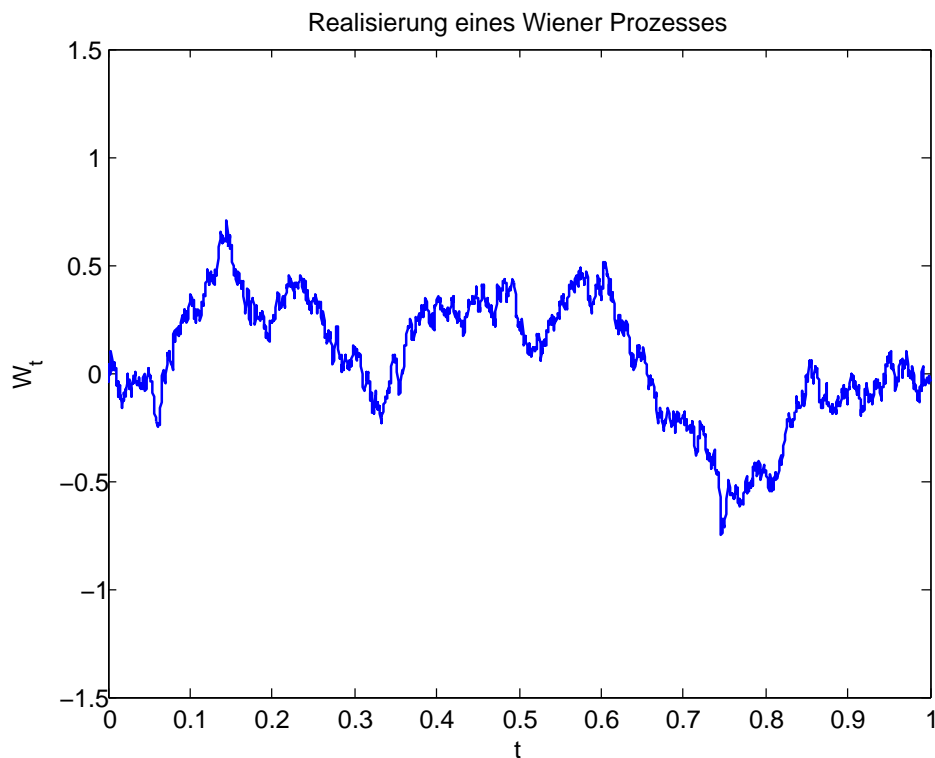


Abbildung 2.4: Realisierung eines Wiener Prozesses für $0 \leq t \leq 1$

2.3.3 Stochastische Differentialgleichungen

Mit Hilfe stochastischer Prozesse im Allgemeinen bzw. des Wiener Prozesses im Speziellen ist es nun möglich, eine besondere Form der Differentialgleichungen näher zu untersuchen. Viele natürliche, technische und ökonomische Vorgänge können durch Differentialgleichungen ausgedrückt werden. Daher werden sie oft zur mathematischen Modellierung benutzt. Der Ansatz, das Kursmodell ebenfalls durch eine Differentialgleichung darzustellen, liegt also nahe.

Eine Differentialgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem aktuellen Wert der Funktion und ihrer Änderung. Im Fall des Kursmodells soll diese Änderung jedoch auch eine Zufallskomponente beinhalten. Aus diesem Grund werden für finanzmathematische Kursmodelle normalerweise stochastische Differentialgleichungen verwendet. Bevor diese exakt definiert werden können, wird zunächst der stochastische Integralbegriff benötigt.

Man nimmt zunächst vereinfachend an, die Kursentwicklung eines Gutes ließe sich durch einen Wiener Prozess W_t beschreiben und $f(t)$ gebe die gehaltene Menge an diesem Gut an. Weiterhin setzt man voraus, dass ein Handel nur zu diskreten äquidistanten Zeitpunkten

$t_i = t_0 + i\Delta t$ möglich ist, d.h. die Funktion $f(t)$ ist stückweise konstant für $t_i \leq t < t_{i+1}$, $\forall i$. Damit ergibt sich für ein solches Portfolio die Wertentwicklung

$$\sum_{i=0}^{M-1} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \sum_{i=0}^{M-1} f(t_i)\Delta W(t_i) \quad (2.18)$$

mit $M := T/\Delta t$.

Verallgemeinert man diese Formel für den kontinuierlichen Fall, d.h. führt man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$, also $M \rightarrow \infty$, durch, so erhält man das Integral

$$\int_0^T f(t) \frac{d}{dt} W(t) dt. \quad (2.19)$$

Da der Wiener Prozess jedoch an keiner Stelle differenzierbar ist und demnach die Ableitung $\frac{d}{dt}W(t)$ nicht existiert, ist dieses Integral als Riemann- oder Lebesgue-Integral nicht definiert. Es muss also eine sinnvolle Definition des Integrals gefunden werden, obwohl $\frac{d}{dt}W(t)$ nicht existiert. Dies ist Kiyoshi Itô Mitte des letzten Jahrhunderts gelungen.

Definition 2.12 (Itô-Integral).

Sei X_t ein stochastischer Prozess und $t_i \in [0, t]$ eine Folge, sodass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ mit $\max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n-1\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt.

Das *Itô-Integral* mit Integrator W_t ist definiert durch

$$\int_0^t X_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \quad (2.20)$$

◦

Damit ist das Itô-Integral auch wieder ein stochastischer Prozess. Eine ausführliche Behandlung des Itô-Integrals findet sich in [14], [16] und [8].

Mit Hilfe des Itô-Integrals kann nun auch der Begriff der stochastischen Differentialgleichung konkretisiert werden. Diese stellen eine Kombination aus einem deterministischen und einem stochastischen Anteil dar.

Definition 2.13 (Stochastische Differentialgleichung).

Seien $a, b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, X_t ein stochastischer Prozess und W_t ein Wiener Prozess.

Für die stochastische Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\tau, X_\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau, X_\tau) dW_\tau \quad (2.21)$$

führt man die symbolische Kurzschreibweise

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t \quad (2.22)$$

ein. Eine Gleichung der Form (2.22) heißt (*Itô*-)stochastische Differentialgleichung. Ein stochastischer Prozess X_t , der (2.21) erfüllt, heißt *Itô-Prozess*, den deterministischen Term $a(t, X_t)$ in (2.22) nennt man *Drift*, den stochastischen Einfluss $b(t, X_t)$ *Diffusion*. ◦

Das erste Integral in (2.21) ist ein Lebesgue- oder Riemann-Integral, das zweite jedoch ist das oben genannte Itô-Integral.

Bemerkung 2.14. Mit $a(t, X_t) \equiv 0$ und $b(t, X_t) \equiv 1$ folgt wegen

$$X_t = X_0 + \int_0^t dW_\tau = X_0 + W_t - W_0 = X_0 + W_t,$$

dass auch der Wiener Prozess ein Itô-Prozess ist. ◦

Grundlegend für die stochastische Analysis ist das Itô-Lemma. Es stellt das stochastische Äquivalent zur Kettenregel aus der Differentialrechnung dar. Mit Hilfe des Itô-Lemmas lässt sich auch die Black-Scholes Gleichung ableiten, wie wir später sehen werden.

Lemma 2.15 (Itô-Lemma).

Sei X_t ein Itô-Prozess und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, also $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Dann ist auch $Y_t = g(t, X(t))$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$\begin{aligned} dY(t) = & \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))a(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))b(t, X(t))^2 \right) dt \\ & + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))b(t, X(t))dW_t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

◦

Ein Beweis zu Lemma 2.15 findet sich in [6] und [17]. Die Gleichung (2.23) wird auch *Itô-Formel* genannt.

2.3.4 Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen

Nun werden wir ein Verfahren zur Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen betrachten. Während man bei der Bewertung europäischer Plain Vanilla Optionen oft noch ohne die Simulation eines kompletten Pfades des Basiswertes auskommt, da der Optionspreis nur vom Kurs des Basiswertes zum Laufzeitende abhängt, ist es bei der Bewertung komplexerer Derivate unerlässlich, Kursverlaufspfade des Basiswertes bzw. zumindest die Kurswerte auf einem Zeitgitter zu generieren. Dies trifft insbesondere bei pfadabhängigen Optionen zu und stellt einen Grundbaustein der Monte Carlo Methode dar.

Das hier betrachtete Verfahren heißt *Euler-Verfahren* oder auch *Euler-Maruyama-Verfahren*. Es ist das einfachste Verfahren zur Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen. Dementsprechend liefert es aber auch eine weniger exakte Approximation im Vergleich zu komplexeren Verfahren. Dennoch ist es für unsere Zwecke vollkommen ausreichend, da es aufgrund seiner Einfachheit einen sehr geringen Aufwand hat. Somit lässt sich die Ungenauigkeit durch eine kleine Schrittweite im Zeitgitter kompensieren.

Definition 2.16 (Euler-Verfahren zur Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen³).

Sei $X(t)$ ein stochastischer Prozess, der die stochastische Differentialgleichung (2.22) erfüllt, X_0 ein vorgegebener Startwert und $(t_i)_{i=0}^M$ ein Gitter von $M + 1$ äquidistanten Zeitpunkten mit Zeitschrittweite Δt , d.h. $t_i = i\Delta t$.

Das Euler-Verfahren zur Diskretisierung stochastischer Differentialgleichungen ist durch

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a(t_i, \hat{X}(t_i))\Delta t + b(t_i, \hat{X}(t_i))\sqrt{\Delta t}Z_i \quad \text{für } i = 0, \dots, M - 1 \quad (2.24)$$

mit $\hat{X}(t_0) := X_0$ und $M + 1$ unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gegeben. Die Werte $\hat{X}(t_i)$ sind die zeitdiskreten Approximationen des stochastischen Prozesses $X(t)$ zu den Zeitpunkten t_i . ◦

2.4 Die geometrische Brownsche Bewegung

Nun haben wir alle Werkzeuge die wir brauchen, um ein einfaches Kursmodell zu betrachten. Aus Definition 2.11 geht hervor, dass der Wiener Prozess durchaus auch negativ werden kann. Da der Kurs des Basiswertes aber nur nichtnegative Werte annimmt, verwendet man in Anlehnung an Verzinsungsmodelle den Logarithmus bzw. die Exponentialfunktion und wählt

$$\ln S_t = \ln S_0 + \xi t + \sigma W_t. \quad (2.25)$$

Mit $\xi := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ und durch Anwendung der Exponentialfunktion ergibt sich daraus die geometrische Brownsche Bewegung.

Definition 2.17 (Geometrische Brownsche Bewegung).

Sei W_t ein Wiener Prozess, d.h. eine Brownsche Bewegung.

Die *geometrische Brownsche Bewegung* ist gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right). \quad (2.26)$$

◦

Mit Hilfe des Itô-Lemmas 2.15 lässt sich die zugehörige stochastische Differentialgleichung berechnen.⁴ Sei dazu $X(t) = W(t)$ (dies ist zulässig, da nach Bemerkung 2.14 der Wiener Prozess ein Itô-Prozess ist, und es folgt auch $a \equiv 0$ und $b \equiv 1$) und betrachte $Y(t) = g(t, X(t))$, wobei

$$g(t, x) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma x \right). \quad (2.27)$$

³vgl. [5, Kapitel 6.1.1]

⁴vgl. [7, Kapitel 4.2.2]

Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)g(t, x) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) &= \sigma g(t, x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) &= \sigma^2 g(t, x).\end{aligned}$$

Mit $Y(t) = g(t, X(t)) = S(t)$ ergibt sich durch Einsetzen in (2.23)

$$\begin{aligned}dS(t) = dY(t) &= \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t) \right) dt + \sigma S(t)dW(t) \\ &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Die stochastische Differentialgleichung der geometrischen Brownschen Bewegung lautet also

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\tag{2.29}$$

bzw. in Integralform

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(\tau)d\tau + \int_0^t \sigma S(\tau)dW_\tau.\tag{2.30}$$

In (2.29) stellt $\mu S(t)$ den Drift dar, also den deterministischen Anteil der stochastischen Differentialgleichung. Für $\mu > 0$ erwartet man somit im Mittel ein Wachstum, während man für $\mu < 0$ tendenziell ein Fallen von $S(t)$ erwartet. $\sigma S(t)$ ist der Diffusions-Term von (2.29), durch σ wird also der stochastische Einfluss gesteuert. Für $\sigma = 0$ würde der stochastische Einfluss wegfallen und man erhielte eine deterministische Differentialgleichung.

Für den Erwartungswert und die Varianz des Kurses im Zeitpunkt t erhält man⁵

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t)) &= S_0 e^{\mu t} \\ \text{var}(S(t)) &= S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Der Erwartungswert entspricht dem einer festverzinslichen Anleihe, der erwartete Kursverlauf verhält sich demnach wie eine festverzinsliche Anleihe mit Zinssatz $r = \mu$.

Um die numerischen Methoden der folgenden Kapitel anzuwenden, betrachten wir nun, wie sich der Verlauf der geometrischen Brownschen Bewegung approximieren lässt. Dazu wird das in Kapitel 2.3.4 vorgestellte Euler-Verfahren verwendet (vgl. Definition 2.16). Der folgende Algorithmus beschreibt die Simulation eines Pfades der geometrischen Brownschen Bewegung zu M diskreten äquidistanten Zeitpunkten.

Algorithmus 2.18 (Simulation eines Kurspfades auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung).

Input: S_0, T, μ, σ, M

⁵siehe [7] und [16]

- (1) Setze $S(0) := S_0$, $\Delta t := T/M$
- (2) Simuliere M standard-normalverteilte Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- (3) **for** $i := 0$ **to** $M - 1$ **do**
 $S(i + 1) := S(i) + \mu S(i)\Delta t + \sigma S(i)\sqrt{\Delta t}Z_i$
endfor

Output: $S \in \mathbb{R}^M$ (Vektor, der den Kursverlauf enthält)

○

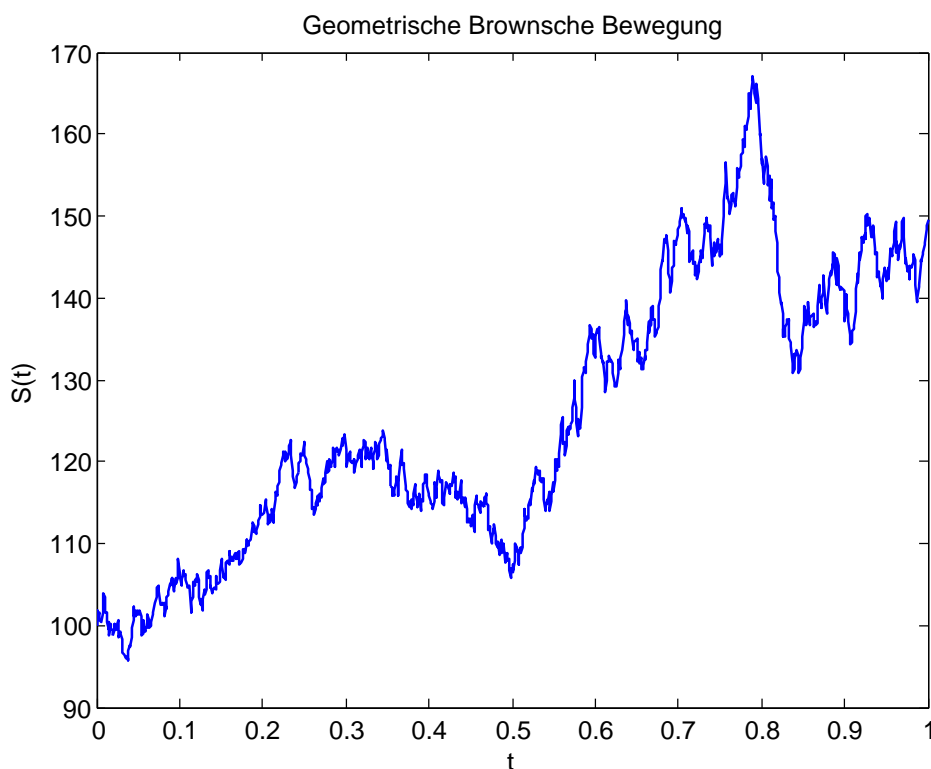


Abbildung 2.5: Kursverlauf auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1$ ausgewertet an $M = 1000$ diskreten Zeitpunkten

Ein möglicher Kursverlauf auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung wird in Abbildung 2.5 dargestellt. Dieser wirkt nun schon sehr realitätsnah (vgl. auch Abbildungen 2.2 und 2.4). Tatsächlich wird die geometrische Brownsche Bewegung häufig verwendet, um bspw. Aktienkurse zu modellieren oder allgemein den Kursverlauf des Basiswertes einer Option zu simulieren. Die Vorteile dabei liegen auf der Hand. Einerseits ist das Modell sehr einfach und demzufolge gut numerisch umsetzbar, andererseits kann durch geeignete Wahl der Parameter μ und σ kurz- bis mittelfristig dennoch ein Verlauf modelliert werden, wie er in der Realität oft anzutreffen ist. Aus diesem Grund ist das durch Gleichung (2.29) gegebene Modell immer noch das am weitesten verbreitete Modell zur Beschreibung der Entwicklung von Aktienkursen.⁶

⁶vgl. [10, Kapitel 12.3]

In (2.31) haben wir gesehen, dass der Parameter μ dem erwarteten durchschnittlichen Wachstum entspricht, d.h. für $\mu > 0$ wächst $S(t)$ in Erwartung.

Der Parameter σ hingegen stellt den Einfluss des stochastischen Anteils, d.h. des Zufalls auf den Kursverlauf dar und wird als Volatilität (durchschnittliche Kursschwankung) bezeichnet. Die Volatilität von Aktien liegt meist zwischen 15% und 60%. In der Praxis kann eine Schätzung der Volatilität bspw. aus vergangenen Kursdaten abgeleitet werden, dies ist die sog. historische Volatilität. Es ist auch möglich, die Volatilität als zufälligen Parameter zu modellieren, wie wir später sehen werden.

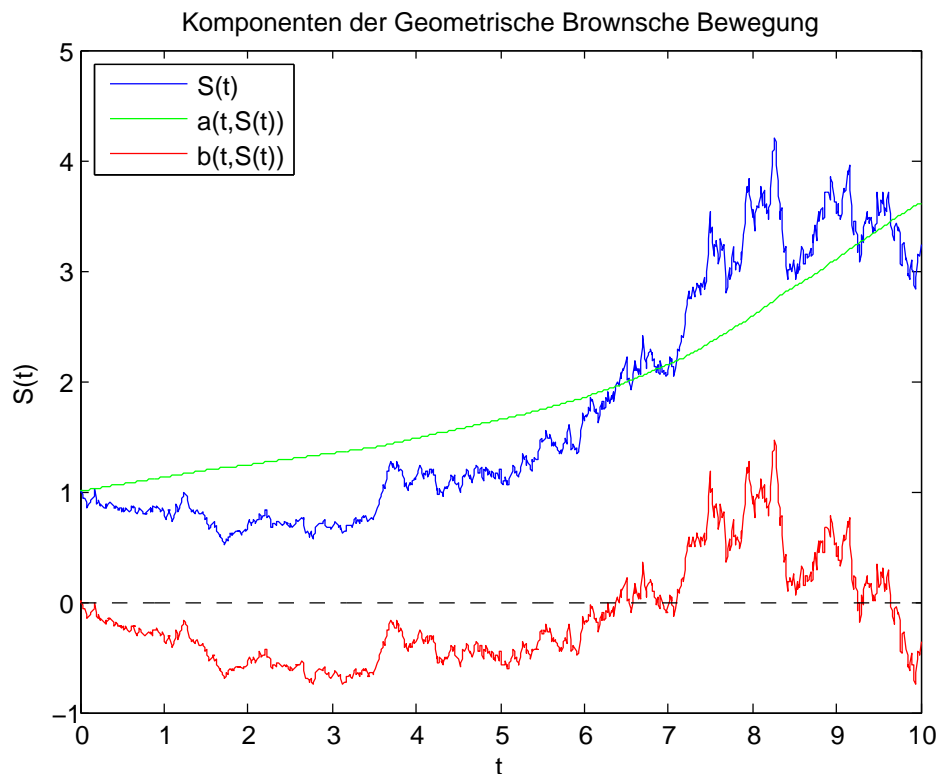


Abbildung 2.6: Geometrische Brownsche Bewegung und ihre Komponenten für die Parameter $S_0 = 1$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.3$ und $T = 10$

Nach (2.22) und (2.29) setzt sich $S(t)$ aus dem Drift $a(t, S(t)) = \mu S(t)$ und der Diffusion $b(t, S(t)) = \sigma S(t)$ zusammen. In Abbildung 2.6 werden die einzelnen Komponenten der geometrischen Brownschen Bewegung separat visualisiert.

Der Verlauf, der durch die stochastische Differentialgleichung $db(t, S(t)) = \sigma S(t)dW_t$ gegeben ist, ist in rot, die für den deterministischen Anteil durch $da(t, S(t)) = \mu S(t)dt$ gegebene Funktion ist in grün und der resultierende Pfad der geometrischen Brownschen Bewegung $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$ ist in blau dargestellt. Es lässt sich gut erkennen, dass der stochastische Anteil durch den Faktor $S(t)$ dennoch Einfluss auf den Verlauf der deterministischen Differentialgleichung nimmt. Durch diese Verflechtung ist auch die Funktion $a(t, S(t))$ den Schwankungen des Wiener Prozesses unterworfen. Ist der Wiener Prozess dW_t negativ und somit auch $b(t, S(t)) < 0$, resultiert daraus auch eine geringere Steigung von $a(t, S(t))$.

Mit der geometrischen Brownschen Bewegung steht uns nun ein geeignetes Kursmodell zur Verfügung, mit dem wir Schritt (2) des Algorithmus 2.2 durchführen können. Um den Optionswert in Schritt (3) schließlich tatsächlich ausrechnen zu können, benötigen wir noch ein Verfahren zur Berechnung des Erwartungswertes. Ein solches wird in Kapitel 3 betrachtet.

2.5 Das Black-Scholes Modell

Das von Fischer Black und Myron Scholes in Zusammenarbeit mit Robert Merton entwickelte und 1973 veröffentlichte Black-Scholes Modell ist ein Modell zur Bewertung von Optionen. Aus diesem Modell lässt sich eine geschlossene Formel für den Wert europäischer Call- und Put-Optionen ableiten. Das Modell gilt als einer der Grundsteine in der Optionsbewertung. Scholes und Merton erhielten dafür 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, Black war leider zwei Jahre zuvor verstorben. Auch heute erfreut sich das Modell noch großer Beliebtheit beim Handel mit Optionen.

Als Grundlage für das Modell werden folgende Annahmen an den Finanzmarkt getroffen:

- Der Kurs des Basiswertes $S(t)$ lässt sich durch (2.29) beschreiben, d.h. durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit konstanten Parametern μ und σ .
- Es herrscht ein vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt, das bedeutet u.a.:⁷
 - Es existieren keine Steuern oder Transaktionskosten.
 - Sollzinssatz und Habenzinssatz sind identisch und gleich dem (konstanten) risikolosen Zinssatz $r \geq 0$.
 - Der Markt ist arbitragefrei, d.h. es sind keine risikolosen Gewinne möglich.
 - Der Handel mit dem Basiswert ist kontinuierlich möglich und der Basiswert ist beliebig teilbar.
 - Leerverkäufe, d.h. der Verkauf von Anteilen, über die man zum Verkaufszeitpunkt noch nicht verfügt, sind zulässig.
- Es erfolgen keine Dividendenzahlungen.

Es ist auch möglich, die Annahmen weniger restriktiv zu postulieren, was allerdings zu komplizierteren Resultaten führt.

Nun kann die formale Herleitung der Black-Scholes Gleichung betrachtet werden.⁸ Diese ist insbesondere deshalb interessant, da sich aus dem Vorgehen weitere Schlüsse ableiten lassen.

Sei dazu $V(t, S(t))$ der Optionswert zum Zeitpunkt t . Man betrachte ein Portfolio $\Pi(t)$ bestehend aus $\beta(t)$ Anteilen eines Bonds $B(t)$, i.e. eine festverzinsliche Anleihe, $\Delta(t)$ Anteilen

⁷siehe [22, Kapite 3.4.2]

⁸vgl. [7] und [8]

des Basiswertes $S(t)$ und einer ausgegebenen Option $V(t, S(t))$ (deshalb geht diese negativ in die Gleichung ein)

$$\Pi(t) = \beta(t)B(t) + \Delta(t)S(t) - V(t, S(t)). \quad (2.32)$$

Da der Kurswert $S(t)$ durch die geometrische Brownsche Bewegung (2.29) beschrieben wird und demnach ein Itô-Prozess ist, lässt sich unter der Annahme $V(t, S(t)) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ das Itô-Lemma 2.15 anwenden und mit $a = \mu S$ und $b = \sigma S$ erfüllt V die stochastische Differentialgleichung

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (2.33)$$

Für die festverzinsliche Anleihe $B(t)$ gilt aufgrund der konstanten Verzinsung mit dem risikofreien Zinssatz r

$$dB(t) = rB(t)dt. \quad (2.34)$$

Setzt man voraus, dass das Portfolio selbstfinanzierend sein soll, d.h., dass während der Laufzeit weder Geld entnommen noch eingelegt werden darf, ergibt sich bei Umschichtung zu diskreten Zeitpunkten bei Betrachtung des Zeitpunktes t_i die Bedingung

$$\beta(t_{i-1})B(t_i) + \Delta(t_{i-1})S(t_i) - V(t_i, S(t_i)) = \beta(t_i)B(t_i) + \Delta(t_i)S(t_i) - V(t_i, S(t_i)),$$

da der Wert des Portfolios unmittelbar vor der Umschichtung gleich dem Wert des Portfolios unmittelbar nach der Umschichtung sein muss.

Es folgt

$$\beta(t_{i-1})B(t_i) + \Delta(t_{i-1})S(t_i) = \beta(t_i)B(t_i) + \Delta(t_i)S(t_i). \quad (2.35)$$

Betrachtung von $\Pi(t_i)$ unmittelbar vor der Umschichtung und den Portfolios der zwei vorhergehenden Zeitpunkte t_{i-1} und t_{i-2} liefert

$$\begin{aligned} \Pi(t_i) &= \Delta(t_{i-1})S(t_i) + \beta(t_{i-1})B(t_i) - V(t_i, S(t_i)) \\ &+ \underbrace{[\Delta(t_{i-2})S(t_{i-1}) + \beta(t_{i-2})B(t_{i-1})] - [\Delta(t_{i-1})S(t_{i-1}) + \beta(t_{i-1})B(t_{i-1})]}_{=0 \text{ wegen (2.35)}} \\ &+ \Pi(t_{i-2}) - \underbrace{[\Delta(t_{i-2})S(t_{i-2}) + \beta(t_{i-2})B(t_{i-2}) - V(t_{i-2}, S(t_{i-2}))]}_{=\Pi(t_{i-2})} \end{aligned} \quad (2.36)$$

und nach Umsortieren von (2.36) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi(t_i) &= \Pi(t_{i-2}) + V(t_{i-2}, S(t_{i-2})) - V(t_i, S(t_i)) \\ &+ \Delta(t_{i-2})(S(t_{i-1}) - S(t_{i-2})) + \Delta(t_{i-1})(S(t_i) - S(t_{i-1})) \\ &+ \beta(t_{i-2})(B(t_{i-1}) - B(t_{i-2})) + \beta(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Erweitert man die Betrachtung auf $M + 1$ Zeitpunkte t_j , $j = 0, \dots, M$, erhält man als Selbstfinanzierungsbedingung

$$\begin{aligned} \Pi(t_M) &= \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t_M, S(t_M)) \\ &+ \sum_{i=0}^{M-1} \Delta(t_i) (S(t_{i+1}) - S(t_i)) + \sum_{i=0}^{M-1} \beta(t_i) (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

und im Grenzübergang $(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$

$$\Pi(t) = \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t, S(t)) + \int_{t_0}^t \Delta(\tau) dS(\tau) + \int_{t_0}^t \beta(\tau) dB(\tau), \quad (2.39)$$

wobei die Integrale Itô-Integrale sind. Fasst man (2.39) als stochastische Differentialgleichung in Integralform (2.21) auf und überführt sie in die zugehörige Differentialgleichung (2.22), so ergibt sich

$$d\Pi(t) = -dV(t, S(t)) + \Delta(t)dS(t) + \beta(t)dB(t). \quad (2.40)$$

Einsetzen von (2.29), (2.33) und (2.34) in (2.40) liefert

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left[\Delta\mu S + \beta r B - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] dt \\ & + \left(\Delta\sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Setzen wir nun

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)), \quad (2.42)$$

so können wir den stochastischen Einfluss in (2.41) eliminieren.

Weiterhin fordert man, dass sich das Portfolio wie eine risikofreie Anleihe entwickelt, sich also, da Arbitragefreiheit angenommen wurde, mit dem Marktzinssatz r verzinst. Somit erhält man die Bedingung

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (2.43)$$

Setzt man nun noch (2.32) und (2.41) in (2.43) ein und verwendet (2.42), ergibt sich

$$\left(r\beta B - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = \left(r\beta B + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) dt \quad (2.44)$$

und durch Umformung erhält man schließlich

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.45)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird *Black-Scholes Gleichung* genannt.

Korollar 2.19.

Die Anteile $\Delta(t)$ des Basiswertes $S(t)$ und die Anteile $\beta(t)$ der festverzinslichen Anleihe $B(t)$ am Portfolio sind wegen (2.42) und (2.32) gegeben durch

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)) \quad (2.46)$$

und

$$\beta(t) = \frac{1}{B(t)} (\Pi(t) + V(t, S(t)) - \Delta(t)S(t)). \quad (2.47)$$

◦

Bemerkung 2.20. Neben dem Δ , der partiellen Ableitung des Optionswertes nach dem Kurs des Basiswertes, lassen sich noch weitere partielle Ableitungen nach anderen Parametern betrachten. Diese Kennzahlen bezeichnet man als *Griechen*. Sie geben die Sensitivität des Optionspreises bzgl. der entsprechenden Parameter an und lauten:

$$\begin{array}{llll} \text{Delta:} & \Delta & = & \frac{\partial V}{\partial S} & \text{Gamma:} & \Gamma & = & \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ \text{Vega oder Kappa:} & \kappa & = & \frac{\partial V}{\partial \sigma} & \text{Theta:} & \Theta & = & \frac{\partial V}{\partial t} \\ \text{Rho:} & \rho & = & \frac{\partial V}{\partial r} & & & & \circ \end{array}$$

Für europäische Optionen besitzt die Black-Scholes Gleichung (2.45) eine explizite Lösung.⁹ Der Optionswert einer europäischen Call-Option lautet

$$V_{C,e}(t, S(t)) = S(t)\Phi(a) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(b), \quad (2.48a)$$

für eine europäische Put-Option erhält man

$$V_{P,e}(t, S(t)) = S(t)(\Phi(a) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(b) - 1). \quad (2.48b)$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung (vgl. (2.16)) und für a und b gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ b &= a - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \quad (2.48c)$$

Wir können also nun den Optionswert europäischer Optionen für beliebige Zeitpunkte $t \in [0, T]$ direkt mittels (2.48) ausrechnen. Es fällt auf, dass dabei die erwartete Rendite μ des Basiswertes nicht mit in die Berechnung eingeht. Die einzigen unbekannt Parameter sind der risikofreie Zinssatz r und die Volatilität σ des Basiswertes. In der Praxis ist die Bestimmung von r normalerweise unproblematisch. Für die Wahl von σ existieren verschiedene Ansätze, wie schon zu Ende von Kapitel 2.4 gesehen.

In Abbildung 2.7 sind die Verläufe einer europäischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit vom aktuellen Kurs des Basiswertes dargestellt. Betrachtet wurden dabei die Zeitpunkte $t = 0$, $t = 0.5$ und $t = 1 = T$. Bei Laufzeitende der Option, also in $t = T$, entsprechen die Verläufe den Hockeystick-Diagrammen aus Abbildung 2.1.

Es fällt auf, dass im Fall einer Call-Option für $t < T$ die Optionswerte unabhängig von $S(t)$ immer größer sind als im Endzeitpunkt T , wohingegen es im Fall einer Put-Option einen

⁹siehe [7, Kapitel 8] und [8, Kapitel 4.2.3]

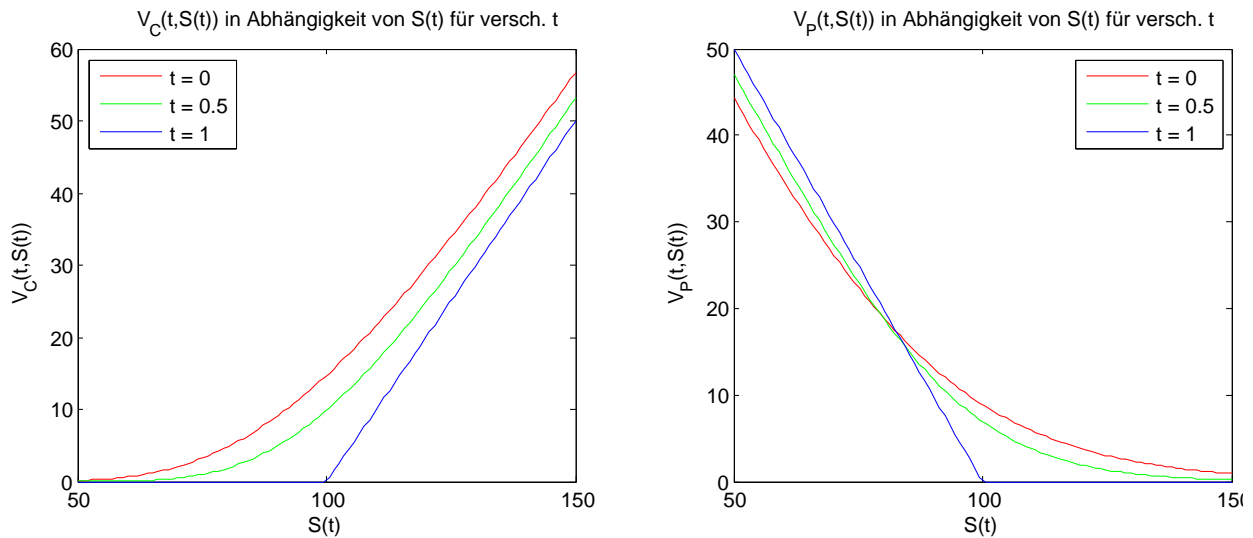


Abbildung 2.7: Optionswert in Abhängigkeit von $S(t)$ nach Black-Scholes Formel für $t \in \{0; 0,5; 1\}$ mit $S_0 \in [50, 150]$, $r = 0,06$, $\sigma = 0,3$ und $T = 1$

Wert $\tilde{S}(t)$ gibt, ab dem für Kurswerte $S(t) < \tilde{S}(t)$ der zugehörige Optionswert $V_{P_e}(t, S(t)) < V_{P_e}(T, S(T))$ ist.

Betrachtet man also die partielle Ableitung des Optionswertes nach der Zeit $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ (vgl. Bemerkung 2.20), so gilt¹⁰ für eine europäische Call-Option

$$\Theta_C = -\frac{S\sigma\phi(a)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(b) \quad (2.49)$$

mit a und b wie in (2.48c) sowie ϕ und Φ die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung (vgl. Definition 2.9).

Da gilt $\Phi(x), \phi(x) > 0 \forall x$, und alle anderen Variablen von (2.49) ebenso positiv sind, folgt

$$\Theta_C < 0, \quad (2.50)$$

der Optionswert $V_{C,e}$ einer europäischen Call Option sinkt ceteris paribus, d.h. bei konstanten übrigen Werten, also im Zeitverlauf.

Hingegen gilt für eine europäische Put-Option

$$\Theta_P = -\frac{S\sigma\phi(a)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\Phi(-b). \quad (2.51)$$

Da auch hier alle auftretenden Variablen positiv sind, lässt sich aufgrund der verschiedenen Vorzeichen der Terme nun keine generelle Aussage mehr über das Vorzeichen von Θ_P treffen. Es zeigt sich, dass auch Θ_P meist negativ ist, außer wenn der Kurswert des Basiswertes $S(t)$ viel niedriger ist als der Ausübungspreis K .

¹⁰vgl. [8], [9], [10]

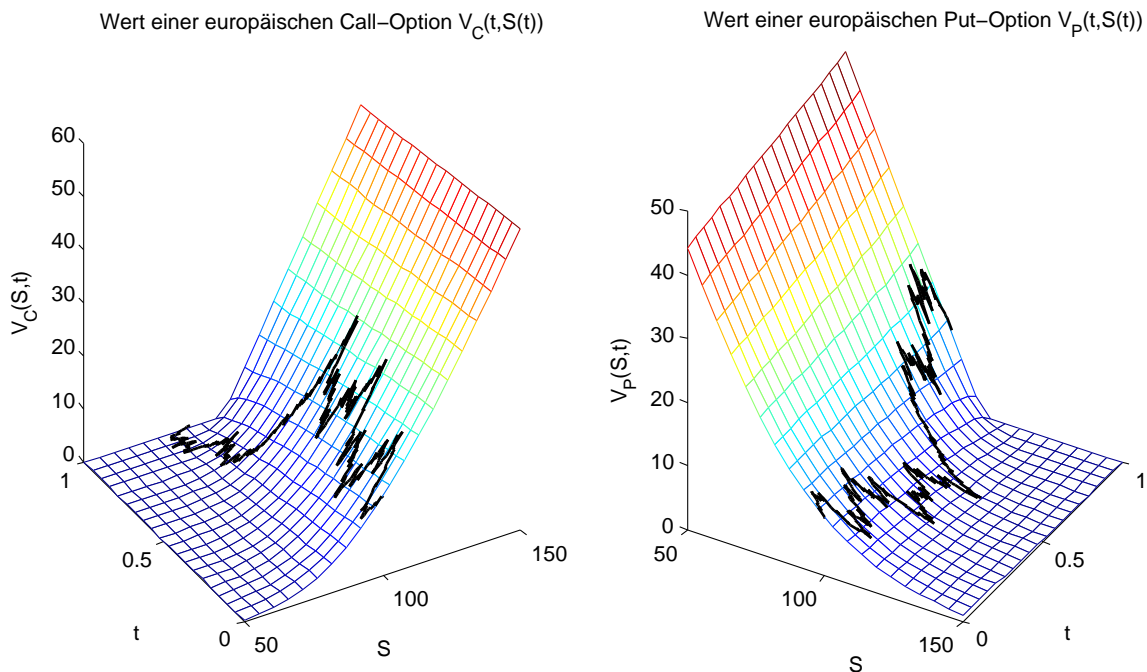


Abbildung 2.8: Dreidimensionale Darstellung des Optionswertes einer europäischen Call- und Put-Option als Fläche in Abhängigkeit von t und $S(t)$ nach Black-Scholes Formel für $t \in [0, 1]$ mit $S(t) \in [50, 150]$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und eines möglichen Verlaufs des Optionswertes als Linie

Abschließend lassen sich die Ergebnisse der bisherigen Kapitel visualisieren. Dazu wird in Abbildung 2.8 der Wert $V_{C,e}(t, S(t))$ einer europäischen Call-Option (links) und der Wert $V_{P,e}(t, S(t))$ einer europäischen Put-Option (rechts) dreidimensional als Fläche in Abhängigkeit von $t \in [0, 1]$ und $S(t) \in [50, 150]$ dargestellt. Dies entspricht der kontinuierlichen Darstellung von Abbildung 2.7. Weiterhin wurde ein Pfad für die Kursentwicklung des Basiswertes mittels der geometrischen Brownschen Bewegung simuliert und auf Basis dieses Pfades die Entwicklung des zugehörigen Optionswertes mit Hilfe der Black-Scholes-Formel berechnet und beispielhaft auf die Oberfläche der möglichen Optionswerte gelegt.

Es lässt sich erkennen, dass der Optionswert $V(t, S)$ eine glatte Funktion in t und S ist, ein Pfad eines Optionswertes im Allgemeinen jedoch nicht differenzierbar ist.

2.6 Hedging

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, wie zur Herleitung der Black-Scholes Gleichung ein Portfolio zusammengestellt wurde und dabei durch geschickte Wahl der Parameter eine Entwicklung entsprechend einer risikofreien Anlage erreicht wurde. Das Vorgehen, die Zusammensetzung des Portfolios anzupassen, um das Risiko zu eliminieren, wird *Hedging* genannt.

Die Umschichtungen sind durch die Parameter β und Δ charakterisiert. Der Wert von β resultiert aus der Bedingung, dass sich das Portfolio selbst finanzieren soll. Zur Berechnung

können wir nach Korollar 2.19 die Formel (2.47) verwenden.

Von zentraler Bedeutung für die aus der Herleitung der Black-Scholes Formel resultierenden Hedging-Strategie ist das Delta

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)),$$

die partielle Ableitung des Optionswertes nach dem Kurs des Basiswertes (vgl. (2.46)). Durch diese Wahl wird eine Elimination des stochastischen Einflusses erreicht, und damit auch das Risiko des Portfolios eliminiert. Deshalb nennt man diese Strategie auch *Delta-Hedging*.

Für europäische Optionen lässt sich eine Formel zur Berechnung von Δ angeben.

Satz 2.21. Für Δ_C einer europäischen Call-Option bzw. Δ_P einer europäischen Put-Option gilt

$$\begin{aligned}\Delta_C(t, S(t)) &= \frac{\partial V_{C_e}}{\partial S}(t, S(t)) = \Phi(a) \\ \Delta_P(t, S(t)) &= \frac{\partial V_{P_e}}{\partial S}(t, S(t)) = \Phi(a) - 1\end{aligned}\tag{2.52}$$

mit a (bzw. b) wie in (2.48c) und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung wie in Definition 2.9.

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\ln(S)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\ln(K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\partial b}{\partial S}\end{aligned}\tag{2.53}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(b^2 + 2b\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}b^2} e^{-b\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}b^2} e^{\ln \frac{K}{S} - r(T-t)} \\ &= \phi(b) \frac{K}{S} e^{-r(T-t)}.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Durch Anwendung von Produkt- und Kettenregel erhält man mit (2.48a)

$$\Delta_C = \frac{\partial V_{C_e}}{\partial S} = \Phi(a) + S\phi(a)\frac{\partial a}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\phi(b)\frac{\partial b}{\partial S} \quad (2.55)$$

und durch Einsetzen von (2.53) und (2.54) in (2.55) schließlich

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \Phi(a) + S\phi(b)\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}\frac{\partial a}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\phi(b)\frac{\partial a}{\partial S} \\ &= \Phi(a). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mit (2.48b) ergibt sich für Δ_P dann

$$\begin{aligned} \Delta_P &= \frac{\partial V_{P_e}}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} (S(\Phi(a) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(b) - 1)) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (V_{C_e} - S + Ke^{-r(T-t)}) \\ &= \Delta_C - 1 \\ &= \Phi(a) - 1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

□

Bemerkung 2.22. Aufgrund der Eigenschaften der Verteilungsfunktion folgt sofort, dass gilt

$$\begin{aligned} \Delta_C &\in [0, 1] \\ \Delta_P &\in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

○

Bemerkung 2.23. Für Δ_C , das Delta einer europäischen Call-Option, gilt im Ausübungszeitpunkt $t = T$

$$\lim_{t \rightarrow T} \Delta_C(t, S(t)) = \begin{cases} 1, & \text{für } S(T) > K \\ \frac{1}{2}, & \text{für } S(T) = K \\ 0, & \text{für } S(T) < K \end{cases} \quad (2.59)$$

und nach Satz 2.21 gilt analog für eine europäische Put-Option

$$\Delta_P(t, S(t)) = \Delta_C(t, S(t)) - 1. \quad (2.60)$$

Die Werte ergeben sich direkt aus Satz 2.21, Gleichung (2.48c) und den Eigenschaften der Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. ○

Abbildung 2.9 visualisiert analog zu Abbildung 2.8 die möglichen Werte von $\Delta_C(t, S(t))$ (links) und $\Delta_P(t, S(t))$ (rechts) in Abhängigkeit der Zeit $t \in [0, 1]$ und des Kurses des Basiswertes $S(t) \in [50, 150]$ mit $K = 100$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$. Auf der Fläche ist der

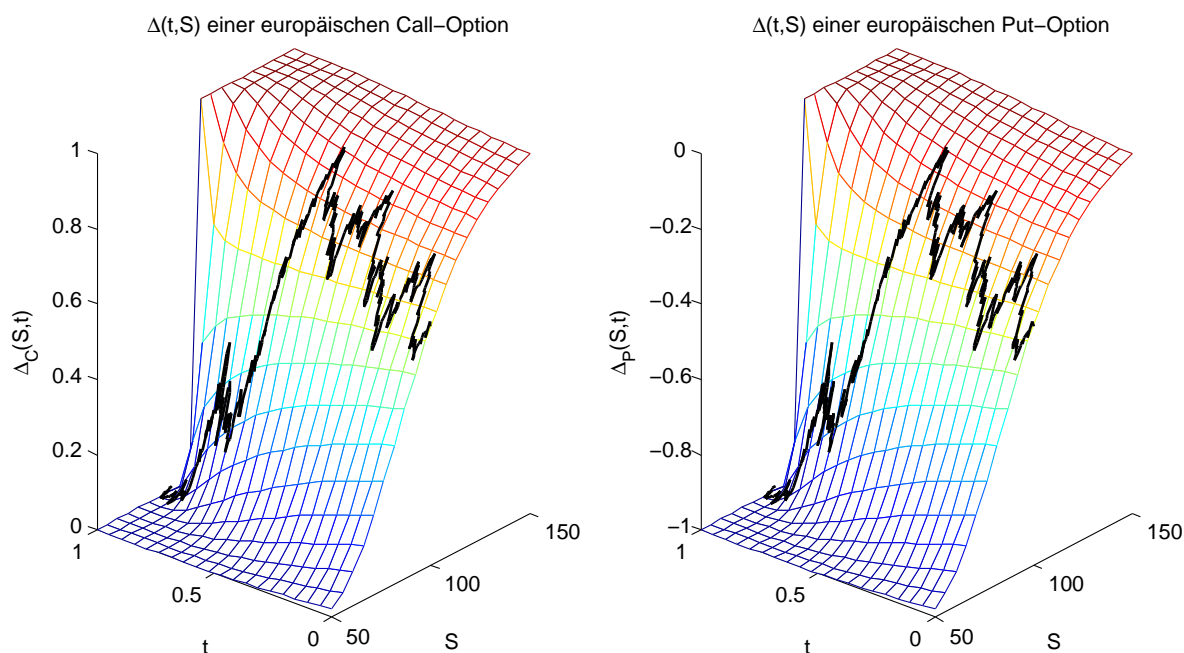


Abbildung 2.9: Dreidimensionale Darstellung des Δ einer europäischen Call- und Put-Option als Fläche in Abhängigkeit von t und $S(t)$ nach Black-Scholes-Formel für $t \in [0, 1]$ mit $S(t) \in [50, 150]$, $K = 100$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und Verlauf des zu dem Pfad von Abbildung 2.8 gehörenden Δ als Linie

Verlauf von $\Delta(t)$, der zu dem in Abbildung 2.8 dargestellten Optionspfad gehört, als Linie zu sehen.

Ebenso lässt sich das in Bemerkung 2.23 festgestellte Verhalten des Δ zum Laufzeitende in der Graphik verifizieren. In $t = T = 1$ wird in Abhängigkeit von $S(T)$ das Maximum, das Minimum oder $\pm \frac{1}{2}$ angenommen.

In der Praxis ist es natürlich nicht möglich, das Portfolio kontinuierlich umzuschichten. Deshalb nimmt man an, dass Umschichtungen zu M diskreten Zeitpunkten vorgenommen werden. Das Verfahren zur Absicherung gegen Risiko bei Optionsgeschäften, das sich aus der Herleitung der Black-Scholes Gleichung ergibt, lässt sich durch den folgenden Algorithmus beschreiben.

Algorithmus 2.24 (Zeitdiskretes Hedging auf Basis des Black-Scholes Modells¹¹).

- (1) Berechnung der Kurswerte $S(t_i)$ zu diskreten Zeitpunkten $t_i, i \in \{0, \dots, M\}$, wobei $S(t_0) := S_0$; dies erfolgt abhängig vom verwendeten Kursmodell, bei europäischen Optionen mittels der geometrischen Brownschen Bewegung
- (2) Berechnung von $V(t_i, S(t_i))$, $\Delta(t_i, S(t_i))$ und $B(t_i) = e^{rt_i} B_0$ für $i \in \{0, \dots, M\}$

¹¹siehe [7, Kapitel 9.1]

(3) Ausgehend von

$$\begin{aligned}\beta(t_0) &:= \beta_0 \\ \Pi(t_0) &:= -V(t_0, S(t_0)) + \Delta(t_0, S(t_0))S(t_0) + \beta(t_0)B(t_0)\end{aligned}$$

induktive Berechnung des Portfolios für $i \in \{1, \dots, M\}$:

$$\begin{aligned}\Pi(t_i) &:= -V(t_i, S(t_i)) + \Delta(t_{i-1}, S(t_{i-1}))S(t_i) + \beta(t_{i-1})B(t_i) \\ \beta(t_i) &:= \frac{\Pi(t_i) + V(t_i, S(t_i)) - \Delta(t_i, S(t_i))S(t_i)}{B(t_i)}\end{aligned}$$

o

Durch die aus der Black-Scholes Gleichung resultierenden Parameter $\Delta(t)$ und $\beta(t)$ lässt sich somit die Zusammensetzung des Portfolios $\Pi(t)$ in jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ angeben. Abbildung 2.10 stellt den Verlauf eines derartigen Portfolios für $M = 25$ Umschichtungen (links) und $M = 1000$ Umschichtungen (rechts) graphisch dar (die übrigen Parameter sind wie in den vorhergehenden Beispielen gewählt: $S_0 = 100$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $K = 95$, $B_0 = 100$, $\beta_0 = 1$). Der erwartete Verlauf, d.h. der aufgezinsten Wert $\Pi(t_0)$ des Portfolios in $t_0 = 0$, ist als gestrichelte Linie zum Vergleich skizziert.

Schichtet man das Portfolio weniger oft um, beobachtet man größere Abweichungen vom erwarteten Verlauf. Die Zusammensetzung des Portfolios wird seltener angepasst, dadurch gelingt es nicht mehr, den stochastischen Einfluss durch die Wahl von Δ dauerhaft zu eliminieren und es ergeben sich starke Schwankungen im Wert des Portfolios.

Bei einer hohen Anzahl von Umschichtungen hingegen erhält man eine gute Näherung der angestrebten Wertentwicklung. Die Zeiträume, in denen das Δ zu ungenau ist, um den stochastischen Term zu eliminieren, werden minimiert und die Wertschwankungen des Portfolios lassen sich fast vollständig vermeiden.

In (2.58) haben wir gesehen, dass Δ immer einen Wert zwischen 0 und 1 im Fall einer Call-Option bzw. zwischen 0 und -1 bei Put-Optionen annimmt. Auf Grundlage der Definition von Δ als partielle Ableitung des Optionswertes nach dem Kurs des Basiswertes lässt sich die praktische Bedeutung dieser Werte betrachten. $\Delta = 0$ impliziert, dass eine kleine Änderung des Aktienkurses keine Auswirkung auf den Optionswert hat. Im Gegensatz dazu bedeuten $\Delta = 1$ bzw. $\Delta = -1$, dass sich der Wert der Option und der Aktienkurs im gleichen Maß analog bzw. gegenläufig entwickeln. Das Δ gibt somit prozentual die Anteile am Basiswert an, die der Option entsprechen, d.h. welcher Anteil am Basiswert nötig ist, um das Verhalten der Option nachzubauen.

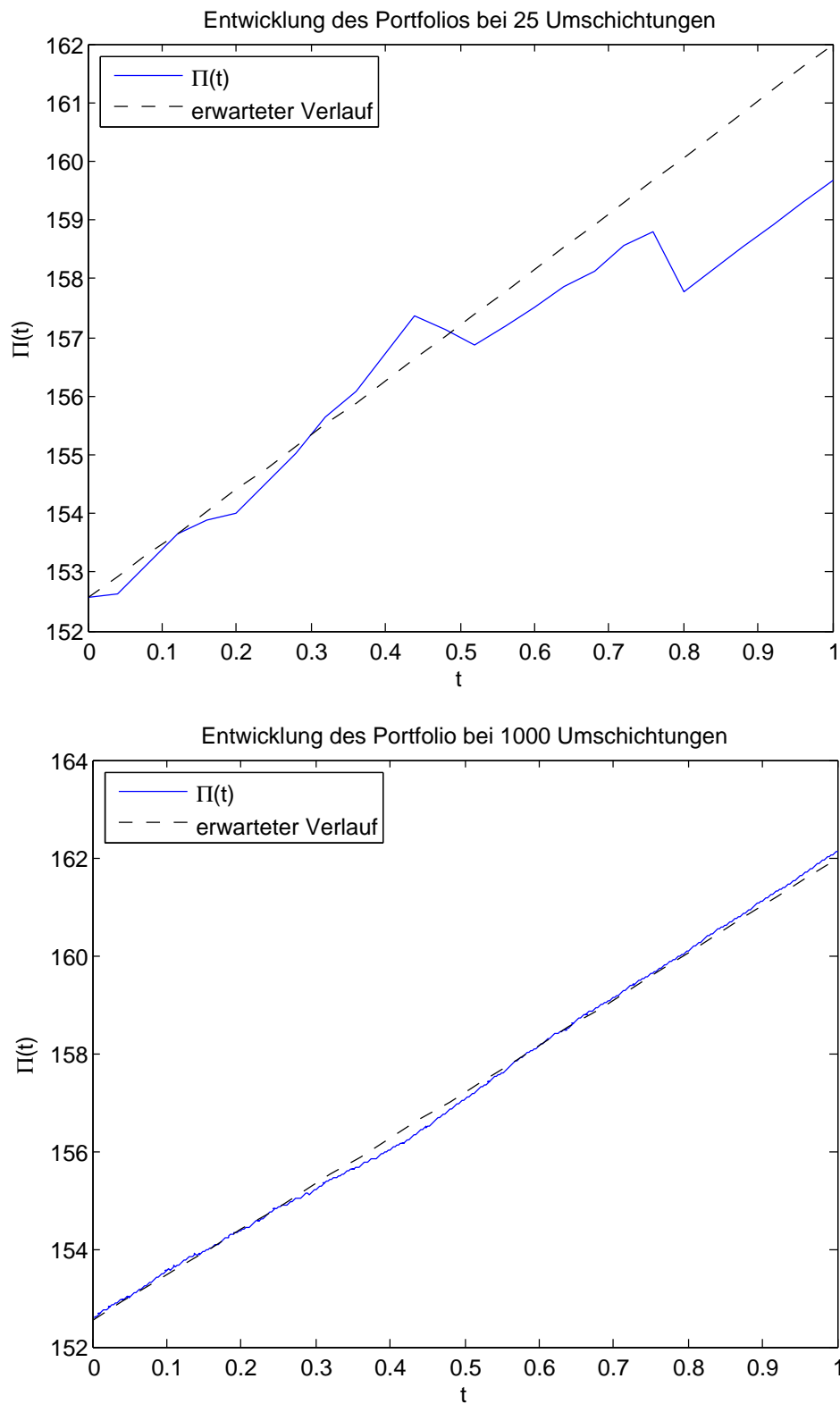


Abbildung 2.10: Portfolio-Entwicklung auf Basis der Black-Scholes Formel bei $M = 25$ bzw $M = 1000$ Umschichtungen

Kapitel 3

Monte Carlo Simulation

Für den Wert europäischer Optionen auf Basis des Kursmodells der geometrischen Brownschen Bewegung existiert nach dem Black-Scholes Modell eine analytische Formel. Verwendet man jedoch komplexere Kursmodelle oder betrachtet man andere Optionen, existiert im Allgemeinen keine geschlossene Formel mehr, um den Optionswert direkt ausrechnen zu können. In diesen Fällen lässt sich der Optionswert dennoch mit Hilfe der Monte Carlo Methode numerisch berechnen.

3.1 Theoretischer Hintergrund

In Kapitel 2.2 haben wir gesehen, dass sich der Optionswert auch mittels des abgezinnten Erwartungswertes der Auszahlungsfunktion berechnen lässt. Die Grundidee der Monte Carlo Simulation beruht darauf, durch computergenerierte Pseudo-Zufallszahlen Stichproben einer Zufallsvariablen zu ziehen und auszuwerten. Dadurch ist es möglich, ihren Erwartungswert zu schätzen, indem eine große Anzahl von Realisierungen simuliert und darüber der Mittelwert gebildet wird.

Die Grundlage für die Monte Carlo Simulation bildet der zentrale Grenzwertsatz der Statistik.

Satz 3.1 (Zentraler Grenzwertsatz).

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ und Varianz $\sigma^2 = \text{var}(X_i)$.

Betrachtet man die Partialsumme der ersten n Folgenglieder $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, so gilt für jedes $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy. \quad (3.1)$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt demnach (vgl. Def. 2.9) $(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, d.h. die Zufallsvariable $(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$ ist standard-normalverteilt. \circ

Für einen Beweis siehe [4, Kapitel VIII.4], [11, Kapitel 5].

Satz 3.1 impliziert, dass S_n für ausreichend große n approximativ normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ und Varianz $\text{var}(S_n) = n\sigma^2$, also $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Bemerkung 3.2. In Satz 3.1 wurde keine Forderung an die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X_i gemacht. Insbesondere wurde nicht vorausgesetzt, dass sie normalverteilt sind. \circ

Wollen wir also den unbekanntem Erwartungswert μ einer Zufallsvariablen X , von der wir Stichproben $X_i \sim X$ generieren können, bestimmen, so können wir dies mittels des (*Monte Carlo*) *Schätzers*

$$\hat{X} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.2)$$

realisieren. Das durch (3.2) gegebene Verfahren stellt die Grundidee der Monte Carlo Simulation formal da, den Erwartungswert durch wiederholtes Generieren und Auswerten von Zufallszahlen zu approximieren. Dabei ist die Approximation umso genauer, je größer die Anzahl N der ausgewerteten Zufallszahlen ist.

Interessanterweise ist anzumerken, dass, da nach Satz 3.1

$$\mathbb{E}(\hat{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X) = \mu \quad (3.3)$$

gilt, die Zufallsvariablen \hat{X} und X den gleichen Erwartungswert haben.

Bemerkung 3.3. Man nennt \hat{X} in (3.2) einen *erwartungstreuen Schätzer* von $\mu = \mathbb{E}(X)$, da $\mathbb{E}(\hat{X}) = \mu$. \circ

Im Folgenden wollen wir den Fehler bei der Approximation des Erwartungswertes durch die Monte Carlo Methode untersuchen. Dieser wird in Form bestimmter Intervalle angegeben, deren Größe von der Varianz $\text{var}(X)$ abhängt. Diese ist im Allgemeinen zwar nicht bekannt, lässt sich aber im Zuge der Monte Carlo Simulation schätzen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.4. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mu = \mathbb{E}(X)$ und $\sigma^2 = \text{var}(X)$. Seien $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim X$, d.h. mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ und Varianz $\text{var}(X_i) = \sigma^2$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Dann ist die *korrigierte Stichprobenvarianz*

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X})^2 \quad (3.4)$$

ein erwartungstreuer Schätzer von $\sigma^2 = \text{var}(X)$, wobei $\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass gilt $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

Dazu stellt man zunächst fest, dass gilt

$$\text{var}(\hat{X}) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (3.5)$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N ((X_i - \mu) - (\hat{X} - \mu))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N ((X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\hat{X} - \mu) + (\hat{X} - \mu)^2)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 - 2(\hat{X} - \mu) \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^N (\hat{X} - \mu)^2\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 - 2(\hat{X} - \mu) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N X_i - \sum_{i=1}^N \mu\right)}_{=N\hat{X}-N\mu} + N(\hat{X} - \mu)^2\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 - 2N(\hat{X} - \mu)^2 + N(\hat{X} - \mu)^2\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 - N(\hat{X} - \mu)^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - \frac{N}{N-1} \mathbb{E}((\hat{X} - \mu)^2) \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \text{var}(X_i) - \frac{N}{N-1} \text{var}(\hat{X}) \\ &= \frac{N}{N-1} \sigma^2 - \frac{1}{N-1} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Um den Fehler der Monte Carlo Methode genauer zu untersuchen, betrachtet man nun das sog. p-Konfidenzintervall.

Definition 3.5 (p -Konfidenzintervall).

Sei $p \in [0, 1]$, $N \in \mathbb{N}$ und $\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ der Monte Carlo Schätzer des Erwartungswertes $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Ein Intervall der Form

$$I = [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$$

heißt p -Konfidenzintervall von \hat{X} , wenn

$$P(\hat{X} \in I) = p \tag{3.6}$$

gilt. ◦

Nun lässt sich das 95%-Konfidenzintervall von \hat{X} bestimmen.

Nach Satz 3.1 ist \hat{X} für große N approximativ normalverteilt. Betrachtet man die durch Transformation standardisierte Zufallsvariable Z (vgl. (2.14)), ergibt sich mit $\text{std}(\hat{X}) = \sqrt{\text{var}(\hat{X})} = \sigma/\sqrt{N}$

$$Z = \frac{\hat{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \tag{3.7}$$

und nach Definition 2.9 ist Z standard-normalverteilt. Aufgrund der Eigenschaften der Standard-Normalverteilung existiert nun ein Wert k , sodass gilt

$$P(-k \leq Z \leq k) = 1 - \alpha = 0.95 \tag{3.8}$$

und mit

$$\Phi(k) = P(Z \leq k) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \tag{3.9}$$

folgt¹²

$$k = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96 \tag{3.10}$$

und somit

$$\begin{aligned} P(-k \leq Z \leq k) &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ &= P\left(-1.96 \leq \frac{\hat{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \leq 1.96\right) \\ &= P\left(\hat{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \hat{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}}\right) \\ &= 0.95. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nach Definition 3.5 lautet das 95%-Konfidenzintervall also¹³

$$I = \left[\hat{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}}, \hat{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right], \tag{3.12}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}(X)$ im Intervall I liegt beträgt 95%.

¹²MATLAB Befehl: `norminv(0.975)`

¹³siehe auch [9, Kapitel 15.2]

Bemerkung 3.6. Möchte man die Konfidenzintervalle berechnen, verwendet man dazu normalerweise die mittels (3.4) geschätzte korrigierte Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}$, da der exakte Wert σ unbekannt ist.¹⁴ Dann ist die standardisierte Zufallsvariable

$$Z_t = \frac{\hat{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{N}} \quad (3.13)$$

(siehe (3.7)) nicht mehr standard-normalverteilt, sondern folgt der sog. *studentschen t-Verteilung* mit $N - 1$ Freiheitsgraden.

In diesem Fall berechnet sich der Parameter k_t , sodass

$$P(-k_t \leq Z_t \leq k_t) = 1 - \alpha = 0.95 \quad (3.14)$$

gilt, mittels der Umkehrfunktion der studentschen t-Verteilung,¹⁵ also

$$k_t = t^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right). \quad (3.15)$$

Das p -Konfidenzintervall für $p = 1 - \alpha$ lautet dann

$$I = \left[\hat{X} - k_t \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{X} + k_t \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]. \quad (3.16)$$

Ist aber N ausreichend groß,¹⁶ gilt nach Satz 3.1 approximativ $\hat{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{N})$, d.h. die Zufallsvariable Z aus (3.7) ist approximativ standard-normalverteilt und somit lässt sich (3.12) zur Berechnung des 95%-Konfidenzintervalls verwenden. \circ

Bemerkung 3.7. Die Form des Konfidenzintervalls der Monte Carlo Methode (3.12) impliziert, dass der Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ ist, d.h. er ist umgekehrt proportional zu \sqrt{N} (für eine ausführlichere Betrachtung siehe Bemerkung 3.10). Das bedeutet, dass die Anzahl N der Stichproben um den Faktor 100 erhöht werden muss, um eine Verbesserung der Genauigkeit um eine Dezimalstelle zu erreichen. Dies ist die Ursache der langsamen Konvergenz des Verfahrens. Eine sehr hohe Genauigkeit zu erreichen, ist daher mit extrem hohen Rechenaufwand verbunden. \circ

Andererseits bedeutet (3.12) jedoch auch, dass der Fehler von Monte Carlo ebenso durch die Standardabweichung der Zufallsvariablen $\sigma = \sqrt{\text{var}(X)}$ beeinflusst wird. Dies eröffnet die Möglichkeit, durch Transformation die Varianz der betrachteten Zufallsvariablen zu senken. Diesen Ansatz werden wir in Kapitel 3.4 betrachten.

¹⁴siehe [15]

¹⁵MATLAB Befehl: `tinv(1- α /2,N-1)`

¹⁶als Faustregel kann $N \geq 40$ verwendet werden, vgl [15]

3.2 Monte Carlo zur Optionsbewertung

Optionsbewertung mit der Monte Carlo Methode beruht im Allgemeinen darauf, konkrete Pfade des Kurses des Basiswertes zu simulieren. Für europäische (Plain Vanilla) Optionen bedeutet dies, dass eine große Anzahl von Realisierungen des Wiener Prozesses auf Basis von Pseudo-Zufallszahlen erzeugt wird und damit die zugehörigen Kursverläufe berechnet werden. Schließlich kann für jeden so erhaltenen Kurspfad durch die Auszahlungsfunktion ein Optionswert $V(T, S(T))$ im Endzeitpunkt T bestimmt werden. Simuliert man eine ausreichend große Anzahl an Optionswerten im Endzeitpunkt, lässt sich nach Satz 3.1 der Erwartungswert $\mathbb{E}(V(T, S(T)))$ berechnen. Dies ist das Vorgehen der Monte Carlo Methode (siehe auch Algorithmus 2.2).

Um mit Hilfe von Satz 3.1 und (3.2) den Erwartungswert des Optionswertes in $t = T$ zu approximieren, betrachtet man die Zufallsvariable

$$X := \Lambda(S(T)), \quad (3.17)$$

vgl. (2.1). Im Fall einer europäischen Call-Option auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung ergibt sich mit (2.26)

$$X = \Lambda \left(S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \right), \quad \text{mit } W_T \sim \mathcal{N}(0, T). \quad (3.18)$$

Bemerkung 3.8. Nach (2.14) gilt für eine Zufallsvariable $Y \sim \mathcal{N}(0, T)$, dass $Y \sim \sqrt{T}Z$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ◦

Damit erhält man

$$X = \Lambda \left(S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right) \right), \quad \text{mit } Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.19)$$

Dies hat den Vorteil, dass standard-normalverteilte Zufallszahlen einfach mit dem Computer zu erzeugen sind.

Wir können nun keine Aussage über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X treffen, es ist jedoch möglich, mit Hilfe von Pseudo-Zufallszahlen $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ Stichproben von X zu erhalten. Somit lässt sich mittels der Monte Carlo Methode der Erwartungswert von X und damit auch der Optionswert in $t = T$ approximieren durch

$$V(T, S(T)) = \mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\Lambda \left(S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right) \right) \right) \quad (3.20)$$

für ausreichend große N .

Der Optionswert zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ergibt sich durch Abzinsen von $V(T, S(T))$ auf den Zeitpunkt t zu

$$V(t, S(t)) \approx e^{t-T} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\Lambda \left(S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right) \right) \right) \right]. \quad (3.21)$$

In Abbildung 3.1 sind die Ergebnisse einer Optionsbewertung mit Hilfe der Monte Carlo Methode dargestellt. Dabei wird die europäische Call-Option mit den Parametern wie vorher betrachtet ($S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$). Für verschiedene Anzahlen N von ausgewerteten Stichproben sind die resultierenden Optionswerte und zugehörigen Konfidenzintervalle dargestellt. Die Berechnung der Intervalle erfolgt anhand von (3.12), d.h. die Intervallgrenzen sind durch $\hat{V} \pm 1.96\hat{\sigma}/\sqrt{N}$ gegeben, wobei $\hat{\sigma}$ die korrigierte Stichprobenvarianz nach (3.4) bezeichnet. Man sieht in der Graphik auch, dass es vorkommt, dass der exakte Wert außerhalb des Konfidenzintervalls liegt.

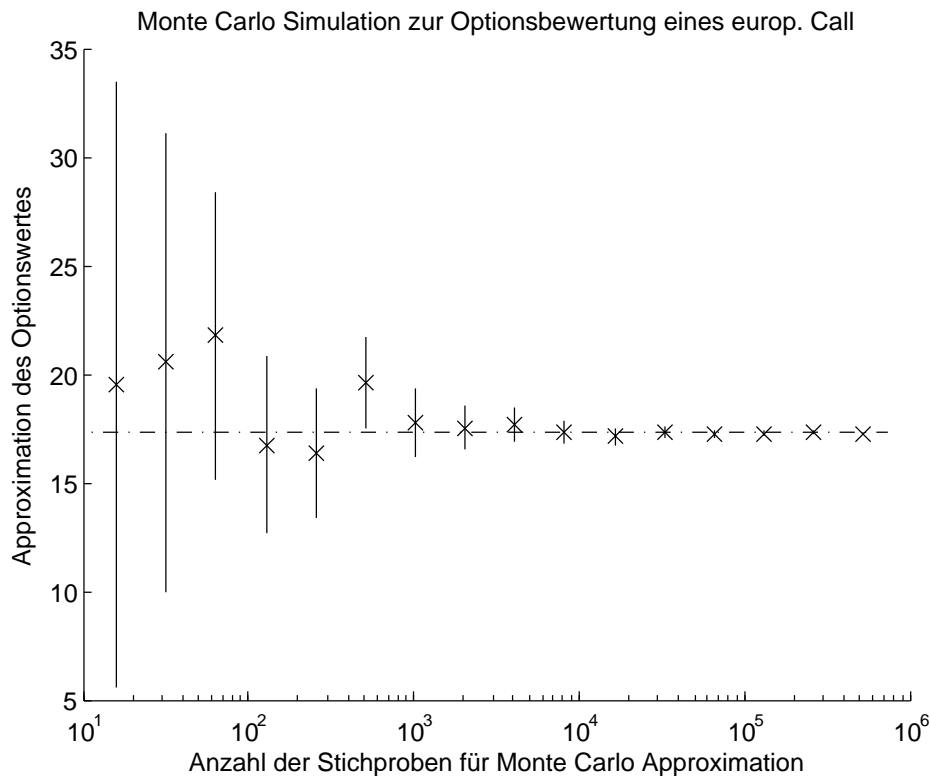


Abbildung 3.1: Approximation des Wertes einer europäischen Call-Option, die approximierten Optionswerte sind durch ein Kreuz markiert, die zugeh. Konfidenzintervalle werden durch vertikale Linien dargestellt, der exakte Wert ist durch eine horizontale Linie angezeigt

Außerdem zeigt die Abbildung auch Probleme der Monte Carlo Simulation auf. Es ist eine hohe Anzahl von ausgewerteten Stichproben, also Simulationen, notwendig, um eine gute Approximation des Optionswertes zu erhalten. Beachte, dass in Abbildung 3.1 die x-Achse in logarithmischer Skala dargestellt ist. Der durch Monte Carlo approximierte Optionswert bei einer Stichprobenanzahl von $N = 2^{19} \approx 5.0 \cdot 10^5$ beträgt $\hat{V} = 17.2695$, das berechnete 95%-Konfidenzintervall ist $[17.2040, 17.3350]$, der exakte Wert nach Black-Scholes lautet $V = 17.3236$. Dies ergibt einen relativen Fehler von $|\hat{V} - V|/V = 0.31\%$.

3.3 Hedging mit Monte Carlo

In Kapitel 2.6 haben wir gesehen, dass sich aus der Herleitung der Black-Scholes Formel ein Verfahren zur Risikoabsicherung bei Optionsgeschäften ergibt. Der zentrale Parameter zur Umsetzung dieser Strategie ist

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)),$$

wodurch der Anteil des Basiswertes am Portfolio bestimmt wird. Damit ist es möglich, die Umschichtungen zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ durchzuführen. Bisher haben wir den Parameter Δ dazu nach Satz 2.21 basierend auf dem Black-Scholes Modell bestimmt.

Oft lässt sich aber keine analytische Formel für Δ angeben, z. B. bei Verwendung komplexerer Kursmodelle oder bei der Betrachtung anderer Optionen. In diesen Fällen ist es trotzdem möglich, das Delta mit der Monte Carlo Simulation numerisch zu approximieren.

Nach Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t, S(t) + h) - V(t, S(t))}{h}. \quad (3.22)$$

Somit kann $\Delta(t, S(t))$ für kleines h mittels der Finite-Differenzen-Methode durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\Delta(t) \approx \frac{V(t, S(t) + h) - V(t, S(t))}{h} \quad (3.23)$$

approximiert werden.

Dies bedeutet, dass wir das zum Hedging benötigte Delta mit Hilfe zweier Optionswerte berechnen können, die sich nur geringfügig im S -Argument unterscheiden. Da die Optionswerte mit Monte Carlo berechnet werden können, ist es demnach auch möglich, das Delta mit Monte Carlo zu berechnen.

Jedoch ist auch hierbei die Konvergenz des Verfahrens nicht unproblematisch. In Kapitel 3.1 haben wir gesehen, dass der Fehler der Monte Carlo Methode bei der Approximation von Optionswerten von der Ordnung $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ ist. Durch Bildung der Differenz und Division durch h ergibt sich daraus ein Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(1/(h\sqrt{N}))$ bei der Approximation des Delta, d.h. der Fehler wird durch den Faktor $1/h$ verstärkt. Dies ist vor allem deshalb nachteilig, da h möglichst klein zu wählen ist, um eine gute Näherung der partiellen Ableitung in (3.23) zu erhalten. Eine Möglichkeit, dem entgegenzuwirken, werden wir im folgenden Kapitel betrachten.

3.4 Varianzreduktion

Wie in Kapitel 3.1 (vgl. Bemerkung 3.7) gesehen, ist bei der Approximation des Erwartungswertes $\mathbb{E}(X)$ mittels Monte Carlo Simulation eine hohe Genauigkeit mit hohen Werten von N , also mit einer hohen Anzahl von Simulationen und somit auch mit erhöhtem

Rechenaufwand verbunden, da der Fehler der Monte Carlo Methode proportional zu $1/\sqrt{N}$ ist.

Der Fehler bei der Approximation von $\mathbb{E}(X)$ durch die Monte Carlo Methode hängt nicht nur von der Anzahl N der Simulationen ab, sondern er ist auch proportional zur Varianz der betrachteten Zufallsvariablen X . Die Verringerung der Varianz der zugrunde liegenden Zufallsvariablen kann die Konvergenzgeschwindigkeit der Monte Carlo Simulation unter geeigneten Umständen signifikant verbessern. Voraussetzung dafür ist, dass der zusätzliche Rechenaufwand nicht größer ist als die dadurch entstehenden Einsparungen.

Im Folgenden werden wir zwei Methoden betrachten, die Varianz der zugrunde liegenden Zufallsvariablen zu reduzieren, um eine Verbesserung der Konvergenz der Monte Carlo Simulation zu erreichen.

3.4.1 Antithetische Zufallsvariablen

Bisher wurden ausschließlich unabhängige Zufallsvariablen betrachtet, um den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(f(Z)) \quad (3.24)$$

zu approximieren, mit

$$f(Z) = \Lambda \left(S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right) \right), \quad (3.25)$$

falls die geometrische Brownsche Bewegung als Kursmodell verwendet wird (vgl. (3.19)).

Neben der ursprünglichen Zufallsvariablen Z kann man zusätzlich die zu Z antithetische Zufallsvariable $Z^- := -Z$ in die Betrachtung mit einbeziehen. Statt den Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(f(Z))$ durch die Standard Monte Carlo Simulation mit

$$\mathbb{E}(X) \approx \hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Z_i), \quad \text{mit } Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.26)$$

zu approximieren (vgl. (3.20)), wird dies bei der Methode der antithetischen Zufallsvariablen durch

$$\hat{X}_{AV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(Z_i) + f(Z_i^-)}{2}, \quad \text{mit } Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.27)$$

realisiert. Dabei macht man sich den Zusammenhang von Z und Z^- zunutze, die einzelnen Paare der Realisierungen sind jedoch weiterhin unabhängig.

Dieses Vorgehen ist in Abbildung 3.2 am Beispiel eines Pfades (d.h. $N = 1$) der geometrischen Brownschen Bewegung illustriert. Bezeichnet man die dann in (3.27) statt f zu verwendende Funktion mit \tilde{f} , ist diese nach (2.26) gegeben durch

$$\tilde{f}(Z) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right). \quad (3.28)$$

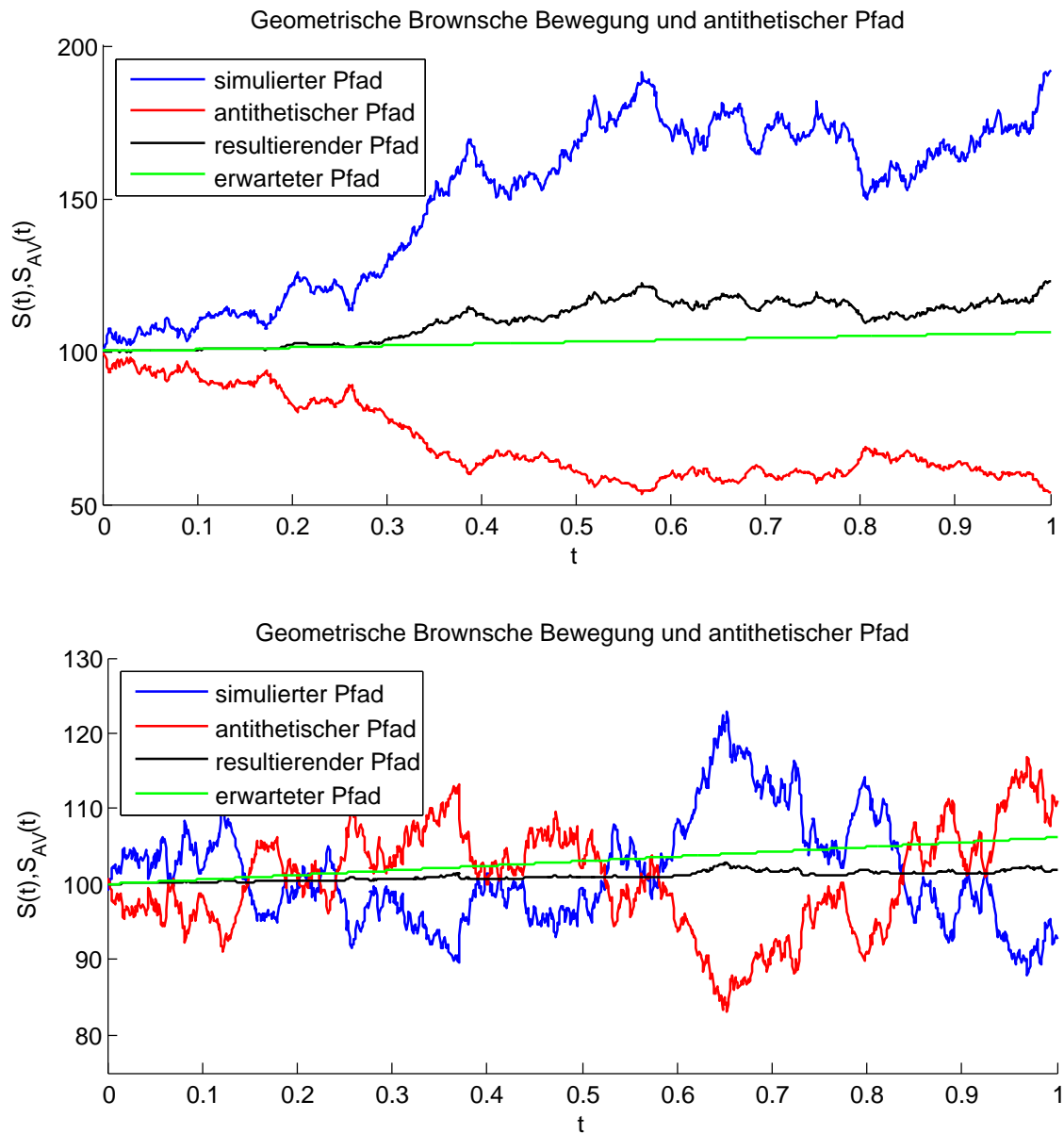


Abbildung 3.2: Simulierter Pfad der geometrischen Brownschen Bewegung mit zugehörigem antithetischem Pfad, resultierendem Pfad und erwartetem Pfad

Für eine Menge standard-normalverteilter Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ erhält man den ursprünglichen simulierten Pfad mittels $\tilde{f}(Z_i)$ und den dazu antithetischen Pfad durch $\tilde{f}(-Z_i)$.

In Abbildung 3.2 sind zwei Simulationen eines Pfades der geometrischen Brownschen Bewegung (blau) mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$ bei $M = 1000$ Zeitschritten dargestellt, in rot sind die dazu antithetischen Pfade eingezeichnet. Die resultierenden Pfade entsprechen \hat{X}_{AV} nach (3.27) mit $N = 1$ und sind durch eine schwarze Linie dargestellt, der erwartete Verlauf der Pfade (gegeben durch $S_0 e^{\mu t}$ nach (2.31)) durch eine grüne Linie. Man erkennt, dass der resultierende Pfad weniger Schwankungen unterliegt als der ursprüngliche Pfad und sich näher am erwarteten Pfad entwickelt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass dies implizit einer Berücksichtigung von zwei Zufallsvariablen entspricht, d.h. der Durchführung der Standard Monte Carlo Methode für $N = 2$, und ebenso eine zweimalige Auswertung der Funktion \tilde{f} notwendig ist.

Betrachtet man nun allgemein den Erwartungswert des ursprünglichen Pfades und den des antithetischen Pfades, so gilt zunächst $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z^-)$, da Z standard-normalverteilt ist. Es folgt $\mathbb{E}(f(Z)) = \mathbb{E}(f(Z^-))$ und mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{X}_{AV}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(Z_i) + f(Z_i^-)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbb{E}(f(Z_i)) + \mathbb{E}(f(Z_i^-))}{2} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(f(Z_i)) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Z_i)\right) \\ &= \mathbb{E}(\hat{X}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

ist sichergestellt, dass das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt. Wir können die Monte Carlo Methode also äquivalent auf die antithetische Form (3.27) anwenden, um den gesuchten Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ zu approximieren.

Um die Varianz zu untersuchen, stellt man zunächst fest, dass die folgende Ungleichung gilt.

Lemma 3.9. Seien f und g zwei Funktionen, mit f monoton steigend und g monoton fallend oder umgekehrt und sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\text{cov}(f(X), g(X)) \leq 0. \tag{3.30}$$

Beweis. Eine Funktion f ist genau dann monoton steigend, wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ bzw. monoton fallend, wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Seien f und g zwei Funktionen mit umgekehrter Monotonität, d.h. f monoton steigend und g monoton fallend oder umgekehrt. Für den Term $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$ liefert dann eine einfache Fallbetrachtung

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0, \text{ da}$$

$$\begin{cases} \text{für } x \leq y, f \text{ steigend, } g \text{ fallend: } f(x) - f(y) \leq 0 \text{ und } g(x) - g(y) \geq 0 \\ \text{für } x \leq y, f \text{ fallend, } g \text{ steigend: } f(x) - f(y) \geq 0 \text{ und } g(x) - g(y) \leq 0 \\ \text{für } x \geq y, f \text{ steigend, } g \text{ fallend: } f(x) - f(y) \geq 0 \text{ und } g(x) - g(y) \leq 0 \\ \text{für } x \geq y, f \text{ fallend, } g \text{ steigend: } f(x) - f(y) \leq 0 \text{ und } g(x) - g(y) \geq 0. \end{cases}$$

Betrachtet man nun zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen X und Y , dann gilt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbb{E}[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \\ &= \mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}(f(X)g(Y)) - \mathbb{E}(f(Y)g(X)) + \mathbb{E}(f(Y)g(Y)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da X und Y unabhängig und identisch verteilt sind, gilt nach (2.6)

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(Y))$$

und zusammen mit $X \sim Y$, $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ bzw. $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$ und (2.10) folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}(f(X)g(Y)) - \mathbb{E}(f(Y)g(X)) + \mathbb{E}(f(Y)g(Y)) \\ &= \mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(Y)) - \mathbb{E}(f(Y)) \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(f(X)g(X)) \\ &= 2(\mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(X))) \\ &= 2 \operatorname{cov}(f(X), g(X)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

und somit die Behauptung. □

Nach der Wahl der Funktion wie in (3.25) ist f monoton, da die Auszahlungsfunktion monoton ist, und es lässt sich Lemma 3.9 verwenden, um die Varianz von \hat{X}_{AV} aus (3.27) zu untersuchen. Es gilt weiterhin $\operatorname{var}(f(Z)) = \operatorname{var}(f(Z^-))$ und somit

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(\frac{f(Z) + f(Z^-)}{2}\right) &= \frac{1}{4} (\operatorname{var}(f(Z)) + \operatorname{var}(f(Z^-)) + 2 \operatorname{cov}(f(Z), f(Z^-))) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{var}(f(Z)) + \operatorname{cov}(f(Z), f(Z^-))) \\ &\leq \frac{1}{2} \operatorname{var}(f(Z)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Da nach (3.5)

$$\operatorname{var}(\hat{X}_{AV}) = \frac{\operatorname{var}((f(Z_i) + f(Z_i^-))/2)}{N} \quad (3.34)$$

gilt, folgt also

$$\operatorname{var}(\hat{X}_{AV}) \leq \frac{1}{2} \frac{\operatorname{var}(f(Z_i))}{N} = \frac{1}{2} \operatorname{var}(\hat{X}). \quad (3.35)$$

Die Varianz bei der Approximation wird also mindestens halbiert, dabei ist allerdings anzumerken, dass dies mit erhöhtem Rechenaufwand verbunden ist, da f nun für Z und Z^- ausgewertet werden muss.

Diese Ergebnisse lassen sich direkt auf das Hedging mittels der Monte Carlo Simulation übertragen. Wie wir in Kapitel 3.3 gesehen haben, lässt sich der Parameter Δ durch die Berechnung zweier Optionswerte approximieren. In Tabelle 3.1 werden die Ergebnisse der Approximation des Delta mit Hilfe der Standard Monte Carlo Methode und mit denen auf Basis antithetischer Zufallsvariablen verglichen. Dabei betrachten wir wieder einen europäischen Call mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die Differenz im S -Argument zur Approximation des Delta beträgt $h = 0.0001$. Es werden dafür die Größen der 95%-Konfidenzintervalle für verschiedene Stichprobengrößen von $N = 100$ bis $N = 10^7$ dargestellt. Es ist zu beachten, dass bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen dabei implizit die doppelte Stichprobengröße zugrunde gelegt wird und die Auszahlungsfunktion doppelt so oft ausgewertet werden muss. Dies schlägt sich auch in der Rechenintensität nieder. Die Auswertung von $2.5 \cdot 10^7$ Stichproben mit dem Standard Monte Carlo Verfahren dauert auf dem Test-System 2.91 Sekunden, die Auswertung von ebensovielen antithetischen Paaren von Stichproben mit der Methode der antithetischen Zufallsvariablen dauert 4.96 Sekunden, ist also um den Faktor 1.7 langsamer.

N	Standard Monte Carlo	Antithetische ZV	Verhältnis
10^2	[-50037.85, 60015.06]	[-25853.95, 41920.82]	1.62380
10^3	[-16105.11, 25644.31]	[-5154.70, 16257.01]	1.94984
10^4	[-8960.50, 4611.09]	[-3867.20, 2879.05]	2.01172
10^5	[-3125.94, 1124.56]	[-539.21, 1588.15]	1.99801
10^6	[-740.01, 603.27]	[-683.22, -13.36]	2.00531
10^7	[-178.02, 246.84]	[-232.08, -20.30]	2.00611

Tabelle 3.1: Vergleich der Größen der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode mit Monte Carlo bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen für verschiedene Anzahlen N von Stichproben

Ein Blick auf die Größe der Konfidenzintervalle bestätigt auch die Vermutung aus Kapitel 3.3, dass der Fehler bei der Approximation des Delta sehr groß sein wird. Selbst bei einer Stichprobenzahl von $N = 10^7$ lassen sich noch keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielen.

Zur besseren Vergleichbarkeit verwenden wir für die Methode der antithetischen Zufallsvariablen nun nur die halbe Stichprobenanzahl der Standard Monte Carlo Methode. Die zugehörigen Ergebnisse bei gleichen Parametern wie im vorherigen Beispiel sind in Tabelle 3.2 dargestellt. Auch unter diesen Umständen zeigt sich noch eine bessere Konvergenz bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen. Vergleicht man die Laufzeiten, so ergibt sich auf dem Test-System nun eine Laufzeit von 2.83 Sekunden bei $1.25 \cdot 10^7$ ausgewerteten Stichprobenpaaren, also eine etwas kürzere Laufzeit als bei der Standard Monte Carlo Methode.

N	Standard Monte Carlo	Antithetische ZV	Verhältnis
10^2	$[-128244.82, 1806.67]$	$[-56447.99, 36881.03]$	1.39347
10^3	$[-1024.62, 42427.16]$	$[-27314.25, 2015.23]$	1.48151
10^4	$[-11083.37, 2551.11]$	$[-5927.35, 3317.83]$	1.47477
10^5	$[-3114.10, 1136.69]$	$[-2226.22, 775.02]$	1.41635
10^6	$[-955.25, 388.10]$	$[-559.09, 387.50]$	1.41913
10^7	$[-328.75, 96.02]$	$[-134.05, 165.51]$	1.41798

Tabelle 3.2: Vergleich der Größen der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode mit Monte Carlo bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen wobei für letztere nur die halbe Anzahl der Stichproben, d.h. $N/2$, verwendet wurde

Bemerkung 3.10. Vergleicht man die Intervallgrößen von Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2, fällt auf, dass die Verhältnisse bei N Simulationen gegen 2 zu konvergieren scheinen, während sie bei Verwendung von $N/2$, der halben Anzahl von Simulationen, gegen $\sqrt{2}$ zu konvergieren scheinen. Nach (3.12) ist das 95%-Konfidenzintervall der Monte Carlo Methode von der Form

$$I_N = \left[\hat{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}}, \hat{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

und somit für $N/2$ analog

$$\begin{aligned} I_{N/2} &= \left[\hat{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N/2}}, \hat{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N/2}} \right] \\ &= \left[\hat{X} - \sqrt{2} \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}}, \hat{X} + \sqrt{2} \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bezeichnet man die untere Grenze des 95%-Konfidenzintervalls mit I^L und die obere Grenze mit I^U , so gilt für die Größe des Intervalls bei N Simulationen

$$\begin{aligned} I_N^U - I_N^L &= \left(\hat{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right) - \left(\hat{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right) \\ &= 2 \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

und bei $N/2$ Simulationen entsprechend

$$\begin{aligned} I_{N/2}^U - I_{N/2}^L &= \left(\hat{X} + \sqrt{2} \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right) - \left(\hat{X} - \sqrt{2} \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

es gilt also

$$I_{N/2}^U - I_{N/2}^L = \sqrt{2} (I_N^U - I_N^L). \quad (3.39)$$

Betrachtet man nun das Verhältnis der Intervallgrößen der Standard Monte Carlo Methode und der Methode der antithetischen Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \frac{I_{Std}^U - I_{Std}^L}{I_{AV,N}^U - I_{AV,N}^L} &= \frac{I_{Std}^U - I_{Std}^L}{\left(I_{AV,N/2}^U - I_{AV,N/2}^L\right) / \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{I_{Std}^U - I_{Std}^L}{I_{AV,N/2}^U - I_{AV,N/2}^L} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

zeigt sich, dass das Verhältnis der Intervallgrößen bei $N/2$ Simulationen um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist, als das bei der Durchführung von N Simulationen. Mit

$$2 = \frac{I_{Std}^U - I_{Std}^L}{I_{AV,N}^U - I_{AV,N}^L} = \sqrt{2} \left(\frac{I_{Std}^U - I_{Std}^L}{I_{AV,N/2}^U - I_{AV,N/2}^L} \right) = \sqrt{2}^2 \quad (3.41)$$

bestätigt sich also obige Beobachtung und es stellt sich in der Praxis tatsächlich die in Bemerkung 3.7 erklärte Verkleinerung des Konfidenzintervalls bei Verdoppelung der Anzahl der Simulationen ein. \circ

In diesem Zusammenhang betrachten wir zudem die Rechenzeit des Verfahrens der antithetischen Zufallsvariablen bei den verschiedenen Anzahlen von Simulationen. Bei $N = 2 \cdot 10^7$ Durchläufen der Monte Carlo Methode dauert die Berechnung des Delta (bei Verwendung obiger Parameter) 4.14 Sekunden, für $N/2$ (also 10^7) Simulationen werden 2.08 Sekunden benötigt. Eine Verdopplung von N bringt also neben einer Verkleinerung des 95%-Konfidenzintervalls um den Faktor $\sqrt{2}$ auch eine Verdopplung der Rechenzeit mit sich.

3.4.2 Control Variates

Zur Varianzreduktion mit Hilfe antithetischer Zufallsvariablen hat man sich die Tatsache zunutze gemacht, dass man einfach eine zur ursprünglichen Zufallsvariablen antikorrelierte Zufallsvariable finden konnte. Nun werden wir einen Ansatz untersuchen, bei dem man versucht, Zufallsvariablen mit bekannten Eigenschaften zu finden.

Das Ziel ist wiederum, den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ einer Zufallsvariablen X mittels Monte Carlo Simulation durch

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.42)$$

zu approximieren. Dazu betrachtet man nun eine weitere Zufallsvariable Y , deren Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ bekannt ist bzw. sich berechnen lässt. Diese neue Zufallsvariable nennt man *Control Variate*, da sie einen Kontrollterm für die ursprüngliche Zufallsvariable darstellt. Wählt man die Zufallsvariable Y derart, dass sie sich ausreichend ähnlich zu X verhält, ist auch der Fehler der Monte-Carlo-Simulation bei der Approximation der Erwartungswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ ähnlich. Bzgl. der neuen Zufallsvariablen Y lässt sich der Fehler darstellen durch

$$\hat{Y} - \mathbb{E}(Y). \quad (3.43)$$

Dieser Wert kann berechnet werden, denn die Kenntnis des Erwartungswertes $\mathbb{E}(Y)$ wurde vorausgesetzt. Da nach Annahme die beiden Fehler ähnlich sind, kann der Wert der ursprünglichen Approximation um diesen Fehler korrigiert werden und man erhält

$$\hat{X}_{CV} = \hat{X} - \hat{Y} + \mathbb{E}(Y). \quad (3.44)$$

Falls die Entwicklungen der Zufallsvariablen ausreichend ähnlich sind, ergibt sich eine stark positive Korrelation. Dann folgt

$$0 \approx \text{var}(\hat{X} - \hat{Y}) = \text{var}(\hat{X}) + \text{var}(\hat{Y}) - 2 \text{cov}(\hat{X}, \hat{Y})$$

und somit

$$\text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) \approx \frac{1}{2} \text{var}(\hat{X}) + \frac{1}{2} \text{var}(\hat{Y}).$$

Unter der Bedingung, dass die Entwicklungen der beiden Zufallsvariablen nahe genug beieinander liegen, ergibt sich wegen $\text{var}(\hat{X}) > 0$ und $\text{var}(\hat{Y}) > 0$

$$\text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) > \frac{1}{2} \text{var}(\hat{Y}). \quad (3.45)$$

Betrachtet man den Erwartungswert $\mathbb{E}(\hat{X}_{CV})$ erhält man mit (3.44)

$$\mathbb{E}(\hat{X}_{CV}) = \mathbb{E}(\hat{X}) - \mathbb{E}(\hat{Y}) + \mathbb{E}(Y)$$

und mit $\mathbb{E}(\hat{Y}) = \mathbb{E}(Y)$ folgt schließlich

$$\mathbb{E}(\hat{X}_{CV}) = \mathbb{E}(\hat{X}). \quad (3.46)$$

Um $\mathbb{E}(X)$ zu berechnen, können wir also analog $\mathbb{E}(\hat{X}_{CV})$ durch Monte Carlo Simulation approximieren.

Für den Fehler bei der Approximation von \hat{X}_{CV} ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{X}_{CV}) &= \text{var}(\hat{X} - \hat{Y} + \mathbb{E}(Y)) \\ &= \text{var}(\hat{X} - \hat{Y}) \\ &= \text{var}(\hat{X}) + \text{var}(\hat{Y}) - 2 \text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) \end{aligned}$$

und mit (3.45) folgt

$$\text{var}(\hat{X}_{CV}) < \text{var}(\hat{X}) + \text{var}(\hat{Y}) - \text{var}(\hat{Y}),$$

also

$$\text{var}(\hat{X}_{CV}) < \text{var}(\hat{X}). \quad (3.47)$$

Es lässt sich demnach eine Verbesserung erzielen, wenn sich die Zufallsvariablen ähnlich genug entwickeln bzw. $\text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) > \frac{1}{2} \text{var}(\hat{Y})$ gilt.

Bemerkung 3.11. Das Verfahren eignet sich in dieser Form vor allem zur Optionsbewertung. In diesem Fall ist es oft sinnvoll, die Definition in (3.44) zu ergänzen. Dazu definiert man die Zufallsvariable als

$$\hat{X}_\theta = \hat{X} - \theta(\hat{Y} - \mathbb{E}(Y)), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Es gilt weiterhin

$$\mathbb{E}(\hat{X}_\theta) = \mathbb{E}(\hat{X}) - \theta \mathbb{E}(\hat{Y}) + \theta \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\hat{X}),$$

demnach ist auch \hat{X}_θ ein erwartungstreuer Schätzer von $\mathbb{E}(X)$ und wir können die Monte Carlo Simulation auf \hat{X}_θ anwenden.

Betrachtung der Varianz $\text{var}(\hat{X}_\theta)$ zeigt

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{X}_\theta) &= \text{var}(\hat{X} - \theta\hat{Y}) \\ &= \text{var}(\hat{X}) - 2\theta \text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) + \theta^2 \text{var}(\hat{Y}). \end{aligned}$$

Um die Varianz $\text{var}(\hat{X}_\theta)$ zu minimieren, ergibt sich die Bedingung

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\theta^2 \text{var}(\hat{Y}) - 2\theta \text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) \right)$$

und somit

$$2\theta \text{var}(\hat{Y}) - 2 \text{cov}(\hat{X}, \hat{Y}) = 0.$$

Das bedeutet, dass eine minimale Varianz von \hat{X}_θ durch

$$\theta_{\min} = \frac{\text{cov}(\hat{X}, \hat{Y})}{\text{var}(\hat{Y})}$$

erreicht wird.

Im Allgemeinen ist die Kovarianz $\text{cov}(\hat{X}, \hat{Y})$ unbekannt. Man kann diese aber während der Monte Carlo Simulation schätzen. Dazu führt man einige vorbereitende Simulationen durch.

Um beispielsweise den Wert einer europäischen Call-Option durch Monte Carlo Simulation mit Hilfe von Control Variates zu approximieren, kann der Kurswert des Basiswertes als Kontrollvariable Y verwendet werden, da der Erwartungswert $\mathbb{E}(Y) = S_0 e^{rT}$ und die Varianz $\text{var}(Y) = S_0^2 e^{2rT} (e^{\sigma^2 T} - 1)$ bekannt sind (siehe (2.31)). \circ

Die Idee der Control Variates kann in leicht abgewandelter Form auch zum Hedging mittels Monte Carlo, d.h. zur Approximation des Delta, verwendet werden. Dazu wird die Näherung

$$\Delta(t, S(t)) \approx \frac{\mathbb{E}(V(t, S(t) + h)) - \mathbb{E}(V(t, S(t)))}{h} \quad (3.48)$$

verwendet (vgl. (3.23)).

In (3.48) kann nun der eine Erwartungswert als Kontrollterm des anderen Erwartungswertes aufgefasst werden. Die Bedingung, dass sich die beiden Zufallsvariablen ausreichend

ähnlich entwickeln, setzen wir um, indem wir zur Approximation beider Erwartungswerte in jedem Durchlauf die gleiche Realisierung des Wiener Prozesses zur Simulation der Pfade verwenden:

$$\Delta(t, S(t), \omega_i) \approx \frac{\mathbb{E}(V(t, S(t) + h, \omega_i)) - \mathbb{E}(V(t, S(t), \omega_i))}{h}. \quad (3.49)$$

Damit können wir unterstellen, dass der Fehler bei beiden Approximationen der Optionswerte annähernd gleich ist. Bezeichnet man den Fehler bei der Approximation von $\mathbb{E}(V(t, S(t) + h)) = \hat{V}(t, S(t) + h)$ mit $\hat{\epsilon}_1$ bzw. den Fehler bei der Approximation von $\mathbb{E}(V(t, S(t))) = \hat{V}(t, S(t))$ mit $\hat{\epsilon}_2$, so erhält man mit $\hat{\epsilon}_1 \approx \hat{\epsilon}_2$

$$\begin{aligned} \Delta(t, S(t), \omega_i) &= \frac{(\hat{V}(t, S(t) + h, \omega_i) + \hat{\epsilon}_1) - (\hat{V}(t, S(t), \omega_i) + \hat{\epsilon}_2)}{h} \\ &\approx \frac{\hat{V}(t, S(t) + h, \omega_i) - \hat{V}(t, S(t), \omega_i)}{h}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die beiden Approximationen (3.48) und (3.49) haben den gleichen Erwartungswert. Betrachtet man die Varianz von (3.48) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{var}(V(t, S(t) + h) - V(t, S(t))) &= \text{var}(V(t, S(t) + h)) + \text{var}(V(t, S(t))) - \\ &\quad - \underbrace{2 \text{cov}(V(t, S(t) + h), V(t, S(t)))}_{=0} \\ &= \text{var}(V(t, S(t) + h)) + \text{var}(V(t, S(t))), \end{aligned} \quad (3.51)$$

da die beiden Zufallsvariablen $V(t, S(t) + h)$ und $V(t, S(t))$ hier unkorreliert sind.

Für das aus (3.49) resultierende Verfahren ergibt sich mit (3.45) für den Fehler

$$\begin{aligned} \text{var}(V(t, S(t) + h) - V(t, S(t))) &= \text{var}(V(t, S(t) + h)) + \text{var}(V(t, S(t))) - \\ &\quad - \underbrace{2 \text{cov}(V(t, S(t) + h), V(t, S(t)))}_{>0} \\ &< \text{var}(V(t, S(t) + h)) + \text{var}(V(t, S(t))), \end{aligned} \quad (3.52)$$

also eine Verbesserung gegenüber der vorherigen Methode.

Zur Illustration der Verbesserung im Konvergenzverhalten, die durch Verwendung des Control Variates Ansatzes erzielt werden kann, betrachten wir wieder einen europäischen Call mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$ im Zeitpunkt $t_0 = 0$ und der Differenz im S -Argument zur Approximation des Delta $h = 0.0001$. In Tabelle 3.3 werden analog zum vorhergehenden Kapitel die Größen der 95%-Konfidenzintervalle für verschiedene Stichprobengrößen von $N = 100$ bis $N = 10^7$ bei der Standard Monte Carlo Methode und bei Verwendung des Control Variates Ansatzes dargestellt.

Es zeigt sich, dass sich dadurch eine bemerkenswerte Verbesserung der Resultate erreichen lässt.

In Abbildung 3.3 ist der Vergleich der Standard Monte Carlo Methode mit dem Control Variates Ansatz zur Approximation des Delta graphisch dargestellt. Dabei ist insbesondere die Skalierung der Achsen der linken und rechten Graphik zu beachten. Es wurden die gleichen

N	Standard Monte Carlo	Control Variates	Verhältnis
10^2	$[-74085.10, 55355.85]$	$[0.5541, 0.7884]$	552554
10^3	$[-41294.07, 1706.10]$	$[0.6552, 0.7337]$	547977
10^4	$[-4223.90, 9435.14]$	$[0.6919, 0.7161]$	564125
10^5	$[-2919.73, 1307.39]$	$[0.6951, 0.7027]$	552165
10^6	$[-469.04, 876.69]$	$[0.6977, 0.7002]$	556701
10^7	$[-18.27, 406.75]$	$[0.6984, 0.6992]$	555698

Tabelle 3.3: Vergleich der Größen der 95%-Konfidenzintervalle von Standard Monte Carlo Methode und Control Variates Ansatz für verschiedene Stichprobengrößen N

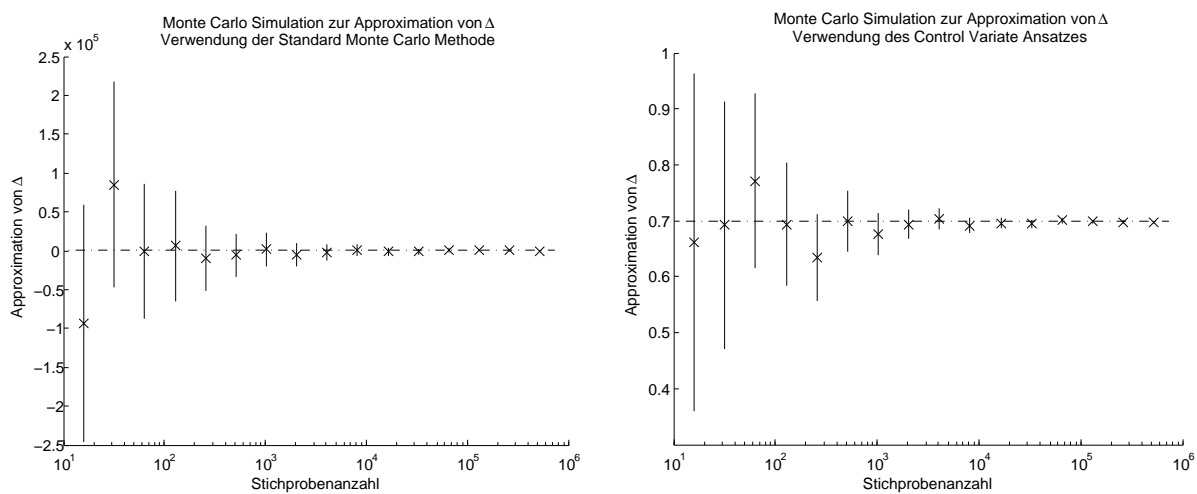


Abbildung 3.3: Graphischer Vergleich von Standard Monte Carlo Methode und Control Variates Ansatz zur Approximation des Delta, dabei ist vor allem der Unterschied in der Skalierung der x-Achsen der beiden Graphiken zu beachten (links Faktor 10^5)

Parameter wie in den vorherigen Beispielen gewählt. Der approximierter Wert des Delta ist für jede Stichprobenanzahl N mit einem Kreuz markiert, die zugehörigen Konfidenzintervalle sind durch eine vertikale Linie dargestellt, der exakte Wert aus der Black-Scholes Gleichung ist durch eine gestrichelte Linie angezeigt.

3.5 Simulation der Entwicklung eines Portfolios

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich nun verwenden, um die Entwicklung eines Portfolios zu simulieren. Dabei werden die für die Umschichtungen relevanten Werte $\Delta(t_i)$ zu den M diskreten Zeitpunkten $t_i, i \in \{1, \dots, M\}$ durch Monte Carlo Simulation approximiert. Zur Berechnung des Delta wird der Control Variates Ansatz aus dem vorherigen Abschnitt verwendet.

Betrachtet wird ein Portfolio bestehend aus Anteilen am Basiswert, der festverzinslichen Anleihe und einer ausgegebenen europäischen Call-Option mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1$, also $t \in [0, 1]$. Die Umschichtung erfolgt zu $M = 250$ Zeitpunkten, die Werte werden bei Verwendung der Monte Carlo Methode durch $N = 100000$ Simulationen approximiert.

Abbildung 3.4 stellt den Verlauf der durch Monte Carlo approximierten Optionswerte $V(t)$ und der Werte $\Delta(t)$ in rot dar, die mit Hilfe der Black-Scholes Formel berechneten exakten Werte sind in blau dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass die mit Monte Carlo approximierten Werte fast genau mit den exakten Werten übereinstimmen.

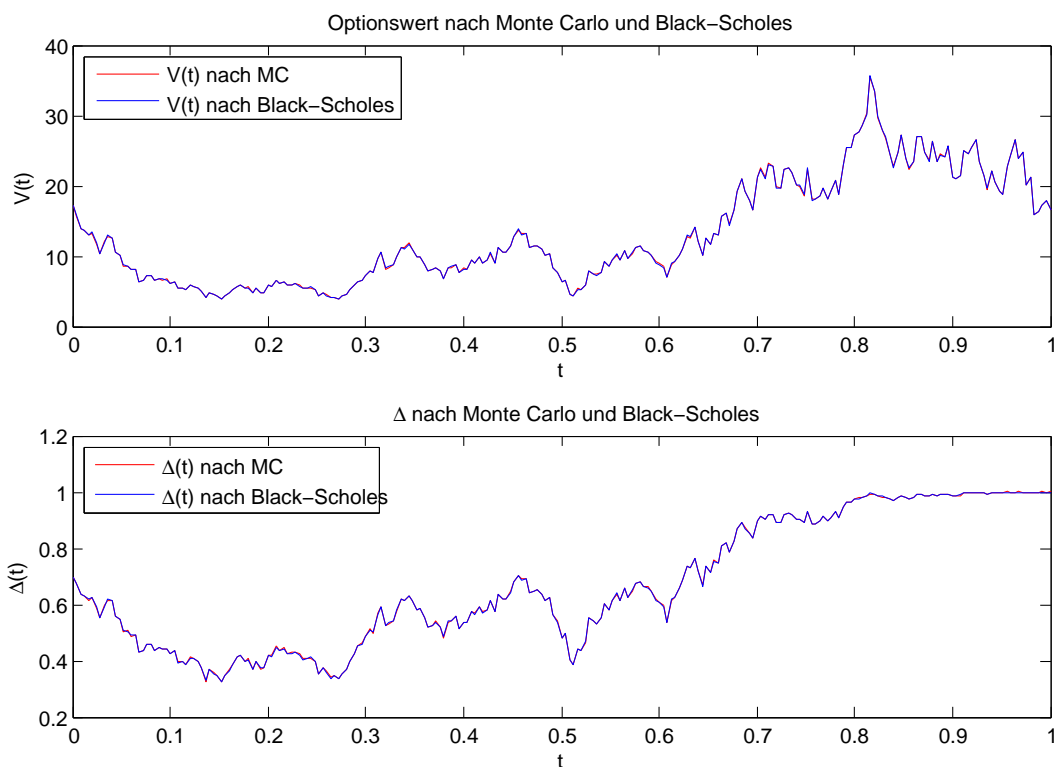


Abbildung 3.4: Verlauf von $V(t)$ und $\Delta(t)$ nach Monte Carlo und Black-Scholes

Mit Hilfe dieser Werte wird nun die Entwicklung des simulierten Portfolios in Abbildung 3.5 graphisch dargestellt. Die sich aus den mit der Monte Carlo Simulation approximierten Werten ergebende Entwicklung ist wiederum in rot skizziert, der Verlauf nach Black-Scholes in blau. Der erwartete Verlauf, also die Entwicklung einer festverzinslichen Anleihe mit gleichem Startkapital, ist als gestrichelte schwarze Linie dargestellt.

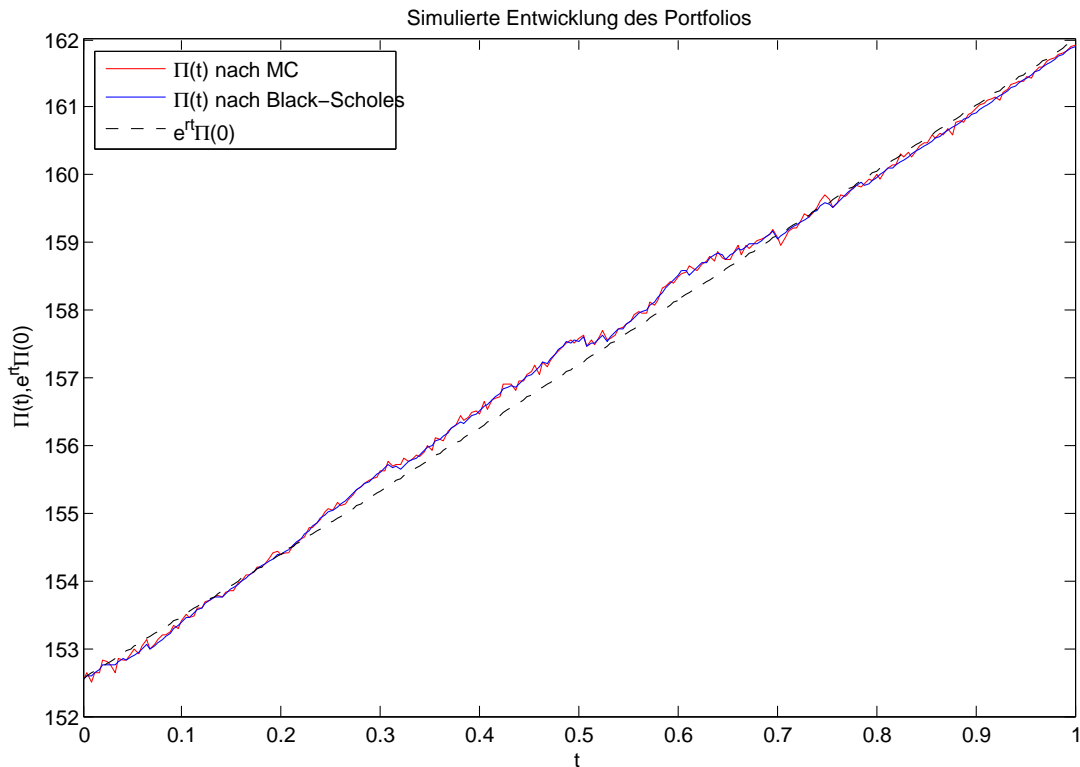


Abbildung 3.5: Entwicklung des Portfolios nach Monte Carlo und Black-Scholes

Wie man nach dem Verlauf der Werte $\Delta(t)$ erwartet, sind die Entwicklung des Monte Carlo Portfolios und die des Black-Scholes Portfolios sehr ähnlich. Die Anzahl der Zeitschritte M und die Anzahl der Monte Carlo Simulationen N in jedem Zeitschritt wurden hier so gewählt, dass ein guter Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenzeit erzielt wird. Durch Erhöhung der beiden Werte lassen sich noch genauere Ergebnisse erreichen.

Abschließend erfolgt eine Betrachtung der Rechenzeit, die zur Simulation des obigen Portfolios benötigt wurde. Auf dem verwendeten System (Intel® Core™ 2 Duo T9550 @ 2.66GHz, 4GB DDR3 RAM unter Windows 7 64bit) dauert die Simulation zur Erzeugung der Abbildungen 3.4 und 3.5 bei $N = 10^5$ Monte Carlo Durchläufen in jedem der $M = 250$ Zeitschritte 3.32 Sekunden. Erhöht man die Anzahl der Monte Carlo Simulationen auf $N = 5 \cdot 10^5$, werden bei gleichbleibendem M 17.05 Sekunden und für $N = 10^6$ 32.64 Sekunden benötigt.

Betrachtet man eine Erhöhung der Anzahl der Zeitschritte, so ergibt sich für $M = 500$ Zeitschritte bei $N = 10^5$ Simulationen pro Zeitschritt eine Rechenzeit von 6.37 Sekunden. Führt man nun auch $N = 10^6$ Simulationen in jedem Zeitschritt durch, so werden 63.31 Sekunden zur Durchführung der notwendigen Rechnungen und Erzeugung der zugehörigen Abbildungen benötigt.

Kapitel 4

Stochastische Volatilität

Bisher wurde eine Modellierung des Kursverlaufs des Basiswertes anhand der geometrischen Brownschen Bewegung (2.29) vorgenommen. Dabei ist die Volatilität als konstant vorausgesetzt worden. Von dieser Prämisse soll nun Abstand genommen werden, indem die Volatilität ebenfalls durch einen stochastischen Prozess dargestellt wird. Dazu betrachten wir das folgende stochastische Volatilitätsmodell.

Definition 4.1 (Stochastisches Volatilitätsmodell).

Das Modell einer stochastischen Volatilität lässt sich durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}dS(t) &= a(t, S(t))dt + b(t, S(t), \sigma(t))dW^S(t) \\d\sigma(t) &= \tilde{a}(t, \sigma(t))dt + \tilde{b}(t, \sigma(t))dW^\sigma(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

beschreiben, wobei $dW^S(t)$ und $dW^\sigma(t)$ unabhängige, eindimensionale Wiener Prozesse sind. ◦

4.1 Mean Reverting Volatility

Nun lässt sich das stochastische Volatilitätsmodell (4.1) noch erweitern. Dazu schlägt Seydel¹⁷ das Mean Reversion Verfahren zur Modellierung der stochastischen Volatilität vor.

Definition 4.2 (Mean Reversion Modell).

Das Mean Reversion Modell ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \gamma_1(\zeta - X(t))dt + \gamma_2 X(t)dW(t), \quad \gamma_1, \gamma_2, \zeta \geq 0\tag{4.2}$$

charakterisiert. ◦

¹⁷siehe [20, Kapitel 1.7]

Untersuchung von (4.2) zeigt:

- Der deterministische Anteil (*Drift*) $\gamma_1(\zeta - X(t))$ ist positiv falls $X(t) < \zeta$, in diesem Fall ist also eine positive Entwicklung zu erwarten. Für $X(t) > \zeta$ ist umgekehrt der Erwartungswert negativ, man erwartet eine negative Entwicklung von $X(t)$. Langfristig wird sich $X(t)$ demzufolge auf ζ hinzubewegen. Deshalb nennt man den Parameter ζ das *Gleichgewichtsniveau* (*Mean Reversion Level*). Der Parameter γ_1 (*Mean Reversion Speed*) bestimmt die Stärke der Regulierung und somit die Geschwindigkeit mit der sich $X(t)$ gegen ζ bewegt.
- Der stochastische Anteil (*Diffusion*) $\gamma_2 X(t)$ beeinflusst die Schwankung des resultierenden stochastischen Prozesses $X(t)$.

Diese Überlegungen lassen sich verwenden, um sowohl die Volatilität als auch ihr Gleichgewichtsniveau als stochastischen Prozess mittels (4.2) zu modellieren, während der Kurs des Basiswertes weiterhin durch die geometrische Brownsche Bewegung dargestellt wird.

Definition 4.3 (Mean Reverting Volatility).

Das Mean Reverting Volatility Modell ist durch das System stochastischer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^S(t) \\ d\sigma(t) &= (\zeta(t) - \sigma(t))dt + \alpha\sigma(t)dW^\sigma(t) \\ d\zeta(t) &= \beta(\sigma(t) - \zeta(t))dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit den Parametern $\alpha, \beta \geq 0$ gegeben, wobei $dW^S(t)$ und $dW^\sigma(t)$ unabhängige, eindimensionale Wiener Prozesse sind. ◦

Nun gilt:

- (i) Die erste stochastische Differentialgleichung entspricht der geometrischen Brownschen Bewegung (2.29), einziger Unterschied ist die Modellierung der Volatilität $\sigma(t)$ als stochastischen Prozess.
- (ii) Für die Volatilität $\sigma(t)$ wird das Mean Reversion Modell (4.2) mit $\gamma_1 := 1$ und $\gamma_2 := \alpha$ verwendet. Das Gleichgewichtsniveau $\zeta(t)$ ist hier ebenfalls durch eine Differentialgleichung gegeben. Die Volatilität bewegt sich in Erwartung auf $\zeta(t)$ zu. Der Parameter α im Diffusions-Term ist hier die "Volatilität der Volatilität", er bestimmt die Varianz der Volatilität des Basiswertes. Große Werte von α resultieren in starken Schwankungen, für $\alpha = 0$ würde $\sigma(t)$ gegen $\zeta(t)$ konvergieren.
- (iii) $\zeta(t)$ stellt die durchschnittliche Volatilität dar. Die zugehörige Differentialgleichung lässt sich auch als Mean Reversion Modell (4.2) mit $\gamma_1 := \beta$ und $\gamma_2 := 0$ auffassen, also ohne stochastischen Einfluss. Hier ist nun $\sigma(t)$ das Gleichgewichtsniveau für $\zeta(t)$. In der Folge entwickelt sich $\zeta(t)$ stets in Richtung $\sigma(t)$ und der Parameter β bestimmt

die Geschwindigkeit dieser Entwicklung. Als Lösung der Differentialgleichung für $\zeta(t)$ erhält man für eine Realisierung eines Pfades $\sigma(t, \omega)$ die Gleichung

$$\zeta(t) = e^{-\beta t} \zeta_0 + \int_0^t \beta e^{-\beta(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

also die gewichtete durchschnittliche Volatilität. Die Gewichtung durch den Faktor $\beta e^{-\beta(t-\tau)}$ bewirkt dabei, dass weiter zurückliegende Werte viel weniger berücksichtigt werden als zeitlich sehr nahe Werte.

Die stochastische Volatilität $\sigma(t)$ entwickelt sich somit in Richtung der modifizierten durchschnittlichen Volatilität $\zeta(t)$, wird dabei jedoch durch den Wiener Prozess $W^\sigma(t)$ gestört. Genauso bewegt sich auch die durchschnittliche Volatilität $\zeta(t)$ in Richtung der momentanen Volatilität $\sigma(t)$. Die beiden Variablen regulieren sich gegenseitig, es tritt ein *beidseitiger Mean Reversion Effekt* auf.

4.2 Numerische Simulation

Dieses System stochastischer Differentialgleichungen lässt sich mittels der Monte Carlo Methode simulieren. In Abbildung 4.1 wird zunächst die Entwicklung der einfließenden Faktoren $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ für $\sigma_0 = \zeta_0 = 0.3$, $\alpha = 0.3$ und $\beta = 7.5$ dargestellt.

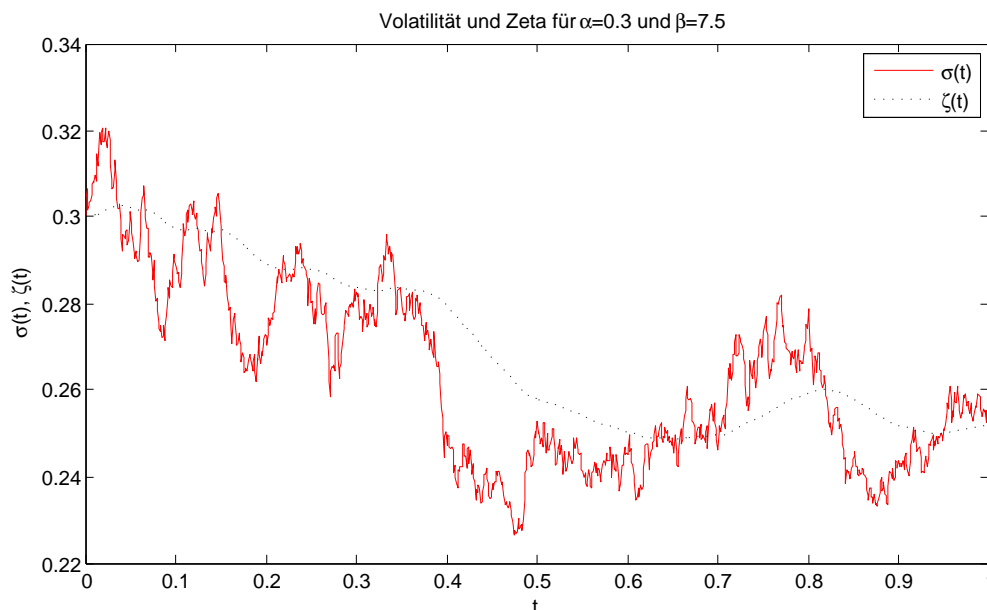


Abbildung 4.1: Simulation der Entwicklung der Werte $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ für $\alpha = 0.3$ und $\beta = 7.5$

Es lassen sich hier gut die vorher festgestellten Entwicklungen beobachten. Ebenso wie sich der gewichtete Mittelwert der Volatilität nach der momentanen Volatilität entwickelt, bewegt sich $\sigma(t)$ immer wieder auf $\zeta(t)$ zu.

In Abbildung 4.2 sind beispielhafte Entwicklungen für die Kombinationen der Werte $\alpha \in \{0.3, 0.8\}$ und $\beta \in \{1, 7.5\}$ mit $\sigma_0 = 0.3$ und $\zeta_0 = 0.5$ dargestellt. Analog zu Abbildung 4.1 sind die Graphen von $\sigma(t)$ als rote Linie und die Graphen von $\zeta(t)$ als schwarze gestrichelte Linie dargestellt. Die Graphiken verdeutlichen die erwarteten Eigenschaften. Für eine Varianz der Volatilität $\alpha = 0.3$ beobachtet man kleinere Schwankungen der Volatilität $\sigma(t)$, für $\alpha = 0.8$ fallen sie stärker aus. Ein kleinerer Wert von β im Modell hat zur Folge, dass das Gleichgewichtsniveau weniger stark von der momentanen Volatilität $\sigma(t)$ beeinflusst wird und sich $\zeta(t)$ somit langsamer auf $\sigma(t)$ zubewegt.

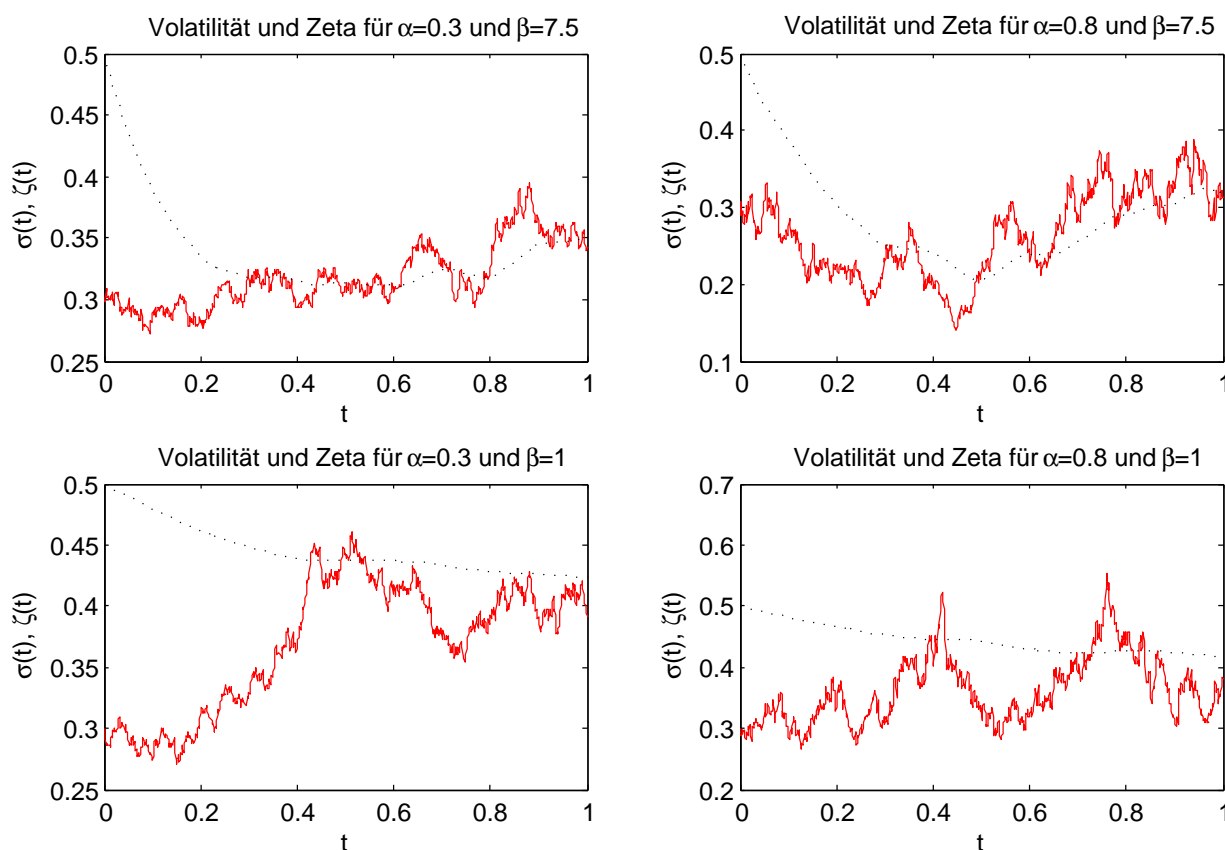


Abbildung 4.2: Simulation der Entwicklung der Werte $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ für verschiedene Werte von α und β

Schließlich lässt sich auch die durchschnittliche Entwicklung der Volatilität $\sigma(t)$ und des Gleichgewichtsniveaus $\zeta(t)$ für eine große Anzahl an Simulationen betrachten. In den Abbildungen 4.3 und 4.4 ist der Mittelwert von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ über 10000 Simulationen graphisch dargestellt.

Abbildung 4.3 zeigt, dass für $\sigma_0 = \zeta_0 = 0.3$ im Durchschnitt sowohl die Volatilität $\sigma(t)$ als auch das Gleichgewichtsniveau $\zeta(t)$ ebenfalls diesen Wert annehmen. Beachtet man die Skalierung der Ordinate, erkennt man, dass der Durchschnitt der beiden Werte nur noch sehr geringen Schwankungen unterliegt.

In Abbildung 4.4 wird der Zusammenhang von $\sigma(t)$, $\zeta(t)$ und β verdeutlicht. Dazu ist $\sigma_0 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.5$ und $\alpha = 0.3$ gewählt. Für $\beta = 7.5$ bewegt sich das Mean Reversion

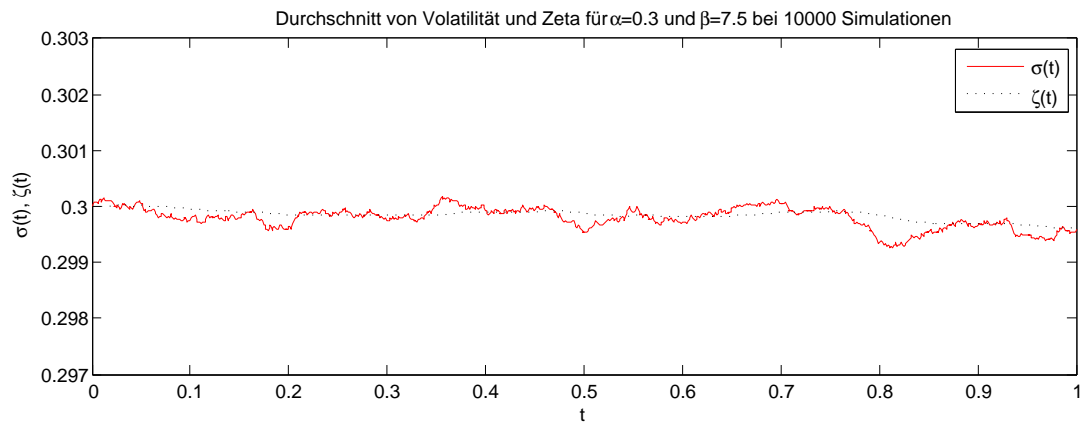


Abbildung 4.3: Durchschnittliche Entwicklung von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ bei 10000 Simulationen mit $\sigma_0 = \zeta_0 = 0.3$

Level $\zeta(t)$ ziemlich schnell auf die momentane Volatilität $\sigma(t)$ zu, bei einem Wert von $\beta = 1$ erfolgt eine gleichmäßige Bewegung der beiden Werte aufeinander zu.

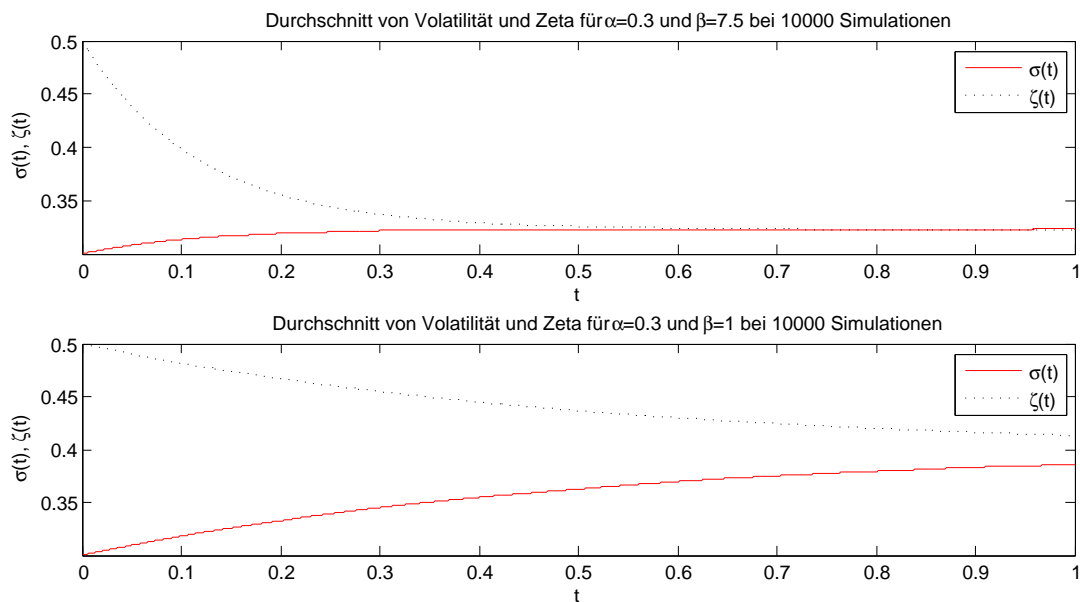


Abbildung 4.4: Durchschnittliche Entwicklung von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ bei 10000 Simulationen mit $\sigma_0 = 0.3$ und $\zeta_0 = 0.5$ für $\beta = 7.5$ und $\beta = 1$

4.3 Hedging im Mean Reverting Volatility Modell

Nun sollen die vorangegangenen Überlegungen bzgl. der stochastischen Volatilität auf das Hedging eines Portfolios übertragen werden. Dazu wird angenommen, dass sich die Entwicklung des Basiswertes durch das Mean Reverting Volatility Modell (4.3) beschreiben lässt. Wir geben also die Prämisse einer über den betrachteten Zeitraum konstanten Vo-

latilität σ wie im Black-Scholes Modell auf und gehen stattdessen von einer Volatilität in Form eines stochastischen Prozesses aus.

Zur Umschichtung des Portfolios verwenden wir wieder das aus den Kapiteln 2.6 und 3.3 bekannte Verfahren. Der Hedging Parameter Delta wird durch Monte Carlo Simulation approximiert. Die Monte Carlo Simulation wird nun jedoch auf Basis des Mean Reverting Volatility Modells durchgeführt. Dazu werden, wie zuvor, zwei Kursverläufe für die Ausgangswerte S_0 und $S_0 + h$ simuliert und Delta aus den resultierenden Optionswerten berechnet. Durch N -fache Wiederholung und Bildung des Durchschnitts ergibt sich die Approximation des Delta in jedem Zeitschritt. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichungen erfolgt mittels des in Kapitel 2.3.4 vorgestellten Euler-Maruyama-Verfahrens.¹⁸

Das Vorgehen entspricht Algorithmus 2.24, mit dem Unterschied, dass nun zur Berechnung der Optionswerte $V(t_i, S(t_i))$ und der Werte $\Delta(t_i, S(t_i))$ das Mean Reverting Volatility Modell verwendet wird.

Zur Untersuchung des Hedging-Parameters Delta führen wir eine analoge Betrachtung wie im Black-Scholes Modell in Kapitel 2.5 durch. Dazu benötigen wir zunächst zwei Aussagen über zweidimensionale stochastische Prozesse, denen zwei unabhängige Wiener Prozesse zugrunde liegen.¹⁹

Satz 4.4 (Zweidimensionale Itô-Doebelin Formel).

Sei $f(t, x, y)$ eine Funktion, die in der ersten Komponente einmal und in der zweiten und dritten Komponente zweimal stetig differenzierbar ist. Seien $X(t)$ und $Y(t)$ Itô-Prozesse. Dann gilt

$$\begin{aligned} df(t, X(t), Y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t), Y(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t), Y(t))dX(t) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(t, X(t), Y(t))dY(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t), Y(t))dX(t)dX(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t, X(t), Y(t))dX(t)dY(t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, X(t), Y(t))dY(t)dY(t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

◦

Satz 4.5.

Seien $X(t)$ und $Y(t)$ Itô-Prozesse von der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= a_1(t, X(t), Y(t))dt + b_{11}(t, X(t), Y(t))dW_1(t) + b_{12}(t, X(t), Y(t))dW_2(t) \\ dY(t) &= a_2(t, X(t), Y(t))dt + b_{21}(t, X(t), Y(t))dW_1(t) + b_{22}(t, X(t), Y(t))dW_2(t). \end{aligned}$$

¹⁸Es ist ebenso möglich, genauere Verfahren, bspw. das Milstein-Verfahren, zu verwenden. Aufgrund des mehrdimensionalen Systems stochastischer Differentialgleichungen (4.3) ergibt sich dabei jedoch ein überproportional höherer Rechenaufwand, sodass es zwar möglich ist, mit einer kleineren Anzahl M von Zeitschritten eine bessere Approximation zu erzielen, der höhere Aufwand in jedem einzelnen Zeitschritt führt letztlich aber zu einem ungenaueren Ergebnis in gleicher Rechenzeit im Vergleich zum Euler-Maruyama-Verfahren.

¹⁹siehe [21, Kapitel 4.6.2]

Dann gilt

$$\begin{aligned}
dX(t)dX(t) &= (b_{11}^2(t, X(t), Y(t)) + b_{12}^2(t, X(t), Y(t)))dt \\
dY(t)dY(t) &= (b_{21}^2(t, X(t), Y(t)) + b_{22}^2(t, X(t), Y(t)))dt \\
dX(t)dY(t) &= (b_{11}(t, X(t), Y(t))b_{21}(t, X(t), Y(t)) \\
&\quad + b_{12}(t, X(t), Y(t))b_{22}(t, X(t), Y(t)))dt.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

o

Man geht nun analog zur Herleitung der Black-Scholes Formel vor und verwendet statt der geometrischen Brownschen Bewegung das Mean Reverting Volatility Modell. Dazu wird der Einfachheit halber ein konstantes Gleichgewichtsniveau ζ angenommen, d.h.

$$\begin{aligned}
dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^S(t) \\
d\sigma(t) &= (\zeta - \sigma(t))dt + \alpha\sigma(t)dW^\sigma(t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dann lässt sich (analog zu (2.33)) unter Verwendung von Satz 4.4 die stochastische Differentialgleichung des Optionswertes $V(t, S(t), \sigma(t))$ im Mean Reverting Volatility Modell betrachten. Lässt man noch die Argumente für eine übersichtlichere Darstellung weg, so erhält man

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dSdS + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma}dSd\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}d\sigma d\sigma. \tag{4.8}$$

Nach Satz 4.5 und (4.7) gilt nun mit $b_{11} = \sigma S$, $b_{22} = \alpha\sigma$ und $b_{12} = b_{21} = 0$

$$\begin{aligned}
dS &= \mu Sdt + \sigma SdW^S \\
d\sigma &= (\zeta - \sigma)dt + \alpha\sigma dW^\sigma \\
dSdS &= \sigma^2 S^2 dt \\
d\sigma d\sigma &= \alpha^2 \sigma^2 dt \\
dSd\sigma &= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Setzt man das in (4.8) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \mu S \frac{\partial V}{\partial S}dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}dW^S + (\zeta - \sigma) \frac{\partial V}{\partial \sigma}dt + \alpha\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma}dW^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}dt \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + (\zeta - \sigma) \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right) dt \\
&\quad + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}dW^S + \alpha\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma}dW^\sigma.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Damit erhält man analog zu (2.41) die Portfolio-Gleichung des Mean Reverting Volatility Modells

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \\
&= \left[\Delta\mu S + \beta r B - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + (\zeta - \sigma) \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right) \right] dt \\
&\quad + \left(\Delta\sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW^S - \alpha\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} dW^\sigma.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Um den stochastischen Einfluss des Wiener Prozesses W^S zu eliminieren, setzen wir also wie im Black-Scholes Modell

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t), \sigma(t)). \quad (4.12)$$

Es zeigt sich in (4.11) jedoch, dass sich der zweite stochastische Term $\alpha\sigma\frac{\partial V}{\partial\sigma}dW^\sigma$ nicht ausgleichen lässt. Das bedeutet, dass auch bei optimalem Hedging, d.h. bei kontinuierlicher Umschichtung, Schwankungen im Wert des Portfolios zu erwarten sind.

Ein exemplarisches Ergebnis der numerischen Simulation ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Dabei wurden die Parameter $S_0 = 100$, $r = 0.06$, $T = 1$, $K = 95$, $\sigma_0 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.5$, $\alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$ gewählt, das Portfolio wurde zu $M = 150$ äquidistanten Zeitpunkten umgeschichtet, die benötigten Werte in jedem Zeitpunkt wurden durch $N = 5000$ Durchläufe der Monte Carlo Simulation approximiert.

Abbildung 4.6 stellt den Verlauf von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ dar, der sich im Zuge der Simulation von Abbildung 4.5 ergibt.

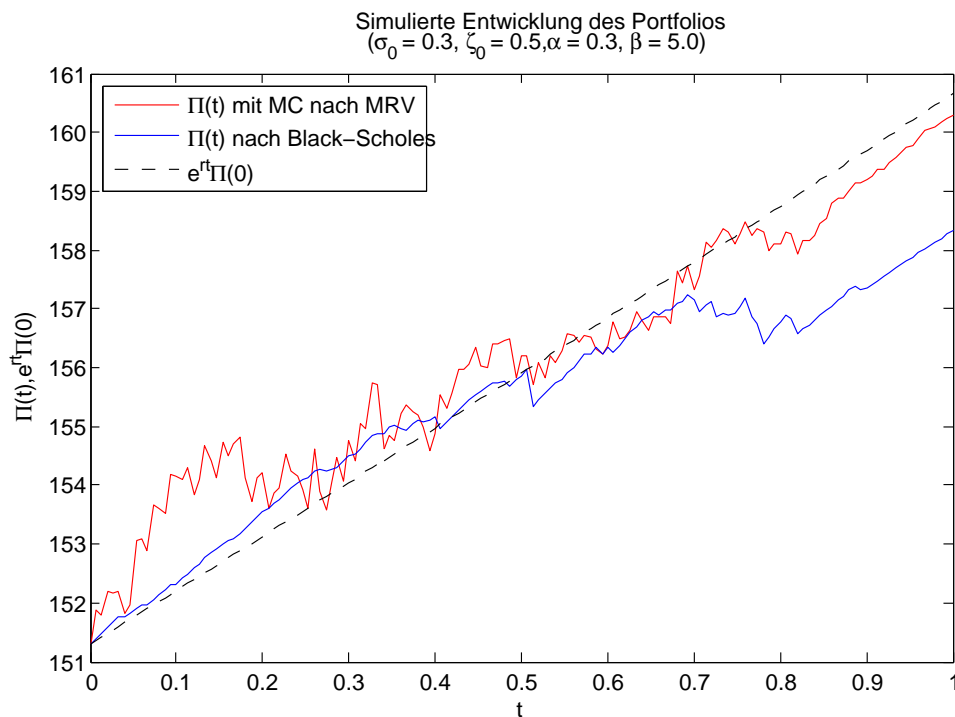


Abbildung 4.5: Entwicklung eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell mit den Parametern $S_0 = 100$, $r = 0.06$, $T = 1$, $K = 95$, $\sigma_0 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.5$, $\alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$ bei $M = 150$ Umschichtungen und $N = 5000$ Monte Carlo Simulationen in jedem Zeitschritt

Zum Vergleich ist in Abbildung 4.5 als blaue Linie ebenfalls die Portfolio-Entwicklung skizziert, die sich durch Umschichtungen auf Basis des Black-Scholes Modells ergeben würde. Dabei wird für die im Black-Scholes Modell konstante Volatilität der Wert $\sigma = \sigma_0$ verwendet.

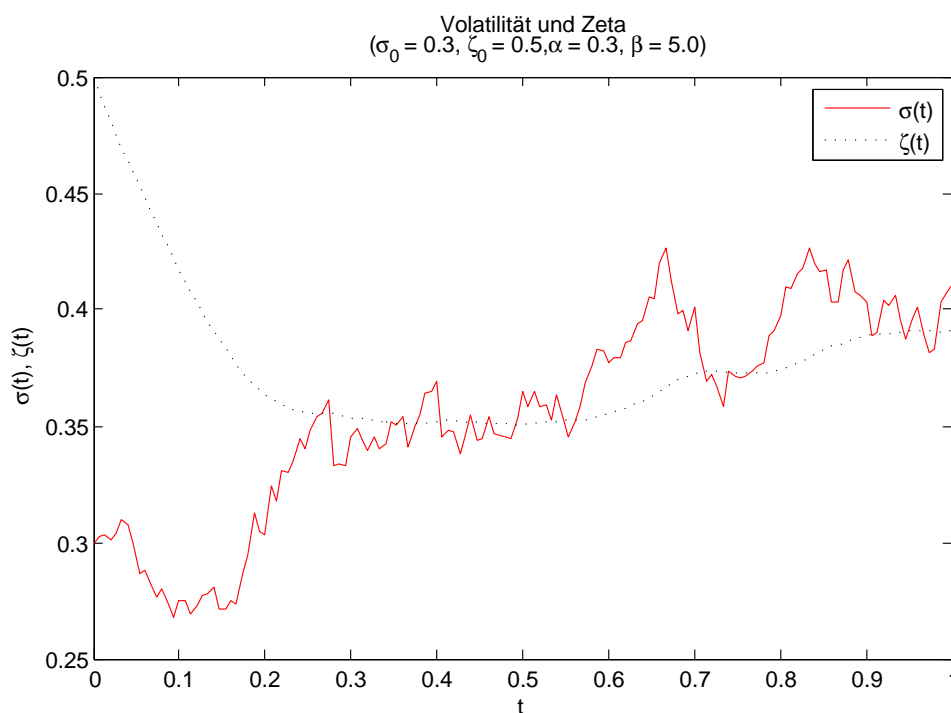


Abbildung 4.6: Verlauf der Parameter $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ des Portfolios aus Abbildung 4.5

Wie nach der analytischen Betrachtung zu Beginn dieses Abschnitts erwartet, ist es im Mean Reverting Volatility Modell nicht mehr möglich, das Risiko vollständig zu eliminieren. Dieses Ergebnis bestätigt sich auch im Portfolio-Verlauf, der nun sichtbaren Schwankungen unterworfen ist.

Analog zu Abbildungen 4.5 und 4.6 ist in Abbildung 4.7 ein Portfolio mit den gleichen Parametern wie vorher ($S_0 = 100, r = 0.06, T = 1, K = 95, \alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$) simuliert und mit zugehörigem Verlauf der Volatilität $\sigma(t)$ und ihres Gleichgewichtsniveaus $\zeta(t)$ dargestellt. Jedoch wird nun als Volatilität im Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Wert $\sigma_0 = 0.5$ und als Gleichgewichtsniveau im Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Wert $\zeta_0 = 0.25$ gewählt und es erfolgt eine Umschichtung zu $M = 250$ diskreten Zeitpunkten. Als Konsequenz ist zu erkennen, dass der Wert des Portfolios bzw. des erwarteten Portfolios im Laufzeitende T etwas niedriger ist als bei Verwendung der vorherigen Parameter. Außerdem ergibt sich durch die Erhöhung der Anzahl der Zeitpunkte zur Umschichtung ein Verlauf, der stärker gezackt ist.

In Abbildung 4.8 wird wiederum ein Portfolio mit den Ausgangsparametern ($S_0 = 100, r = 0.06, T = 1, K = 95, \sigma_0 = 0.3, \zeta_0 = 0.5$) bei $M = 250$ Umschichtungen betrachtet, diesmal wird aber $\alpha_{MRV} = 0.7$ und $\beta_{MRV} = 10$ gesetzt. Die höhere Volatilität der Volatilität α_{MRV} und eine schnellere Mean Reversion Geschwindigkeit β_{MRV} schlagen sich im Verlauf der Werte $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ nieder und es lassen sich somit in der Entwicklung des Portfolios stärkere Ausschläge erkennen.

Nun soll der Aufwand, der zur Simulation eines solchen Portfolios benötigt wird, betrachtet werden. Die Rechenzeiten, die sich für verschiedene Kombinationen der Anzahl der diskreten

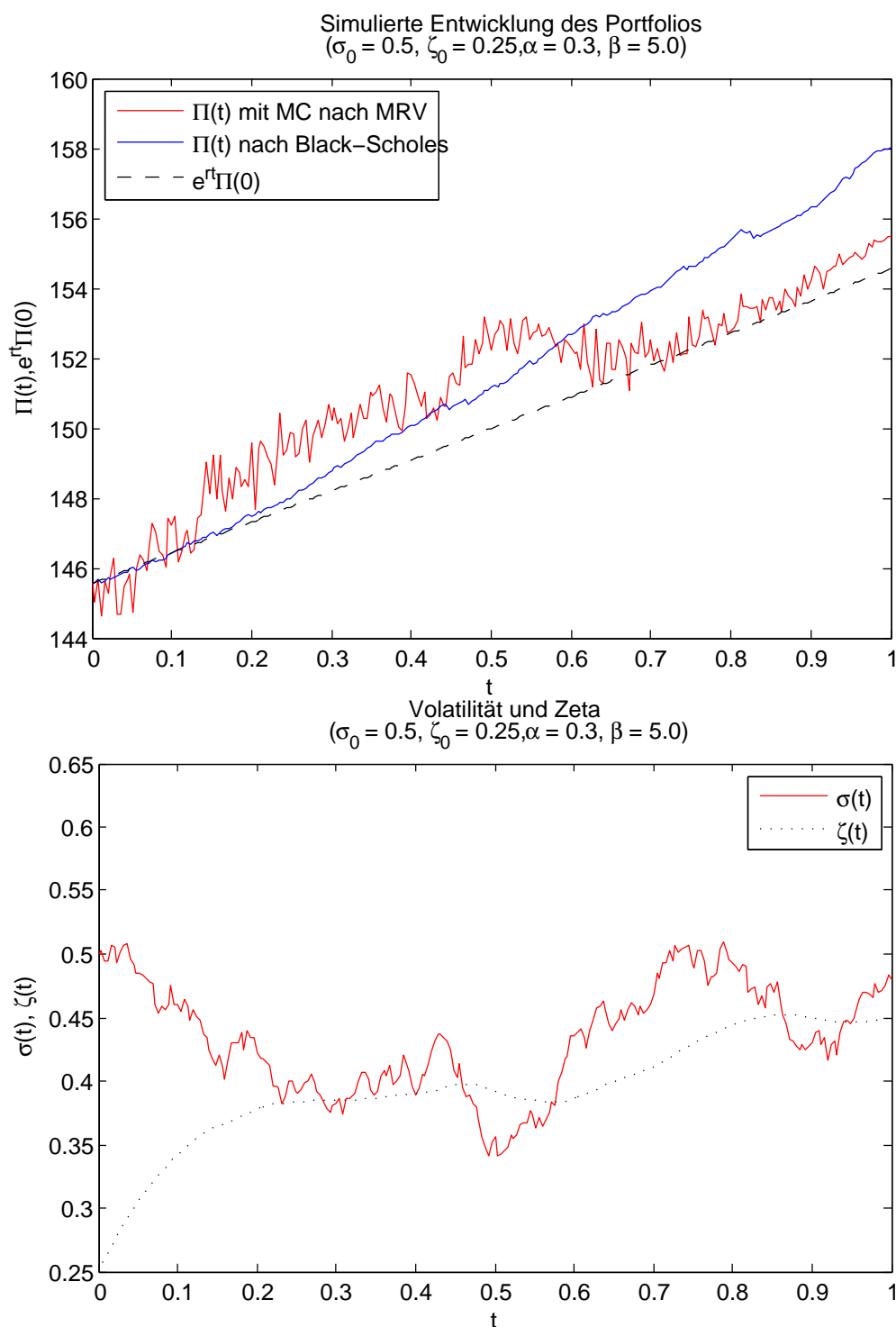


Abbildung 4.7: Simulierte Entwicklung eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell mit den Parametern $S_0 = 100$, $r = 0.06$, $T = 1$, $K = 95$, $\sigma_0 = 0.5$, $\zeta_0 = 0.25$, $\alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$ bei $M = 250$ Umschichtungen

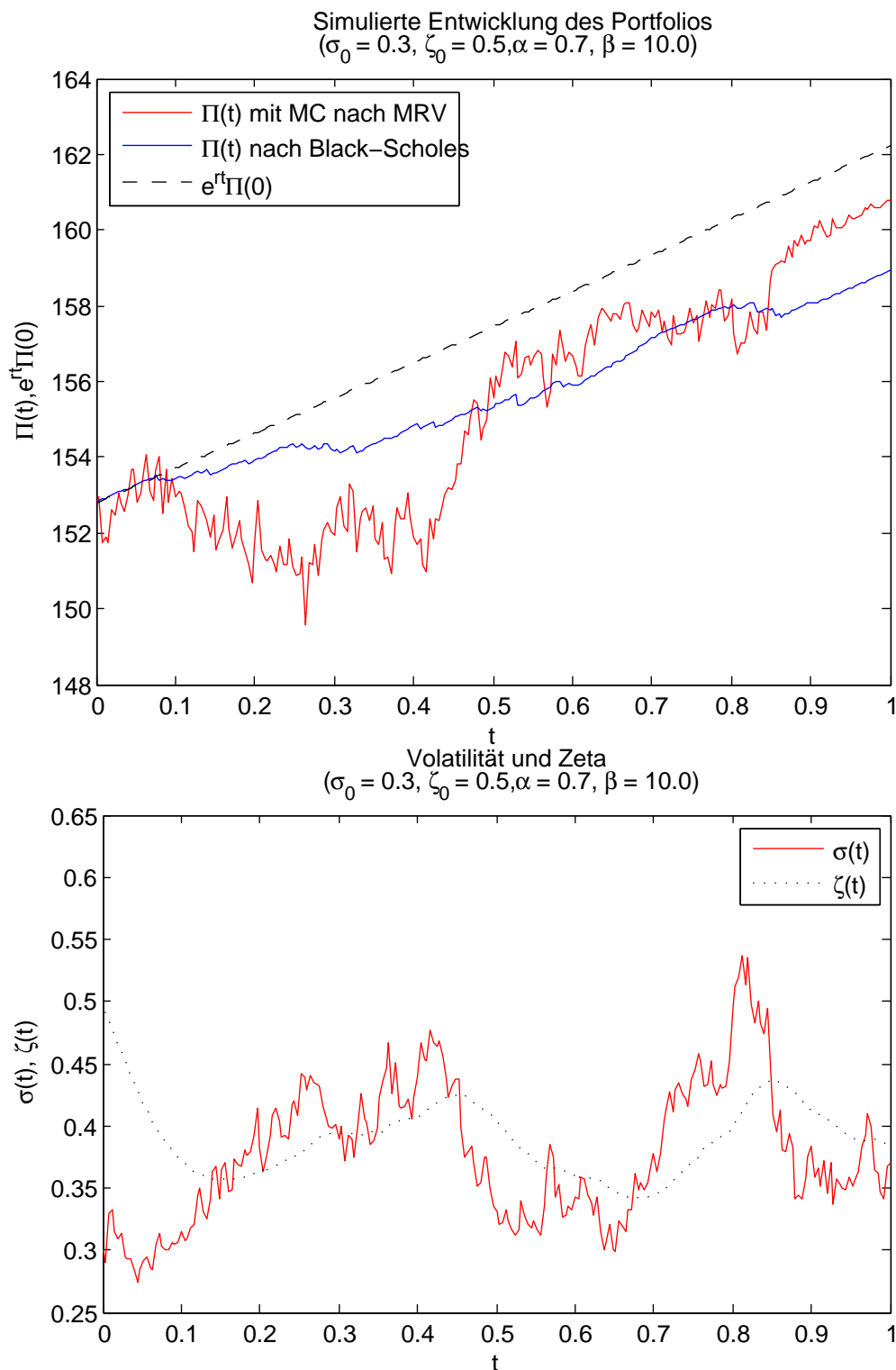


Abbildung 4.8: Simulierte Entwicklung eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell mit den Parametern $S_0 = 100$, $r = 0.06$, $T = 1$, $K = 95$, $\sigma_0 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.5$, $\alpha_{MRV} = 0.7$ und $\beta_{MRV} = 10$ bei $M = 250$ Umschichtungen

Zeitpunkte $M \in \{150, 250, 500\}$ und der Anzahl der Monte Carlo Simulationen in jedem Zeitschritt $N \in \{1000, 5000, 10000\}$ ergeben, sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

M	N	Rechenzeit (Sek.)
150	1000	1.0184
150	5000	5.0219
150	10000	9.9681
250	1000	2.8844
250	5000	13.7959
250	10000	27.3232
500	1000	11.6602
500	5000	54.5530
500	10000	108.7439

Tabelle 4.1: Rechenzeiten zur Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell für verschiedene Anzahlen M von Zeitschritten und N von Monte Carlo Simulationen

Ein Vergleich der verschiedenen Abbildungen lässt vermuten, dass, obwohl das Risiko selbst bei kontinuierlichem Umschichten, also bei zeitkontinuierlichem Hedging, nicht vollständig eliminiert werden kann, eine Verwendung des Mean Reverting Volatility Kursmodells zur Berechnung der benötigten Werte zu besseren Ergebnissen führt als das Black-Scholes Modell. Da die Graphiken jedoch immer nur das Resultat einer einzelnen Simulation sind und deshalb nur exemplarischen Charakter besitzen, werden wir nun den relativen Fehler der beiden Methoden für eine sehr große Anzahl n von Portfolio-Simulationen untersuchen. Dazu wird zu jedem simulierten Portfolio die relative Abweichung des Portfolio-Wertes mittels

$$\epsilon(i) = \frac{\Pi_i(T) - e^{rT}\Pi_i(0)}{e^{rT}\Pi_i(0)} \quad (4.13)$$

bestimmt und anschließend für beide Verfahren der Mittelwert der relativen Abweichungen durch

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon(i)^2} \quad (4.14)$$

berechnet. Dies geschieht in Form des quadratischen Mittels, um höhere Abweichungen stärker zu gewichten. In Tabelle 4.2 sind die durchschnittlichen Quadratmittelabweichungen für $n = 10000$ Portfolio-Simulationen bei $\alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$ bzw. $\alpha_{MRV} = 0.7$ und $\beta_{MRV} = 10$, also für eine höhere Volatilität der Volatilität und Geschwindigkeit $\zeta(t) \rightarrow \sigma(t)$, dargestellt.

Es bestätigt sich nun die vorherige Vermutung. Werden die Berechnungen, die zur Simulation des Portfolios notwendig sind, auf Basis des Mean Reverting Volatility Modells durchgeführt, so wird im Durchschnitt eine Verringerung der relativen Abweichung um etwa 10%

Verfahren	$\bar{\epsilon}$
Black-Scholes Modell bei $\alpha = 0.3$ und $\beta = 5$	1.6982%
Mean Reverting Volatility Modell bei $\alpha = 0.3$ und $\beta = 5$	1.5499%
Black-Scholes Modell bei $\alpha = 0.7$ und $\beta = 10$	3.6239%
Mean Reverting Volatility Modell bei $\alpha = 0.7$ und $\beta = 10$	3.2328%

Tabelle 4.2: Durchschnittliche relative Quadratmittelabweichung bei Simulation auf Basis des Black-Scholes Modells und Mean Reverting Volatility Modells bei $n = 10000$ Portfolio-Simulationen

bei $\alpha_{MRV} = 0.3$ und $\beta_{MRV} = 5$ erzielt, bei $\alpha_{MRV} = 0.7$ und $\beta_{MRV} = 10$ liefert das Mean Reverting Volatility Modell sogar eine um etwa 12% geringere Abweichung als das Black-Scholes Modell. Weiterhin zeigt sich auch, dass bei Anstieg der Parameter α_{MRV} und β_{MRV} gleichzeitig die durchschnittliche Abweichung des Portfolio-Wertes zunimmt.

Kapitel 5

Asiatische Optionen

Exotische Optionen sind Optionen, die von den Standard-Optionen (europäische oder amerikanische Plain Vanilla Optionen) abgeleitet sind und eine kompliziertere Auszahlungsstruktur als diese besitzen. Häufig sind exotische Optionen auch pfadabhängig. Das bedeutet, ihr Auszahlungswert hängt nicht nur vom Kurswert im Endzeitpunkt ab, sondern auch vom vorhergehenden Kursverlauf.

Die asiatische Option ist eine besondere Form einer exotischen Option. Bei ihr wird die Auszahlungsfunktion mit Hilfe des Mittelwertes des Kursverlaufs des Basiswertes gebildet. Deshalb eignet sie sich insbesondere zur Absicherung gegen Kursschwankungen am Laufzeitende oder aber, um bspw. Wechselkursrisiken zu minimieren, wenn ein Produkt zu einem festgelegten Zeitpunkt verkauft werden soll, die Produktionskosten jedoch über einen Zeitraum verteilt vorher anfallen und vom aktuellen Wechselkurs abhängen.

5.1 Grundlagen

Man unterscheidet asiatische Optionen nach verschiedenen Kriterien:

- Asiatische Optionen können vom *europäischen* oder vom *amerikanischen Typ* sein. Im Normalfall sind sie aber vom europäischen Typ, da eine asiatische Option vom amerikanischen Typ, die vor Laufzeitende ausgeübt wird, den Vorteil der Mittelwertbildung über die gesamte Laufzeit verliert.
- Der Mittelwert \hat{S} kann auf Basis von Kurswerten $S(t_i)$ *diskreter* Zeitpunkte t_i oder auf Basis des *kontinuierlichen* Kursverlaufs gebildet werden.
- Die Bildung des Mittelwertes kann *geometrisch* oder *arithmetisch* erfolgen.

- Je nach Auszahlungsfunktion unterscheidet man zwischen zwei Klassen asiatischer Optionen, die *average rate option* (auch *average value option*) mit der Auszahlungsfunktion $(\hat{S} - K)^+$ (im Fall einer Call-Option) bzw. $(K - \hat{S})^+$ (im Fall einer Put-Option) und die *average strike option* mit der Auszahlungsfunktion $(S(T) - \hat{S})^+$ (Call) bzw. $(\hat{S} - S(T))^+$ (Put).

In diesem Kapitel werden die verbreiteteren *average rate asian options* genauer betrachtet. Sie sind der Einfachheit halber im Folgenden mit der abgekürzten Bezeichnung *asiatische Option* referenziert.

Nun lassen sich konkrete Formeln für den Mittelwert \hat{S} angeben, um die Auszahlungsfunktion auswerten zu können. Der diskrete geometrische Mittelwert ist durch

$$\hat{S} = \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} \quad (5.1)$$

und der diskrete arithmetische Mittelwert durch

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) \quad (5.2)$$

gegeben, wobei $S(t_i)$ die Kurswerte in den diskreten Zeitpunkten t_i , $i = 1, \dots, n$ sind.

Den Mittelwert auf Basis des kontinuierlichen Kursverlaufs erhält man durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, bei äquidistanten Zeitpunkten $t_i = i\Delta t$, $i = 1, \dots, n$, $\Delta t = T/n$. Für den geometrischen Mittelwert ergibt sich somit nach Logarithmieren und Anwendung der Exponentialfunktion

$$\hat{S} = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S(t_i) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S(t) dt \right), \quad (5.3)$$

der kontinuierliche arithmetische Mittelwert lautet

$$\hat{S} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt. \quad (5.4)$$

Die gebräuchlichste Art der asiatischen Option ist die *discrete arithmetic average rate option*. Im Fall eines Calls ist die Auszahlungsfunktion dann also durch

$$\Lambda(\{S(t_i), i = 1, \dots, n\}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K \right)^+ \quad (5.5)$$

gegeben. Diese Form asiatischer Optionen werden wir später noch genauer untersuchen.

5.2 Bewertung asiatischer Optionen

Da die Optionsbewertung die Grundlage für das Hedging mittels der Monte Carlo Methode eines auf der Option basierenden Portfolios ist, untersuchen wir zuerst die Bewertung asiatischer Optionen. Dabei werden wir die Betrachtung auf zwei Arten asiatischer Optionen beschränken, die discrete arithmetic average rate option, da sie die gebräuchlichste Version ist, und die geometric average rate option, da sie einen Sonderfall darstellt und deren Ergebnisse dann zur Betrachtung der arithmetischen asiatischen Option weiterverwendet werden können.

5.2.1 Geometric average rate option

Zunächst betrachten wir also die geometrische asiatische Option. Da die Aktienkurse auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung logarithmisch normalverteilt sind, gilt dies ebenso für ihr Produkt (nicht jedoch für ihre Summe). Deshalb ist es möglich, bei geometrischer Durchschnittsbildung, im Gegensatz zur Verwendung des arithmetischen Durchschnitts, eine analytische Formel für den Optionswert anzugeben.²⁰

Betrachtung diskreter Zeitpunkte

Als Ausgangspunkt wählt man die diskrete Betrachtung zu n äquidistanten Zeitpunkten, also $t_i = i \Delta t$, $i = 1, \dots, n$, $\Delta t = T/n$, wobei $S_0 = S(t_0)$ den Kurs des Basiswertes bei Ausgabe der Option bezeichnet. Dieser wird jedoch bei der Berechnung des Mittelwertes nach (5.1) nicht berücksichtigt, da er bereits bekannt ist und somit keinem stochastischen Einfluss unterliegt.

Definiert man

$$R_i := \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.6)$$

so ist R_i nach Definition 2.17 eine geometrische Brownsche Bewegung und es gilt

$$\ln R_i = \ln \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.7)$$

Weiterhin ergibt sich aus (5.1)

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} \\ &= \left[\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right) \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right)^2 \cdots \left(\frac{S(t_1)}{S_0} \right)^n S_0^n \right]^{1/n} \\ &= (R_n R_{n-1}^2 \cdots R_1^n S_0^n)^{1/n}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

²⁰siehe [12, Kapitel 6.3.4] und [23, Kapitel 3.2]

Nun gilt

$$\begin{aligned}\ln \frac{\hat{S}}{S_0} &= \ln \frac{\left(R_n R_{n-1}^2 \cdots R_1^n S_0^n\right)^{1/n}}{S_0} \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{R_n R_{n-1}^2 \cdots R_1^n S_0^n}{S_0^n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\ln R_n + 2 \ln R_{n-1} + \cdots + n \ln R_1\right)\end{aligned}\quad (5.9)$$

und mit (5.7) und Re-Indizierung der Zufallsvariablen Z_i durch $Z_i := Z_{n-i+1}$ zwecks einfacherer Notation folgt

$$\begin{aligned}\ln \frac{\hat{S}}{S_0} &= \frac{1}{n} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_1 + 2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + 2\sigma \sqrt{\Delta t} Z_2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + n \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + n\sigma \sqrt{\Delta t} Z_n \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n i\right) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^n i Z_i\right) \right].\end{aligned}\quad (5.10)$$

Mit der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\ln \frac{\hat{S}}{S_0} = \frac{n+1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \frac{\sigma \sqrt{\Delta t}}{n} \left(\sum_{i=1}^n i Z_i\right).\quad (5.11)$$

Betrachtet man die Zufallsvariable

$$Y = \frac{\sigma \sqrt{\Delta t}}{n} \left(\sum_{i=1}^n i Z_i\right) \quad \text{mit } Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1),\quad (5.12)$$

so ist diese als Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wiederum normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbb{E}(Y) = 0$ und Varianz

$$\text{var}(Y) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i^2\right) = \frac{(n+1)(2n+1)\sigma^2 \Delta t}{6n},\quad (5.13)$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Eigenschaft der Potenzsumme

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

folgt. Es gilt also

$$Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{(n+1)(2n+1)\sigma^2\Delta t}{6n}\right) \quad (5.14)$$

und durch Transformation erhält man

$$\sigma\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)\Delta t}{6n}}\bar{Z} \sim Y \quad \text{mit } \bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (5.15)$$

wobei demnach die neue Zufallsvariable \bar{Z} wieder standard-normalverteilt ist.

Einsetzen in (5.11) und $\Delta t = T/n$ liefert

$$\begin{aligned} \ln \frac{\hat{S}}{S_0} &= \frac{n+1}{2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n} \left(\sum_{i=1}^n iZ_i\right) \\ &= \frac{n+1}{2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)\Delta t}{6n}}\bar{Z} \\ &= \frac{n+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}T\bar{Z}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &:= \sigma\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} \\ \bar{r} &:= \frac{n+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei sich die Wahl von \bar{r} aus der Forderung

$$\left(\bar{r} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \stackrel{!}{=} \frac{n+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (5.18)$$

ergibt, so erhält man

$$\ln \frac{\hat{S}}{S_0} = \left(\bar{r} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) T + \bar{\sigma}\sqrt{T}\bar{Z} \quad (5.19)$$

und somit gilt

$$\hat{S} = S_0 \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) T + \bar{\sigma}\sqrt{T}\bar{Z} \right], \quad \bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.20)$$

Dies ist nach Definition 2.17 wiederum eine geometrische Brownsche Bewegung. Man kann \hat{S} also als Kurswert $S(T)$ für einen Basiswert mit Drift-Parameter $\mu = \bar{r}$ und Volatilität $\bar{\sigma}$ auffassen.

Nun betrachten wir den Optionswert der geometrischen asiatischen Call-Option im Zeitpunkt $t_0 = 0$. Er ergibt sich durch Abzinsen des Erwartungswertes der Auszahlungsfunktion

$$\begin{aligned}
V_{C,a}^{Geom}(0, S_0) &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((\hat{S} - K)^+ \right) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left(\left(S_0 \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) T + \bar{\sigma} \sqrt{T} \bar{Z} \right] - K \right)^+ \right) \\
&= e^{(\bar{r}-r)T} e^{-\bar{r}T} \underbrace{\mathbb{E} \left(\left(S_0 \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) T + \bar{\sigma} \sqrt{T} \bar{Z} \right] - K \right)^+ \right)}_{=\bar{V}_{C,e}(0, S_0)}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Demzufolge enthält der Term den abgezinnten Erwartungswert der Auszahlungsfunktion einer europäischen Call-Option mit den Parametern \bar{r} und $\bar{\sigma}$ und gleichem Kurs des Basiswertes in t_0 . Der Wert dieser Option $\bar{V}_{C,e}(0, S_0)$ lässt sich nach Black-Scholes mit (2.48a) und (2.48c) analytisch berechnen und durch Einsetzen erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
V_{C,a}^{Geom}(0, S_0) &= e^{(\bar{r}-r)T} (S_0 \Phi(a) - K e^{-\bar{r}T} \Phi(b)) \\
&= e^{-rT} (S_0 e^{\bar{r}T} \Phi(a) - K \Phi(b))
\end{aligned} \tag{5.22a}$$

mit der Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung Φ und

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(\bar{r} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} \\
b &= a - \bar{\sigma} \sqrt{T} \\
\bar{\sigma} &= \sigma \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} \\
\bar{r} &= \frac{n+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2.
\end{aligned} \tag{5.22b}$$

Analoge Betrachtung des Wertes einer geometrischen asiatischen Put-Option mit Auszahlungsfunktion $\Lambda = (K - \hat{S})^+$ ergibt

$$\begin{aligned}
V_{P,a}^{Geom}(0, S_0) &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - \hat{S})^+ \right) \\
&= e^{(\bar{r}-r)T} e^{-\bar{r}T} \underbrace{\mathbb{E} \left(\left(K - S_0 \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) T + \bar{\sigma} \sqrt{T} \bar{Z} \right] \right)^+ \right)}_{=\bar{V}_{P,e}(0, S_0)},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

wobei auch hier wieder $\bar{V}_{P,e}(0, S_0)$, der Wert einer europäischen Put-Option mit den Parametern \bar{r} und $\bar{\sigma}$, im Term enthalten ist und dieser sich nach (2.48b) berechnen lässt. Damit erhält man

$$V_{P,a}^{Geom}(0, S_0) = e^{-rT} (S_0 e^{\bar{r}T} (\Phi(a) - 1) - K (\Phi(b) - 1)) \tag{5.24}$$

mit a , b , \bar{r} und $\bar{\sigma}$ wie in (5.22b).

Es ist somit also möglich, aus der Black-Scholes Gleichung eine geschlossene Formel für den Wert geometrischer asiatischer Optionen bei Betrachtung diskreter Zeitpunkte herzuleiten.

Kontinuierliche Betrachtung

Nun werden wir den kontinuierlichen Fall betrachten. Dazu führen wir den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch. Man erhält für $\bar{\sigma}$ und \bar{r}

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sigma \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \bar{r} &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{6} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{6} \sigma^2 \right).\end{aligned}\tag{5.25}$$

Dann vereinfacht sich der Optionswert (5.22a) der geometrischen asiatischen Call-Option zu

$$\begin{aligned}V_{C,a}^{Geom}(0, S_0) &= e^{-rT} \left(S_0 e^{\frac{1}{2}(r - \frac{1}{6}\sigma^2)T} \Phi(a) - K \Phi(b) \right) \\ &= S_0 e^{-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T} \Phi(a) - K e^{-rT} \Phi(b)\end{aligned}\tag{5.26a}$$

bzw. der Wert der Put-Option nach (5.24) analog zu

$$V_{P,a}^{Geom}(0, S_0) = S_0 e^{-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T} (\Phi(a) - 1) - K e^{-rT} (\Phi(b) - 1)\tag{5.26b}$$

und für die Parameter a und b aus (5.22b) erhält man

$$\begin{aligned}a &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{6}\sigma^2\right) + \frac{1}{6}\sigma^2\right)T}{\sigma \sqrt{\frac{T}{3}}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{6}\sigma^2\right)T}{\sigma \sqrt{\frac{T}{3}}} \\ b &= a - \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}.\end{aligned}\tag{5.26c}$$

Simulation einer geometric average rate option

Die Werte einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit der Anzahl der Betrachtungszeitpunkte sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Der Eintrag der letzten Zeile ("∞") entspricht dem Wert bei Berechnung mittels der Formel für kontinuierliche Betrachtung. Für die Parameter wurde wieder die Beispiel-Option der vorherigen Kapitel verwendet ($S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$). Es zeigt sich, dass schon bei einer geringen Anzahl von zur Durchschnittsbildung berücksichtigten Zeitpunkten ein Wert relativ nahe dem kontinuierlichen Wert erzielt wird.

Nun können wir diese Ergebnisse graphisch visualisieren. Dies erfolgt im Folgenden auf Basis der kontinuierlichen Betrachtung.

n	geom. asiatischer Call	geom. asiatischer Put
1	17.3236	6.7912
5	11.7049	4.2444
10	11.0517	3.9032
20	10.7287	3.7305
100	10.4721	3.5913
1000	10.4145	3.5598
∞	10.4082	3.5563

Tabelle 5.1: Vergleich der berechneten Werte einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option für verschiedene Anzahlen von Betrachtungszeitpunkten n zur Durchschnittsbildung

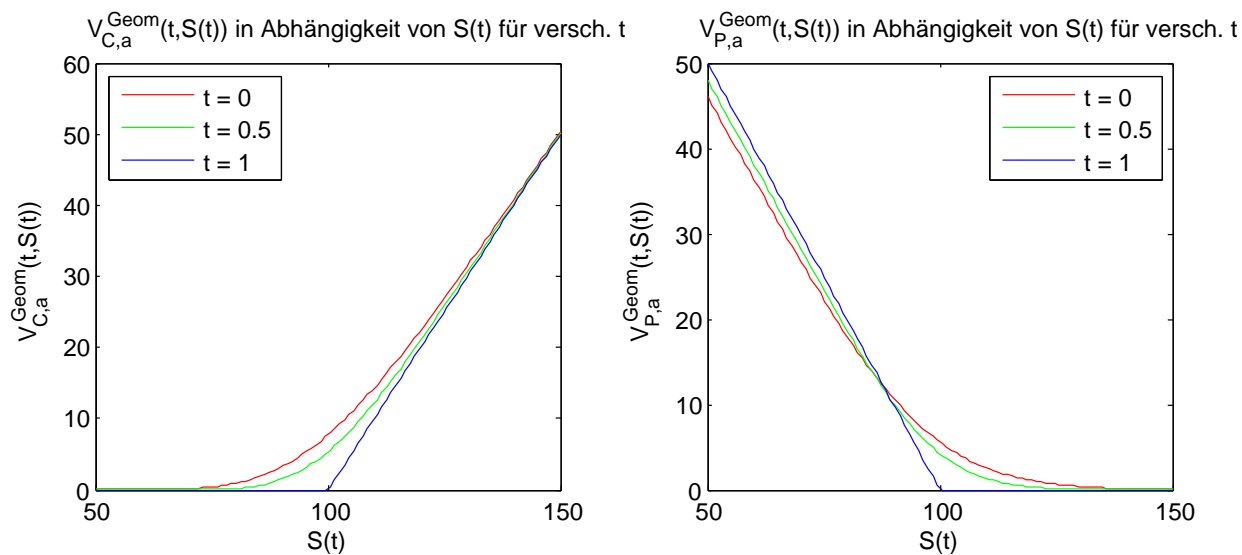


Abbildung 5.1: Wert einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von $S(t)$ für $t \in \{0, 0.5, T = 1\}$

In Abbildung 5.1 ist der Optionswert einer asiatischen Call-Option (links) und Put-Option (rechts) bei geometrischer Durchschnittsbildung mit den Parametern $S \in [50, 150]$, $t \in \{0, 0.5, 1 = T\}$, $K = 100$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$ dargestellt. Es zeigt sich ein ähnlicher Verlauf wie bei der europäischen Plain Vanilla Option (vgl. Abbildung 2.7).

Einen genaueren Vergleich liefert Abbildung 5.2. Hier sind der Wert einer geometrischen asiatischen Option und der einer europäischen Option im direkten Vergleich dargestellt. Es werden die gleichen Parameter wie bei der vorherigen Betrachtung verwendet, die Restlaufzeit beträgt nun $T = 1$. Dabei fällt auf, dass der Wert der asiatischen Option im Allgemeinen niedriger ist als der Wert einer Plain Vanilla Option unter gleichen Bedingungen (Ausnahme ist hier wieder die Situation, wenn die Put-Option *deep in the money*, also weit im Geld ist, d.h. wenn der Kurswert viel kleiner ist als der Ausübungspreis: $S(t) \ll K$). Der Grund für den geringeren Wert der asiatischen Option gegenüber der Plain Vanilla Option liegt darin, dass durch die Durchschnittsbildung über den Kursverlauf die Volatilität der Option vermindert wird und somit das Risiko aber auch der Wert sinken. Dies wird auch durch (5.25) verdeutlicht. Die Volatilität einer geometrischen asiatischen Option beträgt nur $\sigma\sqrt{1/3}$, wenn σ die Volatilität des Plain Vanilla Äquivalents ist.

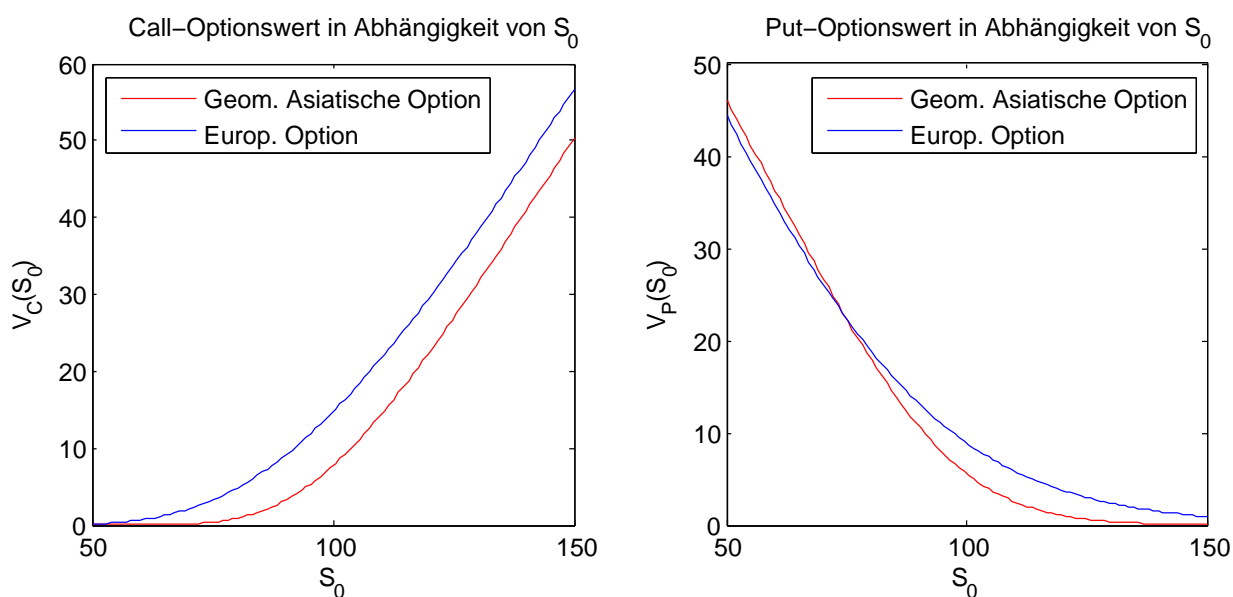


Abbildung 5.2: Vergleich der Werte einer geometrischen asiatischen und einer europäischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von S_0 mit $T = 1$

Abschließend sind in Abbildung 5.3 (analog zu Abbildung 2.8) der Wert der geometrischen asiatischen Call- und Put-Option als dreidimensionale Fläche für $S(t) \in [50, 150]$ und $t \in [0, 1]$ dargestellt ($r = 0.06$, $\sigma = 0.3$). Auf der Fläche ist exemplarisch eine mögliche Entwicklung des Optionswertes als Linie eingezeichnet, die aus einem zufällig simulierten Verlauf des Basiswertes resultiert. Dabei wurde der Pfad der Optionswerte in beiden Fällen auf Basis des gleichen Kursverlaufs des Basiswertes berechnet.

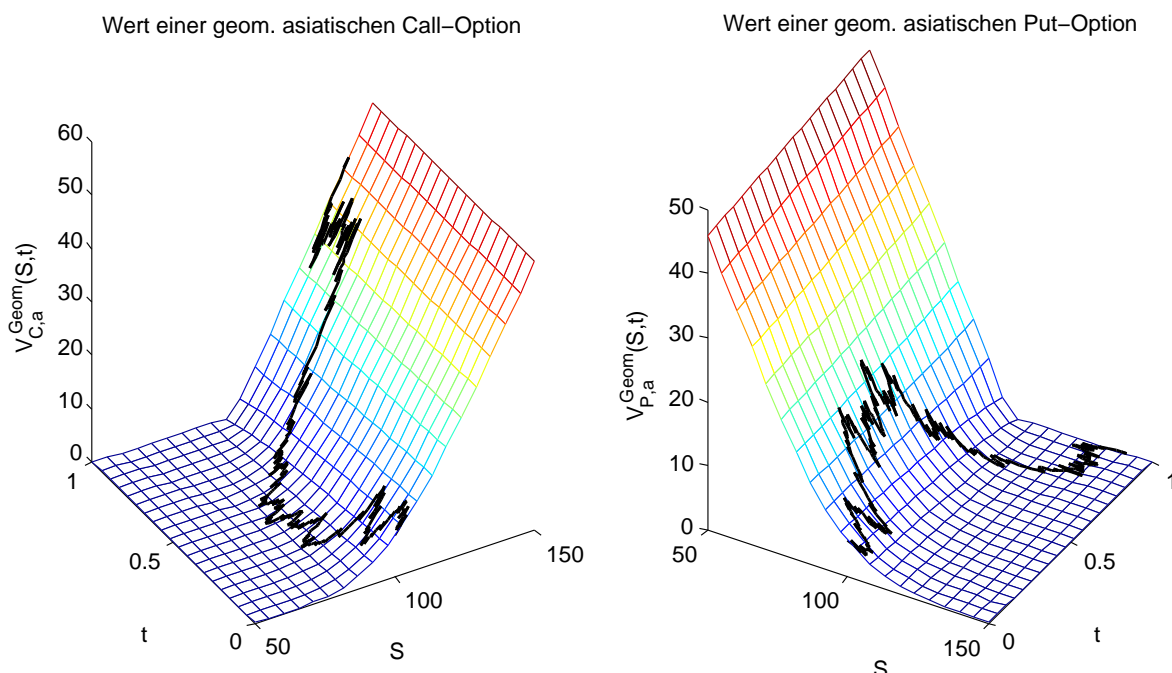


Abbildung 5.3: Dreidimensionale Darstellung des Wertes einer geometrischen asiatischen Call- und Put-Option als Fläche in Abhängigkeit von t und $S(t)$ für $t \in [0, 1]$ und $S(t) \in [50, 150]$ mit $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und eines möglichen Verlauf des Optionswertes als aufgelegte Linie

5.2.2 Discrete arithmetic average rate option

Da im Gegensatz zur geometrischen asiatischen Option für arithmetische asiatische Optionen keine analytische Formel existiert, werden wir nun die Bewertung asiatischer Optionen mittels der Monte Carlo Methode betrachten. Wie zu Beginn des Kapitels gesehen, ist das Auszahlungsprofil einer arithmetischen asiatischen Option bei diskreter Durchschnittsbildung zum Laufzeitende T durch (5.5) gegeben. Betrachtet man den Wert zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so erhält man nach Algorithmus 2.2 (3) den Optionswert als abgezinste Erwartungswert der Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit der Zufallsvariablen \hat{S} , des arithmetischen Durchschnitts über den (zukünftigen) Kursverlauf, als

$$V_{C,a}^{Arith}(0, S(t_0)) = e^{-rT} \mathbb{E} \left(\Lambda(\hat{S}) \right) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}(\hat{S}) - K \right)^+ \quad (5.27a)$$

im Fall eines Calls, bzw.

$$V_{P,a}^{Arith}(0, S(t_0)) = e^{-rT} \left(K - \mathbb{E}(\hat{S}) \right)^+ \quad (5.27b)$$

im Fall einer Put-Option.

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen \hat{S} lässt sich nun durch die Monte Carlo Methode approximieren. Bei Plain Vanilla Optionen hat es ausgereicht, eine große Anzahl von Kurswerten im Endzeitpunkt zu simulieren, um dann den Durchschnitt über die Auszahlungsfunktion zu bilden. Die asiatische Option gehört jedoch zu den pfadabhängigen Optionen,

denn der Wert der Auszahlungsfunktion wird nicht nur vom Kurs im Endzeitpunkt, sondern vom Kursverlauf über die gesamte Laufzeit bestimmt. Das Vorgehen lässt sich durch den folgenden Algorithmus beschreiben.

Algorithmus 5.1 (Bewertung einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit Monte Carlo).

Input: $S_0, K, T, r, \sigma, M, N$

(1) Simuliere N Pfade S_i der geometrischen Brownschen Bewegung zu M Zeitpunkten (vgl. Algorithmus 2.18)

(2) **for** $i := 1$ **to** N **do**

$$\hat{S}_i := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_i(j)$$

$$V_0(i) := e^{-rT} \max(\hat{S}_i - K, 0)$$

endfor

(3) $V_{C,a}^{Arith}(0, S_0) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_0(i)$

Output: $V_{C,a}^{Arith}(0, S_0)$

◦

Dies entspricht einer Approximation des Erwartungswertes

$$V(0, S(0)) = \mathbb{E} \left(e^{-rT} (\hat{S} - K)^+ \right) \quad (5.28)$$

durch Monte Carlo.

Analog geht man zur Bewertung einer Put-Option vor und verwendet in Schritt (2) die entsprechende Auszahlungsfunktion, d.h. man setzt

$$V_0(i) := e^{-rT} \max(K - \hat{S}_i, 0) \quad (5.29)$$

für die Berechnung des Optionswertes.

Nun lässt sich die Approximation des Optionswertes graphisch darstellen. Abbildung 5.4 zeigt den Optionswert einer arithmetischen asiatischen Call-Option (links) und Put-Option (rechts) für $S(t) \in [50, 150]$ und $t \in \{0, 0.5, 1\}$ mit $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$, wobei die Approximation durch $N = 35000$ Monte Carlo Simulationen erfolgt ist. Auch hier beobachtet man, ebenso wie bei der geometrischen asiatischen Option (Abbildung 5.1) und der europäischen Option (Abbildung 2.7), dass der Optionswert im Zeitverlauf im Allgemeinen abnimmt (Ausnahme ist wiederum die Put-Option für $S \ll K$).

Nach der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Cauchy, 1821) ist bekannt, dass der arithmetische Durchschnitt einer Menge nicht-negativer Zahlen mindestens

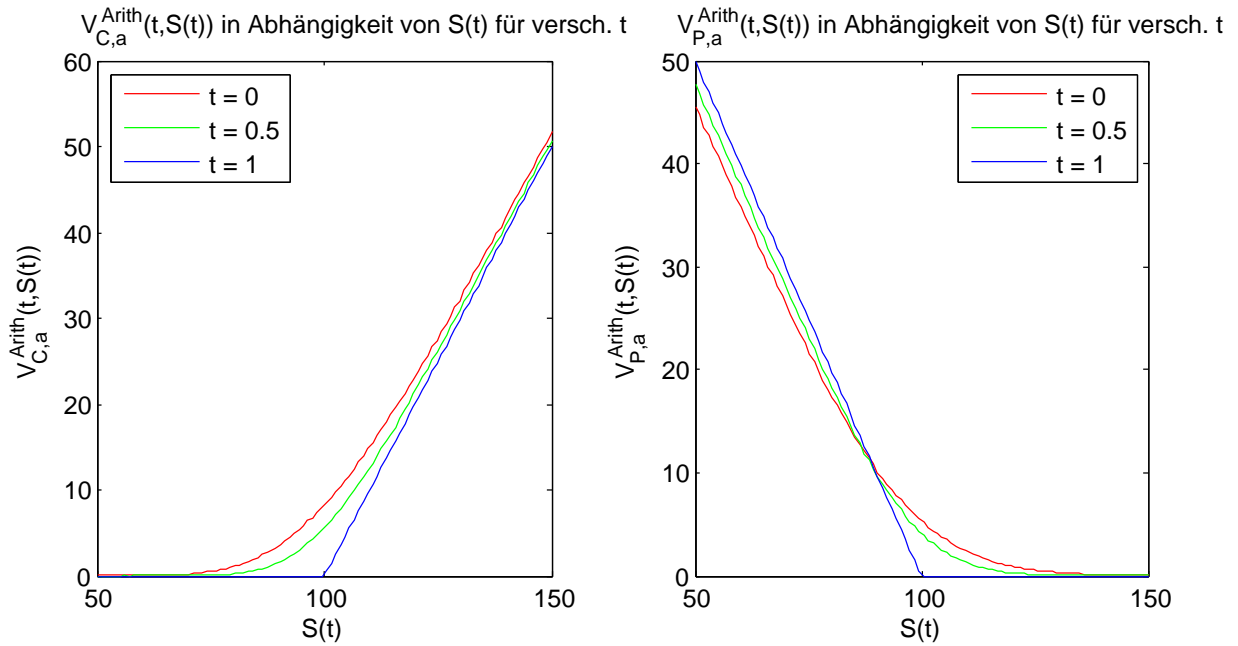


Abbildung 5.4: Wert einer arithmetischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von $S(t)$ für $t \in \{0, 0.5, T = 1\}$

genauso groß ist, wie ihr geometrischer Durchschnitt. In Zusammenhang mit der Auszahlungsfunktion der asiatischen Call-Option $\Lambda_C = (\hat{S} - K)^+$ bzw. der Auszahlungsfunktion der Put-Option $\Lambda_P = (K - \hat{S})^+$ gilt deshalb für den Wert asiatischer Call-Optionen

$$V_{C,a}^{Arith} \geq V_{C,a}^{Geom} \quad (5.30)$$

und für den Wert asiatischer Put-Optionen

$$V_{P,a}^{Arith} \leq V_{P,a}^{Geom}. \quad (5.31)$$

Dies wird auch durch numerische Simulation bestätigt. Abbildung 5.5 vergleicht den Wert einer arithmetischen und einer geometrischen asiatischen Call- bzw. Put-Option bei identischen Parametern ($S_0 \in [50, 150]$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.06$ und $\sigma = 0.3$ mit $N = 35000$ Durchläufen der Monte Carlo Simulation zur Approximation des arithmetischen Optionswertes). Es zeigt sich auch hier das Verhalten gemäß den Ungleichungen (5.30) und (5.31).

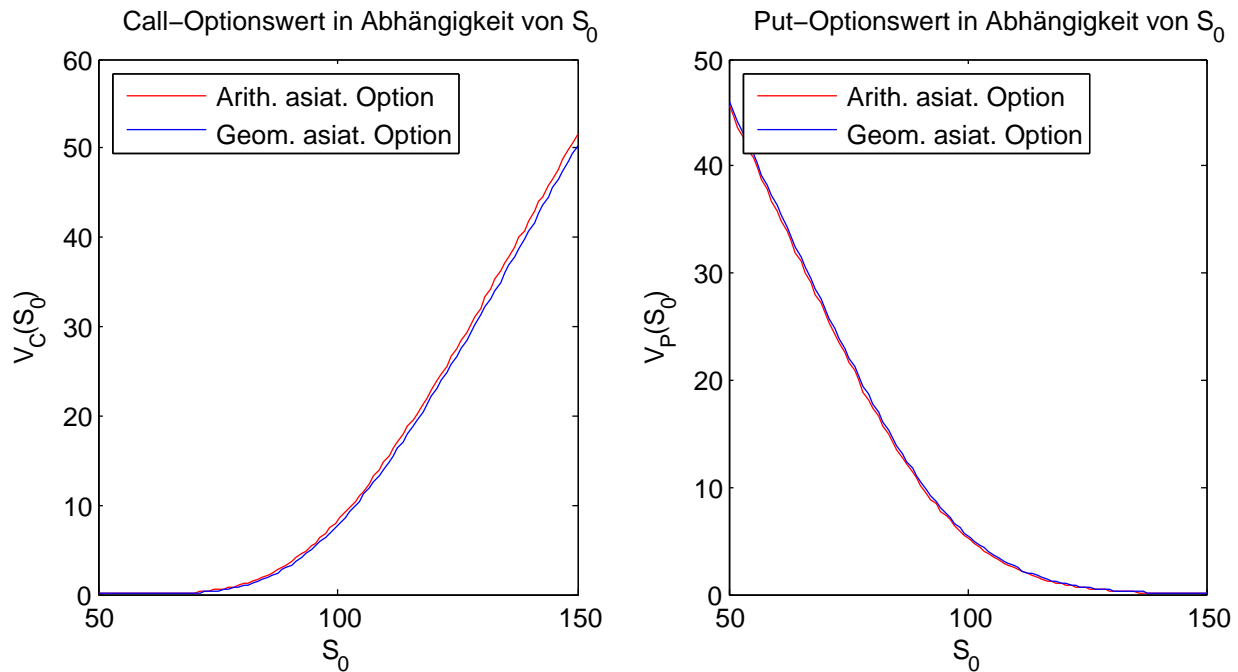


Abbildung 5.5: Vergleich der Werte einer arithmetischen und geometrischen asiatischen Call- und Put-Option in Abhängigkeit von S_0 mit $T = 1$

5.3 Varianzreduktion

Im vorhergehenden Kapitel wurden $N = 35000$ Durchläufe der Monte Carlo Simulation durchgeführt, um in den Abbildungen 5.4 und 5.5 eine “glatte” Kurve, d.h. eine ausreichend genaue Approximation, zu erreichen. Deshalb werden wir nun die Techniken aus Kapitel 3.4 verwenden, um eine bessere Konvergenz zu erzielen.

5.3.1 Antithetische Zufallsvariablen

Zunächst betrachten wir die Verwendung antithetischer Zufallsvariablen. Dazu simulieren wir in Schritt (1) von Algorithmus 5.1 nun $N/2$ Kurspfade S_i , $i = 1, \dots, N/2$, und ebenso viele Kurspfade S_i^- (dies dient einer besseren Vergleichbarkeit der Methoden, da so auch N Zufallsvariablen zur Approximation verwendet werden), wobei für die Pfade S_i^- statt der Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ die dazu antithetischen Zufallsvariablen $-Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eingehen. Damit lässt sich in Schritt (2) neben $V_0(i)$ zusätzlich

$$V_0^-(i) = e^{-rT} \max(\hat{S}_i^- - K, 0) \quad (5.32)$$

berechnen und wir erhalten in Schritt (3) für den Optionswert statt

$$V_{C,a}^{Arith}(0, S_0) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_0(i)$$

nun

$$V_{C,a}^{Arith}(0, S_0) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{V_0(i) + V_0^-(i)}{2}. \quad (5.33)$$

Die Verbesserung, die sich durch Verwendung antithetischer Zufallsvariablen erzielen lässt, ist in Abbildung 5.6 graphisch dargestellt. Der Wert der arithmetischen asiatischen Call-Option bei Approximation auf Basis der Standard Monte Carlo Methode (links) und bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen (rechts) ist für Stichprobengrößen $N = 2^i$, $i = 4, \dots, 19$ als Kreuz markiert, die zugehörigen 95%-Konfidenzintervalle sind als vertikale Linie eingezeichnet. Dabei wurde für die Achsen der linken und rechten Graphik die gleiche Skalierung gewählt. So stellt man fest, dass sich eine leichte Verbesserung eingestellt hat. Ein genauerer Vergleich erfolgt in Abschnitt 5.3.3.

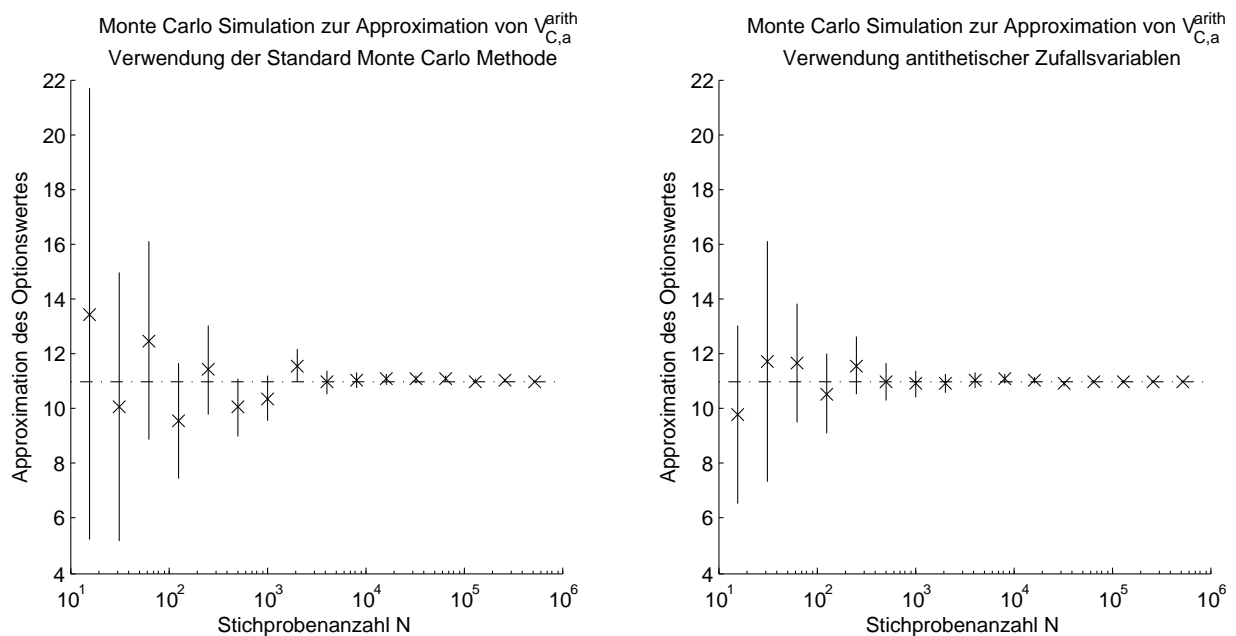


Abbildung 5.6: Vergleich der Approximation der Optionswerte und der zugehörigen 95%-Konfidenzintervalle einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit Standard Monte Carlo Methode und bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen für verschiedene Stichprobengrößen N

5.3.2 Control Variates

Die zweite Variante zur Varianzreduktion und somit zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit, die untersucht wurde, ist der Control Variates Ansatz (vgl. Kapitel 3.4.2). Für die arithmetische asiatische Option bieten sich nun verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Control Variate Y an.²¹ Im Folgenden wollen wir zwei davon genauer betrachten:

- Die Summe der Kurswerte des Basiswertes
- Der Wert einer *geometrischen* asiatischen Option mit gleichen Parametern

²¹siehe auch [3, Kapitel 8.4.1]

Summe der Kurswerte des Basiswertes

Wählt man die Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate Y , so ergibt sich bei äquidistanter Berücksichtigung von $M + 1$ Kurswerten zu den Zeitpunkten $t_i = i\Delta t$, $i = 0, \dots, M$, $\Delta t = T/M$ für die Control Variate

$$Y = \sum_{i=0}^M S(t_i). \quad (5.34)$$

Um nun den Control Variates Ansatz mittels (3.44) umzusetzen und den Optionswert V^{Arith} durch

$$\hat{V}_{CV}^{Arith} = \hat{V}^{Arith} - \hat{Y} + \mathbb{E}(Y) \quad (5.35)$$

zu approximieren, muss man zunächst den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ der Summe der Kurswerte bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^M S(t_i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^M \mathbb{E}(S(i\Delta t)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

und mit $\mathbb{E}(S(t)) = S_0 e^{rt}$ (nach (2.31)) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=0}^M S_0 e^{ri\Delta t} \\ &= S_0 \sum_{i=0}^M (e^{r\Delta t})^i. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Diese Summe entspricht der M -ten Partialsumme der geometrischen Reihe

$$a_0 \sum_{i=0}^M q^i = a_0 \frac{q^{M+1} - 1}{q - 1} \quad (5.38)$$

und somit erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= S_0 \frac{(e^{r\Delta t})^{M+1} - 1}{e^{r\Delta t} - 1} \\ &= S_0 \frac{e^{r(M+1)\Delta t} - 1}{e^{r\Delta t} - 1}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

sodass eine Approximation des Optionswertes V^{Arith} nach (5.35) möglich ist.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens weiter zu verbessern, setzen wir auch die in Bemerkung 3.11 vorgeschlagene Ergänzung um. Statt (5.35) verwenden wir demnach

$$\hat{V}_{CV}^{Arith} = \hat{V}^{Arith} - \theta(\hat{Y} - \mathbb{E}(Y)) \quad (5.40)$$

mit

$$\theta = \frac{\text{cov}(\hat{V}^{Arith}, \hat{Y})}{\text{var}(\hat{Y})},$$

um die Varianz von \hat{V}_{CV}^{Arith} zu minimieren. Dazu ist es nun notwendig, einige Monte Carlo Simulationen vor der tatsächlichen Approximation des Optionswertes durchzuführen, um $\text{var}(Y)$, die Varianz der Control Variate und $\text{cov}(\hat{V}^{Arith}, \hat{Y})$, die Kovarianz von Optionswert und Control Variate zu schätzen.

Bemerkung 5.2. L'Ecuyer und Buist schlagen in [13] vor, für die Berechnung des Parameters θ eigene Realisierungen der benötigten Zufallsvariablen zu verwenden, die unabhängig von denen sind, die in der tatsächlichen Approximation verwendet werden, um eine Verzerrung des Schätzers zu vermeiden. Sie stellen aber auch fest, dass diese Verzerrung für eine sehr große Anzahl N von Simulationen vernachlässigbar ist. \circ

Das resultierende Vorgehen wird durch den folgenden Algorithmus beschrieben. Dabei werden $1/10$ der N Monte Carlo Simulationen dazu verwendet, die Vorausberechnungen zur Bestimmung von θ durchzuführen.

Algorithmus 5.3 (Bewertung einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit Monte Carlo und der Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate).

Input: $S_0, K, T, r, \sigma, M, N$

(1) Setze $N^{PreCalc} := \lfloor N/10 \rfloor$, $N^{MC} := N - N^{PreCalc}$, $\Delta t := T/M$

(2) Simuliere $N^{PreCalc}$ Pfade $S_i^{PreCalc}$ der geometrischen Brownschen Bewegung zu M Zeitpunkten (vgl. Algorithmus 2.18)

(3) **for** $i := 1$ **to** $N^{PreCalc}$ **do**

Berechne zu Pfad i den Optionswert

$$V_0^{PreCalc}(i) := e^{-rT} \max \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_i^{PreCalc}(j) - K, 0 \right)$$

und die Summe der Kurswerte entlang des Pfades

$$SumS^{PreCalc}(i) := \sum_{j=0}^M S_i^{PreCalc}(j)$$

endfor

(4) Berechne $\text{var}(SumS^{PreCalc})$, $\text{cov}(V_0^{PreCalc}, SumS^{PreCalc})$ und

$$\theta := \frac{\text{cov}(V_0^{PreCalc}, SumS^{PreCalc})}{\text{var}(SumS^{PreCalc})}$$

(5) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(SumS) := S_0 \frac{e^{r(M+1)\Delta t} - 1}{e^{r\Delta t} - 1}$

(6) Simuliere N^{MC} Pfade S_i^{MC} der geometrischen Brownschen Bewegung zu M Zeitpunkten

(7) **for** $i := 1$ **to** N^{MC} **do**

Berechne zu Pfad i den Optionswert

$$V_0^{MC}(i) := e^{-rT} \max \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_i^{MC}(j) - K, 0 \right)$$

und die Summe der Kurswerte entlang des Pfades

$$SumS^{MC}(i) := \sum_{j=0}^M S_i^{MC}(j)$$

endfor

$$(8) V_{C,a}^{Arith}(0, S_0) := \frac{1}{N^{MC}} \sum_{i=1}^{N^{MC}} (V_0(i) - \theta (SumS^{MC}(i) - \mathbb{E}(SumS)))$$

Output: $V_{C,a}^{Arith}(0, S_0)$

o

Hierbei entsprechen die Schritte (2) bis (5) den Vorausberechnungen zur Ermittlung des Faktors θ und des Erwartungswertes der Control Variate, um in Schritt (8) die Varianz bei der Approximation des Optionswertes zu minimieren.

Zur Berechnung des Wertes einer arithmetischen asiatischen Put-Option ändert man Algorithmus 5.3 ab, indem man in den Schritten (3) und (7) die Auszahlungsfunktion der Put-Option verwendet, d.h. die entsprechenden Optionswerte mittels

$$V_0(i) := e^{-rT} \max \left(K - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_i(j), 0 \right) \quad (5.41)$$

berechnet.

Abbildung 5.7 veranschaulicht die Verbesserung der Approximation, die sich bei Verwendung der Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate ergibt. Betrachtet wird die Approximation des Wertes einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $M = 100$ bei $N = 2^i$, $i = 4, \dots, 19$ Monte Carlo Simulationen unter Verwendung der Standard Monte Carlo Methode (links) bzw. der Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate (rechts). Die approximierten Werte für jedes N sind als Kreuz markiert, die zugehörigen 95%-Konfidenzintervalle durch eine vertikale Linie, der Wert der letzten Approximation (bei der höchsten Anzahl von Monte Carlo Durchläufen) ist zum besseren Vergleich als horizontale gestrichelte Linie eingezeichnet.

Für die Achsen der linken und rechten Graphik wurde wiederum die gleiche Skalierung gewählt (entsprechend Abbildung 5.6). Hier lässt sich nun sofort eine signifikante Verbesserung der Ergebnisse beobachten. Schon für eine geringe Anzahl von Monte Carlo Simulationen wird eine deutlich bessere Approximation des Optionswertes erzielt und auch die 95%-Konfidenzintervalle schrumpfen schnell. Ein genauerer Vergleich der verschiedenen Methoden erfolgt in Abschnitt 5.3.3.

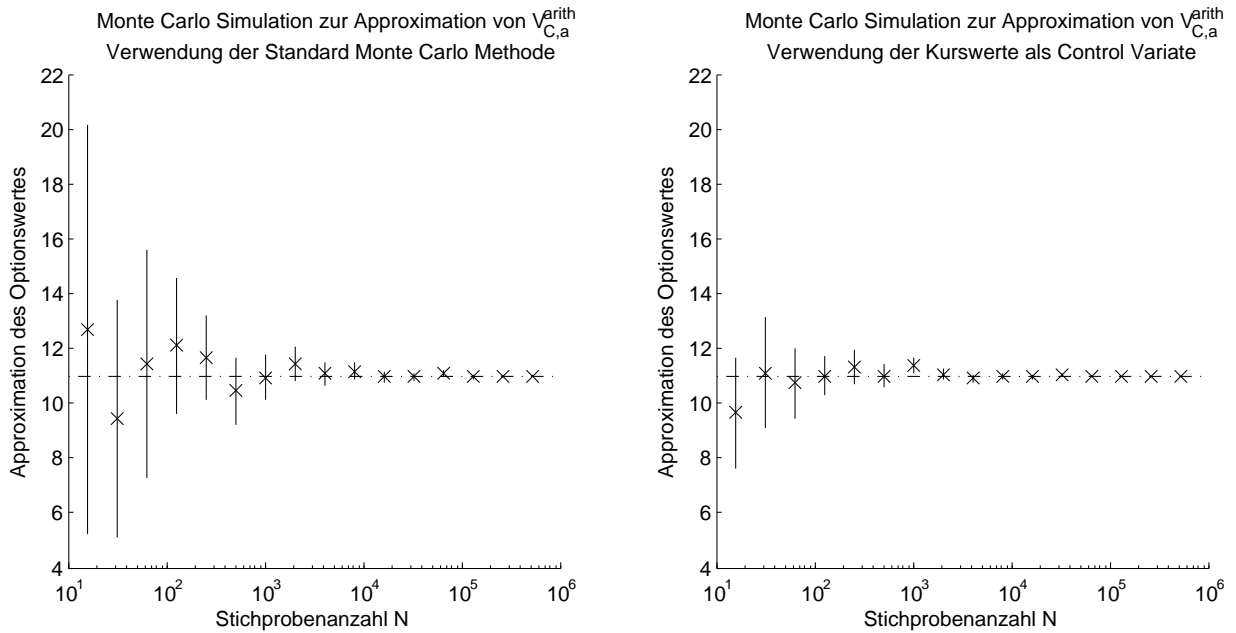


Abbildung 5.7: Vergleich der Approximation der Optionswerte und der zugehörigen 95%-Konfidenzintervalle einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit Standard Monte Carlo Methode und bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate für verschiedene Stichprobengrößen N

Geometrische asiatische Option

Nun wählen wir als Control Variate den Wert der geometrischen asiatischen Option mit gleichen Parametern wie die betrachtete arithmetische asiatische Option. In Kapitel 5.2.1 haben wir gesehen, dass sich hierfür eine analytische Formel angeben lässt. Somit ist es möglich, den Erwartungswert der Control Variate zu berechnen, was die Voraussetzung zur Anwendung des Control Variates Ansatzes ist. In der Notation von (3.44) ist dann

$$Y = V^{Geom} \quad (5.42)$$

die Control Variate und der Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ lässt sich nach (5.26) bestimmen. Dann wird die neue Zufallsvariable

$$\hat{V}_{CV}^{Arith} = \hat{V}^{Arith} - \theta \left(\hat{V}^{Geom} - \mathbb{E}(V^{Geom}) \right) \quad (5.43)$$

zur Approximation des Wertes der arithmetischen asiatischen Option verwendet.

Die Optionsbewertung erfolgt nun analog zu Algorithmus 5.3, einzig die Berechnung der Control Variate und ihres Erwartungswertes muss angepasst werden. Dazu ersetzt man in Schritt (3) und (7) die Berechnung der Summe der Kurswerte entlang der Pfade durch die Berechnung des Wertes der geometrischen asiatischen Option auf Basis der Pfade der Vorkalkulation $S_i^{PreCalc}$ bzw. auf Basis der Pfade für die tatsächliche Approximation S_i^{MC} . Für eine Call-Option verwendet man demnach

$$V^{Geom}(i) := e^{-rT} \max \left(\frac{1}{M} \prod_{j=1}^M S_i(j) - K, 0 \right) \quad (5.44a)$$

bzw. für eine Put-Option

$$V^{Geom}(i) := e^{-rT} \max \left(K - \frac{1}{M} \prod_{j=1}^M S_i(j), 0 \right). \quad (5.44b)$$

In Schritt (4) berechnet man $\text{var}(V_{Geom}^{PreCalc})$, $\text{cov}(V_0^{PreCalc}, V_{Geom}^{PreCalc})$ und erhält

$$\theta := \frac{\text{cov}(V_0^{PreCalc}, V_{Geom}^{PreCalc})}{\text{var}(V_{Geom}^{PreCalc})}. \quad (5.45)$$

Der Erwartungswert der Control Variate in Schritt (5) lautet nach (5.26a) für eine Call-Option

$$V_0^{Geom} := S_0 e^{-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T} \Phi(a) - K e^{-rT} \Phi(b) \quad (5.46a)$$

bzw. bei Betrachtung einer Put-Option (nach (5.26b))

$$V_0^{Geom} := S_0 e^{-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T} (\Phi(a) - 1) - K e^{-rT} (\Phi(b) - 1) \quad (5.46b)$$

mit jeweils

$$a := \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} \quad (5.46c)$$

$$b := a - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

und schließlich lässt sich in Schritt (8) der Wert der arithmetischen asiatischen Call- oder Put-Option durch

$$V_{C/P,a}^{Arith}(0, S_0) := \frac{1}{NMC} \sum_{i=1}^{NMC} (V_0(i) - \theta (V^{Geom}(i) - V_0^{Geom})) \quad (5.47)$$

angeben.

Eine Visualisierung der Ergebnisse des Verfahrens am Beispiel einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $M = 100$ bei $N = 2^i$, $i = 4, \dots, 19$, Monte Carlo Simulationen ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Die linke Graphik wurde unter Verwendung der Standard Monte Carlo Methode erzeugt, die rechte Graphik mittels Verwendung der geometrischen asiatischen Call-Option mit gleichen Parametern als Control Variate. Für jedes N ist die entsprechende Approximation des Optionswertes durch ein Kreuz und das 95%-Konfidenzintervall als vertikale Linie dargestellt. Die horizontale gestrichelte Linie entspricht dem für $N = 2^{19}$ approximierten Optionswert und dient der Vergleichbarkeit.

Eine gleiche Skalierung der x-Achsen der linken und rechten Graphik, wie in den Abbildungen 5.6 und 5.7 ist nun nicht mehr möglich, da die 95%-Konfidenzintervalle bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate dann nicht mehr erkennbar sind. Dies verdeutlicht insbesondere die Beobachtung, dass sich durch den Control Variates Ansatz und das Ausnutzen der starken Korrelation zwischen arithmetischem und geometrischem Optionswert bedeutende Verbesserungen hinsichtlich des Konvergenzverhaltens ergeben.

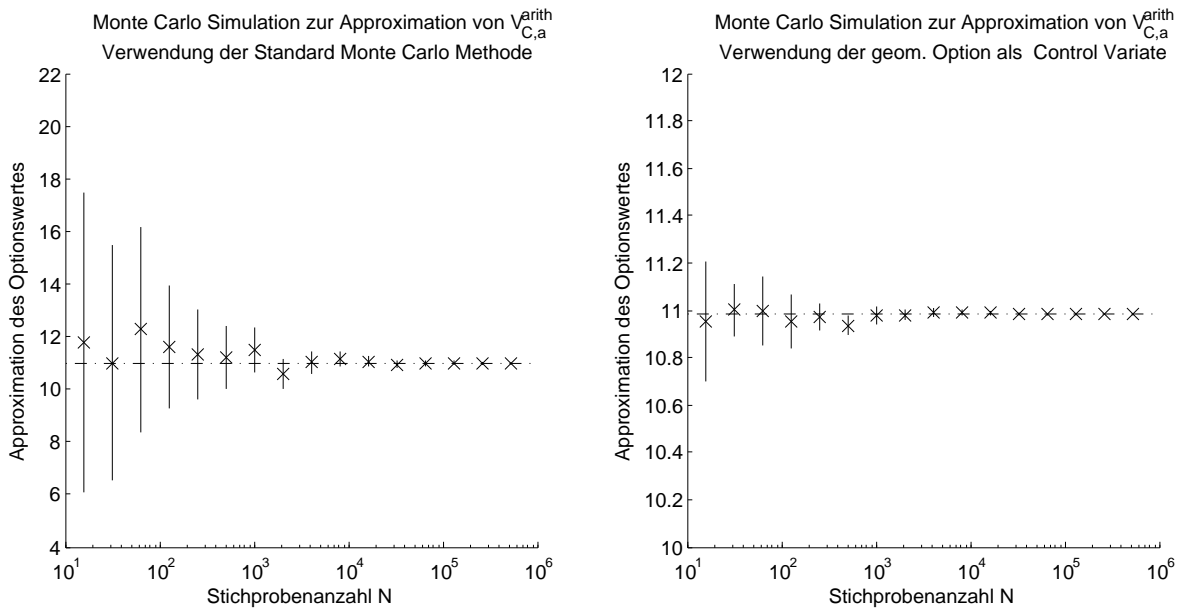


Abbildung 5.8: Vergleich der Approximation der Optionswerte und der zugehörigen 95%-Konfidenzintervalle einer arithmetischen asiatischen Call-Option mit Standard Monte Carlo Methode und bei Verwendung der geometrischen asiatischen Option als Control Variate für verschiedene Stichprobengrößen N

5.3.3 Vergleich der Methoden

Nun werden wir die drei betrachteten Verfahren und die Standard Monte Carlo Methode differenzierter vergleichen. Dazu wird der Wert einer arithmetischen asiatischen Call-Option ($S_0 = 100$, $K = 95$, $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $M = 100$) für verschiedene Anzahlen N von Monte Carlo Simulationen auf Basis aller vier Verfahren approximiert und die Resultate hinsichtlich der Größe der 95%-Konfidenzintervalle und der benötigten Rechenzeit verglichen.

Zur besseren Vergleichbarkeit werden die folgenden systematischen Vorgaben gemacht:

- Für die Approximation mittels antithetischer Zufallsvariablen werden $N/2$ (statt N) Monte Carlo Simulationen durchgeführt, da jede Simulation der Verwendung zweier Zufallsvariablen entspricht.
- Bei Approximation mittels des Control Variates Ansatzes werden 10% der Simulationen (also $N/10$ Simulationen) für die notwendigen Vorausberechnungen und 90% der Simulationen für die tatsächliche Berechnung des Optionswertes verwendet.

Zunächst sind in Tabelle 5.2 die approximierten Optionswerte, die mittels der vier Verfahren berechnet wurden, dargestellt. Es wird erkennbar, dass die Standard Monte Carlo Methode sehr langsam konvergiert, wohingegen bei Verwendung von Control Variates, insbesondere der geometrischen Option, sehr schnell ein genaues Ergebnis erzielt wird.

Tabelle 5.3 liefert einen Vergleich der zu den Optionswerten aus Tabelle 5.2 gehörenden 95%-Konfidenzintervalle. Hier zeichnen sich ähnliche Resultate bezüglich der Genauigkeit

N	Standard	Antithet. ZV	CV (Kurswerte)	CV (Geom. Option)
10^2	11.793718	12.456686	11.232375	10.936640
10^3	11.016802	10.996657	10.885316	10.986471
10^4	11.101332	10.975217	11.000644	10.988585
10^5	10.919673	10.982372	10.999900	10.980579
10^6	10.993574	10.975306	10.984065	10.982928

Tabelle 5.2: Vergleich der Optionswerte nach den vier Verfahren für verschiedene Stichprobengrößen N

ab. Für $N = 10^6$ wird bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate eine Genauigkeit von vier Stellen erreicht.

N	Standard	Antithet. ZV	CV (Kurswerte)	CV (Geom. Option)
10^2	[8.52, 15.07]	[10.91, 14.00]	[10.07, 12.39]	[10.84, 11.03]
10^3	[10.17, 11.86]	[10.48, 11.51]	[10.61, 11.16]	[10.95, 11.02]
10^4	[10.84, 11.37]	[10.81, 11.14]	[10.92, 11.09]	[10.977, 11.000]
10^5	[10.84, 11.00]	[10.93, 11.03]	[10.97, 11.03]	[10.977, 10.984]
10^6	[10.97, 11.02]	[10.96, 10.99]	[10.976, 10.993]	[10.9818, 10.9840]

Tabelle 5.3: Vergleich der Größen der 95%-Konfidenzintervalle nach den vier Verfahren für verschiedene Stichprobengrößen N

Nun lässt sich auch die Verkleinerung der 95%-Konfidenzintervalle im Vergleich zur Standard Monte Carlo Methode betrachten. Sie lässt sich berechnen, indem die Differenz der Intervallgrößen von Standard Monte Carlo und der betrachteten Methode durch die Intervallgröße bei Verwendung der Standard Monte Carlo Methode geteilt wird. Hier beobachtet man relativ konstante Werte für alle N , bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen verkleinert sich das 95%-Konfidenzintervall um ungefähr 38%, die Summe der Kurswerte als Control Variate führt zu einer Verkleinerung um ca. 68%, verwendet man die geometrische Option als Control Variate schrumpft das Konfidenzintervall sogar auf durchschnittlich 4% der ursprünglichen Größe.

Neben der erzielten Genauigkeit ist jedoch auch zu berücksichtigen, wieviel Rechenzeit aufgewendet werden muss, um diese zu erreichen. Tabelle 5.5 listet die relativen Rechenzeiten der drei Verfahren zur Varianzreduktion auf, d.h. es wird der Quotient aus der benötigten Rechenzeit des Verfahrens und der Rechenzeit der Standard Monte Carlo Methode gebildet. Es zeigt sich, dass die Verwendung antithetischer Zufallsvariablen sehr aufwendig ist und etwa das Vierfache an Rechenzeit beansprucht, wohingegen der Aufwand bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate fast nicht steigt, da alle benötigten Werte ohnehin zur Verfügung stehen und auch mit minimalem Aufwand ausgewertet werden können. Der Control Variates Ansatz mit Verwendung der geometrischen Option liegt hier mit einer knappen Verdopplung der Rechenzeit zwischen den beiden anderen Verfahren.

N	Antithet. ZV	CV (Kurswerte)	CV (Geom. Option)
10^2	52.8%	64.6%	97.0%
10^3	38.5%	67.5%	96.0%
10^4	37.0%	68.1%	95.7%
10^5	37.5%	68.0%	96.0%
10^6	37.8%	68.1%	96.0%

Tabelle 5.4: Vergleich der Verkleinerung des 95%-Konfidenzintervalls bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen und dem Control Variates Ansatz für verschiedene Stichprobengrößen N relativ zur Standard Monte Carlo Methode

N	Antithet. ZV	CV (Kurswerte)	CV (Geom. Option)
10^2	1.93	1.40	2.34
10^3	2.86	1.13	2.18
10^4	4.23	1.05	1.93
10^5	4.72	1.05	1.99
10^6	4.15	1.09	1.92

Tabelle 5.5: Vergleich der relativen Rechenzeit bei Verwendung antithetischer Zufallsvariablen und dem Control Variates Ansatz für verschiedene Stichprobengrößen N

Zusammenfassend ist festzustellen, dass sich durch das Ausnutzen des starken Zusammenhangs zwischen der arithmetischen und der geometrischen asiatischen Option bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate für das arithmetische Pendant die besten Ergebnisse erzielen lassen. Die Verkleinerung des 95%-Konfidenzintervalls auf 4% der ursprünglichen Größe wird durch Verdopplung der Rechenzeit erkaufte. Vergleichbare Verbesserungen lassen sich durch keine der anderen Methoden realisieren. Verwendet man die Summe der Kursverläufe des Basiswertes als Control Variate, lässt sich das 95%-Konfidenzintervall auf ein Drittel der ursprünglichen Größe verkleinern, fast ohne Einbußen beim Aufwand hinnehmen zu müssen.

5.4 Hedging

Möchte man nun auf Basis von Algorithmus 2.24 ein Portfolio, das eine arithmetische asiatische Option enthält, zusammenstellen und umschichten, so ist es notwendig, neben dem Optionswert auch das Delta zu berechnen. Dazu verwendet man, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, die Finite-Differenzen-Methode. Somit kann das Delta durch Berechnung zweier Optionswerte approximiert werden. Für die Approximation des Wertes der arithmetischen asiatischen Option im Rahmen des Hedging-Verfahrens sind neben dem Plain Monte Carlo Verfahren entsprechend dem vorhergehenden Kapitel zur Varianzreduktion die dortgenann-

ten Methoden denkbar. Hier werden wir die beiden Control Variates Verfahren genauer betrachten.

5.4.1 Summe der Kurswerte als Control Variate

Die Verwendung der Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate zur Verbesserung der Konvergenz bei der Approximation der Optionswerte, die für die Umschichtungen in jedem Zeitschritt benötigt werden, ist problemlos möglich. Der Erwartungswert der Summe der Kurswerte im Endzeitpunkt T setzt sich bei Betrachtung in $t > 0$ aus der Summe der bisher realisierten Kurswerte und des Erwartungswertes gemäß (5.39) zusammen, wobei für die Berechnung des Erwartungswertes der aktuelle Kurswert $S(t)$ als Startkurswert und die Restlaufzeit der Option als Betrachtungszeitraum verwendet werden.

5.4.2 Geometrische asiatische Option als Control Variate

In Abschnitt 5.2.1 wurde mit (5.22) bzw. (5.26) eine Formel für den exakten Wert der geometrischen asiatischen Option zum Zeitpunkt $t = 0$ erarbeitet. Zur Durchführung des Hedgings sind jedoch Umschichtungen zu Zeitpunkten $t_i > 0$ notwendig. Soll die geometrische asiatische Option als Control Variate beim Hedging des Portfolios verwendet werden, muss somit ihr Erwartungswert für $t > 0$ bestimmt werden.²²

Die Herleitung der analytischen Formel für Zeitpunkte $t > 0$ erfolgt analog zum Fall $t = 0$ (vgl. Kapitel 5.2.1). Ein Teil des für die Bewertung relevanten Kursverlaufs ist nun aber schon bekannt. Die bekannten Werte $S(t_i)$ werden deshalb zusammengefasst zu \tilde{S} (siehe (5.49)) und es erfolgt eine Betrachtung der Zufallsvariablen R_i für zukünftige Zeitpunkte t_i . Dann lassen sich Umformungen analog zur Herleitung im Fall $t = 0$ durchführen und schließlich kann der Erwartungswert des Optionswertes wieder auf den einer europäischen Option mit bestimmten Parametern zurückgeführt werden.

Dazu betrachten wir den Optionswert der geometrischen asiatischen Option bei diskreter Mittelwertbildung im Zeitpunkt $t_k = k\Delta t > t_0 = 0$, $1 \leq k \leq n - 1$ wobei $T = n\Delta t$. Nun gilt:

- (1) $S(t_i)$ ist bekannt für $i \leq k$.
- (2) $R_i = \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$ ist eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable für $k + 1 \leq i \leq n$ (vgl. (5.7)).

Dann gilt für den diskreten geometrischen Mittelwert nach (5.1)

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} \\ &= (S(t_1) \dots S(t_k))^{1/n} \left[\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})} \right) \left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})} \right)^2 \dots \left(\frac{S(t_{k+1})}{S(t_k)} \right)^{n-k} \right]^{1/n} S(t_k)^{\frac{n-k}{n}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

²²siehe [12, Kapitel 4.3.5]

Sei

$$\tilde{S} = (S(t_1) \dots S(t_k))^{1/n} S(t_k)^{\frac{n-k}{n}}, \quad (5.49)$$

so gilt (vgl. (5.9) bis (5.11))

$$\begin{aligned} \ln \frac{\hat{S}}{\tilde{S}} &= \frac{1}{n} \left(\ln R_n + 2 \ln R_{n-1} + \dots + (n-k) \ln R_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-k} i \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^{n-k} i Z_{n-i+1} \right) \right] \\ &= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \frac{\sigma \sqrt{\Delta t}}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-k} i Z_{n-i+1} \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Betrachtet man hier die Zufallsvariable

$$Y = \frac{\sigma \sqrt{\Delta t}}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-k} i Z_{n-i+1} \right), \quad (5.51)$$

so gilt für ihre Varianz

$$\text{var}(Y) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n-k} i^2 \right) = \frac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)\sigma^2 \Delta t}{6n^2}. \quad (5.52)$$

Analog zu (5.15) führt man eine Transformation

$$\sigma \sqrt{\frac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)\Delta t}{6n^2}} \bar{Z} \sim Y \quad \text{mit } \bar{Z} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (5.53)$$

durch und mit

$$T - t_k = (n-k)\Delta t \quad \iff \quad \Delta t = \frac{T - t_k}{n-k} \quad (5.54)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \ln \frac{\hat{S}}{\tilde{S}} &= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \\ &\quad + \sigma \sqrt{\frac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)\Delta t}{6n^2}} \bar{Z} \\ &= \frac{n-k+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t_k) + \sigma \sqrt{\frac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{6n^2}} (T - t_k) \bar{Z}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Definiert man

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &:= \sigma \sqrt{\frac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{6n^2}} \\ \bar{r} &:= \frac{n-k+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2, \end{aligned} \quad (5.56)$$

ergibt sich

$$\ln \frac{\hat{S}}{\tilde{S}} = \left(\bar{r} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) (T - t_k) + \bar{\sigma} \sqrt{T - t_k} \bar{Z} \quad (5.57)$$

und somit

$$\hat{S} = \tilde{S} \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) (T - t_k) + \bar{\sigma} \sqrt{T - t_k} \bar{Z} \right], \quad \bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.58)$$

Betrachtet man nun den Optionswert einer geometrischen asiatischen Call-Option im Zeitpunkt $t_k > 0$

$$\begin{aligned} V_{C,a}^{Geom}(t_k, \tilde{S}) &= e^{-r(T-t_k)} \mathbb{E} \left((\hat{S} - K)^+ \right) \\ &= e^{(\bar{r}-r)(T-t_k)} e^{-\bar{r}(T-t_k)} \mathbb{E} \left(\underbrace{\left(\tilde{S} \exp \left[\left(\bar{r} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) (T - t_k) + \bar{\sigma} \sqrt{T - t_k} \bar{Z} \right] - K \right)^+}_{=\bar{V}_{C,e}(t_k, \tilde{S})} \right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

stellt man auch hier fest, dass dieser den Wert $\bar{V}_{C,e}(t_k, \tilde{S})$ einer europäischen Plain Vanilla Call-Option mit Drift $\mu = \bar{r}$, Volatilität $\bar{\sigma}$ und Ausgangskurswert $S_0 = \tilde{S}$ enthält und somit eine analytische Lösung mittels der Black-Scholes Formel möglich ist.

Somit ergibt sich schließlich für den Wert einer geometrischen asiatischen Call-Option im Zeitpunkt t_k nach (2.48a)

$$V_{C,a}^{Geom}(t_k, \tilde{S}) = e^{-r(T-t_k)} \left(\tilde{S} e^{\bar{r}(T-t_k)} \Phi(a) - K \Phi(b) \right) \quad (5.60a)$$

und analog für die geometrische asiatische Put-Option nach (2.48b)

$$V_{P,a}^{Geom}(t_k, \tilde{S}) = e^{-r(T-t_k)} \left(\tilde{S} e^{\bar{r}(T-t_k)} (\Phi(a) - 1) - K (\Phi(b) - 1) \right) \quad (5.60b)$$

jeweils mit

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \left(\prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}} S(t_k)^{\frac{n-k}{n}} \\ \bar{\sigma} &= \sigma \sqrt{\frac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{6n^2}} \\ \bar{r} &= \frac{n-k+1}{2n} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \\ a &= \frac{\ln \left(\frac{\tilde{S}}{K} \right) + \left(\bar{r} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) (T - t_k)}{\bar{\sigma} \sqrt{T - t_k}} \\ b &= a - \bar{\sigma} \sqrt{T - t_k}. \end{aligned} \quad (5.60c)$$

Bei *kontinuierlicher Betrachtung*, d.h. im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, ergeben sich die Parameter \tilde{S} (siehe dazu (5.3)), $\bar{\sigma}$ und \bar{r} im Bewertungszeitpunkt $t = t_k$ zu

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^t \ln S(\tau) d\tau\right) S(t)^{\frac{T-t}{T}} \\ \bar{\sigma} &= \sigma \frac{T-t}{T} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \bar{r} &= \frac{T-t}{2T} \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{3}\sigma^2 \left(\frac{T-t}{T}\right) \right].\end{aligned}\tag{5.61}$$

Es bietet sich nun also die Möglichkeit, eine bereits emittierte geometrische asiatische Option auf Basis des bisher realisierten Kursverlaufs des Basiswertes zu bewerten. Somit kann die geometrische asiatische Option als Control Variate für ihr arithmetisches Pendant bei den Portfolio-Umschichtungen verwendet werden.

5.4.3 Numerische Simulation

Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus Anteilen am Basiswert, der festverzinslichen Anleihe und einer ausgegebenen arithmetischen asiatischen Call-Option mit den Parametern $S_0 = 100$, $K = 95$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1$ unter Verwendung der drei behandelten Methoden. Die Umschichtungen erfolgen in der ersten Simulation zu $M = 100$ äquidistanten Zeitpunkten, wobei in jedem Zeitschritt die benötigten Werte durch $N = 1000$ Simulationen approximiert werden. In der zweiten Simulation werden die Werte $M = 200$ und $N = 10000$ verwendet. Der Hedging-Parameter $\Delta(t)$ wird durch die Finite-Differenzen-Methode mit $h = 0.0001$ bestimmt.

Die folgenden Abbildungen stellen den Verlauf des Kurses des Basiswertes $S(t)$, des darauf basierenden Optionswertes $V(t)$, $\Delta(t)$ sowie die daraus resultierende Entwicklung des Portfolios jeweils als rote Linie dar. Als Vergleich ist der erwartete Verlauf des Portfolios durch eine schwarz gestrichelte Linie markiert.

Für die Berechnung der benötigten Werte der ersten beiden Abbildungen wird die *Standard Monte Carlo Methode* verwendet. Dabei werden in Abbildung 5.9 $M = 100$ Umschichtungen bei $N = 1000$ Monte Carlo Simulationen durchgeführt. In Abbildung 5.10 werden diese Parameter auf $M = 200$ und $N = 10000$ erhöht.

Der Verlauf des Basiswertes $S(t)$, des Optionswertes $V(t)$, des Hedging-Parameters $\Delta(t)$ und des Portfolio-Wertes $\Pi(t)$ unter Verwendung der *Summe der Kurswerte als Control Variate* (sowohl bei der Berechnung des eigentlichen Optionswertes, als auch bei dem hilfsweise benötigten Optionswert zur Approximation des Delta) ist in Abbildung 5.11 (für $M = 100$ und $N = 1000$) bzw. in Abbildung 5.12 (für $M = 200$ und $N = 10000$) dargestellt.

Die übrigen beiden Graphiken illustrieren die Verwendung der *geometrischen asiatischen Option als Control Variate* (wiederum sowohl bei der Approximation des Optionswertes

als auch des Delta). Ein Verlauf des Portfolios und der zugrunde liegenden Parameter bei $M = 100$ Zeitschritten und $N = 1000$ Monte Carlo Simulationen je Zeitschritt ist in Abbildung 5.13 visualisiert. Entsprechend stellt Abbildung 5.14 einen Verlauf für $M = 200$ Umschichtungen und $N = 10000$ Monte Carlo Simulationen dar.

Es lässt sich in den Abbildungen erkennen, dass im Allgemeinen eine gute Approximation erzielt wurde und eine Risikoelimination bei einem Portfolio basierend auf der arithmetischen asiatischen Option gut durchführbar ist. Weiterhin zeigt sich, dass durch eine Erhöhung der Anzahl M der Zeitpunkte der Portfolio-Umschichtung oder der Anzahl N der Simulationen weitere Verbesserungen des Ergebnisses erzielt werden können.

Vergleicht man diese Graphiken, so liegt die Vermutung nahe, dass sich durch die Techniken zur Varianzreduktion die Effizienz der Monte Carlo Methode – in Form eines exakteren Portfolio-Verlaufs – steigern lässt. Da aber alle Abbildungen nur das Ergebnis einer einzelnen Simulation darstellen, wollen wir die Qualität der einzelnen Methoden hinsichtlich ihrer Eignung zum Hedging eines Portfolios nochmals näher untersuchen.

Dazu verwenden wir wieder obiges Portfolio basierend auf einer arithmetischen asiatischen Call-Option (mit $S_0 = 100$, $K = 95$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$ und $T = 1$) bei $M = 100$ Umschichtungen und jeweils $N = 1000$ Monte Carlo Simulationen. Dieses Portfolio wird nun $n = 10000$ mal mittels der Verfahren

- (i) Standard Monte Carlo Methode
- (ii) Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate für den Optionswert
- (iii) Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate für Optionswert und Delta
- (iv) Verwendung der geometrischen asiatischen Option als Control Variate für den Optionswert
- (v) Verwendung der geometrischen asiatischen Option als Control Variate für Optionswert und Delta

simuliert und für jeden simulierten Portfolio-Verlauf wird die relative Abweichung des Endwertes des Portfolios $\Pi(T)$ vom erwarteten Wert $e^{rT}\Pi(0)$

$$\epsilon(i) = \frac{\Pi_i(T) - e^{rT}\Pi_i(0)}{e^{rT}\Pi_i(0)} \quad (5.62)$$

ermittelt. Um die durchschnittliche Abweichung der Verfahren zu bestimmen, wird der Mittelwert über die Fehler der einzelnen Simulationen in Form des quadratischen Mittels

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon(i)^2} \quad (5.63)$$

gebildet. Dabei wurde das quadratische Mittel gewählt, da dies – im Gegensatz zum arithmetischen Mittel – zu einer stärkeren Gewichtung von höheren Abweichungen führt. Die

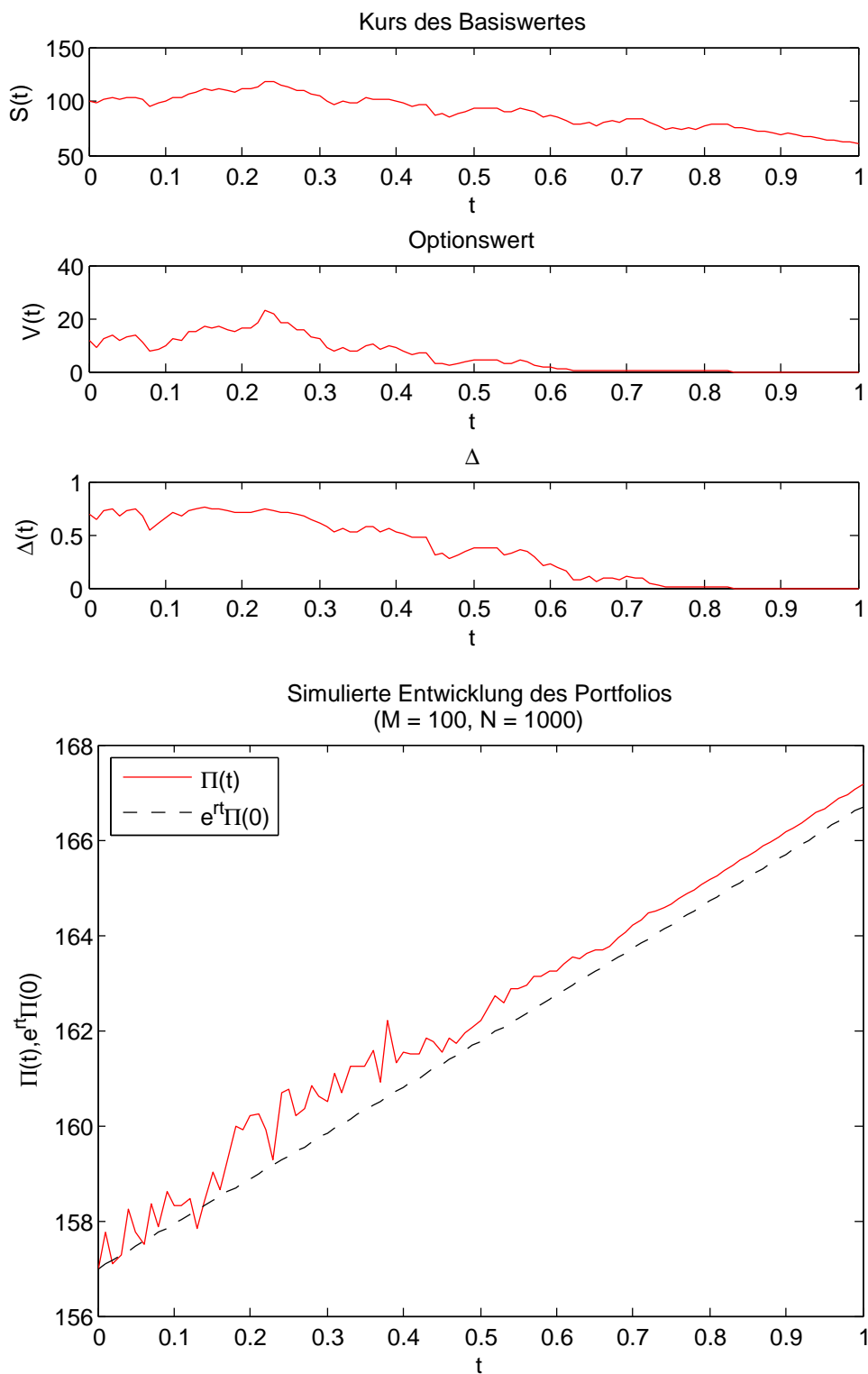


Abbildung 5.9: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung von Plain Monte Carlo mit $M = 100$ und $N = 1000$

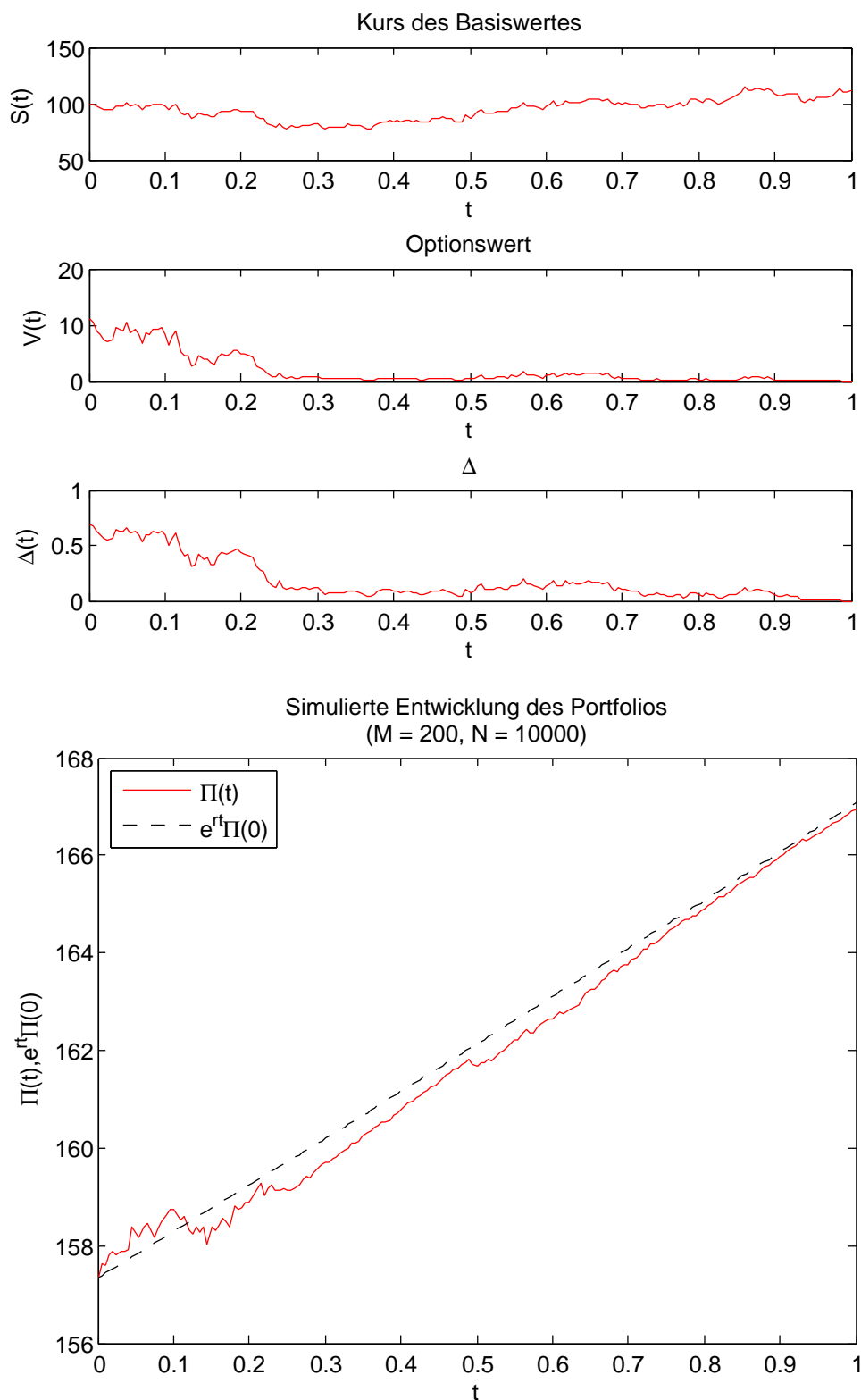


Abbildung 5.10: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung von Plain Monte Carlo mit $M = 200$ und $N = 10000$

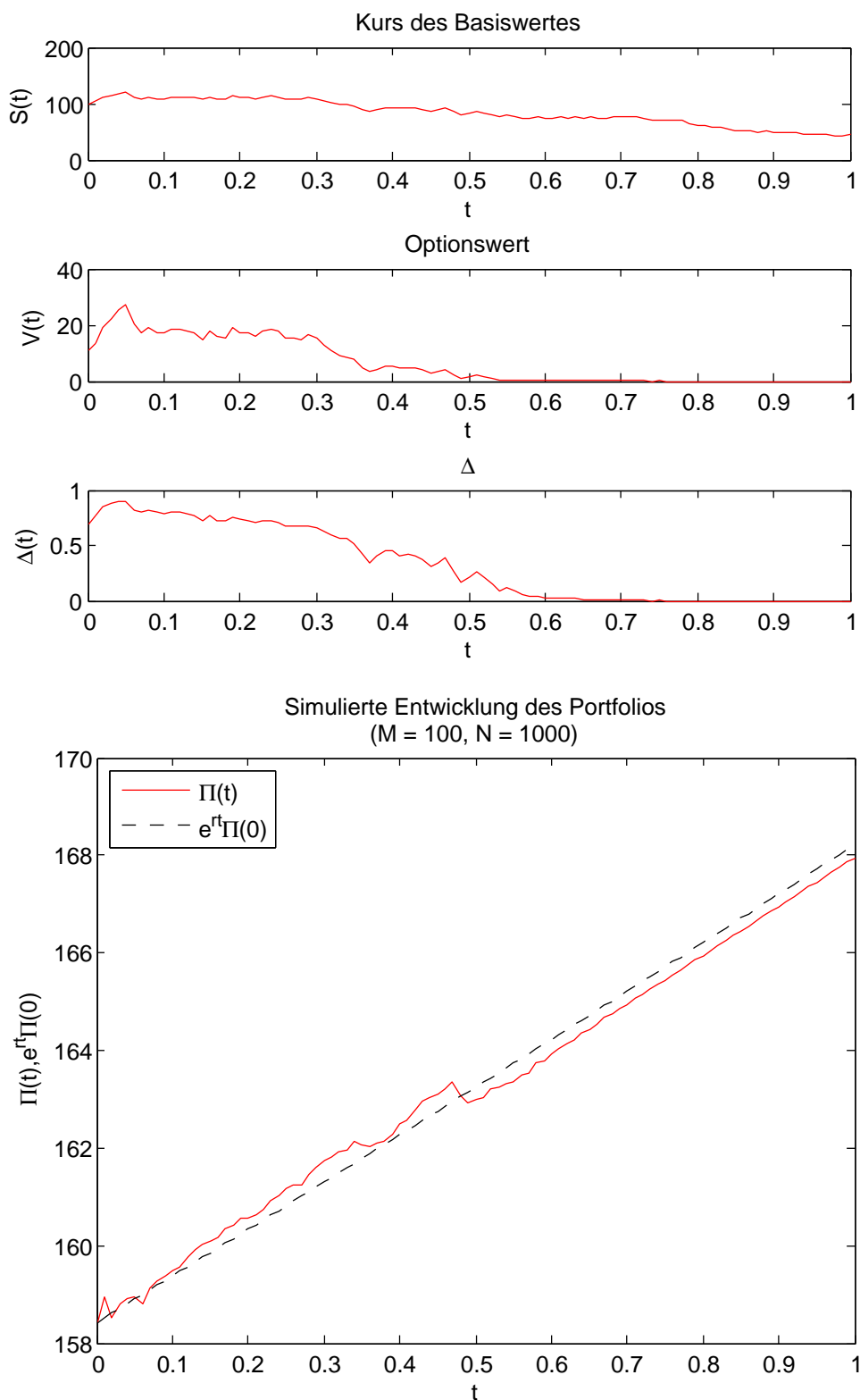


Abbildung 5.11: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate mit $M = 100$ und $N = 1000$

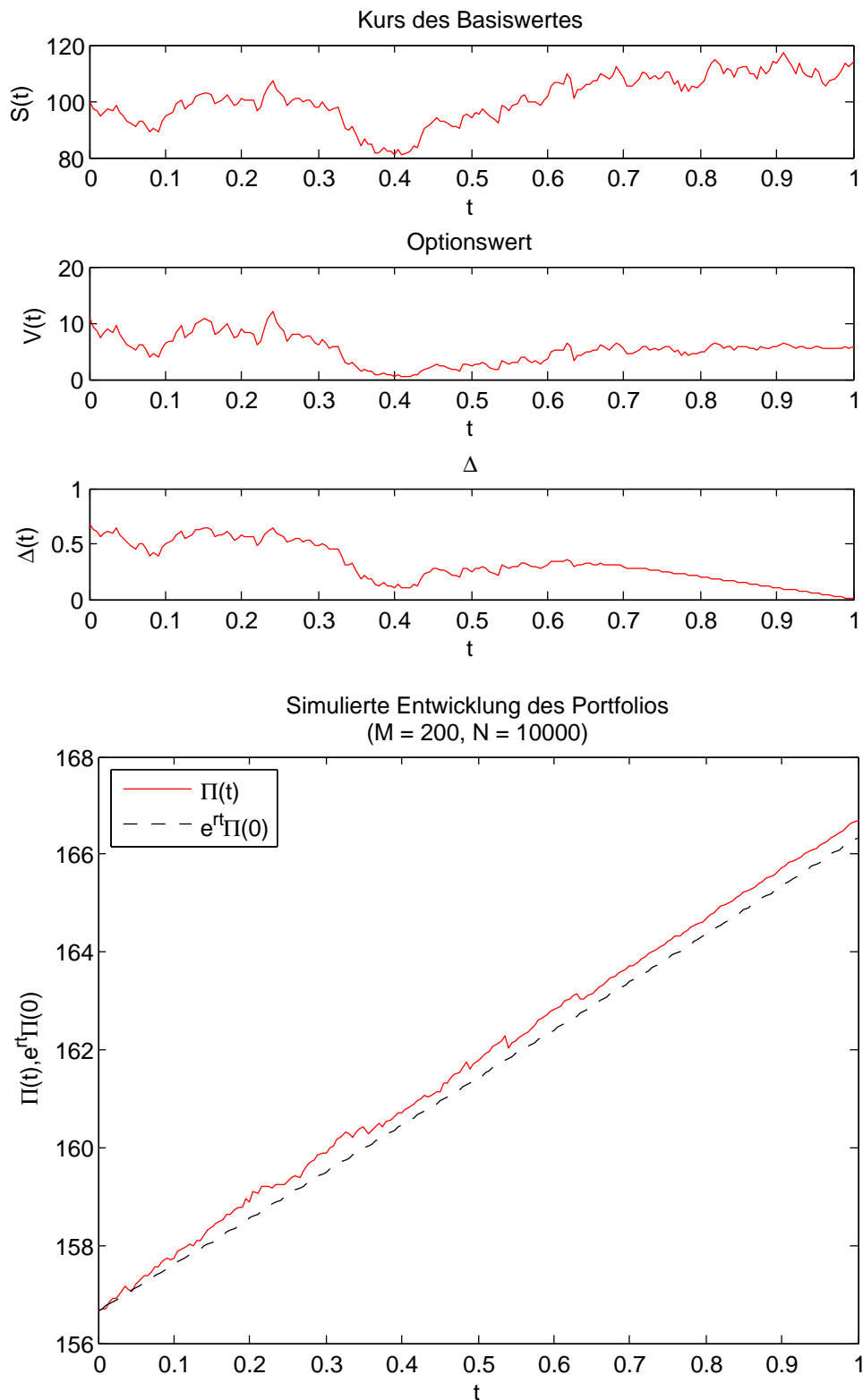


Abbildung 5.12: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der Summe der Kurswerte als Control Variate mit $M = 200$ und $N = 10000$

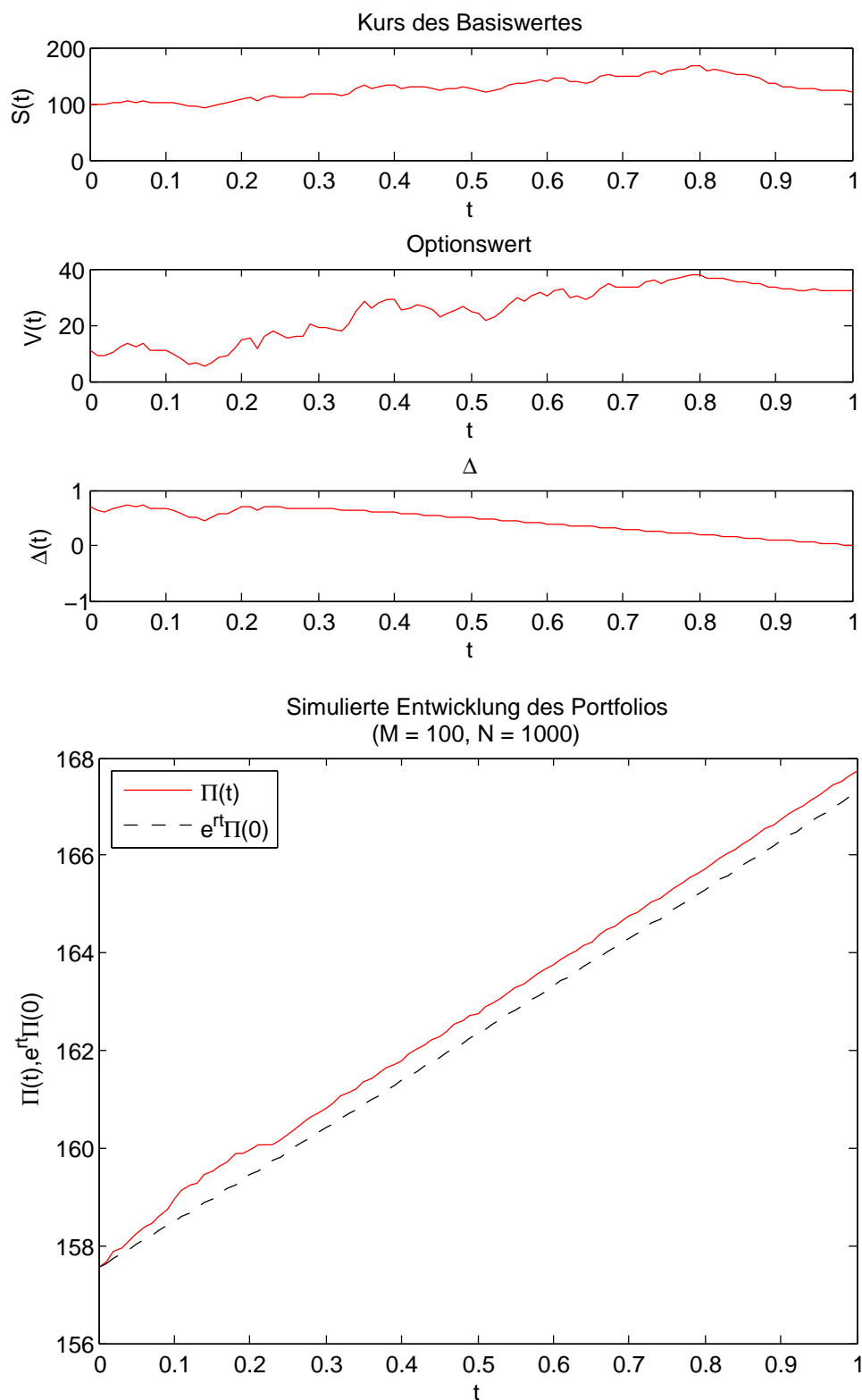


Abbildung 5.13: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate mit $M = 100$ und $N = 1000$

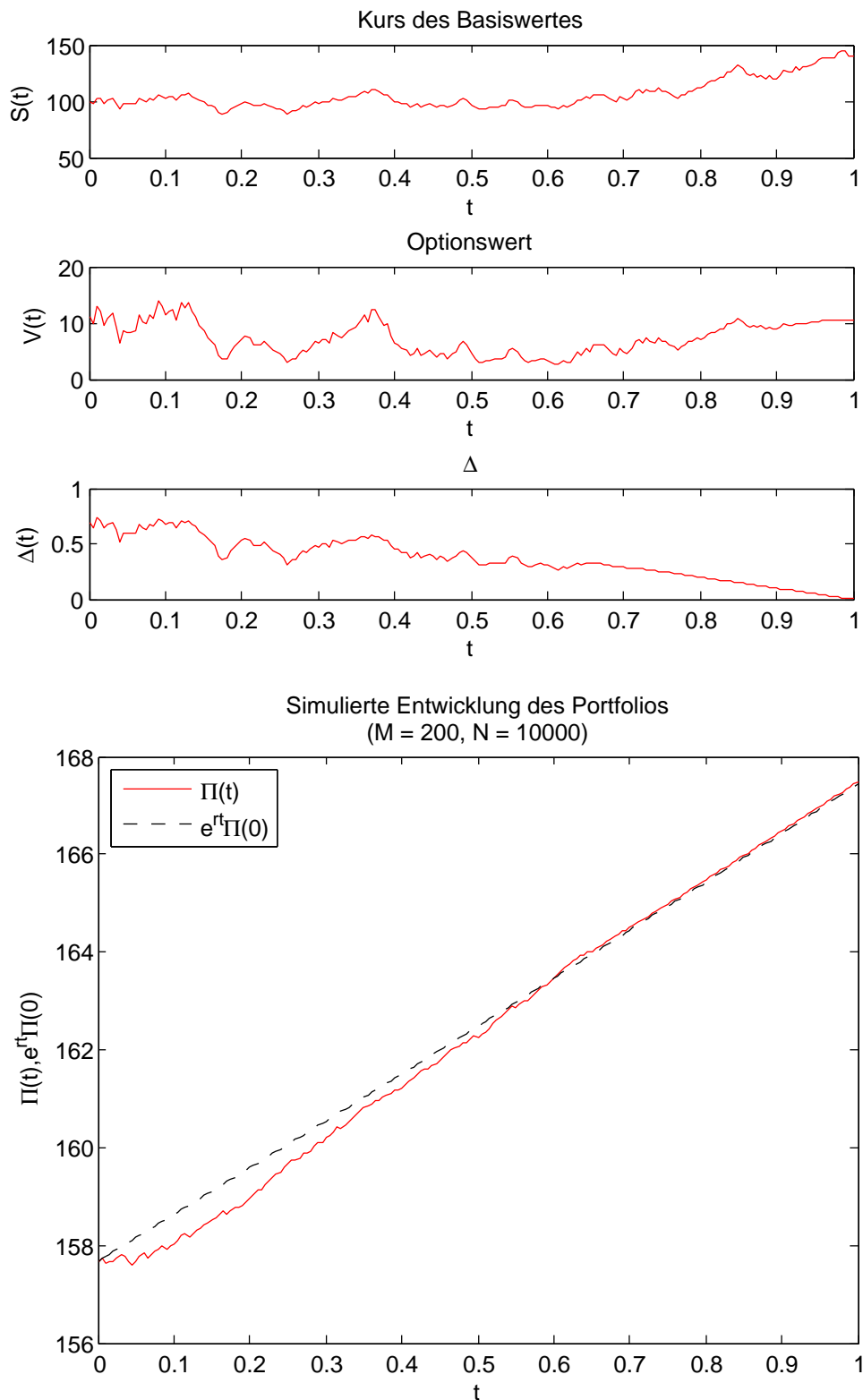


Abbildung 5.14: Entwicklung des Portfolios und der Parameter bei Verwendung der geometrischen Option als Control Variate mit $M = 200$ und $N = 10000$

Verfahren	$\bar{\epsilon}$
Standard Monte Carlo	0.53%
Control Variates (Summe der Kurswerte) für V	0.46%
Control Variates (Summe der Kurswerte) für V und Δ	0.45%
Control Variates (geom. Option) für V	0.44%
Control Variates (geom. Option) für V und Δ	0.40%*

Tabelle 5.6: Durchschnittliche relative Quadratmittelabweichung der Approximationsverfahren bei $n = 10000$ Portfolio-Simulationen

relative Quadratmittelabweichung der verschiedenen Methoden bei $n = 10000$ Portfolio-Simulationen ist in Tabelle 5.6 dargestellt.

Es zeigt sich, dass ein Einsatz der Methoden zur Varianzreduktion auch beim Hedging sinnvoll ist. Wie bei der Approximation des Optionswertes führt auch hier die Verwendung von Control Variates zu den besseren Ergebnissen. Im Vergleich zur Standard Monte Carlo Methode lässt sich eine Verbesserung der durchschnittlichen relativen Abweichung von über 15% erzielen.

Zu beachten bei den angegebenen durchschnittlichen relativen Abweichungen aus Tabelle 5.6 ist, dass bei Verwendung der geometrischen asiatischen Option als Control Variate für V und Δ (in der Tabelle durch * gekennzeichnet) selbst bei $n = 10000$ simulierten Portfolios (die Simulation von 10000 Portfolios benötigt auf dem verwendeten System bei diesem Verfahren über 2.5 Stunden) noch Schwankungen auftreten. Die Ursache dafür ist, dass bei diesem Verfahren in sehr seltenen Fällen eine sehr hohe Portfolio-Abweichung auftritt, die sich aufgrund der Quadratmittelbildung stark auf die durchschnittliche relative Abweichung auswirkt. Dies führt dazu, dass man bei Berechnung der durchschnittlichen Abweichung für dieses Verfahren auch Werte im einstelligen Prozentbereich erhalten kann.

Abschließend betrachten wir in Tabelle 5.7 die benötigte Rechenzeit der fünf Verfahren für verschiedene Werte von M und N . Dafür werden mit Hilfe der verschiedenen Verfahren Portfolios berechnet und für $M \in \{100, 200\}$ und $N \in \{1000, 10000\}$ die dafür benötigte Zeit gemessen.

Hier stellt man fest, dass sich die Rechenzeit bei Verwendung der Summe der Kurswerte des Basiswertes als Control Variate nur wenig erhöht. Verwendet man hingegen die geometrische asiatische Option als Control Variate, so führt dies zu mehr als einer Verdopplung der Rechenzeit. Dies liegt daran, dass die meisten Daten, die zur Berechnung der Summe der Kurswerte benötigt werden, ohnehin zur Verfügung stehen und auch leicht ausgewertet werden können. Im Gegensatz dazu wird die Berechnung des Wertes der geometrischen asiatischen Option für $t > 0$ nochmals aufwendiger, da anstelle von S_0 in (5.22a) nun \tilde{S} nach (5.60) verwendet wird.

Verfahren	M	N	Rechenzeit (Sek.)
Standard Monte Carlo	100	1000	0.3013
Standard Monte Carlo	100	10000	4.5718
Standard Monte Carlo	200	1000	1.7764
Standard Monte Carlo	200	10000	17.9858
CV (Summe der Kurswerte) für V	100	1000	0.3438
CV (Summe der Kurswerte) für V	100	10000	4.5528
CV (Summe der Kurswerte) für V	200	1000	1.8144
CV (Summe der Kurswerte) für V	200	10000	18.1155
CV (Summe der Kurswerte) für V und Δ	100	1000	0.3639
CV (Summe der Kurswerte) für V und Δ	100	10000	4.6886
CV (Summe der Kurswerte) für V und Δ	200	1000	1.8272
CV (Summe der Kurswerte) für V und Δ	200	10000	18.5583
CV (geom. Option) für V	100	1000	0.6659
CV (geom. Option) für V	100	10000	8.3019
CV (geom. Option) für V	200	1000	3.3016
CV (geom. Option) für V	200	10000	33.1425
CV (geom. Option) für V und Δ	100	1000	0.9515
CV (geom. Option) für V und Δ	100	10000	11.7656
CV (geom. Option) für V und Δ	200	1000	4.7638
CV (geom. Option) für V und Δ	200	10000	47.2153

Tabelle 5.7: Rechenzeiten der Approximationsverfahren für verschiedene Anzahlen M von Zeitschritten und N von Monte Carlo Simulationen

Kapitel 6

Zusammenfassung

Es hat sich gezeigt, dass die Monte Carlo Simulation ein mächtiges Instrument in der finanzmathematischen Praxis darstellt. Mit ihrer Hilfe können sowohl Optionswerte als auch die benötigten Parameter zur Durchführung des Delta-Hedgings berechnet werden. Insbesondere wenn eine analytische Lösung nicht möglich ist, da komplexe Kursmodelle (wie in Kapitel 4 das Mean Reverting Volatility Modell) betrachtet werden oder Finanzderivate mit einer komplizierteren Auszahlungsstruktur (wie bspw. die arithmetische asiatische Option) gehandelt werden, lässt sich die Monte Carlo Methode aufgrund ihrer Flexibilität anwenden, um den Optionswert und den Hedging-Parameter Delta numerisch zu approximieren.

Die Analyse des Mean Reverting Volatility Modells hat ergeben, dass sich durch die Berücksichtigung der zusätzlichen Informationen mittels der Monte Carlo Methode durchschnittlich eine Verbesserung in der Wertentwicklung des Portfolios gegenüber der analytischen Lösung nach der Black-Scholes Gleichung eingestellt hat.

Weiterhin wurde gezeigt, dass der Einsatz der Techniken zur Varianzreduktion, also die Verwendung antithetischer Zufallsvariablen und vor allem der Control Variates Ansatz, signifikante Verbesserungen hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Monte Carlo Methode ermöglicht. Sowohl bei der Approximation von Optionswert und Delta von Plain Vanilla Optionen als auch von asiatischen Optionen führten diese Verfahren zu einer bedeutenden Steigerung der Genauigkeit. Es haben sich aber auch die Grenzen der Monte Carlo Methode gezeigt. Aufgrund des quadratischen Zusammenhangs von Genauigkeit und Aufwand, ist es im Allgemeinen nicht möglich, eine beliebig genaue Approximation zu erreichen.

Zusammenfassend stellt man fest, dass die Monte Carlo Methode aufgrund ihrer Anpassungsfähigkeit ein vielseitiges Werkzeug ist, das sich auf viele Fragestellungen der Options- und Portfoliobewertung verallgemeinern lässt und insbesondere dann ein wertvolles Mittel darstellt, wenn keine analytische Lösung zur Verfügung steht.

Anhang A

Inhalt der beiliegenden CD

Auf der beiliegenden CD sind alle Programme, die in diese Arbeit eingegangen sind, enthalten. Dies sind zum einen die Implementierungen in MATLAB[®] der in dieser Arbeit diskutierten Verfahren und zum anderen die Programme, mit denen die dargestellten Graphiken erzeugt wurden. Weiterhin liegt auch eine digitale Version der Diplomarbeit als PDF-Dokument vor.

Der Inhalt der CD gliedert sich in zwei Verzeichnisse:

Diplomarbeit

Die vorliegende Ausarbeitung in digitaler Form als PDF-Dokument.

Programme

Dieses Verzeichnis enthält entsprechend der Gliederung der Arbeit die Unterverzeichnisse *Kapitel 2*, *Kapitel 3*, *Kapitel 4* und *Kapitel 5*. In den Unterverzeichnissen befinden sich die MATLAB[®]-Codes der Programme, die zu den einzelnen Kapiteln gehören. Falls zutreffend sind die Dateinamen mit Präfixen versehen, um ihre Zugehörigkeit zu verdeutlichen. Dabei werden folgende Unterscheidungen verwendet:

- Präfix für das zugrunde liegende Verfahren
 - BS für Berechnungen auf Basis des Black-Scholes Modells
 - MC zeigt an, dass die Werte durch Monte Carlo Simulation ermittelt werden
- Präfix für den betrachteten Optionstyp
 - EU für europäische Optionen
 - AS für asiatische Optionen
- Präfix zur Unterscheidung des zugrunde liegenden Kursmodells

- GBB für die geometrische Brownsche Bewegung
- MRV für Berechnungen im Mean Reverting Volatility Modell

Die Programme sind im Allgemeinen als Hauptprogramme implementiert, d.h. sie enthalten alle notwendigen Parameter und können direkt ausgeführt werden. Eine Änderung der Parameter kann direkt im Programmkopf vorgenommen werden. Ausnahmen sind Hilfsroutinen, die von diesen Programmen aufgerufen werden. Diese sind als Funktionen implementiert und benötigen eine Parameterübergabe. Die Beschreibung der notwendigen Eingabeparameter und der Rückgabewerte ist in jeder Funktion als Kommentar vor dem Code enthalten.

Im Folgenden ist eine Liste aller Programme und ihrer Beschreibung aufgeführt.

Dateiname	Beschreibung
<i>Verzeichnis: Kapitel 2</i>	
EU_PutCallPayoff.m	Graphische Darstellung der Auszahlungsfunktionen europäischer Optionen (Abb. 2.1)
DAX_chart.m DAXKursindex.txt DAXPerformanceindex.txt	Entwicklung des DAX Kursindex und des DAX Performanceindex (Abb. 2.2), Daten werden aus *.txt-Dateien eingelesen
StdNormalverteilung.m	Graphische Darstellung der Verteilungsfunktion und Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung (Abb. 2.3)
WienerProzess.m	Realisierung eines Wiener Prozesses (Abb. 2.4)
GeomBrownBew.m	Visualisierung eines Pfades der geometrischen Brownschen Bewegung (Abb. 2.5)
KompGeomBrownBew.m	Graphische Darstellung der Komponenten der geometrischen Brownschen Bewegung (Abb. 2.6)
BS_EU_OptValCallPut.t.m	Optionswert in Abhängigkeit von $S(t)$ nach Black-Scholes für verschiedene t (Abb. 2.7)
BS_EU_VDeltaCPSurface.m	Dreidimensionale Darstellung des Optionswertes und des Delta europäischer Optionen mit aufgelegtem beispielhaftem Verlauf (Abb. 2.8 und 2.9)
BS_EU_SimPort.m	Simulation eines Portfolios nach Black-Scholes (Abb. 2.10)
BS_VDelta.m	Funktion zur Berechnung des Optionswertes und des Delta nach Black-Scholes

Verzeichnis: Kapitel 3

MC_EU_OptVal.m	Optionsbewertung mit Monte Carlo (Abb. 3.1)
----------------	---

Dateiname	Beschreibung
GBBAntithetPaths.m	Visualisierung des antithetischen Pfades der geometrischen Brownschen Bewegung (Abb. 3.2)
MC_CmpCIDelta_StdAV.m	Vergleich der Konfidenzintervalle bei Approximation des Delta nach Standard Monte Carlo und mit Verwendung antithetischer Zufallsvariablen (Tab. 3.1 und 3.2)
MC_CmpCIDelta_StdCV.m	Vergleich der Konfidenzintervalle bei Approximation des Delta nach Standard Monte Carlo und Control Variates Ansatz (Tab. 3.3)
MC_CmpCIDelta_StdCV_G.m	Graphischer Vergleich der Konfidenzintervalle bei Approximation des Delta nach Standard Monte Carlo und Control Variates Ansatz (Abb. 3.3)
MC_EU_SimPort.m	Simulation eines Portfolios nach Monte Carlo (Abb. 3.4 und 3.5)
MC_CIDelta_Std.m	Funktionen zur Berechnung des Delta und der Konfidenzintervalle nach Standard Monte Carlo, mit antithetischen Zufallsvariablen und Control Variates Ansatz
MC_CIDelta_AV.m	
MC_CIDelta_CV.m	
BS_VDelta.m	Funktionen zur Berechnung von Optionswert und Delta nach Black-Scholes und Monte Carlo
MC_VDelta.m	

Verzeichnis: **Kapitel 4**

MRV_SigmaZeta_Graph.m	Entwicklung von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ (Abb. 4.1 und 4.2)
MRV_SigmaZetaM_Graph.m	Durchschnittliche Entwicklung von $\sigma(t)$ und $\zeta(t)$ (Abb. 4.3 und 4.4)
MRV_SimPort.m	Simulation eines Portfolios im Mean Reverting Volatility Modell (Abb. 4.5, 4.6, 4.7 und 4.8)
MRV_PortfolioError.m	Portfolioabweichung im Mean Reverting Volatility Modell nach Black-Scholes und Monte Carlo (Tab. 4.2)
MRV_CalcSigmaZeta.m	Funktion zur Berechnung von σ und ζ
BS_GBB_VDelta.m	Funktion zur Berechnung von Optionswert und Delta auf Basis der geometrischen Brownschen Bewegung nach Black-Scholes
MC_MRV_VDelta.m	Funktion zur Berechnung von Optionswert und Delta im Mean Reverting Volatility Modell nach Monte Carlo
MRV_CalcPortError.m	Funktion zur Berechnung der Portfolioabweichung einer Simulation

Dateiname	Beschreibung
MC_MRV_VDelta_Milstein.m	Funktion zur Berechnung von Optionswert und Delta im Mean Reverting Volatility Modell mittels Milstein-Verfahren (vgl. Fußnote 18)
<i>Verzeichnis: Kapitel 5</i>	
BS_AS_VGeomCP.m	Berechnung des Wertes einer geometrischen asiatischen Option nach Black-Scholes für verschiedene t (Abb. 5.1)
BS_AS_VGeomCP_CmpEU.m	Vergleich des Wertes einer geometrischen asiatischen Option und einer europäischen Option nach Black-Scholes (Abb. 5.2)
BS_AS_VGeomCPSurface.m	Dreidimensionale Darstellung des Wertes einer geometrischen asiatischen Option nach Black-Scholes mit aufgelegtem beispielhaftem Verlauf (Abb. 5.3)
MC_AS_VArithCP_CmpVGeo.m	Berechnung des Wertes einer arithmetischen asiatischen Option nach Monte Carlo für verschiedene t und Vergleich mit geometrischem Optionswert (Abb. 5.4 und 5.5)
MC_AS_VCI_Arith_CmpAV.m MC_AS_VCI_Arith_CmpCVS.m MC_AS_VCI_Arith_CmpCVG.m	Vergleich der Approximation des Optionswertes und der Konfidenzintervalle der Standard Monte Carlo Methode mit Methode antithetischer Zufallsvariablen, Control Variates (Summe der Kurswerte) und Control Variates (geometrische asiatische Option) (Abb. 5.6, 5.7 und 5.8)
MC_AS_CmpVR.m	Vergleich der Methoden zur Varianzreduktion (Tab. 5.2, 5.3, 5.4 und 5.5)
MC_AS_SimPort.m	Simulation eines Portfolios basierend auf einer arithmetischen asiatischen Option nach Monte Carlo (Abb. 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 und 5.14)
BS_AS_VGeom.m	Funktion zur Berechnung des Wertes einer geometrischen asiatischen Option nach Black-Scholes (diskrete und kontinuierliche Formel)
MC_AS_VArith.m	Funktion zur Berechnung des Wertes einer arithmetischen asiatischen Option nach Monte Carlo
MC_AS_VCI_Arith_Plain.m MC_AS_VCI_Arith_AV.m MC_AS_VCI_Arith_CVS.m MC_AS_VCI_Arith_CVGeom.m	Funktionen zur Berechnung des Optionswertes und Konfidenzintervalls einer arithmetischen asiatischen Option nach Plain Monte Carlo und den drei Methoden zur Varianzreduktion

Dateiname	Beschreibung
BS_VDelta.m	Funktion zur Berechnung von Optionswert und Delta einer europäischen Option nach Black-Scholes
MC_AS_VDelta.m	Funktion zur Berechnung von Optionswert und Delta einer arithmetischen asiatischen Option (Wahl der Methode durch Eingabeparameter: Plain Monte Carlo, Summe der Kurswerte als Control Variate für V bzw. V und Δ , geometrische asiatische Option als Control Variate für V bzw. V und Δ)
AS_CalcPortError.m	Funktion zur Berechnung der Portfolioabweichung
AS_PortfolioError.m	Funktion zum Vergleich der Portfolioabweichungen der verschiedenen Methoden, Ergebnisse werden ausgegeben und zusätzlich (wegen langer Laufzeit) in einer Textdatei im Unterverzeichnis <code>data</code> gespeichert (Tab. 5.6)

Literaturverzeichnis

- [1] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, 1992.
- [2] G. Bol. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Oldenbourg Verlag, 1998.
- [3] P. Brandimarte. *Numerical Methods in Finance and Economics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [4] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. II*. John Wiley & Sons, 1971.
- [5] P. Glassermann. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, 2004.
- [6] M. Grigoriu. *Stochastic Calculus*. Birkhäuser, 2002.
- [7] L. Grüne. *Numerische Methoden der Finanzmathematik*. Vorlesungsskript, 2. Auflage, 2011.
- [8] M. Günther & A. Jüngel. *Finanzderivate mit MATLAB®*. Vieweg+Teubner Verlag, 2010.
- [9] D. J. Higham. *An Introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge University Press, 2008.
- [10] J. C. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, 2010.
- [11] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer-Verlag, 2002.
- [12] Y.K. Kwok. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag, 2008.
- [13] P. L'Ecuyer & E. Buist. *On the Interaction Between Stratification and Control Variates*. Journal of Simulation, 2008, 2, 29-40.
- [14] P. Medvegyev. *Stochastic Integration Theory*. Oxford University Press, 2007.

-
- [15] K. Mosler & F. Schmid. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*. Springer-Verlag, 2006.
- [16] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 2003.
- [17] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, 1990.
- [18] S. Ross. *A First Course in Probability*. Macmillan Publishing Company, 1988.
- [19] S. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press Elsevier, 2007.
- [20] R. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer-Verlag, 2004.
- [21] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer, 2004.
- [22] S. Wilkens. *Optionsbewertung und Risikomanagement unter gemischten Verteilungen*. Deutscher Universitäts-Verlag, 2003.
- [23] H. Zhang. *Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods*. Uppsala University, 2009.

ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth, den 30. Oktober 2011

Thomas Höllbacher