



UNIVERSITÄT  
BAYREUTH

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik des Mathematischen Instituts  
an der Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik

---

Diplomarbeit  
Stabilitätsuntersuchung numerischer  
Einschrittverfahren mit Hilfe von  
Ljapunov-Funktionen

---

von  
Mirjam Schober

eingereicht am 30. November 2012  
Aufgabenstellung und Betreuung: Prof. Dr. Lars Grüne



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlichst bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Lars Grüne für die interessante und anspruchsvolle Themenstellung und die hervorragende Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit bedanken. Ich bin ihm sehr dankbar dafür, dass er jederzeit für mich erreichbar war und meine Fragen stets geduldig und ausführlich beantwortete. Seine Vorlesungen in den Bereichen Numerik und speziell Numerik für Differentialgleichungen und die lehrreichen Seminare haben mein Interesse für dieses Gebiet geweckt und mir die Einarbeitung in dieses Thema sehr erleichtert.

Der Dank gilt weiterhin meiner Familie und meinen Freunden für ihre Geduld und ihr offenes Ohr in schwierigen Zeiten und dafür, dass sie diese Arbeit Korrektur gelesen haben und mir immer wieder neue Impulse gegeben und Verbesserungsmöglichkeiten genannt haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>5</b>
2.1	Definition Gewöhnliche Differentialgleichung . . . . .	5
2.2	Anfangswertprobleme . . . . .	8
2.3	Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	9
2.3.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	9
2.3.2	Satz zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Numerische Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>19</b>
3.1	Diskrete Approximation und Einschrittverfahren . . . . .	20
3.2	Lipschitz-Bedingung, Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren . . . . .	24
3.3	Implizite Verfahren . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>35</b>
4.1	Gleichgewicht und Stabilitätsbegriff . . . . .	35
4.2	Stabilitätstheorie linearer Differentialgleichungen . . . . .	39
4.3	Stabilitätstheorie nichtlinearer Differentialgleichungen . . . . .	42
4.3.1	Vergleichsfunktionen und Ljapunov-Funktionen . . . . .	43
4.3.2	Stabilitätsanalyse mittels Ljapunov-Funktionen . . . . .	46
4.3.3	Bestimmung von Ljapunov-Funktionen . . . . .	50
4.4	Ein Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell . . . . .	54

<b>5</b>	<b>Stabilitätsanalyse numerischer Verfahren mit Hilfe von Ljapunov-Funktionen</b>	<b>59</b>
5.1	Stabilitätsbegriffe für diskrete Systeme . . . . .	60
5.2	Vererbung von Stabilität bei linearen Differentialgleichungen . . . . .	62
5.3	Vererbung von Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen I . . . . .	67
5.4	Ein Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell mit beschränkten Ressourcen . . . . .	72
5.5	Vererbung von Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen II . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Grundlegende Informationen</b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>Matlab-Files</b>	<b>93</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>103</b>
	<b>Literatur</b>	<b>105</b>

# 1 Einleitung

Die Theorie der Differentialgleichungen verfolgt verschiedene Ziele. Auf der einen Seite versucht man, die exakte analytische Lösung einer Differentialgleichung zu finden. Allerdings ist diese Methode in den wenigsten Fällen möglich. Viel mehr interessieren auf der anderen Seite spezielle Eigenschaften der Lösung, die in der qualitativen Theorie untersucht werden, wie die Frage, ob das System überhaupt lösbar ist, ob das System steuerbar ist und ähnliches. Besonders hervorzuheben ist die Stabilitätsanalyse, die bei der Langzeitbetrachtung einer Differentialgleichung wichtig ist. Hier spielt vor allem die Theorie von Alexandr M. Ljapunov, russischer Mathematiker, Physiker und Maschinenbauingenieur, eine entscheidende Rolle. Ljapunov entwickelte Methoden, um anhand des Vektorfelds einer gegebenen Differentialgleichung Aussagen über das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow \infty$  in Abhängigkeit von den Anfangswerten zu machen. Die direkte Methode, die im Folgenden näher betrachtet werden soll, ist dabei von großer Bedeutung. Mit ihrer Hilfe kann man wichtige Eigenschaften der Lösung erkennen, ohne diese explizit berechnet zu haben.

Um die Frage nach der Bedeutung des Begriffs „Stabilität“ zu klären, betrachtet man einen beliebigen Körper mit Bewegungsmöglichkeit. Bewegt er sich nach kleiner Änderung seiner Ursprungsposition anschließend von selbst wieder in diese zurück, so bezeichnet man dieses System als asymptotisch stabil, bleibt er an neuer Stelle liegen als stabil. Die Ausgangsposition heißt instabil, sofern sich der Körper immer weiter weg bewegt. Ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung stabil, so verursachen kleine Fehler in den Eingabedaten oder den Parametern auf lange Sicht abschätzbare Fehler in den Ausgabewerten. Zum Beispiel ist es wünschenswert, die Temperatur eines Systems möglichst konstant zu halten. Dafür benötigt man ein System, das kleine Abweichungen wieder ausgleicht. Es gilt also die Fragen

zu klären, inwiefern sich die Lösung eines Problems ändert, wenn man die Anfangswerte ändert bzw. wie sich eine Lösung über einen in positiver Zeitrichtung unbeschränkten Teil des Existenzintervalls verhält.

Viele Differentialgleichungen können nicht mehr mit analytischen Methoden gelöst werden. Daher sind numerische Lösungsmethoden von fundamentaler Bedeutung. Ziel ist es, Algorithmen zu entwickeln, die qualitativ korrekte Informationen über das Differentialgleichungssystem liefern, ohne unangemessen viel Rechenzeit zu benötigen. Eine entscheidende Frage lautet hierbei, welche Bedingungen das numerische Verfahren erfüllen muss, damit aus der Stabilität der zugrundeliegenden Gleichung auch die Stabilität der Approximation folgt, und ob solche Verfahren überhaupt existieren.

In der vorliegenden Arbeit soll diese Frage diskutiert werden. Hierzu werden im zweiten Kapitel Grundlagen zur Theorie der Differentialgleichungen aufgeführt. Der Begriff der gewöhnlichen Differentialgleichung und speziell der der autonomen Differentialgleichung wird definiert. Außerdem wird geklärt, wann eine Differentialgleichung eine Lösung besitzt und ob diese eindeutig gegeben ist.

Im anschließenden Kapitel wird näher auf die numerische Lösung solcher Gleichungen eingegangen. Es werden Konstruktionsprinzipien und die Ideen dahinter erläutert sowie zwei für diese Arbeit relevante Verfahren genauer vorgestellt: das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel. Insbesondere werden auch Kriterien aufgezeigt, die eine qualitative Einstufung eines Verfahrens erlauben. Eine numerische Approximation wird beispielsweise als gut eingeschätzt, wenn der Fehler des Verfahrens in einem gewissen Rahmen bleibt und für kleiner werdende Schrittweiten kleiner wird.

Eine weitere entscheidende Eigenschaft ist die oben schon genannte Stabilität. Um dieses Konzept genauer betrachten zu können, werden im Kapitel 4 die lokale und globale asymptotische Stabilität eingeführt. Die Betrachtung von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen erfolgt getrennt. Im linearen Fall wird das Eigenwertkriterium für den Nachweis der Stabilität eines Gleichgewichts erläutert. Für die nichtlinearen Differentialgleichungen wird die direkte Methode von Ljapunov vorgestellt sowie die Begriffe Vergleichsfunktion und



Ljapunov-Funktion definiert. Kurz wird auf eine mögliche Herangehensweise an die Konstruktion einer Ljapunov-Funktion eingegangen. Abschließend behandelt dieses Kapitel das von A. Lotka und V. Volterra entwickelte Räuber-Beute-Modell, auch Lotka-Volterra-Modell genannt, anhand dessen die Stabilitätsuntersuchung beispielsweise durchgeführt wird.

Dieses Beispiel wird in Kapitel 5 wieder aufgenommen, um analog zum vorherigen Kapitel nun die numerische Approximation zu analysieren. Weiterhin geht dieses Kapitel auf die Stabilität, unter anderem die A-Stabilität, von numerischen Verfahren und die Definition von Ljapunov-Funktionen für numerische Verfahren ein. Es zeigt auf, welche Eigenschaften die Differentialgleichung und die numerische Methode vorweisen müssen, damit die asymptotische Stabilität des Gleichgewichts der Differentialgleichung auf den Fixpunkt des numerischen Verfahrens vererbt wird. Hierfür werden wieder das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel betrachtet.

Schließlich wird im letzten Kapitel eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick in die aktuelle Forschung gegeben. Im Anhang wird zur Vervollständigung der Code der wichtigsten Programme zum Erstellen der Graphiken abgedruckt. Außerdem enthält er neben Hintergrundinformationen für Definitionen, die in der Arbeit verwendet wurden, eine Inhaltsangabe zum Inhalt der beiliegende CD-Rom.



## 2 Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dieses Kapitel behandelt den Begriff der *Gewöhnlichen Differentialgleichung*. Eine gewöhnliche Differentialgleichung verwendet man in der Mathematik zur Beschreibung von zeitlich veränderlichen Phänomenen. Vor allem in der Biologie, aber auch in der Mechanik, lassen sich einige einfache Anwendungen für solche Gleichungen finden. Man betrachte zum Beispiel eine Pendeluhr. Die Schwingung des Pendels lässt sich durch eine gewöhnliche Differentialgleichung modellieren, die in Beispiel 2.5 formuliert wird.

Außerdem wird erklärt, was man unter einem *Anfangswertproblem* versteht. Dieses Problem beinhaltet eine weitere Bedingung für die Lösung der Differentialgleichung, die durch einen Anfangswert und eine zugehörige Anfangszeit gegeben ist. Ein wichtiger Satz, der am Ende des Kapitels genannt und bewiesen wird, sagt schließlich aus, dass für ein gegebenes Anfangswertproblem eine Lösung existiert und dass diese Lösung eindeutig ist.

Aufbau und Inhalt orientieren sich an [7, Kap.1]. Ergänzende Informationen finden sich in [10].

### 2.1 Definition Gewöhnliche Differentialgleichung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung beschreibt ein mathematisches Modell eines zeitlich veränderlichen Systems. Sie stellt eine Gleichung dar, welche eine Funktion anhand ihrer Werte und ihrer Ableitung nach genau einer Variablen charakterisiert. In der mathematischen Formulierung sieht das wie folgt aus.

**Definition 2.1** Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* (DGL) im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

wobei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion ist, die *Vektorfeld* genannt wird. Der Definitionsbereich  $D$  ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Eine *Lösung* von (2.1) ist eine stetig differenzierbare Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die die obige Gleichung erfüllt. Die Differentialgleichung heißt dann *n-dimensional*.  $\square$

Oft spricht man von der Variablen  $t$  als *Zeit*, andere Interpretationen sind aber möglich. Die Lösung  $x(t)$  der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.1) bezeichnet man auch als (*Lösungs-*) *Trajektorie* oder *Lösungskurve*. Häufig stößt man auf den Begriff der Ordnung einer Differentialgleichung. Diese entspricht dem Grad der höchsten vorkommenden Ableitung.

Für die später folgende Stabilitätsanalyse werden ausschließlich *autonome Differentialgleichungen* betrachtet. Dabei handelt es sich um Differentialgleichungen, deren Vektorfeld  $f$  nicht von  $t$  abhängig ist. Die Lösung ist also unabhängig vom Startzeitpunkt. Sie werden durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.2)$$

definiert, wobei  $\dot{x}(t)$  die Kurzschreibweise für  $\frac{d}{dt}x(t)$  ist. Wenn von autonomen Differentialgleichungen die Rede ist, wird im Folgenden die verkürzte Notation wie in (2.2) verwendet.

**Beispiel 2.2** Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad (2.3)$$

wobei  $a \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist. Diese Gleichung modelliert beispielsweise das Wachstum einer Population  $x$ , welches zu jeder Zeit proportional zur Größe von  $x$  ist. Die Lösung dieser Gleichung wird durch eine Kurve  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben. Damit stellt  $x$  im Modell die Entwicklung der Populationsgröße in Abhängigkeit von der Zeit dar. Mit Hilfe von analytischen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen rechnet man nach, dass die

Lösung dieser Gleichung durch die Funktion

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

gegeben ist, wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Zahl ist, für die zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt, dass  $x(0) = x_0$  ist. Für  $a > 0$  wachsen alle Lösungen exponentiell, während sie für  $a < 0$  fallen, was leicht in Abbildung 2.1 zu erkennen ist. Diese wurde mit dem Matlab-File `bsp_gdgl.m` erzeugt. □

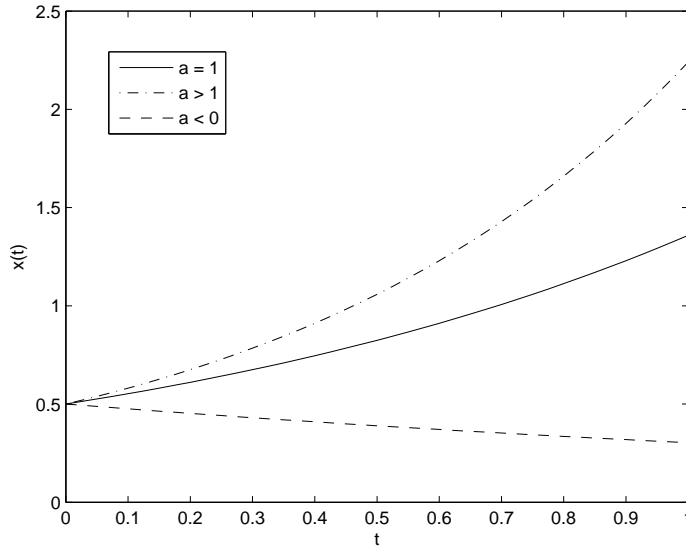


Abbildung 2.1: Lösungskurven von  $\dot{x}(t) = ax(t)$  mit  $x_0 = 0.5$

Im Beispiel 2.2 handelt es sich um eine Differentialgleichung, deren Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $d = 1$  linear ist, d.h. es gilt  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  und  $f(ax) = af(x)$  für  $x, y \in \mathbb{R}^d$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Man bezeichnet sie deshalb als *lineare Differentialgleichung*. Die Gleichung (2.2) mit linearem Vektorfeld kann man auch in der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{2.4}$$

schreiben, wobei  $A$  eine  $d \times d$ -Matrix mit reellen Koeffizienten<sup>1</sup> ist. Formal lautet die Lösung

<sup>1</sup>Die Herleitung der Matrix  $A$  ist nachzulesen in [11, S.10f]

von (2.4)

$$x(t) = x_0 e^{At} \quad (2.5)$$

mit  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und  $e^{At}$  die Matrix-Exponentialfunktion<sup>2</sup>.

Man nennt die Gleichung (2.4) *autonom* oder auch lineare Differentialgleichung *mit konstanten Koeffizienten*.

Für nicht autonome lineare DGL schreibt man die Gleichung (2.4) als  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , um die Abhängigkeit der Koeffizienten der Matrix  $A$  von der Zeit zu verdeutlichen.

Ist das Vektorfeld  $f$  nicht linear, so spricht man von einer *nichtlinearen Differentialgleichung*. Generell ist die Analyse nichtlinearer Gleichungen schwieriger als die linearer. Sie sind meist nicht analytisch lösbar, weswegen man numerische oder graphische Methoden zur approximativen Lösung verwendet. Einige numerische Methoden zur Lösung von linearen und nichtlinearen DGL werden im nächsten Kapitel behandelt.

## 2.2 Anfangswertprobleme

Es ist bekannt, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung im Allgemeinen unendlich viele Lösungen besitzt. Für eine eindeutige Lösung benötigt man eine zusätzliche Bedingung.

**Definition 2.3** Ein *Anfangswertproblem* für die gewöhnliche Differentialgleichung (2.1) besteht darin, für ein gegebenes  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Lösungsfunktion  $x(t)$  für (2.1) zu finden, wobei die Gleichung

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

erfüllt ist. □

Für die Lösung  $x(t)$ , die die Bedingungen (2.1) und (2.6) erfüllt, wird im Folgenden die Notation  $x(t; t_0, x_0)$  verwendet. Bedingung (2.6) wie auch das Paar  $(t_0, x_0)$  bezeichnet man auch als *Anfangsbedingung*,  $t_0$  nennt man auch *Anfangszeit*.

---

<sup>2</sup>Die genaue Definition findet man in [10, S.13]

**Bemerkung 2.4** Gegeben sei das Anfangswertproblem (2.1), (2.6) mit Anfangszeit  $t_0 \in I$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist, und Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Dann löst eine stetige Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  genau dann das Anfangswertproblem, wenn sie die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2.7)$$

für alle  $t \in I$  erfüllt.

Für den Beweis integriert man die Gleichung (2.1) bezüglich  $t$ . Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man für die linke Seite

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - x_0.$$

Durch Umstellen ergibt sich die Gleichung (2.7). Wenn  $x$  stetig ist und die Integralgleichung mit stetigem  $f$  erfüllt, dann folgt die stetige Differenzierbarkeit der rechten Seite von (2.7) und somit von  $x$ .  $\square$

## 2.3 Existenz- und Eindeigkeitssatz

### 2.3.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es kann stets angenommen werden, dass ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung vorliegt, denn jede beliebige Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung lässt sich in ein System erster Ordnung umformen. Betrachte dafür die allgemeinste Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

$y^{(k)}$  bezeichnet hier die  $k$ -te zeitliche Ableitung der gesuchten Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$  und  $n \geq 1$  ist die Ordnung der Gleichung. Unter dem Ausschluss von Differential-Algebraischen Gleichungen kann man nach [10, Kap. 3] davon ausgehen, dass sich die obige Gleichung explizit nach der höchsten auftretenden Ableitung  $y^{(n)}$  auflösen lässt. Somit erhält man

$$y^{(n)} = G(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

für eine geeignete Funktion  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^l$  mit Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^l)^n$ . Man führt den Vektor

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^l)^n \quad (2.8)$$

mit den Komponenten  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, d = nl$  ein. Dann gilt

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{l+1} \\ x_{l+2} \\ \vdots \\ x_{nl} \\ G(t, x) \end{bmatrix} =: f(t, x) . \quad (2.9)$$

Somit löst  $x$  genau dann die Gleichung (2.9), wenn  $y$  die Gleichung (2.8) erfüllt. Man kann aufgrund der Tatsache, dass sich jede Differentialgleichung höherer Ordnung in eine Differentialgleichung erster Ordnung transformieren lässt, stets annehmen, dass die zu betrachtende Differentialgleichung in der Form (2.1) vorliegt.

**Beispiel 2.5** Betrachte die Pendelgleichung aus [10, Kap. 1]

$$-gm \sin(\alpha) = m\ddot{\alpha} ,$$

die die Situation modelliert, in der eine Masse  $m$  an einem masselosen starren Stab der Länge  $l$  aufgehängt ist.

Mit  $\alpha$  sei hier der Winkel zwischen dem Pendel und der Vertikalen bezeichnet. Der Wert der Erdbeschleunigung sei durch  $g$  gegeben. Reibung wird nicht berücksichtigt. Es handelt sich bei dieser Gleichung um eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Man definiert einen Vektor  $x = (x_1, x_2)^\top := (\alpha, \dot{\alpha})^\top \in \mathbb{R}^2$ . Damit ist die Gleichung äquivalent zum System

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \sin(x_1) \end{bmatrix} ,$$

also einem System erster Ordnung. □



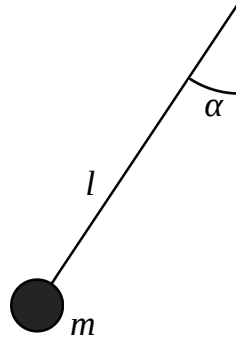


Abbildung 2.2: Das mathematische Pendel

**Beispiel 2.6** Ein weiteres Beispiel, ebenfalls für eine nichtlineare autonome Differentialgleichung, ist die van der Pol-Gleichung gegeben durch

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad k > 0 \text{ mit } x(0) = a, \quad \dot{x} = b.$$

Transformiert man sie in ein System erster Ordnung mit  $(x_1, x_2)^\top := (x, \dot{x})^\top$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{aligned}$$

mit  $x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b.$  □

Von jetzt an sei stets ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung gegeben, auch wenn dies nicht explizit angegeben ist.

**Bemerkung 2.7** (Autonomisierung) Gegeben sei ein nichtautonomes  $n$ -dimensionales Differentialgleichungssystem  $\dot{x} = f(t, x)$  und  $x(t_0) = x_0$  mit  $f: D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dieses lässt sich durch die Substitution  $z(t) = (t, x(t))$  und  $\dot{t} = 1$  in

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \end{pmatrix}, \quad z(t_0) = z_0 = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

transformieren, eine äquivalente autonome Differentialgleichung der Dimension  $n + 1$ . Die Lösungen erfüllen

$$z(t; t_0, z_0) = \begin{pmatrix} t \\ x(t; t_0, x_0) \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden werden daher ausschließlich autonome Differentialgleichungen betrachtet, denn dadurch schränkt man sich, wie gezeigt, nicht ein. Allerdings ist dieses Verfahren lediglich für theoretische Zwecke sinnvoll. In der Praxis besitzt die Transformation keinerlei Bedeutung, wie auch in [1, S.108] erwähnt wird. Zu beachten ist, dass numerische Verfahren, die solche autonomisierten Differentialgleichungen berechnen sollen, invariant unter Autonomisierung sein müssen. Dieser Begriff wird im Anhang A erläutert.  $\square$

### 2.3.2 Satz zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Die Frage, ob die Lösung eines Anfangswertproblems existiert und ob sie in diesem Fall eindeutig ist, beantwortet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz, der mit dem zugehörigen Beweis aus [10, Kap.3] und [7, Kap.1] entnommen ist.

**Satz 2.8** Betrachte die Differentialgleichung (2.1), wobei das Vektorfeld  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ , mit  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  offen, stetig ist. Außerdem sei  $f$  Lipschitz-stetig im zweiten Argument, d.h. es erfüllt für eine kompakte Teilmenge  $K \subset D$  und eine Konstante  $L > 0$  die Ungleichung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  mit  $(t, x), (t, y) \in K$ . Dann existiert für jede Anfangsbedingung  $(t_0, x_0) \in D$  genau eine Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  des Anfangswertproblems (2.1), (2.6). Diese ist definiert für alle  $t$  aus einem offenen *maximalen Existenzintervall*  $I_{t_0, x_0} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I_{t_0, x_0}$ .  $\square$

*Beweis.* Der Beweis lässt sich in drei Teile gliedern. Zuerst zeigt man, dass es für jede Anfangsbedingung  $(t_0, x_0) \in D$  ein abgeschlossenes Intervall um  $t_0$  gibt, auf dem die Lösung existiert und eindeutig ist.

Hierfür betrachtet man die kompakte Umgebung  $U = I \times \overline{B}_\varepsilon(x_0)$  von  $(t_0, x_0)$ , wobei ein beschränktes abgeschlossenes Intervall  $I$  und ein  $\varepsilon > 0$  so gewählt werden, dass  $U \subset D$ . Diese Wahl ist immer möglich, da  $D$  eine offene Menge ist.

Da  $f$  stetig und  $U$  kompakt ist, existiert eine Konstante  $M$ , für die  $\|f(t, x)\| \leq M$  für alle  $(t, x) \in U$ . Ein Intervall  $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  mit  $\delta > 0$  sei so gewählt, dass  $J \subseteq I$  und

$L\delta < 1$  sowie  $M\delta < \varepsilon$  gilt.  $L$  ist die Lipschitz-Konstante, die aus der Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfelds  $f$  für die kompakte Umgebung  $K = U$  stammt.

Im Anschluss soll der Banachsche Fixpunktsatz auf dem Banachraum der stetigen Funktionen<sup>3</sup> mit der Norm

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in J} \|x(t)\|$$

verwendet werden, um die Eindeutigkeit und die Existenz der Lösung auf  $J$  zu beweisen.

Definiere dazu auf dem Banachraum  $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d)$  die Abbildung

$$T: \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d), \quad T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Diese bildet die Menge  $B$ , definiert durch  $B := \mathcal{C}(J, \overline{B}_\varepsilon(x_0))$ , in sich selbst ab. Denn es gilt für jedes  $t \in J$  und jedes  $x \in B$

$$\|T(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau, x(\tau))\|}_{\leq M, \text{ weil } (\tau, x(\tau)) \in \overline{U}} d\tau \right| \leq \delta M < \varepsilon$$

und damit  $T(x)(t) \in B_\varepsilon(x_0)$ .

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, muss  $T: B \rightarrow B$  eine Kontraktion sein, d.h.  $T$  muss für alle  $x, y \in B$  und ein  $k \in (0, 1)$

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq k \|x - y\|_\infty$$

erfüllen. Da für

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|_\infty &= \sup_{t \in J} \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{t \in J} \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|}_{\leq L\|x(\tau) - y(\tau)\| \leq L\|x - y\|_\infty} d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in J} |t - t_0| L \|x - y\|_\infty = \delta L \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

mit  $k = \delta L < 1$  die Kontraktionseigenschaft erfüllt ist, gilt der Banachsche Fixpunktsatz. Das heißt,  $T$  hat einen eindeutigen Fixpunkt  $x \in B$ . Beachte, dass es sich bei  $x$  um eine

<sup>3</sup>Den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes und den Beweis für die Tatsache, dass der Raum der stetigen Funktionen ein Banachraum ist, findet man in [10, S.29].

stetige Funktion handelt. Nach Konstruktion von  $T$  erfüllt die Funktion  $x$  außerdem die Integralgleichung und damit ist sie nach Bemerkung 2.4 stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem.

Es bleibt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Dazu zeigt man, dass es keinen weiteren Fixpunkt  $y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d)$  gibt. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt bereits, dass die Lösung auf  $B := \mathcal{C}(J, \overline{B}_\varepsilon(x_0))$  eindeutig ist, also dass kein weiterer Fixpunkt existiert. Es genügt daher zu zeigen, dass es auch außerhalb von  $B$  keinen weiteren Fixpunkt  $y$  gibt. Dies soll durch einen Widerspruch bewiesen werden.

Angenommen es existiert ein weiterer Fixpunkt  $y(t) \notin B$  von  $T$ . Für diesen Fixpunkt gilt  $\|y(t) - x_0\| \geq \varepsilon$  für ein  $t \in J$ . Es gelte o.B.d.A.  $t > t_0$ . Da  $y$  stetig ist, existiert ein  $t^* \in J$  mit  $\|y(t^*) - x_0\| = \varepsilon$  und  $y(s) \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$  für  $s \in [t_0, t^*]$ . Hieraus folgt

$$\varepsilon = \|y(t^*) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t^*} f(s, y(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t^*} \|f(s, y(s))\| ds \leq (t^* - t_0)M \leq \delta M.$$

Das ist jedoch ein Widerspruch zu  $\delta M < \varepsilon$ . Somit liegt jeder mögliche Fixpunkt  $y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d)$  von  $T$  in  $B$ , womit die Eindeutigkeit folgt.

Als Zweites gilt es, die Eindeutigkeit der Lösung auf beliebig großen Intervallen  $I$  zu zeigen, d.h. man muss zeigen, dass für zwei Lösungen  $x$  und  $y$ , die das Anfangswertproblem auf einem Intervall  $I$  lösen,  $x(t) = y(t)$  gilt. Angenommen  $x(t) \neq y(t)$  für ein  $t \in I$ , d.h. sie stimmen für ein beliebiges  $t$  nicht überein. O.B.d.A. sei  $t > t_0$ . Gemäß dem ersten Teil entsprechen sich beide Lösungen auf einem kleineren Intervall  $J$  und sind stetig. Aus diesem Grund existieren  $t_2 > t_1 > t_0$ , so dass

$$x(t_1) = y(t_1) \quad \text{und} \quad x(t) \neq y(t) \quad \text{für alle } t \in (t_1, t_2) \tag{2.10}$$

gilt. Beide Lösungen lösen offenbar das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung  $(t_1, x(t_1)) \in D$ . Aus dem ersten Teil ist bekannt, dass man ein Intervall  $\tilde{J}$  um  $t_1$  finden kann, auf dem die Lösungen zusammenfallen. Damit folgt

$$x(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \in \tilde{J}.$$

Das ist ein Widerspruch zu (2.10), da  $\tilde{J}$  als Intervall einen Punkt  $t$  mit  $t_1 < t < t_2$  enthält. Somit müssen  $x$  und  $y$  für alle  $t \in I$  übereinstimmen und die Eindeutigkeit der Lösung auf beliebig großen Intervallen ist gezeigt.

Als Letztes soll die Existenz eines maximalen Existenzintervalls nachgewiesen werden. Man definiert hierfür

$$t^+ := \sup\{s \geq t_0 \mid \text{es existiert eine Lösung auf } J \cup [t_0, s]\}$$

sowie

$$t^- := \inf\{s \leq t_0 \mid \text{es existiert eine Lösung auf } J \cup (s, t_0]\}$$

und setzt  $I_{t_0, x_0} = (t^-, t^+)$ . Da die Mengen, über die das Infimum bzw. das Supremum gebildet werden, nicht leer sind – denn sie enthalten mindestens alle  $s \in J$  – existieren sowohl  $t^-$  als auch  $t^+$ . Nach Definition von  $t^-$  und  $t^+$  kann es keine Lösung auf einem größeren Intervall  $I \supset I_{t_0, x_0}$  geben, also ist  $I_{t_0, x_0}$  das maximale Existenzintervall.  $\square$

Am Rand des maximalen Existenzintervalls hört die Lösung auf zu existieren. Wenn das Intervall in einer Zeitrichtung beschränkt ist, gibt es dafür zwei mögliche Begründungen. Entweder die Lösung divergiert oder sie konvergiert gegen einen Randpunkt des Definitionsbereichs  $D$ . Der Begriff Divergenz schließt hier neben dem Streben der Lösung gegen unendlich oder minus unendlich auch Oszillation mit ein.

Gilt  $t^+ < \infty$  und die Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  konvergiert für  $t \nearrow t^+$  gegen ein  $x^+ \in \mathbb{R}^d$ , so kann  $(t^+, x^+)$  nicht in  $D$  enthalten sein. Denn wäre  $(t^+, x^+) \in D$ , dann existiert eine Lösung  $x(t; t^+, x^+)$  auf einem offenen Intervall  $I_{t^+, x^+}$  um  $t^+$ . Die zusammengesetzte Funktion

$$y(t) = \begin{cases} x(t; t_0, x_0), & t \in I_{t_0, x_0} \\ x(t; t^+, x^+), & t \in I_{t^+, x^+} \setminus I_{t_0, x_0} \end{cases}$$

ist dann stetig und erfüllt für alle  $t \in I_{t_0, x_0} \cup I_{t^+, x^+}$  die Integralgleichung (2.7). Somit löst sie auch das Anfangswertproblem und existiert über die Intervallgrenze  $t^+$  hinaus. Das widerspricht der Definition von  $t^+$ . Also darf  $(t^+, x^+)$  nicht in  $D$  enthalten sein. Analog gilt

das für  $t \searrow t^-$ .

Falls  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , so ist eine Konvergenz gegen  $(t^+, x^+) \notin D$  bzw.  $(t^-, x^-) \notin D$  nicht möglich. Die Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  muss daher für  $t \nearrow t^+$  bzw.  $t \searrow t^-$  divergieren, wenn  $t^+ < \infty$  bzw.  $t^- > -\infty$ . Beachte, dass eine unbeschränkte Definitionsmenge nicht unbedingt zur Folge hat, dass die Lösung auf einem unbeschränkten Intervall existiert.

Im Folgenden wird stets angenommen, dass die Annahmen von Satz 2.8 erfüllt sind und dass für Mengen der Form  $[t_1, t_2] \times K$ ,  $K \subset \mathbb{R}^d$ , alle Lösungen  $x(t; t_0, x_0)$  für  $x_0 \in K$  existieren.

**Bemerkung 2.9** (i) Als eine Folgerung aus dem Satz 2.8 ergibt sich die sogenannte *Kozykluseigenschaft*. Ist eine Lösung eindeutig bestimmt und existiert sie für alle  $t, t_1 \geq t_0$ , so gilt

$$x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0))$$

mit  $(t_0, x_0) \in D$  und für zwei Zeiten  $t, t_1 \in \mathbb{R}$ . Die Begründung dafür ist, dass der linke Ausdruck das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung  $(t_1, x(t_1; t_0, x_0))$  löst. Da die rechte Seite ebenfalls dieses Anfangswertproblem löst, müssen beide Seiten nach Satz 2.8 übereinstimmen.

(ii) Eine Konsequenz der Kozykluseigenschaft ist, dass unterschiedliche Lösungen einer Differentialgleichung sich nicht schneiden können. Denn betrachtet man zwei Lösungen  $x(t; t_0, x_0)$  und  $x(t; t_1, x_1)$ , für die

$$x(t^*; t_0, x_0) = x(t^*; t_1, x_1)$$

für ein beliebiges  $t^*$  gilt, folgert man mit der Kozykluseigenschaft, dass  $x(t; t_0, x_0)$  und  $x(t; t_1, x_1)$  für alle  $t \in I$ ,  $I$  Existenzintervall, identisch sind. Das bedeutet, dass es für unterschiedliche Lösungen einer DGL nur zwei Möglichkeiten gibt. Entweder stimmen sie überall oder zu keiner Zeit überein.

(iii) Für die autonomen Differentialgleichungen gilt im Speziellen, dass jede Lösung mit „verschobenem“ Zeitargument  $x(t - t_0; 0, x_0)$  das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung  $(t_0, x_0)$  löst, da die Lösung unabhängig von der Anfangszeit  $t_0$  ist. Zusammen

mit der Kozykluseigenschaft resultiert die Gültigkeit der Gleichung

$$x(t - t_0; 0, x_0) = x(t; t_0, x_0).$$

Um eine autonome Differentialgleichung zu lösen, kann man also immer von einer Anfangszeit  $t_0 = 0$  ausgehen, da  $f(x)$  unabhängig von  $t$  ist. Falls die Differentialgleichung nicht schon so gegeben ist, kann man durch Verschiebung des zeitlichen Arguments eine Anfangszeit  $t_0 = 0$  erreichen. Von jetzt an werden daher nur noch autonome Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung  $(0, x_0)$  betrachtet und die Lösung kurz mit  $x(t; x_0)$  bezeichnet. Außerdem gilt, dass zwei Lösungen einer autonomen DGL, die zu zwei unterschiedliche Zeiten  $s, t \in \mathbb{R}$  übereinstimmen, – bei geeigneter Verschiebung der Zeitargumente – für alle Zeiten übereinstimmen.

- (iv) Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8 ist die Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  zudem in allen Variablen  $t$ ,  $t_0$  und  $x_0$  stetig.
- (v) Es gilt zu beachten, dass die durch Autonomisierung erzeugte autonome DGL aus Bemerkung 2.7 nur dann die Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt, wenn  $f$  Lipschitz-stetig bzgl.  $x$  und  $t$  ist. □





# 3 Numerische Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen kann man mit verschiedenen analytischen Verfahren, wie z.B. der Trennung der Variablen lösen. Diese Verfahren stoßen bei komplexeren nicht-linearen Differentialgleichungen allerdings schnell an ihre Grenzen. Außerdem wird die Berechnung per Hand auch schon bei einfacheren Gleichungen sehr kompliziert. Zwar helfen hier Computermathematikssysteme wie Maple durch die Implementierung der analytischen Verfahren weiter, allerdings sind die meisten Differentialgleichungen weder per Hand noch mit Hilfe des Computers analytisch lösbar.

Im folgenden Kapitel werden daher einige Methoden zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung erklärt. Bei diesen wird die Lösung der DGL nicht mehr explizit berechnet, sondern durch Näherungsformeln approximiert. Die so entstandenen Verfahren lassen sich in Form von Algorithmen im Rechner implementieren. Allgemein entsteht bei Approximationen grundsätzlich ein numerischer Fehler. Mittlerweile sind numerische Verfahren aber schon so weit entwickelt, dass dieser Fehler selbst für hochkomplizierte Gleichungen sehr gering gehalten werden kann und die Lösung dennoch in kurzer Zeit als Ergebnis vorliegt. Dieses Kapitel beinhaltet Grundlagen über die Funktionsweise und die Approximationseigenschaften der numerischen Verfahren. Es wird außerdem kurz auf die Konvergenztheorie der sogenannten Einschrittverfahren eingegangen. Anschließend werden die zwei impliziten Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel, näher erläutert. Diese besitzen eine wichtige Eigenschaft, die in Kapitel 5 noch von Bedeutung sein wird. Es werden sowohl lineare als auch nichtlineare DGL betrachtet.

Dieses Kapitel orientiert sich in Aufbau und Inhalt an [7, Kap. 2, Kap. 9] und [10, Kap. 6].

Ergänzende Informationen stammen aus [3].

### 3.1 Diskrete Approximation und Einschrittverfahren

Die Grundidee vieler numerischer Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen liegt darin, die Lösungstrajektorie zu diskreten Zeitpunkten  $t_i$  zu berechnen. In der folgenden Definition werden hierzu Gitter und Familien von Gitterfunktionen definiert, die zur Berechnung der Approximation der Lösung verwendet werden sollen. Außerdem wird der Begriff der Konvergenz eingeführt.

**Definition 3.1** (i) Ein *Gitter* auf einem Intervall  $[t_0, T]$  ist eine Menge

$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  von Zeiten mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Die Werte  $h_i = t_{i+1} - t_i$  bezeichnet man als *Schrittweiten*.  $\bar{h} = \max_{i=0, \dots, N-1} h_i$  ist die *maximale Schrittweite*. Wenn gilt  $h_0 = h_1 = \dots = h_{N-1}$ , so sagt man, die Schrittweite ist *äquidistant* und schreibt statt  $h_i$  kurz  $h$ .

(ii) Eine Funktion  $\tilde{x}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Gitterfunktion*.

(iii) Eine Familie von Gitterfunktionen  $\tilde{x}_j, j \in \mathbb{N}$ , auf Gittern  $\mathcal{T}_j$  auf einem Intervall  $[t_0, T] \subset I_{t_0, x_0}$  mit maximalen Schrittweiten  $\bar{h}_j$  heißt *diskrete Approximation* der Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  von (2.1), falls

$$\max_{t_i \in \mathcal{T}_j} \|\tilde{x}_j(t_i) - x(t_i; t_0, x_0)\| \rightarrow 0$$

für  $\bar{h}_j \rightarrow 0$ .

(iv) Eine Familie von Gitterfunktionen  $\tilde{x}_j(\cdot; t_0, x_0), j \in \mathbb{N}$ , die abhängig von einer Anfangsbedingung  $(t_0, x_0)$  ist, besitzt die *Konvergenzordnung*  $p > 0$ , falls für jede kompakte Menge  $K \subset D$  und alle  $T > 0$  mit  $[t_0, T] \subset I_{t_0, x_0}$  ein  $C > 0$  existiert, so dass

$$\max_{t_i \in \mathcal{T}_j} \|\tilde{x}_j(t_i; t_0, x_0) - x(t_i; t_0, x_0)\| \leq C \bar{h}_j^p$$

gilt für alle  $(t_0, x_0) \in K$  und alle hinreichend feinen Gitter  $\mathcal{T}_j$  auf  $[t_0, T]$ . Man schreibt dann auch  $\tilde{x}_j(t_i; t_0, x_0) = x(t_i; t_0, x_0) + \mathcal{O}(\bar{h}_j^p)$ .  $\square$

Für die Approximation gilt, je feiner das Gitter gewählt wird, desto genauer ist die Näherung. Besitzt ein Verfahren die Konvergenzordnung  $p$  und ein weiteres die Konvergenzordnung  $p^* > p$ , so konvergieren die Approximationen, die durch das letztere Verfahren berechnet wurden, schneller gegen die exakten Werte als die des Verfahrens mit Ordnung  $p$ . Die einfachste Klasse numerischer Methoden zur Berechnung oben genannter Approximationen sind die *Einschrittverfahren* (ESV). Diese sind gegeben durch eine numerisch auswertbare Funktion  $\Phi$ . Mit Hilfe dieser Funktion kann man eine Gitterfunktion zu einem gegebenen Gitter berechnen. In der folgenden Definition ist das formal definiert.

**Definition 3.2** Ein *Einschrittverfahren* ist durch eine Abbildung  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, die stetig ist. Mit Hilfe von  $\Phi$  kann zu jedem Gitter  $\mathcal{T}$  und jeder Anfangsbedingung  $(t_0, x_0)$  mittels

$$\tilde{x}(t_0) = x_0, \quad \tilde{x}(t_{i+1}) = \Phi(t_i, \tilde{x}(t_i), h_i) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, N-1$$

rekursiv eine Gitterfunktion definiert werden.

Wenn diese Gitterfunktion die Bedingungen aus Definition 3.1 (iii) und (iv) erfüllt, dann bezeichnet man das zugehörige Einschrittverfahren als *konvergent* bzw. *konvergent mit Konvergenzordnung  $p$* . □

Der Wert  $\tilde{x}(t_{i+1})$  wird also ausschließlich aus dem direkten Vorgänger  $\tilde{x}(t_i)$  berechnet. Aus diesem Grund heißen die Verfahren dieser Klasse *Einschrittverfahren*.

Zur Konstruktion der hier behandelten Verfahren betrachtet man wieder die Schreibweise der Differentialgleichung als Integralgleichung (2.7). Wie schon bekannt, erfüllt die exakte Lösung der DGL

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Um diese Gleichung numerisch zu berechnen, nähert man das Integral durch Quadraturformeln an. Die einfachste Variante besteht darin, das Integral auf dem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  durch  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \approx h_i f(t_i, x(t_i))$  zu ersetzen und die Lösung durch

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \Phi(t_i, \tilde{x}(t_i), h_i) = \tilde{x}(t_i) + h_i f(t_i, \tilde{x}(t_i))$$

zu approximieren. Es gilt dann für die Verfahrensregel

$$\Phi(t, x, h) = x + hf(t, x) . \quad (3.1)$$

Man nennt dieses Verfahren die *Eulersche Polygonzugmethode* oder auch das *Euler-Verfahren*. Es ist als einfachster Vertreter der Klasse der Einschrittverfahren bekannt. Geometrisch gesehen wird in jedem Punkt  $\tilde{x}(t_i)$  die Steigung der exakten Lösung berechnet und der dadurch gegebenen Gerade bis zum nächsten Zeitschritt gefolgt. In Abbildung 3.1 ist dies veranschaulicht. Die exakte Lösung ist durch eine schwarze Linie dargestellt, während die blaue Linie die Euler-Approximation abbildet. Die roten Striche verdeutlichen die Steigung zu den jeweiligen Zeitpunkten  $t_0$ ,  $t_1$  und  $t_2$ .

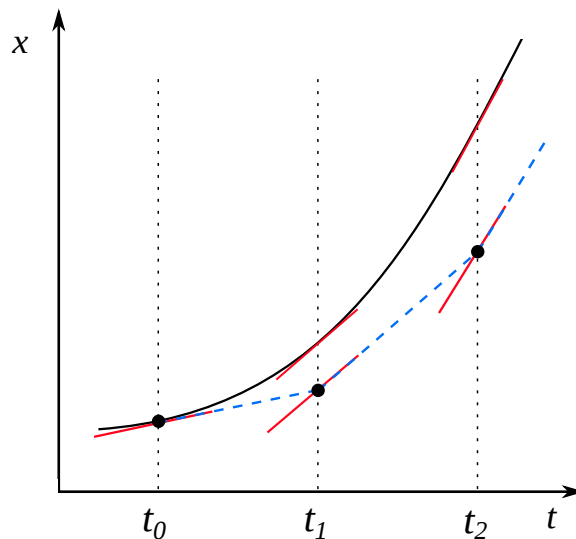


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des expliziten Euler-Verfahrens

Der Fehler, der bei dieser Art der Näherung entsteht, ist relativ groß. Um bessere Verfahren zu erhalten, verwendet man genauere Approximationen. So erhält man durch Verwenden der Trapezregel  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \approx \frac{h_i}{2} (f(t_i, x(t_i)) + f(t_{i+1}, x(t_{i+1})))$  für die numerische Berechnung des Integrals das sogenannte *Heun-Verfahren*:

$$\Phi(t, x, h) = x + \frac{h}{2} (f(t, x) + f(t + h, x + hf(t, x))) . \quad (3.2)$$

Den unbekanntem Wert  $x(t_{i+1})$  in der Trapezregel ersetzt man also durch die Euler-Approximation. Setzt man diesen Prozess iterativ fort, d.h. man verwendet für die Berechnung

des unbekanntes Werts  $x(t_{i+1})$  eine mit bekannten Werten berechenbare Approximation, so erhält man immer genauere Verfahren. Allerdings werden die Ausdrücke dafür schnell sehr kompliziert. Die folgende Klasse von Verfahren versteht sich als Überbegriff für Euler-, Heun- und alle in analoger Weise konstruierten Verfahren und liefert eine übersichtliche Notation.

Es handelt sich um die sogenannten *Runge-Kutta-Verfahren*, die wie folgt definiert sind:

**Definition 3.3** Ein *s*-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren ist gegeben durch

$$k_i = f \left( t + c_i h, x + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

$$\Phi(t, x, h) = x + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

Den Wert  $k_i = k_i(t, x, h)$  bezeichnet man als *i-te Stufe* des Verfahrens. □

Der neuseeländische Mathematiker J.C. Butcher entwickelte einen Formalismus, der die Notation sämtlicher Runge-Kutta-Verfahren enorm vereinfacht. Dazu stellt man die Koeffizienten eines *s*-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens als Vektoren und Matrix in der Form

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s, \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{s1} & \cdots & \cdots & a_{s\,s-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

dar. Die Idee von Butcher sieht ein Tableau, das sogenannten *Butcher-Tableau*, als Struktur vor, in dem man die Verfahren durch

$c_1$					
$c_2$	$a_{21}$				
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\cdots$	$a_{s\,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{s-1}$	$b_s$

kompakt angeben kann. Das Euler- und das Heun-Verfahren, sowie das sogenannte *klassische Runge-Kutta-Verfahren* mit  $s = 4$  sind beispielsweise gegeben durch die Butcher-Tableaus

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Diese Schreibweise ermöglicht es, auch komplexere Modelle klar zu formulieren. Außerdem kann man hier leicht sehen, ob ein Verfahren im numerischen Sinne „gut“ ist. Die mathematische Formulierung des Begriffs „gut“ wird im Anschluss näher erläutert.

## 3.2 Lipschitz-Bedingung, Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren

Das entscheidende Kriterium für die Eignung eines Verfahrens ist, dass es die exakte Lösung möglichst genau approximiert. Um hierfür kurz in die Konvergenztheorie für Einschrittverfahren einzusteigen, sei zunächst der Fehler

$$\|\tilde{x}(t_i) - x(t_i)\| = \|\Phi(t_{i-1}, \tilde{x}(t_{i-1}), h_{i-1}) - x(t_i)\|$$

zwischen der durch das Verfahren ermittelten approximativen Lösung und der exakten Lösung betrachtet. Diesen Fehler kann man nicht berechnen, da die exakte Lösung in der Regel unbekannt ist. Um ihn also abzuschätzen, zerlegt man den Betrag anhand der Hilfsgröße  $\Phi(t_{i-1}, x(t_{i-1}), h_{i-1})$  und der Dreiecksungleichung in zwei separate Fehlerquellen. So ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t_i) - x(t_i)\| &\leq \|\Phi(t_{i-1}, \tilde{x}(t_{i-1}), h_{i-1}) - \Phi(t_{i-1}, x(t_{i-1}), h_{i-1})\| \\ &\quad + \|\Phi(t_{i-1}, x(t_{i-1}), h_{i-1}) - x(t_i; t_{i-1}, x_{i-1})\| \end{aligned}$$

wobei der erste Term die Auswirkung des Fehlers des Verfahrens  $\Phi$  bis zur Zeit  $t_{i-1}$  beschreibt und der zweite Term den lokalen Fehler, der vom Zeitschritt  $t_{i-1}$  zum Zeitschritt  $t_i$  entsteht. Die Abbildung 3.2 skizziert diese beiden Terme nochmals graphisch, wobei (a) den ersten Term darstellt und (b) den zweiten. Die durchgezogene Linie verdeutlicht die exakte Lösung einer beliebigen Differentialgleichung, während die gestrichelten blauen Linien für beliebige Approximationen stehen.

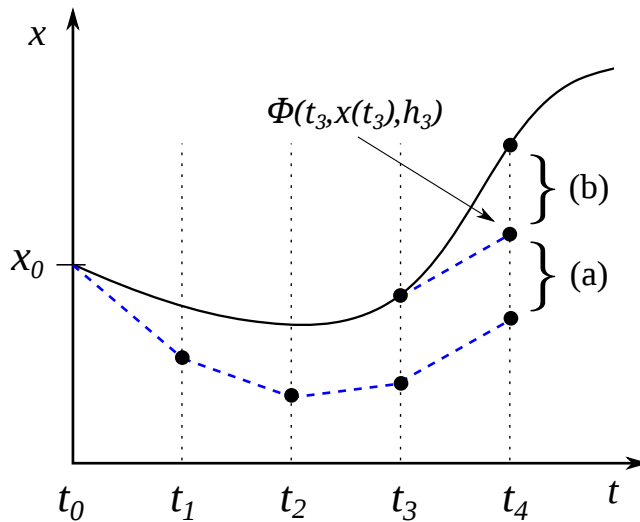


Abbildung 3.2: Graphische Veranschaulichung der Fehlerterme

In der folgenden Definition aus [7] werden Eigenschaften des Verfahrens  $\Phi$  beschrieben, die zur Abschätzung des Fehlers benötigt werden.

**Definition 3.4** (i) Ein Einschrittverfahren erfüllt die *Lipschitz-Bedingung* (oder *Stabilitätsbedingung*), falls für jede kompakte Menge  $K \subset D$  des Definitionsbereiches der Differentialgleichung ein  $L > 0$  existiert, so dass für alle Paare  $(t_0, x_1), (t_0, x_2) \in K$  und alle hinreichend kleinen  $h > 0$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t_0, x_1, h) - \Phi(t_0, x_2, h)\| \leq (1 + Lh)\|x_1 - x_2\| \quad (3.3)$$

gilt.

- (ii) Ein Einschrittverfahren  $\Phi$  heißt *konsistent*, falls für jede kompakte Menge  $K \subset D$  eine Funktion  $\varepsilon(h)$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  existiert, so dass für alle  $(t_0, x_0) \in K$  und alle hinreichend kleinen  $h > 0$  die Ungleichung

$$\|\Phi(t_0, x_0, h) - x(t_0 + h; t_0, x_0)\| \leq h\varepsilon(h) \quad (3.4)$$

gilt. O.B.d.A. sei  $\varepsilon(h)$  monoton, ansonsten ersetze  $\varepsilon(h)$  durch  $\sup_{h^* \in [0, h]} \varepsilon(h^*)$ .

Das Verfahren besitzt die *Konsistenzordnung*  $p > 0$ , falls für jede kompakte Menge  $K \subset D$  ein  $E > 0$  existiert, so dass  $\varepsilon(h) = Eh^p$  gewählt werden kann. Man schreibt dann unter der Verwendung des Landau-Symbols  $\mathcal{O}$

$$\Phi(t_0, x_0, h) = x(t_0 + h; t_0, x_0) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

□

Die Abschätzung (3.3) sorgt dafür, dass der erste Fehlerterm nicht zu groß wird, während Bedingung (3.4) dazu dient, den zweiten Fehlerterm abzuschätzen.

**Bemerkung 3.5** Die im Punkt (i) genannte Stabilitätsbedingung wird in den folgenden Kapiteln noch genauer analysiert werden mit separater Betrachtung von linearen und nicht-linearen Differentialgleichungen. □

Für die schon bekannten Verfahren rechnet man leicht nach, dass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist, wenn das Vektorfeld  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Die Konsistenz ist nicht allzu leicht nachzuprüfen, da man hierfür die unbekanntenen Lösungen  $x(t; t_0, x_0)$  benötigt. Geht man jedoch von dem Formalismus für Runge-Kutta-Verfahren aus, so lassen sich zwei Kriterien formulieren, mit denen man sowohl Konsistenz als auch Konsistenzordnung nachprüfen kann. Die Kriterien und die entsprechenden Beweise, die hier nicht näher ausgeführt werden, findet man detaillierter in [7, Kap. 3] und [7, Kap. 4].

Die Konsistenzeigenschaften von Runge-Kutta-Verfahren lassen sich über ihre Koeffizienten ausdrücken, wie das folgende Lemma zeigt.



**Lemma 3.6** Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent, wenn die Bedingung

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

erfüllt ist. □

Um Aussagen über die Konsistenzordnung zu treffen, benötigt man die folgende allgemeinere Betrachtungsweise. Unter deren Verwendung lassen sich speziell für eine gewünschte Ordnung  $p$  unter Berücksichtigung der Stufenzahl  $s$  geeignete Bedingungsgleichungen herleiten, die genauer in [7, Kap. 4] nachzulesen sind. So erhält man ein Verfahren mit der geforderten Konsistenzordnung  $p$ .

**Satz 3.7** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $p$ -mal stetig differenzierbares Vektorfeld,  $p \in \mathbb{N}$ . Gegeben sei ein  $p + 1$ -mal stetig differenzierbares Einschrittverfahren  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Phi$  besitzt genau dann die Konsistenzordnung  $p$ , wenn die Bedingungen

$$\Phi(t, x, 0) = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^i \Phi}{\partial h^i}(t, x, 0) = L_f^{i-1} f(t, x) \quad \text{für } i = 1, \dots, p \quad (3.5)$$

für alle  $(t, x) \in D$  gelten. Der sogenannte *Differentialoperator*  $L_f^i, i \in \mathbb{N}$  ist für hinreichend oft differenzierbare Funktionen  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  durch die Rekursion

$$\begin{aligned} L_f^0 g(t, x) &:= g(t, x), \\ L_f^1 g(t, x) &:= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) f(t, x), \\ L_f^{i+1} g(t, x) &:= L_f^1 L_f^i g(t, x) \end{aligned}$$

gegeben. □

Der kommende Satz stellt den wichtigsten Satz für die Theorie der Einschrittverfahren dar. Er besagt, dass Lipschitz-Bedingung und Konsistenz ausreichend sind für die Konvergenz eines Verfahrens.

**Satz 3.8** Gegeben sei ein Einschrittverfahren  $\Phi$ , welches die Lipschitz-Bedingung erfüllt und konsistent ist. Dann ist das Verfahren auch konvergent. Besitzt es außerdem die Konsistenzordnung  $p$ , dann ist es auch konvergent mit der Ordnung  $p$ . □

*Beweis.* Den ausführlichen Beweis findet man unter [7, S.15ff].  $\square$

Beachte, dass die Schranke für den numerischen Fehler sehr schnell mit der Intervallgröße  $T - t_0$  wächst. Deswegen ist es für numerische Verfahren schwierig, Aussagen über ihr Langzeitverhalten zu treffen. Der Grenzwert der Approximation kann sehr weit von dem Grenzwert der exakten Lösung  $x$  entfernt liegen. In der Theorie der dynamischen Systeme wird in diesem Rahmen besonderes Augenmerk auf die Analyse des Verhaltens von Trajektorien für  $t \rightarrow \pm\infty$  gelegt. Diese erfolgt mit Hilfe von Attraktoren und deren Stabilitätseigenschaften. Im anschließenden Kapitel 4 werden diesbezüglich speziell Stabilitätseigenschaften von Gleichgewichten, der einfachsten Form eines Attraktors, untersucht.

### 3.3 Implizite Verfahren

Im Speziellen sollen in dieser Arbeit implizite Verfahren betrachtet werden, da einige von ihnen eine besondere Eigenschaft besitzen. Sie sind A-stabil. Dazu folgt im Kapitel 5 über Stabilität numerischer Verfahren mehr.

Diese Verfahren werden als *implizit* bezeichnet, da zur Berechnung der nächsten Iterierten  $x_{t+1}$  dieser Wert selbst benötigt wird. Es ist also in jedem Schritt ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem zu lösen, was diese Verfahren im Vergleich zu expliziten Verfahren aufwendiger macht. Allerdings werden sie insbesondere zur Lösung von steifen Differentialgleichungen benötigt, weil sie die Wahl einer wesentlich größeren Schrittweite ermöglichen. Steife Differentialgleichungen erkennt man im linearen Fall zum Beispiel daran, dass die Eigenwerte der Matrix  $A$  negative Realteile haben, die betragsmäßig sehr groß sind, vgl. hierzu [10]. Explizite Verfahren kommen allenfalls nur mit sehr kleinen Schrittweiten auf eine gute Lösung, was erheblich höheren Rechenaufwand zur Folge hat. Also sind implizite Verfahren den expliziten Verfahren im Allgemeinen überlegen, wenn auch unter höherem algorithmischem Aufwand. Implizite Runge-Kutta-Verfahren spielen hier eine wichtige Rolle.

Wenn man die Definition der expliziten Runge-Kutta-Verfahren betrachtet, fällt auf, dass es sich bei der Matrix  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  um eine strikt untere Dreiecksmatrix handelt. Was passiert,

wenn man formal diese Koeffizientenmatrix auffüllt? Im Verfahren muss man dann in jedem Integrationsschritt zur Berechnung der Lösungen ein nichtlineares Gleichungssystem lösen, das sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite den unbekanntem Wert  $k_i$  enthält. Die Werte  $k_i \in \mathbb{R}^n$  sind also implizit gegeben, wie man in der folgenden Definition eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens erkennen kann.

**Definition 3.9** Ein  $s$ -stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren ist für  $i = 1, \dots, s$  gegeben durch

$$k_i = f \left( t + c_i h, x + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (3.6)$$

$$\Phi(t, x, h) = x + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \quad (3.7)$$

Den Wert  $k_i = k_i(t, x, h)$  bezeichnet man als  $i$ -te Stufe des Verfahrens.  $\square$

Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt explizit, falls  $a_{ij} = 0$  für alle  $i \leq j$ , sonst implizit.

Unter der Verwendung der Größen

$$g_i = x + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, \quad i = 1, \dots, s$$

$$\tilde{\Phi}(t, x, h) = x + h \sum_{j=1}^s b_j f(t + c_j h, g_j)$$

formuliert man den folgenden Satz, der aussagt, dass die durch ein implizites Runge-Kutta-Verfahren berechnete Approximation  $\tilde{x}$  existiert und eindeutig ist. Beachte, dass die obige Formulierung wegen

$$k_i = f(t + c_i h, g_i)$$

äquivalent zur Darstellung in der Definition 3.6 ist. Sie wird dennoch an dieser Stelle verwendet, um eine überschaubare Notation für den kommenden Satz zu haben.

**Satz 3.10** Die Abbildung  $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$  sei auf  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  bzgl.  $x$  lokal Lipschitz-stetig für ein  $L > 0$ . Für ein implizites Runge-Kutta-Verfahren gibt es zu  $(t, x) \in D$  ein  $h^* > 0$  und eindeutige stetige Funktionen  $g_i \in C((-h^*, h^*), \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , so dass

1.  $g_i(0) = x$  für  $i = 1, \dots, s$ ,

2. für  $|h| < h^*$  die Vektoren  $g_i(h)$  die impliziten Gleichungen des Runge-Kutta-Verfahrens erfüllen.

Diese stetigen Funktionen definieren eine diskrete Übergangsmatrix  $\tilde{\Phi}(t; t_0)$ , die genau dann konsistent ist, wenn

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

gilt. Ist  $f \in C^p(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ , so sind bei festem  $(t, x)$  und hinreichend kleinen Schrittweiten  $h$  sowohl  $g_i$  als auch  $\tilde{\Phi}(t, x, h)$  in  $h$   $p$ -mal stetig differenzierbar.  $\square$

*Beweis.* Ein ausführlicher Beweis ist gegeben in [3, S. 254ff], woraus auch dieser Satz stammt.  $\square$

Mit der Aussage von Satz 3.10 übertragen sich wesentliche Eigenschaften expliziter Runge-Kutta-Verfahren, wie Invarianz unter Autonomisierung, Konsistenz und Konsistenzordnung auf den impliziten Fall.

### Lipschitz-Bedingung, Konsistenz und Konvergenz

Man kann weiter zeigen, dass für implizite Verfahren analoge Kriterien zur Bestimmung der Konsistenz bzw. der Konsistenzordnung gelten. Die Analyse ist im Vergleich zu expliziten Verfahren jedoch etwas komplizierter, denn die Ableitungen von  $\Phi$ , die man sowohl zur Bestimmung der Konsistenz als auch zum Nachweis der Lipschitz-Bedingung benötigt, lassen sich nur mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen ermitteln. Die Beweise sind aber in ihren Grundzügen gleich und resultieren in identischen Bedingungsgleichungen.

Um allgemein die Verfahren weiter zu optimieren, kann man anstatt einer äquidistanten Schrittweite die Schrittweite adaptiv steuern. So erzielt man bessere Ergebnisse bei kürzerer Laufzeit, allerdings steht man ebenfalls vor neuen Herausforderungen, was die bestmögliche Implementierung der gesteuerten Schrittweite betrifft. In dieser Arbeit wird grundsätzlich eine äquidistante Schrittweite gewählt.

### Implizites Euler-Verfahren

Das einfachste Verfahren der Klasse der impliziten Runge-Kutta-Verfahren ist das *implizite Euler-Verfahren*. Die durch dieses Verfahren erzeugte Gitterfunktion  $\tilde{x}$  ist gegeben durch die Rekursion

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + h_i f(t_{i+1}, \tilde{x}(t_{i+1})). \quad (3.8)$$

Im Formalismus der Runge-Kutta-Verfahren geschrieben erhält man für das implizite Euler-Verfahren die definierenden Gleichungen

$$k_1 = f(t + h, x + hk_1), \quad \Phi(t, x, h) = x + hk_1, \quad (3.9)$$

und das zugehörige Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}.$$

Das implizite Eulerverfahren besitzt die Konsistenzordnung  $p = 1$ . Beachte, dass hier in jedem Schritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss.

**Beispiel 3.11** Wendet man das implizite Euler-Verfahren auf die Pendelgleichung aus Beispiel 2.5 an, die durch  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -g \sin x_1$  gegeben ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{j+1} &= \tilde{x}_1^j + h\tilde{x}_2^{j+1} \\ \tilde{x}_2^{j+1} &= \tilde{x}_2^j - hg \sin \tilde{x}_1^{j+1}. \end{aligned}$$

□

Den besonderen Vorteil, der sich für steife Differentialgleichungen ergibt, erkennt man an der folgenden Abbildung 3.3. Sie veranschaulicht die Lösung der skalaren und steifen Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$  mit Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  und  $\lambda = -100$ . Dargestellt sind neben der exakten Lösung in schwarz die Approximation mit dem expliziten Euler-Verfahren (rot) und dem impliziten Euler-Verfahren (blau) für eine konstante Schrittweite  $h = 0,02$ . Man erkennt sofort, dass die Lösung des expliziten Euler-Verfahrens nicht im geringsten der exakten Lösung ähnelt, wogegen das implizite Verfahren schon nach wenigen Schritten mit der exakten Lösung übereinstimmt. Die Abbildung wurde mit der Datei `bsp_steif.m` erzeugt.

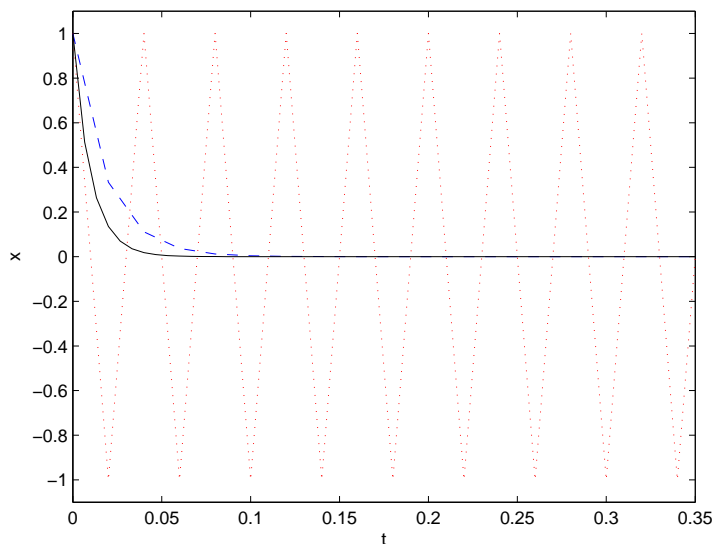


Abbildung 3.3: Vergleich von explizitem (rot) und implizitem (blau) Euler-Verfahren für die DGL  $\dot{x} = -100x$  mit  $x(0) = 1$

### Implizite Mittelpunktsregel

Ein Verfahren der Konsistenzordnung  $p = 2$  stellt die *implizite Mittelpunktsregel* dar. Die Gitterfunktion  $\tilde{x}$  wird hier mit Hilfe der Rekursion

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + hf \left( t_i + \frac{h}{2}, \frac{1}{2} (\tilde{x}(t_{i+1}) + \tilde{x}(t_i)) \right) \quad (3.10)$$

definiert. Im Formalismus der Runge-Kutta-Verfahren geschrieben erhält man die definierenden Gleichungen

$$k_1 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1\right), \quad \Phi(t, x, h) = x + hk_1, \quad (3.11)$$

und das zugehörige Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}.$$

Das Integral aus der Integralgleichung (2.7) wird in diesem Verfahren durch die Mittelpunktsregel angenähert, d.h. auf einem gegebenen Intervall  $[a, b]$  betrachtet man den Mit-

telpunkt  $x^*$  und multipliziert den Funktionswert an dieser Stelle mit der Intervalllänge:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{b-a}{2}\right)(b-a) .$$

Dieses und das implizite Euler-Verfahren werden im Kapitel 5 aufgrund ihrer Stabilitätseigenschaften noch von Bedeutung sein.





# 4 Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen

Für die Diskussion des Stabilitätsverhaltens von Einschrittverfahren ist es wichtig, auch das Stabilitätsverhalten der zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu verstehen. Das Ziel ist, die verschiedenen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung qualitativ einzustufen. Die Stabilitätstheorie ist ein wichtiges Werkzeug, um das Langzeitverhalten von Differentialgleichungen zu untersuchen. In diesem Kapitel werden wichtige Grundbegriffe wie das Gleichgewicht einer DGL, die asymptotische Stabilität und auch Kriterien, um diese nachzuweisen, erklärt. Es werden sowohl lineare als auch nichtlineare Differentialgleichungen betrachtet, wobei die qualitative Theorie speziell für die letztere Gruppe von besonderer Wichtigkeit ist, da man mit expliziten Lösungsmethoden hier kaum Erfolg hat. Generelle Aussagen für den allgemeinen nichtlinearen nichtautonomen Fall zu formulieren, ist ein komplexeres und umfangreicheres Unterfangen, weshalb die Diskussion im Anschluss auf autonome Differentialgleichungen beschränkt sein soll. Die Stabilität wird dabei im Hinblick auf Gleichgewichte definiert und diskutiert. Andere Formen von Lösungen einer Differentialgleichung werden in dieser Arbeit im Bezug auf die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften nicht betrachtet.

## 4.1 Gleichgewicht und Stabilitätsbegriff

Stabilität behandelt im Allgemeinen die Auswirkung von kleinen Störungen in den Anfangswerten in der längeren Betrachtung. Die Stabilitätstheorie hilft diesen Effekt einzuschätzen und gegebenenfalls zu kontrollieren, was vor allem für die Anwendung der numerischen Ver-

fahren von praktischer Relevanz ist. Im Prinzip kann man Stabilität für Lösungskurven, Mengen von Lösungskurven oder auch allgemeine Mengen, sogenannte *Attraktoren*, definieren. In dieser Arbeit liegt der Fokus jedoch ausschließlich auf Gleichgewichten gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Struktur und der Inhalt des folgenden Kapitels orientieren sich an [4, Kap.3] und [8].

**Definition 4.1** Man bezeichnet einen Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^n$  als *Gleichgewicht* (*Ruhelage*, *Equilibrium*, *Ruhelösung*) der gewöhnlichen autonomen Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(x)$ , falls die zugehörige Lösung  $x(t)$  die Gleichung

$$x(t; x^*) = x^* \text{ für alle } t, t_0 \in \mathbb{R}$$

erfüllt. □

Differenziert man  $x(t; x^*) = x^*$ , sieht man, dass ein Punkt also genau dann ein Gleichgewicht einer allgemeinen zeitinvarianten Differentialgleichung (2.2) ist, wenn er eine Nullstelle des Vektorfelds  $f(x)$  ist, d.h. wenn  $f(x^*) = 0$  gilt. Für die lineare Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ist beispielsweise der Punkt  $x^* = 0$  immer ein Gleichgewicht. Im Allgemeinen kann man die Stabilität stets anhand des Ursprungs analysieren, da für ein beliebiges Gleichgewicht  $x^*$  durch Koordinatentransformation eine DGL mit dem Gleichgewicht  $x^{**} = x - x^*$  gefunden werden kann, die das gleiche Lösungsverhalten wie die ursprüngliche DGL aufweist.

**Beispiel 4.2** Für die Pendelgleichung aus Beispiel 2.5 beispielsweise findet man keine explizite Lösung. Dennoch kann man Aussagen über ihr Verhalten anhand der Nullstellen von  $f$  treffen. Alle Punkte  $x_k^* = (k\pi, 0)^\top$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  sind Nullstellen von  $f$ , was für die zeitliche Ableitung der Lösungskurven  $x_k^*$  bedeutet, dass sie konstant ist. Es handelt sich bei den Nullstellen also um Gleichgewichte.

In der Abbildung 4.1 sind drei unterschiedliche Arten des Lösungsverhaltens zu erkennen. Zum einen sind das die schon genannten *Ruhelösungen*, die in der Abbildung durch schwarze Punkte stilisiert sind. Der Zustand  $x$  bleibt hier für alle Zeiten  $t$  konstant. Weiterhin sind *geschlossene Kurven* zu sehen, die eine pendelnde Bewegung ohne Überschlag beschreiben. Als dritte Möglichkeit erkennt man *wellenförmige Lösungen*, die einem Rotieren des Pendels

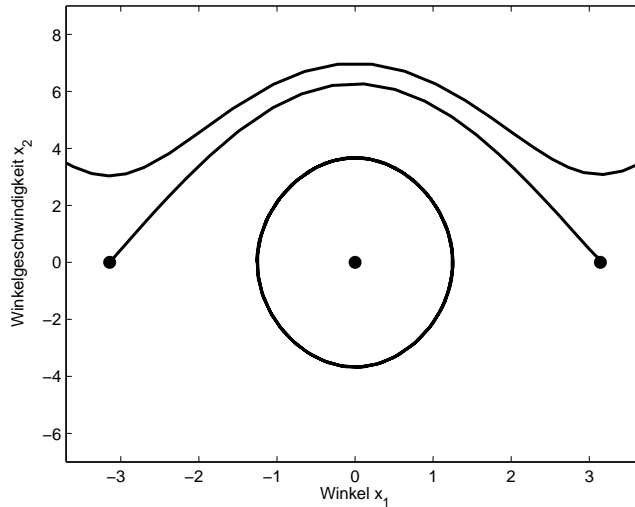


Abbildung 4.1: Spezielle Lösungskurven für die Pendelgleichung

entsprechen. Das Pendel überschlägt sich also immer wieder. Eine Besonderheit ist die halbkreisförmige Lösung. Sie verbindet bei diesem mit dem Matlab-Programm `pendel_plot.m` erzeugten Phasenportrait zwei Punkte  $x_k^*$  und  $x_{-k}^*$  miteinander für ein ungerades  $k$ . Man beachte, dass die Gleichgewichte  $x_k^*$  mit ungeradem  $k$  den Zustand beschreiben, in dem das Pendel senkrecht nach oben steht. In dieser Situation verursachen kleine Änderungen, z.B. das leichte Anstoßen des Pendels, große Abweichungen von der Ruhelage, das Pendel fällt um. Diesen Zustand bezeichnet man als instabil. Betrachtet man andererseits das herabhängende Pendel, mathematisch das Gleichgewicht  $x_k^*$  mit geradem  $k$ , so stellt man fest, dass es bei kleinen Änderungen nur leicht zu Schwingen beginnt, sich aber nicht aus der Nähe der Ruhelage entfernt. Es ist stabil. Die halbkreisförmige Lösung entspricht also dem einmaligen Überschlag des Pendels, das in der Ausgangsposition, senkrecht nach oben stehend, wieder ankommt, was praktisch sehr unwahrscheinlich ist, in der Theorie aber existiert. Erläuterungen dazu finden sich auf [10, S.3f].  $\square$

In der folgenden Definition werden die Begriffe *stabil*, *asymptotisch stabil* und *instabil* mathematisch formuliert.

**Definition 4.3** Gegeben sei das Gleichgewicht  $x^*$  der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.1).

- (i) Das Gleichgewicht  $x^*$  heißt *stabil*, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon$$

für alle  $t \geq 0$  und alle Anfangswerte  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , für die  $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$  gilt, d.h. alle Anfangswerte liegen in einer Umgebung um  $x^*$ . Man bezeichnet das Gleichgewicht dann auch als *stabil im Sinne von Ljapunov*<sup>1</sup>.

- (ii) Das Gleichgewicht  $x^*$  heißt *attraktiv*, falls für alle Anfangswerte  $x_0$  aus einer offenen Umgebung  $U$  von  $x^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = x^*$$

gilt.

- (iii) Das Gleichgewicht  $x^*$  heißt *lokal asymptotisch stabil*, falls es stabil und attraktiv ist.

- (iv) Das Gleichgewicht  $x^*$  heißt *global asymptotisch stabil*, falls (ii) mit  $U = \mathbb{R}^n$  erfüllt ist.

Man bezeichnet  $U$  auch als *Stabilitätsumgebung*. □

Natürlich ist es wünschenswert, möglichst globale asymptotische Stabilität vorliegen zu haben, da hier auch große Abweichungen in den Anfangswerten wieder ausgeglichen werden. In der folgenden Abbildung sind die Begriffe aus Definition 4.3 in Anlehnung an [1] graphisch aufbereitet.

**Definition 4.4** Ein Gleichgewicht, das nicht stabil ist, heißt *instabil*, d.h. es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $\delta > 0$  ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$  und ein  $T > 0$  existiert, so dass

$$\|x(T; t_0, x_0) - x^*\| \geq \varepsilon$$

gilt. □

Neben diesen Begriffen existiert auch das Konzept der *exponentiellen Stabilität*. Für lineare Differentialgleichungen sind asymptotische Stabilität und exponentielle Stabilität äquivalent. Für die nichtlinearen Differentialgleichungen muss dies nicht unbedingt der Fall sein,

<sup>1</sup>Aleksandr M. Ljapunov (1857–1918), russische Mathematiker, führte dieses Konzept Ende des 19. Jahrhunderts ein.

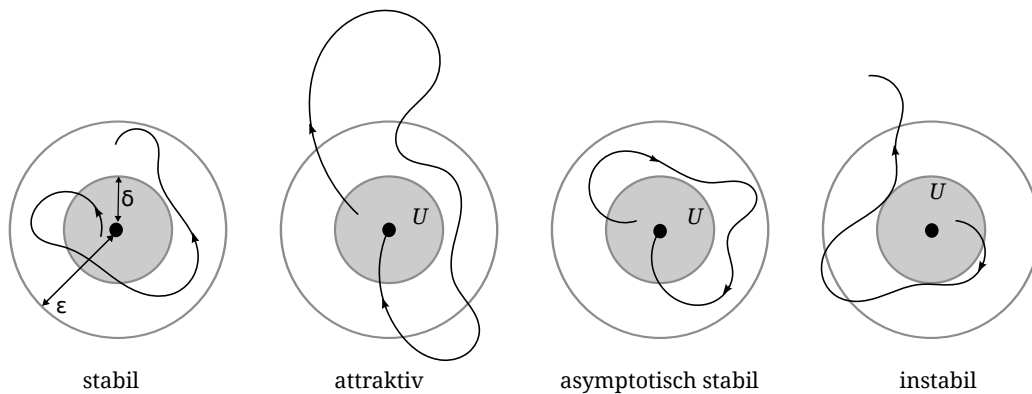


Abbildung 4.2: Unterschiedliche Stabilitätsbegriffe für ein Gleichgewicht

vgl. dazu Kapitel 2.3 aus [9]. Da in dieser Arbeit das Augenmerk auf der asymptotischen Stabilität für lineare und nichtlineare DGL liegt, werden hier nur die oben genannten Stabilitätsbegriffe benötigt.

## 4.2 Stabilitätstheorie linearer Differentialgleichungen

Um die Stabilität eines Gleichgewichts zu überprüfen, gibt es verschiedene Methoden. Speziell für lineare Differentialgleichungen lässt sich ein einfaches Kriterium formulieren. Man betrachtet für die Diskussion der Stabilität linearer autonomer Differentialgleichungen die zeitinvariante Differentialgleichung (2.4)

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Der folgende Satz ermöglicht es, die Stabilität des Gleichgewichts  $x^*$  in Abhängigkeit der Struktur der Matrix  $A$  aus der Gleichung (2.4) zu folgern. Die folgenden Erläuterungen stammen aus [10, Kap. 8] und [16, Kap. 2].

**Satz 4.5** Gegeben sei die lineare zeitinvariante DGL (2.4) für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Eigenwerte der Matrix  $A$  seien bezeichnet mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ , wobei gilt  $\lambda_l = a_l + ib_l$ . Jedem Eigenwert  $\lambda_l$  entspricht dabei ein Jordan-Block  $J_l$  in der Jordanschen Normalform. Dann gilt:

- (i) Das Gleichgewicht  $x^*$  ist genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda_l$  der Realteil nicht positiv ist, also  $a_l \leq 0$ , und alle Eigenwerte mit Realteil  $a_l = 0$  halbeinfach sind, wobei halbeinfach bedeutet, dass der zugehörige Jordanblock eindimensional ist.
- (ii) Das Gleichgewicht  $x^*$  ist genau dann lokal asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_l$  negativen Realteil  $a_l < 0$  besitzen.
- (iii) Das Gleichgewicht  $x^*$  ist genau dann instabil, wenn es einen Eigenwert  $\lambda_l$  gibt, dessen Realteil  $a_l > 0$  erfüllt.  $x^*$  ist auch dann instabil, wenn für den Realteil  $a_l = 0$  gilt und der zugehörige Jordan-Block mindestens die Größe 2 besitzt.  $\square$

**Bemerkung 4.6** Die Stabilitätseigenschaften eines Gleichgewichts verändern sich unter linearen Koordinatentransformationen nicht. Daher genügt es im Beweis die Stabilitätseigenschaften der Jordanschen Normalform  $J$  von  $A$  zu betrachten, da für diese gilt  $J = T^{-1}AT$ . Siehe dazu [8, Lemma 4.5].  $\square$

*Beweis.* An dieser Stelle werden nur die Bedingungen (i) und (ii) bewiesen. Der Beweis der Aussage 4.5(iii) ist nachzulesen in [10, Satz 8.6].

Aufgrund von Bemerkung 4.6 betrachtet man die Jordansche Normalform  $J$  von  $A$ . Die Lösungen von  $\dot{x}(t) = Jx(t)$  werden mit  $x(t; x_0)$  bezeichnet. Als Norm soll an dieser Stelle die 1-Norm verwendet werden, die durch  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  gegeben ist. Diese Wahl ist möglich, da die Stabilitätseigenschaften unabhängig von der Wahl der Norm gelten.

Die Lösung der Differentialgleichung lässt sich mit der Matrix-Exponentialfunktion schreiben als

$$x(t; x_0) = e^{Jt}x_0$$

mit  $t \geq 0$ .

Für die 1-Norm dieser Lösung gilt dann aufgrund der Blockgestalt der Jordanschen Normalform und der Tatsache, dass für eine Matrix mit Blockgestalt gilt, dass die Exponentialfunktion der Matrix durch Berechnung der Exponentialfunktion der einzelnen quadratischen Blockmatrizen ermittelt werden kann,

$$\|e^{Jt}x\|_1 = \sum_{k=1}^m \|e^{J_k t}x^{(k)}\|_1 .$$

$x^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$  bezeichnet den Teilvektor von  $x$ , der aus den zum verallgemeinerten Eigenraum des Jordan-Blockes  $J_k$  gehörenden Komponenten von  $x$  besteht.  $d_k$  hat dabei maximal den Wert der Dimension des größten Jordan-Blockes. Im nächsten Schritt wird daher die Stabilität für die einzelnen Blöcke separat analysiert. Weiterhin wird verwendet, dass  $|e^{\lambda_k t}| = e^{a_k t}$  für  $\lambda_k = a_k + ib_k$ .

Für den Jordan-Block  $J_k$  gilt

$$J_k = \lambda_k I + N,$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^{d_k}$  und

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

eine nilpotente Matrix mit  $N^{d_k} = 0$  ist. Eine Matrix  $A$  heißt dabei nilpotent, wenn sie für eine positive natürliche Zahl  $n$  die Gleichung  $A^n = 0$  erfüllt. Mit  $\lambda_k I N = N \lambda_k I$  und der Nilpotenz von  $N$  gilt für die Matrix-Exponentialfunktion die Gleichung

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} e^{N t} = e^{\lambda_k t} \left( I + t N + \dots + \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} N^{d_k-1} \right).$$

Für die durch die 1-Norm induzierte Matrixnorm folgt dann

$$\|e^{J_k t}\|_1 \leq |e^{\lambda_k t}| \|e^{N t}\|_1 \leq e^{a_k t} \left( 1 + t \|N\|_1 + \dots + \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} \|N\|_1^{d_k-1} \right).$$

Man unterscheidet für den Realteil  $a_k$  die Fälle  $a_k = 0$  und  $a_k < 0$ .

Falls  $a_k = 0$ , so ist der Jordan-Block  $J_k$  nach der Annahme aus (i) eindimensional und damit gilt  $J_k = (\lambda_k)$ . Daraus ergibt sich

$$\|e^{J_k t}\|_1 = |e^{\lambda_k t}| = e^{a_k t} = e^0 = 1.$$

Weil deswegen

$$\|x^{(k)}(t; x_0)\|_1 = \|e^{J_k t} x_0^{(k)}\|_1 \leq \|e^{J_k t}\|_1 \|x_0^{(k)}\|_1 = \|x_0^{(k)}\|_1$$

gilt, folgt die Stabilität für das Gleichgewicht  $x^*$ .

Falls  $a_k < 0$ , dann kann der Ausdruck in Klammern durch jede Exponentialfunktion dominiert werden, da es ein Polynom  $p$  in  $t$  ist. Es gilt für jedes  $\gamma > 0$  und jedes  $m \in \mathbb{N}$   $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} t^m = 0$ . Damit folgt die Ungleichung

$$e^{-\gamma t} \left( 1 + t\|N\|_1 + \cdots + \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} \|N\|_1^{d_k-1} \right) \leq c$$

für alle  $t \geq 0$  und ein geeignetes  $c > 0$ . Für jedes  $\sigma \in (0, -a_k)$  und  $\gamma = -a_k - \sigma > 0$  gilt  $e^{a_k t} = e^{-\sigma t} e^{-\gamma t}$ . Damit folgt die Ungleichung

$$\|e^{J_k t}\|_1 \leq e^{-\sigma t} e^{-\gamma t} \left( 1 + t\|N\|_1 + \cdots + \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} \|N\|_1^{d_k-1} \right) \leq c e^{-\sigma t}.$$

Daraus erhält man schließlich

$$\|e^{J_k t}\|_1 \leq c e^{-\sigma t}$$

und deswegen

$$\|x^{(k)}(t; x_0)\|_1 = \|e^{J_k t} x_0^{(k)}\|_1 \leq \|e^{J_k t}\|_1 \|x_0^{(k)}\|_1 \leq c e^{-\sigma t} \|x_0^{(k)}\|_1.$$

Damit sind die Kriterien für die erwähnte exponentielle Stabilität des Gleichgewichts erfüllt. Aus dieser folgt die asymptotische Stabilität und damit auch die Stabilität.  $\square$

Man kann das Eigenwertkriterium mittels Linearisierung im Gleichgewicht auf nichtlineare Differentialgleichungen zumindest für eine kleine Umgebung um das Gleichgewicht verallgemeinern. Generell ist das aber nicht möglich. Hier wendet man ein anderes Prinzip an, welches ebenfalls A.M. Ljapunov entwickelt hat. Im anschließenden Abschnitt wird dieses Konzept behandelt und näher ausgeführt.

### 4.3 Stabilitätstheorie nichtlinearer Differentialgleichungen

Im diesem Kapitel wird die Theorie von A.M. Ljapunov zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Differentialgleichungen vorgestellt. Stabilität wird dazu mit Hilfe von sogenannten *Vergleichsfunktionen* auf eine andere Art definiert, die den Übergang zur Definition der



Ljapunov-Funktion verständlicher macht. Das Konzept der Vergleichsfunktion im Zusammenhang mit Stabilität wird zum ersten Mal von W. Hahn in [11] verwendet. E.D. Sontag brachte es später mit der Theorie von Ljapunov und der Formulierung nichtlinearer Stabilitätseigenschaften in Verbindung. Im Weiteren wird die *Direkte Methode* von Ljapunov vorgestellt, die es erlaubt, Aussagen über das Stabilitätsverhalten einer Differentialgleichung anhand ihres Vektorfeldes zu treffen.

### 4.3.1 Vergleichsfunktionen und Ljapunov-Funktionen

Mit Vergleichsfunktionen kann man nichtlineare Differentialgleichungen im Bezug auf Stabilität in ähnlicher Weise charakterisieren wie lineare. Es gibt unterschiedliche Klassifizierungen von Vergleichsfunktionen. Folgende Definitionen und Sätze sind nachzulesen in [9]. Weitere Informationen findet man in [11, S. 7] und [11, S.97].

**Definition 4.7** Folgende Klassen von Funktionen werden im Zusammenhang mit dem Konzept der Vergleichsfunktionen wichtig:

$$\mathcal{K} := \{\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \alpha \text{ ist stetig und streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0\}$$

$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ ist unbeschränkt}\}$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma \text{ ist stetig und streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0\}$$

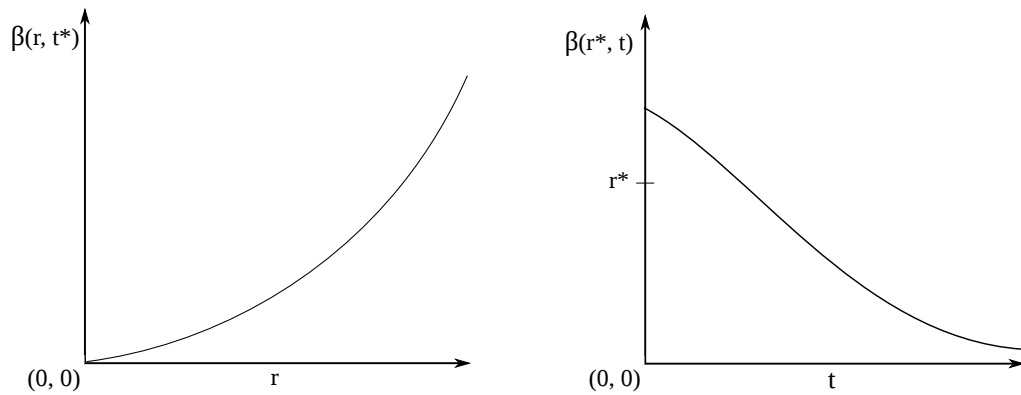
$$\mathcal{KL} := \{\beta: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \beta \text{ ist stetig, } \beta(\cdot, t^*) \in \mathcal{K} \text{ und } \beta(r^*, \cdot) \in \mathcal{L} \text{ für alle } r^*, t^* \geq 0\}$$

Für  $\beta(r, t)$  heißt das, dass sie im ersten Argument monoton steigt und im zweiten Argument monoton fällt. Im Allgemeinen gilt  $\beta(r^*, 0) \neq 0$ . □

**Bemerkung 4.8** (i) Falls  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ . Dann ist die Umkehrfunktion durch  $\alpha^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\alpha^{-1}(\alpha(r)) = r = \alpha(\alpha^{-1}(r))$  definiert und es gilt  $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ .

(ii) In der Abbildung 4.3 wird eine typische  $\mathcal{KL}$ -Funktion skizziert, die für  $r$  steigt und für  $t$  fällt. □

In der folgenden Definition wird die Stabilität einer Differentialgleichung unter Berücksichtigung von Vergleichsfunktionen definiert.

Abbildung 4.3: Eine typische  $\mathcal{KL}$ -Funktion

**Definition 4.9** Gegeben sei das Gleichgewicht  $x^*$  der Differentialgleichung (2.2).

(i)  $x^*$  heißt *stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}$  existieren mit

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \leq \alpha(\|x_0 - x^*\|) \text{ für alle } x_0 \in N, t \geq 0 .$$

(ii)  $x^*$  heißt *instabil*, falls (i) nicht gilt.

(iii)  $x^*$  heißt *lokal asymptotisch stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existieren, so dass

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \leq \beta(\|x_0 - x^*\|, t) \text{ für alle } x_0 \in N, t \geq 0$$

gilt.

(iv)  $x^*$  heißt *global asymptotisch stabil*, falls (iii) mit  $N = \mathbb{R}^n$  erfüllt ist.  $\square$

Diese Definition ist äquivalent zur Definition 4.3. So lautet die Aussage in (i), dass die Lösung in einer bestimmten Umgebung des Gleichgewichts bleibt, deren Größe abhängig von der Wahl des Anfangswerts ist. Das entspricht genau der Aussage des Unterpunktes (i) in Definition 4.3. Für die asymptotische Stabilität sagt die Definition 4.9 aus, dass der Abstand von der Lösung zum Gleichgewicht  $x^*$  für wachsende  $t$  und für einen Anfangswert  $x_0$  aus einer Umgebung von  $x^*$  kleiner wird. Das wiederum deckt sich mit Definition 4.3 (iii).

Beachte, dass die Definition der Stabilität aus (i) lokal ist. Da in dieser Arbeit aber hauptsächlich die asymptotische Stabilität im Fokus steht, wird auf die globale Definition der

Stabilität nicht näher eingegangen.

Ein zentrales Hilfsmittel zum Stabilitätsbeweis für asymptotisch stabile Differentialgleichungen ist die sogenannte *Ljapunov-Funktion*. Der besondere Vorteil des daraus entstehenden, von Ljapunov entwickelten Verfahrens ist, dass es für das Treffen einer Aussage genügt, lediglich das Vektorfeld der DGL zu analysieren. Es muss also keine explizite Lösung bekannt sein, um die Stabilität der Gleichung zu untersuchen. Aus diesem Grund bezeichnet man dieses Verfahren auch als *direkte Methode*. Das Konzept der Ljapunov-Funktionen kann man sowohl für die Stabilitätsanalyse linearer als auch nichtlinearer Differentialgleichungen verwenden.

Man beachte, dass die asymptotische Stabilität im Allgemeinen nicht verlangt, dass die Norm  $\|x\|$  einer Lösung für  $t \rightarrow \infty$  monoton abnimmt. Allerdings wären viele Anwendungen einfacher, wenn die Norm streng monoton fallen würde. Das kann man generell jedoch nicht erwarten. Der Trick ist, die euklidische Norm durch eine Ljapunov-Funktion zu ersetzen. Man ersetzt den Abstand  $\|x(t; t_0, x_0) - x^*\|$  durch eine verallgemeinerte Abstandsfunktion  $V$ , die für  $V(x(t; t_0, x_0)) = V(x(t))$  streng monoton fällt. Falls  $V$  differenzierbar ist, so kann man die strenge Monotonie auch mittels der ersten Ableitung formulieren

$$0 > \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(x(t)) = DV(x) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x(t) = DV(x)f(x).$$

**Definition 4.10** Gegeben sei die autonome Differentialgleichung (2.2) mit dem Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Eine stetige Funktion  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$  stetig differenzierbar ist, heißt *lokale Ljapunov-Funktion*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , eine stetige Funktion  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Umgebung  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  des Gleichgewichts und eine Konstante  $C > 0$  existieren, so dass  $W(x) > 0$  gilt für alle  $x \in \overline{N}$ ,  $V(x) < C$  für alle  $x \in N$  sowie  $V(x) = C$  für alle  $x \in \partial N$  und die Ungleichungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{4.1}$$

und

$$DV(x)f(x) \leq -W(x) \tag{4.2}$$

erfüllt sind für alle  $x \in N$ . Aus (4.1) folgt insbesondere, dass  $V(x^*) = 0$  ist.

$V$  heißt *globale Ljapunov-Funktion*, falls  $V$  und  $W$  die obigen Bedingungen für  $N = \mathbb{R}^n$  erfüllen, wobei die Konstante  $C = \infty$  gewählt wird.  $DV$  bezeichnet den Gradienten von  $V$ . □

Die Bedingung (4.2) sagt aus, dass die Funktion  $V(x(t))$  mit wachsendem  $t$  monoton fällt. Eine für Beweise geeignetere, allerdings in ihrer Nachprüfbarkeit anspruchsvollere Formulierung der Ungleichung (4.2), gibt das folgende Lemma.

**Lemma 4.11** Gegeben sei eine stetige Funktion  $V$ , die auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$  zweimal stetig differenzierbar ist und auf einer Umgebung  $N$  des Gleichgewichts und für ein  $C > 0$  bzw. für  $N = \mathbb{R}^n$  und  $C = \infty$  die Ungleichung (4.1) erfüllt.

Dann gibt es genau dann ein  $W$ , welches die Bedingungen der Definition 4.10 erfüllt, wenn es eine lokal Lipschitz-stetige Funktion  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gibt, so dass  $g(r) > 0$  gilt für alle  $r \in (0, C]$  bzw. alle  $r > 0$  und die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -g(V(x)) \tag{4.3}$$

gilt für alle  $x \in N$ . □

*Beweis.* Für den Beweis siehe [9, Lemma 3.2]. □

### 4.3.2 Stabilitätsanalyse mittels Ljapunov-Funktionen

Die zentrale Aussage der Theorie von Ljapunov ist im folgenden Satz festgehalten. Sie besagt, dass aus der Existenz einer wie oben definierten Ljapunov-Funktion asymptotische Stabilität des Gleichgewichts folgt. Der Satz und der zugehörige Beweis folgen dem Schema aus [5, Kap. 2.2].

**Satz 4.12** Betrachte die autonome Differentialgleichung (2.2) mit dem Gleichgewicht  $x^*$ , für das gilt  $x^* = x_0 = 0$ , d.h.  $f(0) = 0$ . Existiert eine lokale Ljapunov-Funktion  $V$  in einer Umgebung  $N$  des Gleichgewichts, die wie in Definition 4.10 mit  $g$  aus Lemma 4.11 definiert ist, dann ist das Gleichgewicht lokal asymptotisch stabil. Ist  $V$  eine globale Ljapunov-Funktion, so ist  $x^*$  global asymptotisch stabil. □

*Beweis.* Sei  $x_0 \in N$  beliebig. Da für den Beweis vor allem das Argument  $t$  von Bedeutung ist, sei  $V(t)$  im Folgenden die Kurzschreibweise für  $V(x(t; x_0))$ . Aus (4.3) folgt dann

$$\dot{V}(t) \leq -g(V(t)). \quad (4.4)$$

Eine Funktion  $r(t; r_0)$  sei definiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{r}(t) = -g(r(t)) \quad (4.5)$$

mit Anfangswert  $r_0 \geq 0$  zur Anfangszeit  $t_0 = 0$ . Diese Funktion ist eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion, denn zum einen gilt für  $r(\cdot; r_0)$ , dass die Lösung  $r(t; r_0)$  monoton fallend in  $t$  ist, da  $g(r) \geq 0$  für  $r \geq 0$  und damit  $\dot{r} \leq 0$ . Weiterhin ist die Lösung nach unten durch die Null beschränkt, da  $r = 0$  ein Gleichgewicht der DGL (4.5) ist, alle weiteren Lösungen einen Anfangswert  $r \geq 0$  besitzen und Lösungen mit unterschiedlichen Anfangswerten sich nicht schneiden. Also konvergiert  $r(t; r_0)$  gegen einen Punkt  $r^* \geq 0$ . Für  $g(r^*)$  muss gelten  $g(r^*) = 0$ , denn die Steigung der Lösung muss an diesem Punkt gleich 0 sein. Aufgrund der Definition von  $g$  gilt für  $r^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t; r_0) = r^* = 0 \text{ für alle } r_0 > 0 .$$

Damit ist  $r(t; r_0)$  eine  $\mathcal{L}$ -Funktion im ersten Argument. Außerdem folgt wiederum aus der Tatsache, dass sich Lösungen nicht schneiden können, für alle Anfangswerte  $r_1 \leq r_2$  und alle  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$r(t; r_1) \leq r(t; r_2). \quad (4.6)$$

Die Lösung  $r(t; r_0)$  steigt also monoton im zweiten Argument. Zusammen mit  $r(t; 0) = 0$  folgt, dass  $r(t; \cdot)$  eine  $\mathcal{K}$ -Funktion ist. Zusammenfassend gilt folglich  $r(t; r_0) \in \mathcal{KL}$ .

Um mit dieser Funktion zu zeigen, dass das Gleichgewicht  $x^*$  asymptotisch stabil ist, zeigt man das

$$V(t) \leq r(t; V(x_0)) \quad (4.7)$$

gilt. Denn daraus folgt dann für  $x^* = 0$

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0) - x^*\| = \|x(t; x_0)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(r(t; V(x_0))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(r(t; \alpha_2(\|x_0\|))) =: \beta(\|x_0\|, t) \end{aligned}$$

und damit die asymptotische Stabilität von  $x^*$ .

Es bleibt zu zeigen, dass (4.7) gilt. Für kleine  $\varepsilon > 0$  betrachte dazu die Funktionen  $r_\varepsilon(t; r_0)$ , die die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{r}_\varepsilon(t) = -g(r_\varepsilon(t)) + \varepsilon \quad (4.8)$$

darstellen. Der Anfangswert sei wiederum  $r_0 \geq 0$  mit Anfangszeit  $t_0 = 0$ . Es gilt die Konvergenz  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t; r_0) = r(t; r_0)$  für jedes  $t \geq 0$ , da parameterabhängige Differentialgleichungen im Parameter, hier  $\varepsilon$ , stetig sind.

Man beweist nun die Ungleichung (4.7), indem man die Gültigkeit der Ungleichung

$$V(t) \leq r_\varepsilon(t; V(x_0)) \quad (4.9)$$

für alle  $t \geq 0$  und alle  $\varepsilon > 0$  zeigt. Wegen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t; r_0) = r(t; r_0)$  folgt dann (4.7).

Sei ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  fest. Für  $t = 0$  ist (4.9) wegen  $0 \leq r_0$  erfüllt. Angenommen es existiert ein  $t^* > 0$ , so dass (4.9) nicht erfüllt ist, also

$$V(t^*) > r_\varepsilon(t^*; V(x_0)). \quad (4.10)$$

Wegen der Stetigkeit der Ausdrücke in (4.9) gibt es ein  $t_1 \in [0, t^*)$ , so dass

$$V(t_1) = r_\varepsilon(t_1; V(x_0)) \quad (4.11)$$

und

$$V(t) > r_\varepsilon(t; V(x_0)) \text{ für alle } t \in (t_1, t^*] \quad (4.12)$$

gilt. Aus (4.4), (4.8) und (4.11) folgt auf diese Weise

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x_0))) \leq -g(V(t_1)) + g(r_\varepsilon(t_1; V(x_0))) - \varepsilon = -\varepsilon < 0.$$

Aufgrund der Tatsache, dass die linke Seite dieser Abschätzung stetig in  $t$  ist, existiert ein  $t_2 \in (t_1, t^*]$ , so dass

$$\frac{d}{dt} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x_0))) < 0 \quad (4.13)$$

für alle  $t \in [t_1, t_2]$  gilt. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialgleichung folgt, dass ein  $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$  existiert mit

$$\begin{aligned} V(t_2) - r_\varepsilon(t_2; V(x_0)) &= V(t_1) - r_\varepsilon(t_1; V(x_0)) \\ &\quad + (t_2 - t_1) \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tilde{t}} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x_0))). \end{aligned}$$

Mit (4.11) und (4.13) ergibt sich daraus

$$V(t_2) - r_\varepsilon(t_2; V(x_0)) = (t_2 - t_1) \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tilde{t}} (V(t) - r_\varepsilon(t; V(x_0))) < 0$$

und damit

$$V(t_2) < r_\varepsilon(t_2; V(x_0)).$$

Dies widerspricht der Ungleichung (4.12), da  $t_2 \in (t_1, t^*]$  liegt. Demnach folgt (4.9) und infolgedessen auch (4.7), was die asymptotische Stabilität von  $x^*$  nach sich zieht. Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus Definition 4.7 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(r(t, \alpha_2(r))).$$

□

**Beispiel 4.13** Zur Veranschaulichung der im Satz 4.12 getroffenen Aussage sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 \end{aligned}$$

gegeben. Zu zeigen ist die Behauptung, dass das Gleichgewicht  $x^* = 0$  global asymptotisch stabil ist. Betrachte hierzu die Funktion  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Für  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$  erfüllt diese die Ungleichung (4.1). Weiterhin gilt wegen

$$DV(x)f(x) = (2x_1 \quad 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4 =: -W(x)$$

die Ungleichung (4.2) für  $x \in \mathbb{R}^2$ .  $V$  ist somit eine globale Ljapunov-Funktion. Mit Satz 4.12 folgt die globale asymptotische Stabilität von  $x^*$ . Die Funktion  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0$  ist in diesem

Fall gegeben durch

$$g(r) = \begin{cases} 2r^2, & \text{falls } r < 1 \\ 2r, & \text{falls } r \geq 1. \end{cases}$$

□

### 4.3.3 Bestimmung von Ljapunov-Funktionen

Die größte Schwierigkeit bei der direkten Methode von Ljapunov ist es, geeignete Kandidaten für die Funktion  $V$  zu finden. Es lässt sich aber beweisen, dass zu jedem asymptotisch stabilen Gleichgewicht eine geeignete Ljapunov-Funktion existiert. Der Beweis ist allerdings nicht konstruktiv, wie auch in [11, Kap. IV.25] nachzulesen ist. Man benötigt also andere Herangehensweisen, um Ljapunov-Funktionen zu finden. Es lässt sich allgemein keine generelle Antwort auf dieses Problem finden. Allerdings gibt es einige hilfreiche Ansätze. Eine Systematik ergibt sich aus der Tatsache, dass Ljapunov seine Theorie auf dem Problem der Regelung mechanischer Systeme aufbaute. Aus dieser physikalischen Sichtweise lassen sich die Ljapunov-Funktionen als Energie eines Systems interpretieren, da diese in der Nähe eines stabilen Gleichgewichts stetig abnimmt, vgl. [15, Kap. 2.9]. Diese Methode ist jedoch nicht immer anwendbar, beispielsweise wenn das gegebene System zu komplex ist oder keine physikalische Interpretation zulässt. Eine weitere Möglichkeit speziell für lineare Systeme wird im Anschluss an das Beispiel erläutert.

**Beispiel 4.14** Als Beispiel für die Konstruktion einer Ljapunov-Funktion anhand der Energie des gegebenen Systems sei die Gleichung für das mathematische Pendel (2.5) mit Reibung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g \sin(x_1) - kx_2 \end{pmatrix}$$

mit der Reibungskonstante  $k > 0$  und der Erdbeschleunigung  $g > 0$  gegeben<sup>2</sup>. Die Winkelposition wird beschrieben durch  $x_1$ , die Winkelgeschwindigkeit durch  $x_2$  mit  $\dot{x}_1 = x_2$ . Die Energie des Systems setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie  $\frac{\dot{x}_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}$  und der

<sup>2</sup>auch nachzulesen in [10, Kap. 9]



potentiellen Energie, die durch das Integral über die Kraft, die man benötigt, um das Pendel aus Position 0 in die Position  $x_1$  zu bewegen, gegeben ist. Damit erhält man für einen ersten Kandidaten für  $V$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos(x_1)).$$

Um zu erkennen, dass sich  $V$  so noch nicht als Ljapunov-Funktion eignet, berechnet man die erste Ableitung

$$DV(x)f(x) = \begin{pmatrix} g \sin(x_1) & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -g \sin(x_1) - kx_2 \end{pmatrix} = -kx_2^2.$$

Hier lässt sich keine Funktion  $W$  finden, so dass die Ungleichung (4.2) immer erfüllt ist, da die Ableitung für  $x_2 = 0$  ebenfalls gleich Null ist. Für  $x_2 \neq 0$  ist sie aber immerhin schon negativ.

Zur Lösung dieses Problems modifiziert man  $V$  durch Addieren eines zusätzlichen Terms. Mit etwas Überlegung und Probieren ergibt sich die Ljapunov-Funktion

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos(x_1)) + \alpha x_2 \sin(x_1).$$

$V$  ist damit für eine Umgebung  $N$  der Null eine lokale Ljapunov-Funktion. In der Grafik 4.4 wurde  $V$  für  $g = 9,81$  und  $\alpha = \frac{1}{10}$  mittels des Programm `pendel_ljapunov_plot.m` geplottet. Für eine Umgebung  $N$  existiert ein  $C \approx 19,62$ , so dass  $V(x) < C$  für alle  $x \in N$  sowie  $V(x) = C$  für alle  $x \in \partial N$ . Zusätzlich fällt  $V$  streng monoton in  $x$ ,  $V(x) > 0$  für alle  $x \in N$  und  $V(0) = 0$ . Damit ist zumindest graphisch gezeigt, dass  $V$  eine lokale Ljapunov-Funktion für das Gleichgewicht  $x^* = (0, 0)$  ist und  $x^*$  lokal asymptotisch stabil ist.  $\square$

**Konstruktion einer Ljapunov-Funktion für lineare DGL-Systeme.** Im Allgemeinen ist es schwer, eine geeignete Ljapunov-Funktion für ein gegebenes Differentialgleichungssystem zu finden. Für lineare Systeme kann man oft die sogenannten *quadratischen Ljapunov-Funktionen* verwenden. Die folgende Definition und anschließende Sätze stammen aus [4, Kap. 3.3].

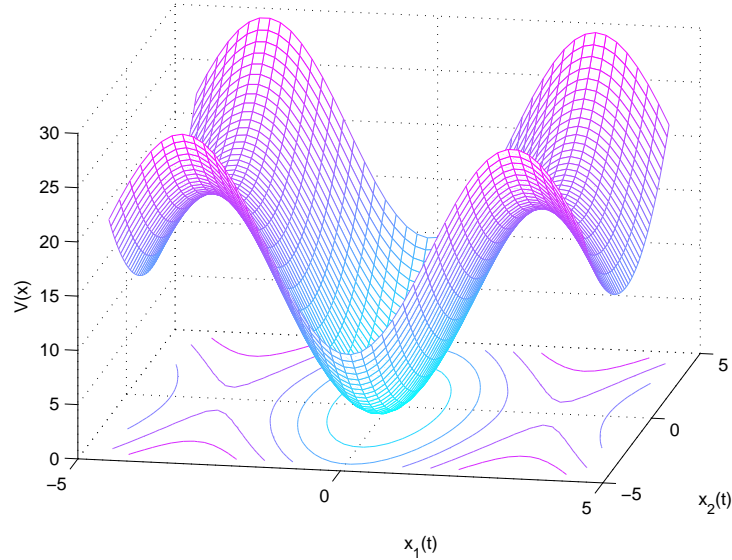


Abbildung 4.4: Ljapunov-Funktion für das Gleichgewicht  $(0, 0)$  der Pendelgleichung mit Reibung

**Definition 4.15** Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  der Differentialgleichung (2.4). Eine stetig differenzierbare Funktion  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt *quadratische Ljapunov-Funktion* für  $A$ , falls es positive reelle Konstanten  $c_1, c_2, c_3 > 0$  gibt, so dass die Ungleichungen

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$$

und

$$DV(x) \cdot Ax \leq -c_3 \|x\|^2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllt sind. □

Eine spezielle Klasse bilden die Ljapunov-Funktionen, bei denen  $V$  durch eine Bilinearform der Form  $x^T P x$  mit  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dargestellt werden kann. Die Aussage des nächsten Lemmas ist, dass eine solche Bilinearform tatsächlich aufgrund ihrer Eigenschaften ein Kandidat für eine Ljapunov-Funktion ist. Die Beweise der folgenden Lemmata findet man in [4, Kap. 3.3].

**Lemma 4.16** Sei  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben. Dann gilt:

(i) Es existiert eine Konstante  $c_2 < 0$ , so dass

$$-c_2 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq c_2 \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii)  $P$  ist genau dann positiv definit, wenn es eine Konstante  $c_1 > 0$  gibt, so dass

$$c_1 \|x\|^2 \leq x^T P x$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllt ist. *Positiv definit* bedeutet für eine Matrix  $P$ , dass  $x^T P x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 4.17** Für lineare Systeme gilt insbesondere, dass die Existenz einer quadratischen Ljapunov-Funktion wie in Definition 4.15 sogar die exponentielle Stabilität der Matrix  $A$  und damit des Gleichgewichts der DGL nach sich zieht, vgl. hierzu [4, Satz 3.8].  $\square$

Auch für bilineare Ljapunov-Funktionen  $V = x^T P x$  ist die geforderte strenge Monotonie erfüllt und es gilt ebenfalls, dass aus der Existenz einer solchen Funktion  $V$  die asymptotische Stabilität der Matrix  $A$  bzw. des betrachteten Gleichgewichts folgt und umgekehrt, was das anschließende Lemma festhält.

**Lemma 4.18** Seien  $A, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben und  $c_3 > 0$  so gewählt, dass die Funktion  $V(x) = x^T P x$  die Ungleichung

$$DV(x) \cdot Ax \leq -c_3 \|x\|^2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllt. Dann ist  $P$  genau dann positiv definit, wenn  $A$  asymptotisch stabil ist, d.h. wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  negative Realteile besitzen. In diesem Fall ist  $V$  eine quadratische Ljapunov-Funktion.  $\square$

Die Bedingung des Lemmas 4.18 ist genau dann erfüllt, wenn eine Matrix  $C$ , gegeben durch  $C = -A^T P - PA$ , für ein gegebenes  $P$  positiv definit ist. Man nennt die Gleichung  $C = -A^T P - PA$  auch *Ljapunov-Gleichung*. Mit ihrer Hilfe kann man Ljapunov-Funktionen konstruieren, indem man sich eine positiv definite Matrix  $C$  vorgibt und  $P$  dazu berechnet. Eine eindeutige positiv definite Matrix  $P$  erhält man dann und nur dann, wenn die Matrix  $A$  exponentiell stabil ist. Außerdem muss  $P$  nach [11, Kap. 27] eine Determinante besitzen, die nicht Null ist, sonst kann man es nicht bestimmen. Die entsprechenden Lemmata und Beweise sind nachzulesen bei [4, Kap. 3.3].

Folgender Satz, der ebenfalls aus [4, Kap. 3.3] zitiert wird, zeigt, dass die Existenz einer quadratischen Ljapunov-Funktion notwendig und hinreichend für die exponentielle Stabilität

von  $A$  ist und damit tatsächlich eine zum Eigenwertkriterium äquivalente Bedingung liefert. Weitere Informationen liefert [11, Satz 27.1.] und [16, Lemma B.12].

**Satz 4.19** Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt: Eine quadratische Ljapunov-Funktion für die lineare Differentialgleichung (2.4) existiert genau dann, wenn die Matrix  $A$  exponentiell stabil ist.  $\square$

*Beweis.* Siehe [4].  $\square$

Durch Linearisierung im Gleichgewicht kann man nun auch ein äquivalentes Stabilitätskriterium für nichtlineare DGL Systeme formulieren. Stabilität lässt sich dann lokal nachweisen, indem man Stabilitätsbedingungen an das Gleichgewicht der Linearisierung stellt und so das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichts der nichtlinearen DGL in einer bestimmten Umgebung herleitet. Den entsprechenden Satz findet man ausführlich in [10, Kap. 9.4].

## 4.4 Ein Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell

Im Kapitel 2 wurden zur Veranschaulichung einfache Populationsdynamiken mit Differentialgleichungen mathematisch modelliert. Die dort gefundene Modellierung ist zwar beispielsweise für Bakterienstämme eine sehr realitätsnahe Abbildung, für Tierpopulationen hingegen eher ungeeignet, da es natürliche Mechanismen wie „Fressen und gefressen werden“, Konkurrenz unter verschiedenen Arten und variable Umweltbedingungen, wie zum Beispiel Jahreszeiten nicht berücksichtigt. Ein Modell, das der Realität schon ein Stück näher kommt, haben die zwei Mathematiker Alfred J. Lotka<sup>3</sup> und Vito Volterra<sup>4</sup> unabhängig voneinander entwickelt. In diesem Modell werden zwei Tierpopulationen in einem System betrachtet, wobei die eine Art, die Beute, die Nahrung der anderen Art, der Räuber, darstellt. Nachstehend wird das einfachste dieser nach den Erfindern benannten *Lotka-Volterra-Modelle* vorgestellt. Man nennt dieses Modell auch das *Räuber-Beute-Modell*. In detaillierteren Abhandlungen wird auch die Konkurrenz von mehr als zwei Arten berücksichtigt. Diese soll in dieser Arbeit aber nicht weiter vertieft werden.

---

<sup>3</sup>amerikanischer Chemiker und Mathematiker, 1880 - 1949

<sup>4</sup>italienischer Physiker und Mathematiker, 1860 - 1940

Die Größe der Beutepopulation ist gegeben durch  $x_1$ , die Größe der Räuberpopulation durch  $x_2$ . Es wird die Annahme getroffen, dass sich  $x_1$  im Modell linear proportional zur aktuellen Größe des Bestands entwickelt, d.h. es gilt

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 \quad (4.14)$$

mit einer Wachstumsrate  $\lambda = \gamma - \sigma$ . Die Geburtenrate  $\gamma$  sei konstant. Für die Sterberate  $\sigma$  gelte  $\sigma = \tilde{\sigma} + bx_2$ , wobei  $\tilde{\sigma} \in (0, \gamma)$  die Rate der Sterbefälle der Beutepopulation aufgrund eines natürlichen Todes bezeichnet und  $bx_2$  mit  $b > 0$  für den Tod durch Räuber steht. Diese Rate steigt proportional zur Größe der Räuberpopulation  $x_2$ . Man beachte, dass die Beutepopulation unbegrenzte Ressourcen zur Verfügung hat und ohne Räuber, d.h.  $x_2 = 0$ , exponentiell wächst. Sei deshalb  $a = \gamma - \tilde{\sigma} > 0$ .

Die Räuber  $x_2$  verhalten sich ebenfalls gemäß der Gleichung (4.14) mit  $\lambda = \gamma - \sigma$ . Hier bezeichnet  $\sigma$  wieder die Sterberate, die als konstant angenommen wird. Die Geburtenrate  $\gamma$  ist diesmal affin linear abhängig von der Population der Beute, es gilt  $\gamma = \tilde{\gamma} + dx_1$ , wobei  $\tilde{\gamma} \in (0, \sigma)$  die natürliche Reproduktionsrate beschreibt und  $dx_1$ ,  $d > 0$  den Vermehrungseffekt durch eine größere Beutepopulation bezeichnet. Die Räuber sterben für  $x_1 = 0$  aus, da dann  $\sigma > \tilde{\gamma}$  ist. Man setzt daher  $c = \sigma - \tilde{\gamma} > 0$  als Faktor vor  $x_2$ .

Aus diesen Annahmen ergibt sich das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a x_1(t) - b x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -c x_2(t) + d x_1(t)x_2(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit den Parametern  $a, b, c, d > 0$ . Um die weitere Analyse zu vereinfachen, kann man (4.15) durch Koordinatentransformation  $x_1 \rightarrow \frac{d}{c}x_1$  und  $x_2 \rightarrow \frac{b}{a}x_2$  schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a x_1(t)(1 - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -c x_2(t)(1 - x_1(t)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Durch Nullsetzen der rechten Seite erhält man die konstanten Lösungen der DGL. Die einzigen Gleichgewichtspunkte sind damit gegeben durch

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Stabilität der Gleichgewichte zu untersuchen, berechnet man die Linearisierung von (4.16) in  $x^*$  und  $x^+$ . Es folgt

$$Df(x^*) = \begin{pmatrix} a(1-x_2^*) & -ax_1^* \\ cx_2^* & -c(1-x_1^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Df(x^+) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

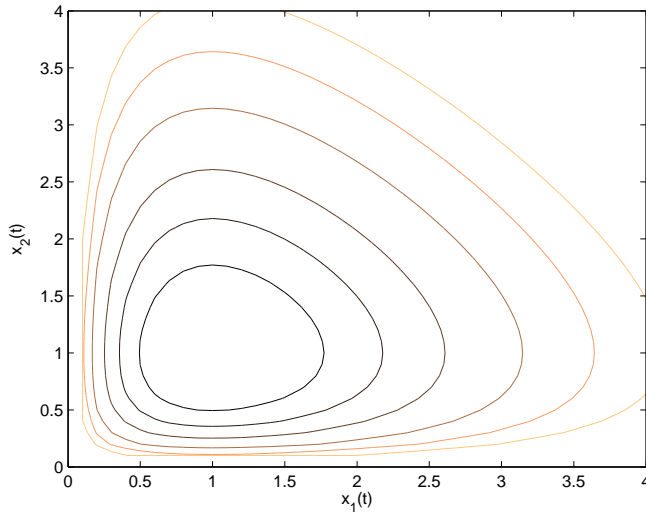
Die Eigenwerte von  $Df(x^*)$  sind damit durch  $a$  und  $-c$  gegeben, während die Matrix  $Df(x^+)$  die Eigenwerte  $\pm i\sqrt{ca}$  besitzt. Für  $x^*$  folgt nach Satz 4.5, dass es instabil ist. Dies kann man leicht erklären. Für Anfangswerte  $x_0 = (x_1, 0)^T$  wächst der Betrag der Lösung exponentiell, d.h. er läuft sehr schnell von  $x^* = 0$  weg. Die Menge aller Anfangswerte, für die dieses Verhalten auftritt, entspricht der  $x_1$ -Achse. Auf der anderen Seite laufen die Lösungen für Anfangswerte  $x_0 = (0, x_2)^T$  exponentiell auf das Gleichgewicht  $x^*$  zu. Das entspricht dem Aussterben der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist. Die Menge aller solchen Punkte ist hier durch die  $x_2$ -Achse gegeben.

Für  $x^+$  besitzen beide Eigenwerte Realteile = 0. Um nach Satz 4.5 eine eindeutige Aussage treffen zu können, betrachtet man zuerst die zugehörigen Jordanblöcke. Die Jordansche Normalform sieht wie folgt aus:

$$J = \begin{pmatrix} -i\sqrt{a}\sqrt{c} & 0 \\ 0 & i\sqrt{a}\sqrt{c} \end{pmatrix}.$$

Damit ist der zu jedem Eigenwert gehörende Jordanblock eindimensional und das Gleichgewicht  $x^+$  stabil. In diesem Fall gilt außerdem, dass die Lösungen, die in der Nähe von  $x^+$  um genau zu sein im positiven ersten Quadranten, beginnen, in periodischen Bahnen um  $x^+$  herumlaufen. Beachte, dass sich Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung aufgrund der Eindeutigkeit nicht schneiden. Somit bleibt jede Lösung, die im ersten Quadranten beginnt, auch im ersten Quadranten, da sie sonst die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse schneiden würden. Der positive Quadrant wird daher auch als *invariante Menge* bezeichnet.

Diese in Abbildung 4.5 dargestellten nicht konstanten Lösungen von (4.16) erhält man mit Hilfe eines sogenannten ersten Integrals, auch Erhaltungsgröße genannt. Ein erstes Integral findet man nur für exakte Differentialgleichungen. Eine kurze Erklärung dieser beiden Begriffe ist im Anhang A aufgeführt. Die Lösungen sind periodisch, wie man in Abbildung 4.5


 Abbildung 4.5: Lösungskurven von (4.16) mit  $a = c = 1$ 

sieht. Das lässt sich auch aus einer genaueren Analyse des Vektorfeldes folgern, siehe dazu [7]. Die Abbildung 4.5 wurde mit der Matlab-Datei `lv_unbeschaenkt.m` erzeugt.

Die Herleitung des ersten Integrals dieses Beispiels wird ausführlich in [1, Kap. 5.1, Beispiel 5.1.12] sowie in [7, Anhang A] erläutert.

Aus der Konstruktion ergibt sich die Funktion

$$V(x) = cx_1 - c \ln x_1 + ax_2 - a \ln x_2, \quad (4.17)$$

die konstant entlang der Lösungen ist und den Definitionsbereich  $D_V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  besitzt.

Es gilt also

$$V(x(t; x_0)) = V(x_0) \text{ für alle } t \geq 0$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}V(x(t; x_0)) = 0.$$

Denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= DV(x(t))\dot{x}(t) \\ &= \left(c - \frac{c}{x_1} \quad a - \frac{a}{x_2}\right) \begin{pmatrix} ax_1(1-x_2) \\ -cx_2(1-x_1) \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktion  $V$  ist in Abbildung 4.6 dargestellt, die mit `lv_ljapunov.m` erstellt wurde. Es ist deutlich zu erkennen, dass  $V(x^+) = 0$  und für alle  $x \in D_V$  positive Werte annimmt. Ebenfalls sind die Niveaulinien von  $V$  in der Grafik enthalten. Diese entsprechen genau dem Bild der Abbildung 4.5 ganz im Sinne der Herleitung von  $V$  als erstes Integral, mit dessen Hilfe man nicht konstante Lösungen berechnen kann.

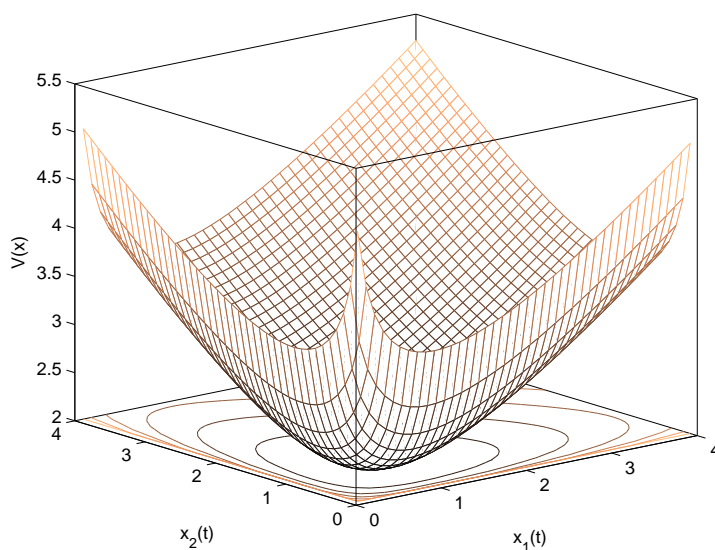


Abbildung 4.6: Die Funktion  $V$  und Niveaulinien für (4.16) mit  $a = c = 1$



# 5 Stabilitätsanalyse numerischer Verfahren mit Hilfe von Ljapunov-Funktionen

Bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen erhält man durch Diskretisierung *diskrete Systeme*. Auch hier ist die Theorie für nichtautonome Differentialgleichungen wesentlich anspruchsvoller als die für den autonomen Fall. Auf der letzteren liegt daher der Fokus in diesem Kapitel. Die Theorie stimmt in weiten Teilen mit der Theorie der kontinuierlichen Differentialgleichungen überein.

In diesem Zusammenhang werden im Folgenden die Begriffe *asymptotische Stabilität* und *Ljapunov-Funktion* für diskrete Systeme behandelt. Weiterhin wird an den Begriff der A-Stabilität eines numerischen Verfahrens für lineare Differentialgleichungen erinnert. Daraufhin wird die Frage geklärt, ob es numerische Verfahren gibt, die die asymptotische Stabilität einer nichtlinearen Differentialgleichung an ihre Approximation vererben und welche Bedingungen sie erfüllen müssen. Das implizite Euler-Verfahren ist ein solches Verfahren, das unter der Einschränkung, dass die Ljapunov-Funktion der DGL konvex ist, die Stabilitätseigenschaften der DGL erhält. Im Weiteren wird auch die implizite Mittelpunktsregel untersucht. Auch dieses Verfahren bringt die Eigenschaft mit sich, Stabilitätseigenschaften zu vererben, allerdings unter zusätzlichen Bedingungen, wie im Folgenden diskutiert wird.

## 5.1 Stabilitätsbegriffe für diskrete Systeme

Da weiterhin ausschließlich autonome Differentialgleichungen betrachtet werden, wird für das numerische Verfahren anstelle der ausführlichen Notation  $\Phi(t, x, h)$  die Kurzschreibweise  $\Phi(x, h)$  verwendet. Für diskrete Systeme ist ein Gleichgewicht der Differentialgleichung ein Fixpunkt der Rekursionsgleichung des diskreten Systems

$$x(t_{i+1}) = \Phi(x(t_i), h).$$

Analog zur Definition der asymptotischen Stabilität eines Gleichgewichts einer kontinuierlichen DGL ist ein Fixpunkt eines diskreten Systems genau dann *asymptotisch stabil*, wenn er stabil und attraktiv ist. Diese beiden Begriffe werden äquivalent zur kontinuierlichen Definition verwendet, nur für diskrete Zeitpunkte  $t_j$ .

Den aus Kapitel 4 bekannten Satz 4.12 zum Nachweis der asymptotischen Stabilität einer Ruhelage mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion kann man für diskrete Systeme sinngemäß durch eine kleine Änderung der Anforderung an diese Funktion formulieren.

**Definition 5.1** Eine stetige Funktion  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Ljapunov-Funktion für eine *diskrete Approximation*  $\Phi(x, h)$ , wenn sie die Bedingungen aus Definition 4.10 mit  $g$  wie in Lemma 4.11 erfüllt. Jedoch gilt anstelle der Ungleichung  $DV(x)f(x) \leq -g(V(x))$  für die diskrete Ljapunov-Funktion die Ungleichung

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - hg(V(x)) \tag{5.1}$$

für alle  $x \in N \subset \mathbb{R}^n$ . □

Der folgende Satz zeigt, dass mit einer so definierten Ljapunov-Funktion die asymptotische Stabilität für ein diskretes System nachgewiesen werden kann. Der Satz und der zugehörige Beweis stammen aus [5, Kap. 2].

**Satz 5.2** Gegeben sei eine Approximation  $\Phi$  für die autonome Differentialgleichung (2.2) mit Fixpunkt  $x^* = x_0 = 0$ , d.h.  $\Phi(0, h) = 0$ . Es existiere eine lokale Ljapunov-Funktion  $V$ , die wie in Definition 5.1 definiert ist. Dann ist das Gleichgewicht bzw. der Fixpunkt der

diskreten Gleichung lokal asymptotisch stabil. Ist  $V$  eine globale Ljapunov-Funktion, dann ist  $x^*$  global asymptotisch stabil.  $\square$

*Beweis.* Für den Beweis muss man die Funktion  $g$  etwas abändern. Wähle

$$\tilde{g}(r) = \inf_{s \in \mathbb{R}} \left\{ g(s) + \frac{|r - s|}{h} \right\} .$$

Für  $\tilde{g}$  gilt offensichtlich, dass  $\tilde{g}(r) \leq g(r)$  und  $\tilde{g}(r) > 0$  für  $r > 0$ . Für das weitere Vorgehen betrachtet man für jedes  $r \in \mathbb{R}$  und beliebiges  $\varepsilon > 0$  einen Punkt  $s^*(r, \varepsilon)$ , in dem  $\tilde{g}$  das Infimum bis auf  $\varepsilon$  annimmt. Folglich gilt

$$\tilde{g}(r) \geq g(s^*(r, \varepsilon)) + \frac{|r - s^*(r, \varepsilon)|}{h} - \varepsilon .$$

Für alle  $r_1, r_2$  ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r_1) - \tilde{g}(r_2) &\leq g(s^*(r_2, \varepsilon)) + \frac{|r_1 - s^*(r_2, \varepsilon)|}{h} - g(s^*(r_2, \varepsilon)) - \frac{|r_2 - s^*(r_2, \varepsilon)|}{h} + \varepsilon \\ &= \frac{|r_1 - s^*(r_2, \varepsilon)| - |r_2 - s^*(r_2, \varepsilon)|}{h} + \varepsilon \leq \frac{1}{h} |r_1 - r_2| + \varepsilon \end{aligned}$$

gültig, wobei  $\tilde{g}$  hier für  $s^*(r_2, \varepsilon)$  das Infimum annimmt. Da die Abschätzung symmetrisch in  $r_1$  und  $r_2$  ist und  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt, dass  $\tilde{g}$  Lipschitz-stetig ist mit globaler Konstante  $\frac{1}{h}$ .

Man betrachtet nun die Lösungen  $r(t, x)$  der folgenden Differenzgleichung

$$r(t + h; r_0) = r(t; r_0) - h\tilde{g}(r(t; r_0)).$$

Die Lösungsfolge fällt also für jeden Anfangswert  $r_0 := r(0, r_0)$  monoton und ist nach unten beschränkt, da  $\tilde{g}(r) = 0$  für  $r \leq 0$  nach Definition von  $g$ . Deswegen konvergiert sie gegen ein  $r^* \leq r_0$ . Da  $\tilde{g}$  stetig ist, muss dieses  $r^*$  ein Fixpunkt von  $r(t; x)$  sein. Weiter gilt, dass alle Fixpunkte von  $r(t; x)$  Nullstellen von  $g$  sind, damit muss  $r^* \leq 0$  sein.

Für alle  $r_1 \leq r_2$  folgt mit der Lipschitz-Stetigkeit von  $\tilde{g}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} r_1 - h\tilde{g}(r_1) &= r_1 - h(\tilde{g}(r_1) - \tilde{g}(r_2)) - h\tilde{g}(r_2) \\ &\leq r_1 - h\tilde{g}(r_2) + \underbrace{|r_1 - r_2|}_{=r_2-r_1} \\ &\leq r_2 - h\tilde{g}(r_2) . \end{aligned}$$

Per Induktion über  $t$  erhält man die schon aus dem Beweis des kontinuierlichen Falls bekannte Ungleichung für alle  $r_1 \leq r_2$

$$r(t_i; r_1) \leq r(t_i; r_2) \text{ und für alle } t_i = ih, i \in \mathbb{N}_0.$$

Man beweist schließlich mittels Induktion die Eigenschaft

$$V(t_i) \leq r(t_i; V(x)),$$

für alle  $t_i \geq 0$ , wobei man berücksichtigt, dass  $\tilde{g}(r) \leq g(r)$  ist. Ab hier verläuft der Beweis analog zur kontinuierlichen Version in Kapitel 4.  $\square$

Die Gleichung (5.1) muss also von allen für diskrete Systeme definierten Ljapunov-Funktionen erfüllt werden, während (4.2) für die kontinuierlichen gelten muss.

## 5.2 Vererbung von Stabilitätseigenschaften bei linearen Differentialgleichungen

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Stabilitätsanalyse der Diskretisierung linearer Differentialgleichungen. Er orientiert sich in Aufbau und Inhalt an [7, Kap. 6]. Ergänzende Informationen stammen aus [3].

Für die Klasse der linearen zeitinvarianten Differentialgleichungen (2.4) sind die durch Runge-Kutta-Verfahren, wie beispielsweise die implizite Mittelpunktsregel und das implizite Euler-Verfahren, erzeugten approximativen Lösungen mit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von der Form

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i + h) = \tilde{A}\tilde{x}(t_i). \quad (5.2)$$

Man nennt sie auch *lineare zeitinvariante Differenzengleichung*. Die Lösung sei mit  $\tilde{x}(t; x_0)$  bezeichnet, wobei  $\tilde{x}(0) = x_0$  ist und  $t$  ein Vielfaches von  $h$  ist. Offensichtlich gilt

$$\tilde{x}(ih; x_0) = \tilde{A}^i x_0.$$

Lediglich für diese Systeme wurden bisher allgemeingültige Resultate zur Stabilitätsuntersuchung gefunden, während für die Analyse von nichtlinearen autonomen Systemen nur vereinzelt Aussagen getroffen werden konnten. Weiteres dazu findet sich im Abschnitt 5.3. Für eine Funktion  $R$  formuliert man den Zusammenhang zwischen  $A$  und  $\tilde{A}$  wie folgt:

**Lemma 5.3** Für jedes  $s$ -stufige Runge-Kutta-Verfahren lässt sich die Matrix  $\tilde{A}$  in (5.2) schreiben als

$$\tilde{A} = R(hA) .$$

□

Der Beweis dieser und die Beweise der folgenden Aussagen sind nachzulesen in [7, Kap. 6], an dessen Inhalt und Struktur sich dieser Abschnitt orientiert.

Im Rahmen dieser Arbeit genügt es, komplexwertige Argumente  $z \in \mathbb{C}$  zu betrachten. Für diese existiert eine explizite Formel für  $R(z)$ , die gegeben ist durch

$$R(z) = 1 + zb^T(\text{Id} - zA)^{-1}\mathbf{e}$$

mit  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$ .  $\text{Id} \in \mathbb{R}^{s \times s}$  bezeichnet die Einheitsmatrix, wobei  $s$  die Stufenanzahl des zugrundeliegenden Runge-Kutta-Verfahrens darstellt. Die Koeffizienten des betrachteten Runge-Kutta-Verfahrens werden hier in Form des Vektors  $b = (b_1, \dots, b_s)^T$  und der Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,s}$  berücksichtigt. Man bezeichnet  $R$  für komplexe Argumente als *Stabilitätsfunktion*.

**Bemerkung 5.4** Es ergeben sich so für das explizite Euler-Verfahren die Stabilitätsfunktion  $R(z) = 1 - z$  und für das implizite Euler-Verfahren  $R(z) = \frac{1}{1-z}$ . Für die implizite Mittelpunkregel gilt  $R(z) = (1 + \frac{z}{2}) / (1 - \frac{z}{2})$ . □

Der folgende Satz klärt nun, wie asymptotische Stabilität anhand der Matrizen  $A$  und  $\tilde{A}$  erkennbar ist. Der Realteil der komplexen Zahl  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ist dabei mit  $\text{Re}(z) = a$  bezeichnet. Der Betrag von  $z$  ist gegeben durch  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Satz 5.5** (i) Das Gleichgewicht der Differentialgleichung (2.4) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  die Ungleichung

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0$$

erfüllen.

- (ii) Das Gleichgewicht der linearen zeitinvarianten Differenzgleichung (5.2) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_i$  der Matrix  $\tilde{A}$  gilt

$$|\tilde{\lambda}_i| < 1 .$$

□

Sei mit  $\Sigma(A) = \{\lambda_i \mid \lambda_i \text{ ist ein Eigenwert von } A\}$  das Spektrum von  $A$ , also die Menge aller Eigenwerte, bezeichnet. Damit lassen sich äquivalente Aussagen zu den Kriterien aus Satz 5.5 formulieren. Das Gleichgewicht der DGL ist nämlich genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Eigenwerte von  $A$

$$\Sigma(A) \subset \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

gilt, während bei der Differenzgleichung für die asymptotische Stabilität

$$\Sigma(\tilde{A}) \subset B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

erfüllt sein muss.

Zu klären bleibt letztlich, unter welchen Umständen bzw. Bedingungen an  $A$  die Stabilitätseigenschaften der Differentialgleichung bei der durch das numerische Verfahren berechneten Approximation erhalten bleiben. Mit der Tatsache, dass  $\lambda_i$  genau dann ein Eigenwert von  $A$  ist, wenn  $h\lambda_i$  ein Eigenwert von  $hA$  ist, folgt, dass

$$\Sigma(A) \subset \mathbb{C}^- \Leftrightarrow \Sigma(hA) \subset \mathbb{C}^- \text{ für alle } h > 0$$

gilt. Diese Aussage motiviert die folgende Definition.

**Definition 5.6** Das *Stabilitätsgebiet*  $\mathcal{S}$  eines Runge-Kutta-Verfahrens mit Stabilitätsfunktion  $R$  ist gegeben durch die Menge

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| < 1\} .$$

Diese ist gerade die maximale Teilmenge der komplexen Zahlen, die die Folgerung

$$\Sigma(hA) \subset \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \Sigma(R(hA)) \subset B_1(0)$$

erfüllen.

□

Das Stabilitätsgebiet ist eine Menge, die eine wichtige Rolle in der Vererbung von Stabilitätseigenschaften spielt. Liegen die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $hA$  ausschließlich in dieser Menge, so ist die Differenzgleichung (5.2) mit  $\tilde{A} = R(hA)$  asymptotisch stabil, wenn die zugrundeliegende Differentialgleichung es war.

Wenn  $A$  asymptotisch stabil ist, bedeutet dies, dass die Schrittweite  $h$  so gewählt werden muss, dass die Eigenwerte von  $hA$  in  $\mathcal{S}$  liegen, um eine korrekte numerische Approximation zu erhalten. Für das explizite Euler-Verfahren mit  $R(z) = 1 + z$  muss gelten

$$|R(z)| < 1 \Leftrightarrow |1 + z| < 1.$$

Man erhält so das Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_{eE} = \{z \in \mathbb{C} \mid |1 + z| < 1\}.$$

Das entspricht genau dem offenen Ball  $B_1(-1)$  mit Radius 1 und Mittelpunkt  $-1$ . Für das implizite Euler-Verfahren erhält man

$$\mathcal{S}_{iE} = \{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z| > 1\}.$$

Folglich schließt das Stabilitätsgebiet dieses Verfahrens den gesamten Raum der komplexen Zahlen bis auf den offenen Ball  $B_1(1)$  ein. Durch kurze Rechnung findet man für die implizite Mittelpunktsregel das Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\} = \mathbb{C}^-.$$

Alle Gebiete sind in der Abbildung 5.1 dargestellt.

**Definition 5.7** Ein Verfahren zur Approximation der Lösung einer Differentialgleichung, dessen Stabilitätsgebiet  $\mathcal{S}$  die Bedingung

$$\mathbb{C}^- \subset \mathcal{S}$$

erfüllt, heißt *A-stabil*.

□

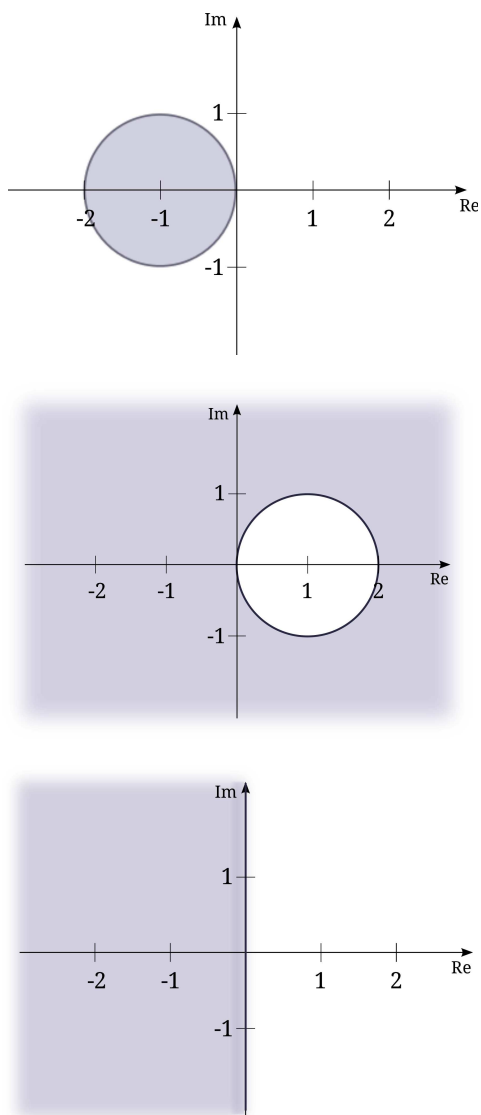


Abbildung 5.1: Stabilitätsgebiete (schraffiert) für das explizite Euler- (oben), das implizite Euler-Verfahren (Mitte) und die implizite Mittelpunktsregel (unten)

Anders gesagt, muss man bei der Verwendung eines A-stabilen Verfahrens keinerlei Restriktionen bezüglich der Schrittweite  $h > 0$  beachten. Denn  $\mathcal{S}$  enthält hier genau die Menge der Eigenwerte, für die die exakte Lösung ebenfalls asymptotisch stabil ist. Die Schrittweite kann beliebig gewählt werden. Anschaulich gilt, je weiter  $\mathcal{S}$  die Menge  $\mathbb{C}^-$  überdeckt, desto geringer sind die Anforderungen an  $h$ .



Offensichtlich sind das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel A-stabil, wie die Abbildung 5.1 zeigt. Die A-Stabilität an sich ist zwar für steife Differentialgleichungen eine wichtige Eigenschaft des verwendeten Verfahren, allgemein ist sie allerdings weder als positiv noch als negativ einzustufen. Denn es kann passieren, dass die numerische Approximation asymptotisch stabil ist, obwohl die exakte Lösung der DGL es nicht ist. Bei der impliziten Mittelpunktsregel kann das nicht vorkommen, denn sie ist isometrieerhaltend, d.h. ihr Stabilitätsgebiet entspricht genau der negativen komplexen Halbebene,  $\mathcal{S} = \mathbb{C}^-$ , und lässt es somit nicht zu, dass durch Diskretisierung neue stabile Fixpunkte entstehen. Näheres ist nachzulesen in [3].

### 5.3 Vererbung von Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen I

In diesem Abschnitt wird die Frage geklärt, ob es auch für nichtlineare Differentialgleichungen ein Kriterium gibt, welches sicherstellt, dass die Stabilität der exakten Lösung für die Approximation erhalten bleibt. Für das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel, die, wie schon gesehen, für lineare Differentialgleichungen A-stabil sind, kann ein solches Kriterium formuliert werden. Dieses stellt eine Verallgemeinerung der A-Stabilität dar. Dieser Abschnitt folgt in Inhalt und Aufbau dem Abschnitt 4.8 aus [5].

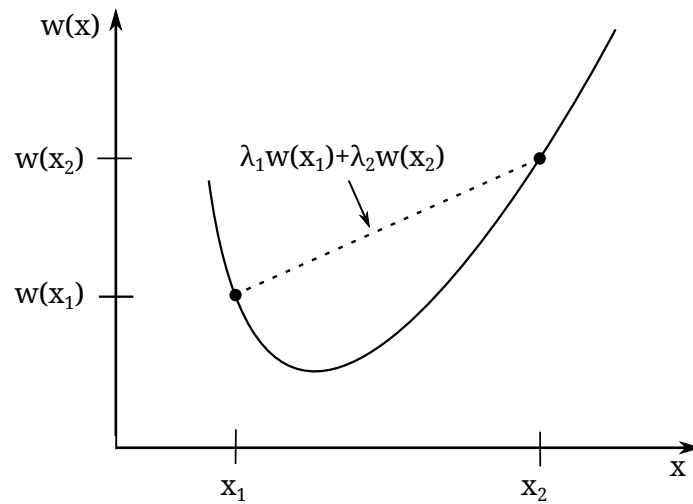
Zuallererst greift man auf den Begriff der Konvexität aus der Analysis zurück:

**Definition 5.8** Eine Funktion  $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, falls für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  und alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$w(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 w(x_1) + \lambda_2 w(x_2)$$

gilt. □

Das bedeutet, dass jede durch zwei Punkte der Funktion  $w$  festgelegte lineare Funktion die Funktion  $w$  von oben beschränkt. In der Abbildung 5.2 ist dies veranschaulicht.

Abbildung 5.2: Beispiel einer konvexen Funktion im  $\mathbb{R}^2$ 

Im Hinblick auf den Beweis des anschließenden Satzes sei an die folgende Eigenschaft einer konvexen Funktion erinnert.

**Lemma 5.9** Eine konvexe Funktion  $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  erfüllt für alle  $y, z \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$w(y + z) \geq w(y) + Dw(y)z,$$

wobei  $Dw(y)z$  die Richtungsableitung der Funktion  $w$  nach  $z$  bezeichnet.  $\square$

*Beweis.* Aufgrund der Definition der Richtungsableitung gilt

$$Dw(y)z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(y + hz) - w(y)}{h}.$$

Aus der Konvexität von  $w$  folgt

$$w(y + hz) = w(y - hy + hy + hz) = w((1 - h)y + h(y + z)) \leq (1 - h)w(y) + hw(y + z)$$

mit  $\lambda_1 = 1 - h$  und  $\lambda_2 = h$  für jedes  $h \in [0, 1]$ . Somit erhält man

$$w(y + z) \geq \frac{w(y + hz) - (1 - h)w(y)}{h} = w(y) + \frac{w(y + hz) - w(y)}{h}.$$

Lässt man nun  $h$  gegen 0 laufen, folgt die Behauptung.  $\square$

Mit diesem Wissen kann man nun einen Satz formulieren. Die Aussage dieses Satzes besagt, dass die asymptotische Stabilität des Gleichgewichts der Differentialgleichung auf die Approximation der Lösung der Differentialgleichung übertragen wird. Voraussetzungen sind, dass für das Gleichgewicht eine konvexe Ljapunov-Funktion existiert und die Approximation durch das implizite Euler-Verfahren ermittelt wurde. Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der Aussage der A-Stabilität auf die numerische Approximation nichtlinearer Differentialgleichungen dar. Diese Aussage wird am Ende des Abschnitts näher erläutert.

**Satz 5.10** Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (2.2) mit Lösung  $x(t; x_0)$ , die ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht  $x^*$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $U$  besitzt. Zu  $x^*$  existiere eine konvexe Ljapunov-Funktion  $V \in C^1(N, \mathbb{R})$ , wobei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung um das Gleichgewicht ist, die  $U \subset N$  enthält. Es sei  $\Phi$  die numerische Approximation durch das implizite Euler-Verfahren, welche durch

$$\Phi(x, h) = x + hf(\Phi(x, h))$$

gegeben ist. Die Schrittweite  $h > 0$  sei so klein gewählt, dass  $\Phi(x, h)$  wohldefiniert ist und in  $N$  liegt für alle  $x \in U$ . Dann ist  $x^*$  ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht für  $\Phi(x, h)$  mit Stabilitätsumgebung  $U$ .  $\square$

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $x^*$  auch für die numerische Approximation  $\Phi(x, h)$  asymptotisch stabil ist, beweist man, dass  $V$  auch eine Ljapunov-Funktion für  $\Phi(x, h)$  ist. Folglich ist zu zeigen ist, dass

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - hg(V(x))$$

gilt für  $g$  wie in Lemma 4.11, d.h. für  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $g(r) > 0$ , falls  $r > 0$ , und  $g(r) = 0$ , falls  $r \leq 0$ .

Man erinnere sich an die folgende Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -g(V(x)), \quad (5.3)$$

die für alle  $x \in N$  gilt.

Für  $\lambda \in (0, 1]$  beliebig mit  $\lambda h < 1$  definiert man die Funktionen

$$g_1(r) := \lambda r \quad \text{und} \quad g_2(r) := \min \{g(s) \mid s \in [(1 - \lambda h)r, r]\} .$$

Setze  $y = \Phi(x, h)$  und  $z = -hf(\Phi(x, h))$ . Dann gilt mit der Eigenschaft von  $V$  als konvexe Funktion nach Lemma 5.9

$$\begin{aligned} V(x) &= V(y + z) \\ &\geq V(y) + DV(y)z \\ &= V(\Phi(x, h) - hDV(\Phi(x, h))f(\Phi(x, h))) \\ &\stackrel{(5.3)}{\geq} V(\Phi(x, h)) + hg(V(\Phi(x, h))) \end{aligned}$$

Da  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $h > 0$  und  $V(x) > 0$ , folgt daraus für alle  $x \in N$

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - hg(V(\Phi(x, h))) . \quad (5.4)$$

Für diese Ungleichung unterscheidet man im nächsten Schritt zwei Fälle:

1. Fall:  $V(\Phi(x, h)) \leq (1 - \lambda h)V(x)$ . In diesem Fall erhält man eine Ungleichung mit  $g_1(r)$

$$V(\Phi(x, h)) \leq (1 - \lambda h)V(x) = V(x) - hg_1(V(x)) .$$

2. Fall:  $V(\Phi(x, h)) > (1 - \lambda h)V(x)$ . Hier gilt  $V(\Phi(x, h)) \in [(1 - \lambda h)V(x), V(x)]$ , wobei die untere Intervallgrenze von der Fallbetrachtung her gegeben ist und die obere Intervallgrenze aus der Ungleichung (5.4) folgt. Damit erhält man

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - hg(V(\Phi(x, h))) \leq V(x) - hg_2(V(x)) .$$

Mit  $\tilde{g}(r) := \min\{g_1(r), g_2(r)\}$  gilt daher

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - h\tilde{g}(V(x)) .$$

Somit ist  $V$  eine Ljapunov-Funktion für  $\Phi$  und  $x^*$  nach der Definition in Satz 5.2 und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.11** Die Aussage des Satzes 5.10 betrachtet dem Anliegen dieser Arbeit folgend ausschließlich Gleichgewichte. Eine allgemeinere Version findet man in [14, Kap. 4.3].  $\square$

**Beispiel 5.12** Es sei die Differentialgleichung aus Beispiel 4.13 betrachtet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 .\end{aligned}\tag{5.5}$$

Wie schon gezeigt wurde, ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  global asymptotisch stabil. Zudem ist die Ljapunov-Funktion  $V$  konvex, da die Hessematrix

$$H_V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\tag{5.6}$$

positiv definit ist. Damit lässt sich Satz 5.10 auf diese Differentialgleichung anwenden. Wie Abbildung 5.3 veranschaulicht, gilt auch hier für die Approximation globale asymptotische Stabilität. Die Grafik wurde mit `bsp_lf_quadriE.m` erstellt.  $\square$

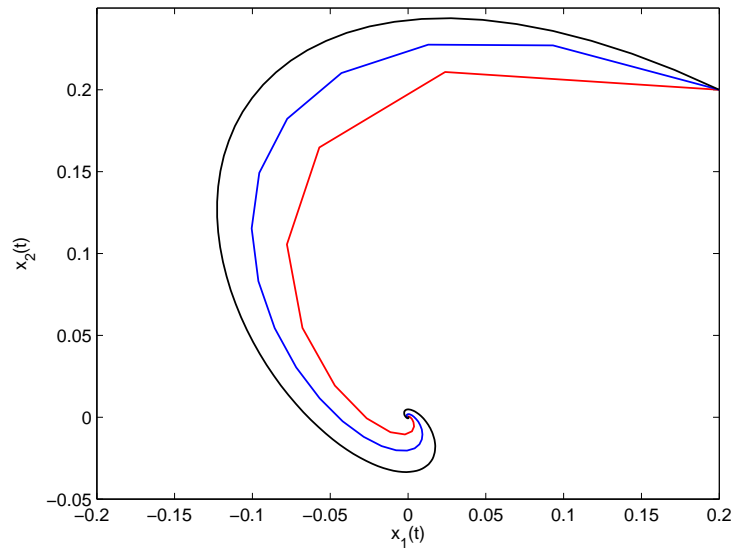


Abbildung 5.3: Lösung von (5.5) für  $x_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$  und Schrittweiten  $h_{\text{rot}} = 0,75$ ,  $h_{\text{blau}} = 0,33$ ,  
 $h_{\text{schwarz}} = 0,075$

Der Satz 5.10 ist in dem Sinne eine Verallgemeinerung der A-Stabilität, dass für eine lineare Differentialgleichung mit asymptotisch stabilem Gleichgewicht sowohl durch Anwendung des obigen Satzes als auch mit der A-Stabilität asymptotische Stabilität des Fixpunktes

der Diskretisierung folgt, vgl. [14]. Für eine lineare zeitinvariante Differentialgleichung gilt nämlich, dass man für ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht eine bilineare Ljapunov-Funktion  $V(x) = x^T P x$  finden kann. Wie aus Lemma 4.18 bekannt ist, ist  $P$  dann positiv definit. Die zweite Ableitung der Funktion  $V$  ist dann immer konstant und größer 0, somit ist  $V$  konvex.

## 5.4 Ein Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell mit beschränkten Ressourcen

Betrachtet man das Modell von Lotka und Volterra aus Kapitel 4.4 und berücksichtigt nun zusätzlich, dass die Beutetiere begrenzte Ressourcen haben, z.B. Nahrungsknappheit oder Raumnot bei zu vielen Individuen, so erhält man das folgende Modell

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a x_1(t) - b x_1(t)x_2(t) - e x_1(t)^2 \\ \dot{x}_2(t) &= -c x_2(t) + d x_1(t)x_2(t) .\end{aligned}\tag{5.7}$$

Man ändert dabei die Modellannahmen dahingehend ab, dass sich die Beutepopulation gemäß

$$\dot{x}_1(t) = \mu x_1(t) - e x_1(t)^2$$

verhält. Dieses Modell mit beschränkten Ressourcen ist allgemein gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \lambda(K - x(t))x(t)$$

mit  $\lambda K = \mu$  und  $\lambda = e$ , wobei  $K$  die Kapazität des Lebensraums darstellt. Man spricht bei dieser Gleichung auch vom *logistischen Wachstum*. Weiterhin gilt, dass  $\mu = \gamma - \sigma$  und  $e > 0$ , wobei  $e$  und  $\gamma$  konstant sind und  $\sigma = \tilde{\sigma} + b x_2(t)$ . Damit konvergiert die Populationsgröße für  $x_2(t) = 0$  nun gegen  $K = a/e$  mit  $a = \gamma - \tilde{\sigma} > 0$ .

Auch hier lässt sich die Gleichung durch die Koordinatentransformation  $x_1 \rightarrow \frac{d}{c} x_1$  und  $x_2 \rightarrow \frac{bd}{ad-ec} x_2$  umformen zu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t)(1 - x_2(t)) + \beta x_1(t)(1 - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -c x_2(t)(1 - x_1(t))\end{aligned}\tag{5.8}$$

mit  $\alpha = a - ec/d$  und  $\beta = ec/d$ . Man muss hier darauf achten, dass positive  $x_1, x_2$  wieder auf positive  $x_1, x_2$  abgebildet werden. Beachte  $a, b, c, d, e > 0$ . Damit ist eine korrekte Transformation genau dann gewährleistet, wenn  $\frac{bd}{ad-ec} > 0$  gilt, also wenn  $ad > ec$  gilt. Im Folgenden soll ausschließlich dieser Fall betrachtet werden, da er für die Koexistenz beider Arten eine notwendige Bedingung ist.

Durch Berechnung der Nullstellen der rechten Seite der Gleichung (5.8) ergeben sich die Gleichgewichte  $x^* = (0, 0)^T$ ,  $x^+ = (1, 1)^T$  und  $x^{**} = ((\alpha + \beta)/\beta, 0)^T$ . Da nur  $x^+$  im positiven Quadranten liegt, wird im Weiteren nur dieses Gleichgewicht näher analysiert.

Um zu klären, welche Art der Stabilität dieses Gleichgewicht erfüllt, wendet man an dieser Stelle die Theorie von Ljapunov an. Hierzu wird eine weitere grundlegende Idee zur Bestimmung von Ljapunov-Funktionen verwendet. Das zu untersuchende System wird als eine Störung eines anderen Systems angesehen. Besitzt das ungestörte System ein erstes Integral, so kann man versuchen nachzuweisen, dass dieses erste Integral eine Ljapunov-Funktion für das gestörte System liefert. Für das Räuber-Beute-Modell wurde in Abschnitt 4.4 ein erstes Integral gefunden.

$$V(x) = cx_1 - c \ln x_1 + \alpha x_2 - \alpha \ln x_2$$

Für die erste Ableitung von  $V$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= DV(x(t))f(x(t)) \\ &= \left( c - \frac{c}{x_1(t)} \quad \alpha - \frac{\alpha}{x_2(t)} \right) \begin{pmatrix} \alpha x_1(t)(1 - x_2(t)) + \beta x_1(t)(1 - x_1(t)) \\ -cx_2(t)(1 - x_1(t)) \end{pmatrix} \\ &= \left( c - \frac{c}{x_1(t)} \right) (\alpha x_1(t)(1 - x_2(t)) + \beta x_1(t)(1 - x_1(t))) \\ &\quad - \left( \alpha - \frac{\alpha}{x_2(t)} \right) (-cx_2(t)(1 - x_1(t))) \\ &= c\beta x_1(t)(1 - x_2(t)) - c\beta(1 - x_1(t)) \\ &= -c\beta(x_1(t) - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

für alle  $x(t) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} =: D_V \setminus \{(1, 1)\}$ . Damit ist  $V$  streng monoton fallend für die Differentialgleichung (5.8). Diese Tatsache ist in Abbildung 5.4, die mittels `lv_ljapunov.m` erzeugt wurde, veranschaulicht.

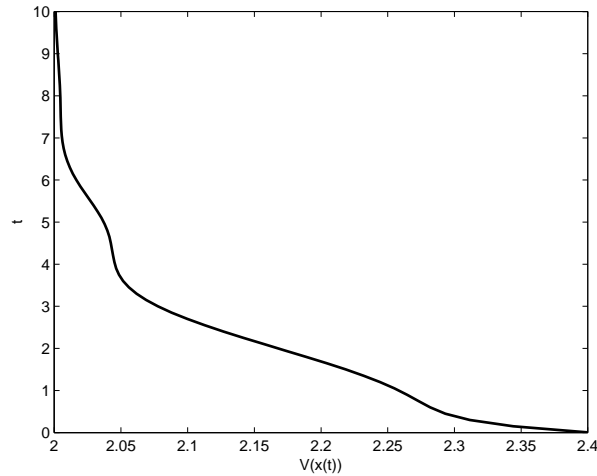


Abbildung 5.4: Die Funktion  $V$  ausgewertet für die Lösungen von (5.8) und  $\alpha = c = 1$  in Abhängigkeit von  $t$

Für das Gleichgewicht  $x^+ = (1, 1)^T$  gilt, dass  $V(x^+) = 0$  ist. Da  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $(x - \ln(x)) > 0$  für  $x > 0$ , ist  $V(x) > 0$  ebenfalls gültig. Folglich ist  $V$  eine lokale Ljapunov-Funktion für das Gleichgewicht  $x^+$  und  $x^+$  lokal asymptotisch stabil. Alle Lösungen, die in  $D_V$  starten, konvergieren gegen  $x^+$ , weshalb  $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  die Stabilitätsumgebung von  $x^+$  ist.

Außerdem kann man zeigen, dass  $V$ , wie oben gegeben, konvex ist. Dafür betrachtet man die zweite Ableitung, die Hessematrix der Funktion  $V$ . Aus der Analysis ist bekannt, dass eine differenzierbare Funktion genau dann strikt konvex ist, wenn die zugehörige Hessematrix positiv definit ist. Das ist hier der Fall, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= c - c \frac{1}{x_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} &= c \frac{1}{x_1^2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= \alpha - \alpha \frac{1}{x_2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_2} &= \alpha \frac{1}{x_2^2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Und damit

$$H_V(x) = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \{1,2\}} = \begin{pmatrix} c \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \alpha \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix besitzt wegen  $\alpha, c > 0$  echt positive Eigenwerte und ist somit positiv definit. Die damit bewiesene Konvexität von  $V$  ist schon in der Abbildung 4.6 aus dem letzten



Kapitel zu erkennen.

Für dieses Beispiel kann man nun den Satz 5.10 anwenden. Das Ergebnis ist in der Abbildung 5.5 zu sehen. Selbst für unsinnig große Schrittweiten  $h$ , hier  $h = 0,88$ , ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil, wobei die Lösungen, die auf das Gleichgewicht zulaufen mit dem impliziten Euler-Verfahren berechnet wurden. Die Wahl der größten Schrittweite ist nach längeren Versuchsreihen so getroffen worden, da die Iteration im impliziten Euler-Verfahren aufgrund der Wahl des Startwertes in der Implementierung `lv_beschaenkt_iE.m` ab einer noch größeren Schrittweite in einer Endlosschleife landet und kein Ergebnis ermittelt werden kann. Zur Veranschaulichung der Aussage des Satzes 5.10 ist die Implementierung jedoch ausreichend.

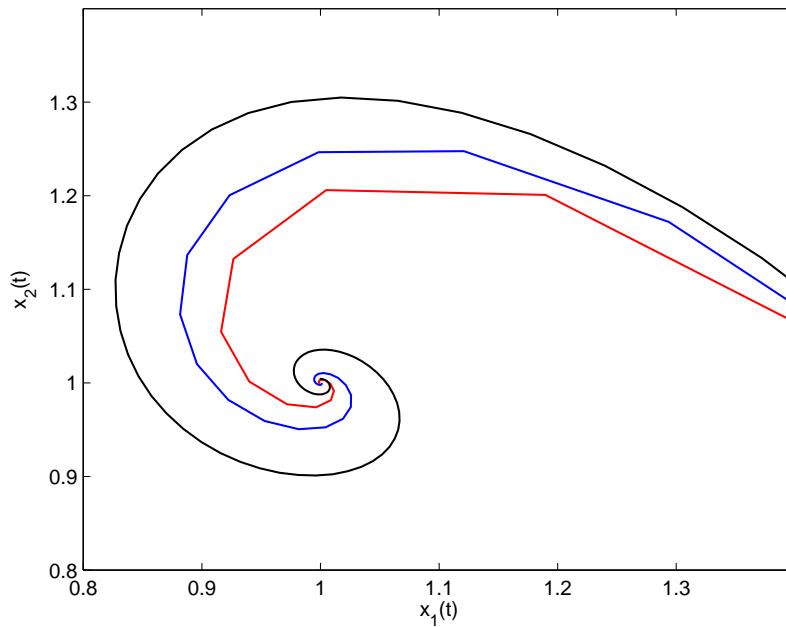


Abbildung 5.5: Lösung des Räuber-Beute-Modells (5.8) durch das implizite Euler-Verfahren für

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und Schrittweiten } h_{\text{rot}} = 0,88, h_{\text{blau}} = 0,5, h_{\text{schwarz}} = 0,15$$

## 5.5 Vererbung von Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen II

Nach diesem Ergebnis zur Vererbung der Stabilität für das implizite Euler-Verfahren stellt sich die Frage, ob man ähnliche Kriterien auch für andere numerische Verfahren finden kann. Im Folgenden soll daher die implizite Mittelpunktsregel untersucht werden. Sie hat gegenüber dem impliziten Euler-Verfahren den Vorteil, dass sie eine höhere Konvergenzordnung besitzt und es dadurch ermöglicht, bei identischer Wahl der Schrittweiten bessere Approximationen zu erhalten.

**Beispiel 5.13** Es sei wiederum das Räuber-Beute-Modell mit beschränkten Ressourcen gegeben. Auch für die implizite Mittelpunktsregel erhält man unter der Verwendung des Programms `lv_beschaenkt_iMR.m` ein Bild, vgl. Abbildung 5.6, das dem der Lösung des impliziten Euler-Verfahrens sehr ähnelt. Wie man erkennen kann, liefert dieses Verfahren für die identische Wahl der Schrittweiten  $h$  tatsächlich genauere Lösungen. Das hängt mit der höheren Konvergenzordnung  $p = 2$  zusammen im Vergleich zum impliziten Euler-Verfahren mit Konvergenzordnung  $p = 1$ . □

**Beispiel 5.14** Für das Beispiel 4.13 ergibt sich durch Berechnung einer Approximation mit der impliziten Mittelpunktsregel die Abbildung 5.7. Diese wurde durch das Programm `bsp_lf_quadr_iMR.m` erzeugt. Auch hier erkennt man, dass die asymptotische Stabilität erhalten bleibt. □

Bei diesen beiden Ergebnissen stellt sich die Frage, ob man das Konzept für das implizite Euler-Verfahren auch für die implizite Mittelpunktsregel formulieren und beweisen kann. Wie der folgende Satz zeigt, ist das tatsächlich möglich. Allerdings benötigt man die zusätzliche Bedingung, dass die zweite Ableitung von  $V$  konstant ist. Damit stellt dieses Kriterium zwar immer noch eine Verallgemeinerung der A-Stabilität dar, allerdings ist sie weniger weitgreifend als die, die durch Verwendung des impliziten Euler-Verfahrens erreicht werden kann.

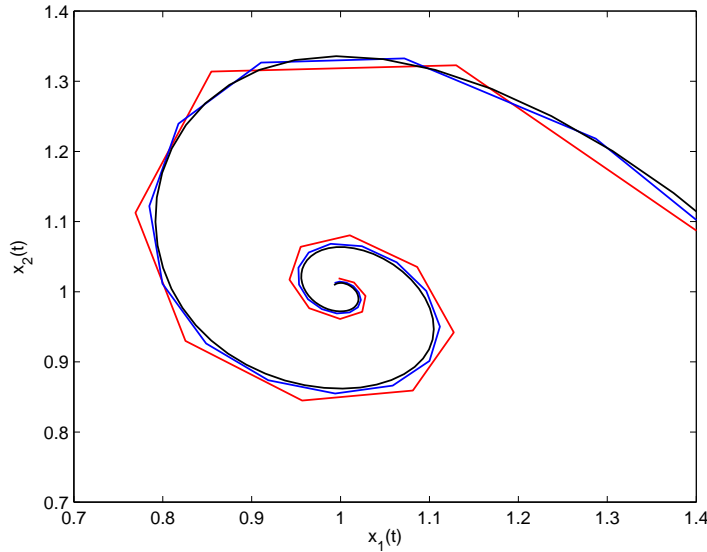


Abbildung 5.6: Lösung des Räuber-Beute-Modells (5.8) durch die implizite Mittelpunktsregel für  $x_0 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$  und Schrittweiten  $h_{\text{rot}} = 0,88$ ,  $h_{\text{blau}} = 0,5$ ,  $h_{\text{schwarz}} = 0,15$

**Satz 5.15** Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (2.2) mit Lösung  $x(t)$ , die ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht  $x^*$  mit beschränkter Stabilitätsumgebung  $U$  besitzt. Zu  $x^*$  existiere eine konvexe Ljapunov-Funktion  $V \in C^2(N, \mathbb{R})$ , deren zweite Ableitung konstant ist, wobei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung um das Gleichgewicht ist, die  $U \subset N$  enthält. Es sei  $\Phi$  die numerische Approximation durch die implizite Mittelpunktsregel, welche durch

$$\Phi(x, h) = x + hf\left(\frac{1}{2}(x + \Phi(x, h))\right)$$

gegeben ist. Die Schrittweite  $h > 0$  sei so klein gewählt, dass  $\Phi(x, h)$  wohldefiniert ist und in  $N$  liegt für alle  $x \in U$ . Dann ist  $x^*$  ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht für  $\Phi(x, h)$  mit Stabilitätsumgebung  $U$ .  $\square$

*Beweis.* Zu zeigen ist also, dass der Fixpunkt der Approximation, der durch die implizite Mittelpunktsregel berechnet wird, asymptotisch stabil ist, wenn das entsprechende Gleichgewicht der DGL asymptotisch stabil ist. Dazu beweist man auch hier, dass  $V$  eine Ljapunov-Funktion für das diskrete System ist. Wähle dazu ein beliebiges  $h_0 > 0$ . Folglich ist zu

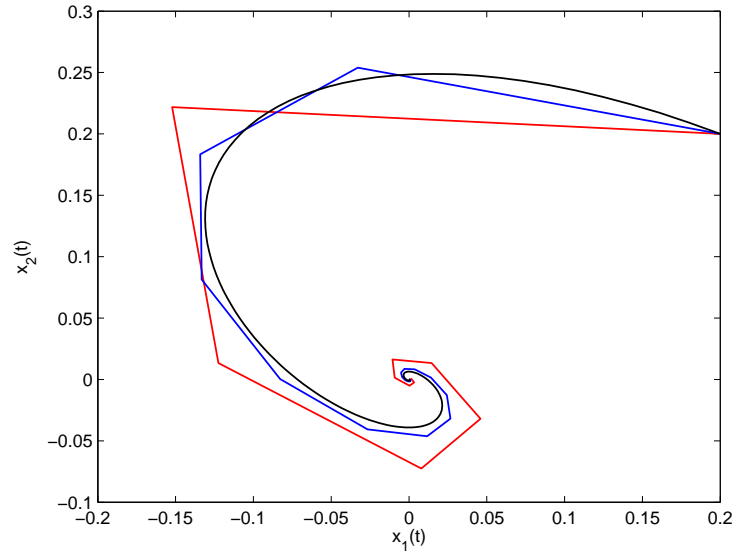


Abbildung 5.7: Lösung von Beispiel 4.13 durch die implizite Mittelpunktsregel für  $x_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$  und Schrittweiten  $h_{\text{rot}} = 1,5$ ,  $h_{\text{blau}} = 0,75$ ,  $h_{\text{schwarz}} = 0,05$

zeigen, dass für alle  $h \in (0, h_0]$  die Ungleichung

$$V(\Phi(x, h)) \leq V(x) - h\tilde{g}(V(x)) \quad (5.9)$$

gilt für  $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{g}(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $\tilde{g}(r) = 0$  für  $r \leq 0$ .

Für die implizite Mittelpunktsregel gilt

$$\Phi(x, h) = x + h f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Phi(x, h)\right)$$

oder rekursiv formuliert

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.10)$$

mit  $x_{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$ . Zu zeigen ist mit dieser Notation, dass

$$V(x_{n+1}) \leq V(x_n) - h\tilde{g}(V(x_n)) \quad (5.11)$$

gilt.

Approximiere  $V(x_n)$  und  $V(x_{n+1})$  durch eine Taylorentwicklung der Ordnung  $k = 1$  in  $x_{n+\frac{1}{2}}$  mit Lagrangeschem Restglied  $R_{k+1}$  der Ordnung 2. Diese Approximation ist möglich, da  $V$  zweimal stetig differenzierbar ist. Für  $V(x_n)$  gilt

$$\begin{aligned} V(x_n) &= V(x_{n+\frac{1}{2}}) + DV(x_{n+\frac{1}{2}})(x_n - x_{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_n - x_{n+\frac{1}{2}})^\top H_V(x_{n+\frac{1}{2}} + \theta(x_n - x_{n+\frac{1}{2}}))(x_n - x_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

für  $\theta \in [0, 1]$  und  $H_V$  die Hessematrix von  $V$ .

Für  $V(x_{n+1})$  erhält man

$$\begin{aligned} V(x_{n+1}) &= V(x_{n+\frac{1}{2}}) + DV(x_{n+\frac{1}{2}})(x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}})^\top H_V(x_{n+\frac{1}{2}} + \nu(x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}))(x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

für  $\nu \in [0, 1]$ .

Für diese Approximationen ist das Lagrangesche Restglied identisch, da zum einen die zweite Ableitung von  $V$ , die Hessematrix  $H_V(x)$ , für alle  $x$  konstant ist und zum anderen die Abstände  $|x_n - x_{n+\frac{1}{2}}|$  und  $|x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}|$  gleich sind, da  $x_{n+\frac{1}{2}}$  in der Mitte der Strecke zwischen  $x_n$  und  $x_{n+1}$  liegt, d.h.  $x_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ . Damit gilt mit der verkürzten Notation  $H_V$  für  $H_V(x)$

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}})^\top H_V (x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}) &= (x_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n)^\top H_V (x_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n) \\ &= (\frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n)^\top H_V (\frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n) \\ &= (-\frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n)^\top H_V (-\frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n) \\ &= (-\frac{1}{2}x_{n+1} + x_n - \frac{1}{2}x_n)^\top H_V (-\frac{1}{2}x_{n+1} + x_n - \frac{1}{2}x_n) \\ &= (x_n - x_{n+\frac{1}{2}})^\top H_V (x_n - x_{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Differenz  $V(x_{n+1}) - V(x_n)$ , so resultiert mit Verwendung der Verfahrensregel (5.10) die Gleichung

$$\begin{aligned} V(x_{n+1}) - V(x_n) &= DV(x_{n+\frac{1}{2}})(x_{n+1} - x_{n+\frac{1}{2}}) - DV(x_{n+\frac{1}{2}})(x_n - x_{n+\frac{1}{2}}) \\ &= DV(x_{n+\frac{1}{2}})(x_{n+1} - x_n) \\ &= DV(x_{n+\frac{1}{2}})hf(x_{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.11) lässt sich umformen zu

$$V(x_{n+1}) - V(x_n) \leq -h\tilde{g}(V(x_n)).$$

Daraus folgt, dass zum Beweis von (5.11) genügt, eine Funktion  $\tilde{g}$  mit den am Anfang genannten Eigenschaften zu finden, so dass gilt

$$DV(x_{n+\frac{1}{2}})f(x_{n+\frac{1}{2}}) \leq -\tilde{g}(V(x_n)) .$$

Zur Konstruktion von  $\tilde{g}$  verwendet man die Ungleichung

$$DV(x_{n+\frac{1}{2}})hf(x_{n+\frac{1}{2}}) \leq -hg(V(x_{n+\frac{1}{2}})) . \quad (5.12)$$

Die Begründung für die Richtigkeit dieser Aussage liegt in einer Eigenschaft von  $x_{n+\frac{1}{2}}$ . Aufgrund der Definition von  $x_{n+\frac{1}{2}}$  ist nämlich die Gleichung

$$x_{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = x_n + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) = x_n + \frac{1}{2}f(x_{n+\frac{1}{2}})$$

gültig. Diese entspricht aber gerade dem impliziten Euler-Verfahren mit  $h = \frac{1}{2}$ . Für dieses Verfahren wurde schon im Beweis von Satz 5.10 gezeigt, dass  $V$  monoton fällt. Damit gilt (5.12).

Um ein  $\tilde{g}$  zu finden, benötigt man eine Hilfsaussage.

**Hilfsaussage** Für  $h_0$  existiert ein  $\sigma > 0$ , so dass für alle  $x_n \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|x_{n+\frac{1}{2}}\| \geq \min\{\sigma\|x_n\|, 1\} \quad (5.13)$$

für alle  $h \in (0, h_0]$ , wobei die Konstante  $\sigma$  abhängig von  $h_0$  gewählt wird.

*Beweis der Hilfsaussage:*

Für  $\|x_{n+\frac{1}{2}}\| \geq 1$  ist nichts zu zeigen.

Sei  $\|x_{n+\frac{1}{2}}\| < 1$ . Wie schon gesehen folgt aus der Verfahrensregel, dass

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2}hf(x_{n+\frac{1}{2}}) .$$

Das Vektorfeld  $f$  der Differentialgleichung ist Lipschitz-stetig, d.h. es existiert eine Konstante  $L$  auf  $B_1(0)$ , so dass die Ungleichung

$$\|f(x_{n+\frac{1}{2}}) - f(0)\| \leq L\|x_{n+\frac{1}{2}} - 0\|$$

gültig ist. Dann gilt einerseits

$$\|x_{n+\frac{1}{2}} - x_n\| \leq \frac{h}{2}\|f(x_{n+\frac{1}{2}})\| \leq \frac{h_0L}{2}\|x_{n+\frac{1}{2}}\| .$$

Andererseits lässt sich die umgekehrte Dreiecksungleichung anwenden, was zur Ungleichung

$$\|x_{n+\frac{1}{2}} - x_n\| \geq \|x_{n+\frac{1}{2}}\| - \|x_n\|$$

führt. Insgesamt folgt

$$\|x_{n+\frac{1}{2}}\| - \|x_n\| \leq \frac{h_0L}{2}\|x_{n+\frac{1}{2}}\|$$

und damit

$$\|x_{n+\frac{1}{2}}\| \geq \left( \frac{1}{1 + \frac{h_0L}{2}} \right) \|x_n\| .$$

Wähle  $\sigma := 1/(1 + \frac{h_0L}{2})$ . Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Weiterhin gilt wegen der Tatsache, dass  $x_{n+\frac{1}{2}}$  mit dem impliziten Euler-Verfahren ermittelt werden kann und dass  $V$  für dieses Verfahren, wie im Beweis von 5.10 gezeigt wurde, abnimmt, die Ungleichung

$$V(x_{n+\frac{1}{2}}) \leq V(x_n) . \quad (5.14)$$

Für  $V(x_{n+\frac{1}{2}})$  kann man also festhalten, dass es auf jeden Fall in dem Intervall mit oberer Schranke  $V(x_n)$  liegen muss. Die untere Schranke findet man mit der Hilfsaussage. Folglich gilt

$$V(x_{n+\frac{1}{2}}) \in \left[ \inf\{V(y) \mid \|y\| \geq \min\{\sigma\|x\|, 1\}, \text{ wobei } V(x) = V(x_n)\}, V(x_n) \right] .$$

Setze daher  $\tilde{g}$  auf

$$\tilde{g}(r) := \inf\left\{g(s) \mid s \in \left[ \inf\{V(y) \mid \|y\| \geq \min\{\sigma\|x\|, 1\}, \text{ wobei } V(x) = r\}, r \right] \right\} \quad (5.15)$$

Dann erfüllt  $\tilde{g}$  die gesuchten Ungleichungen, d.h.  $\tilde{g}(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $\tilde{g}(r) = 0$  für  $r \leq 0$ , da  $g(r)$  diese Ungleichungen erfüllt und außerdem gilt  $\tilde{g}(r) \leq g(r)$  und damit  $-g(r) \leq -\tilde{g}(r)$ .

Man hat folglich ein  $\tilde{g}$  gefunden, so dass die Ungleichung (5.11) erfüllt ist. Damit ist gezeigt, dass  $V$  eine Ljapunov-Funktion für  $\Phi$  ist.  $\square$

Somit kann man auch für die implizite Mittelpunktsregel folgern, dass sie die Stabilitätseigenschaften einer Differentialgleichung für die Approximation erhält unter der Bedingung, dass die gefundene Ljapunov-Funktion konvex und die zugehörige zweite Ableitung konstant ist.

Betrachte wieder das Beispiel 5.12 bzw. 4.13. In Beispiel 5.12 wurde bereits gezeigt, dass die zweite Ableitung der Ljapunov-Funktion positiv definit ist. Zudem ist sie konstant. Damit erfüllt dieses Beispiel alle Voraussetzungen des Satzes 5.15 und die Approximation erbt die asymptotische Stabilität der Gleichung.

Für die Ljapunov-Funktion  $V$  des Räuber-Beute-Modells gilt

$$H_V(x) = \begin{pmatrix} c \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \alpha \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

für  $\alpha, c > 0$ , wie in Abschnitt 5.4 schon gezeigt wurde. Folglich ist die zweite Ableitung von  $V$  nicht konstant. Man kann also allgemein für die Approximation der Lösung des Räuber-Beute-Modells durch die implizite Mittelpunktsregel keine Aussage anhand des Satzes 5.15 treffen. Allerdings ist  $H_V(x)$  für Werte  $x$  nahe des Punktes  $(1, 1)$ , also aus einer Umgebung des Gleichgewichts, nahezu konstant. Für die ersten Approximationsversuche wurden zufälligerweise geeignete Anfangswerte aus dieser Umgebung gewählt, so dass die asymptotische Stabilität tatsächlich erhalten blieb.



## 6 Fazit und Ausblick

Die Frage, ob es numerische Verfahren gibt, die das Verhalten der Lösung einer autonomen Differentialgleichung erben, kann man, wie unter anderem am Beispiel des Räuber-Beute-Modells gezeigt wurde, bejahen. Unter der Verwendung der Theorie von Ljapunov konnte bewiesen werden, dass sowohl das implizite Euler-Verfahren wie auch die implizite Mittelpunktsregel es ermöglichen, Lösungen von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen mit ihren Stabilitätseigenschaften korrekt nachzubilden. Das Instrument der Ljapunov-Funktion war dabei ein Erfolg versprechendes Hilfsmittel. Mit Hilfe einer solchen Funktion kann sowohl die asymptotische Stabilität der Lösung der Differentialgleichung, als auch die der Lösung der diskreten Gleichung nachgewiesen werden. Für letztere wurde zusätzlich benötigt, dass die Ljapunov-Funktion konvex ist bzw. sogar eine konstante zweite Ableitung besitzt.

Für lineare Differentialgleichungen konnte man sehen, dass die Kernaussage dieser Arbeit eine Verallgemeinerung der A-Stabilität darstellt. Verwendet man als Nachweis der asymptotischen Stabilität eines diskreten Systems das Konzept der Ljapunov-Funktionen, so erhält man für lineare Differentialgleichungssysteme Ergebnisse, die äquivalent zu den Ergebnissen aus der Anwendung der A-Stabilität sind.

In Bezug auf die direkte Methode von Ljapunov wurde die Problematik des Auffindens einer Ljapunov-Funktion erläutert. Für lineare zeitinvariante Differentialgleichungen konnte gezeigt werden, dass man hier leicht quadratische oder bilineare Funktionen finden kann, die den Anforderungen genügen. Allgemein kann man einerseits versuchen, der Herangehensweise von Ljapunov zu folgen und mittels der Betrachtung der Energie des Systems eine

geeignete Funktion herleiten. Andererseits können erste Integrale und als gestört angenommene Systeme verwendet werden, um eine Ljapunov-Funktion zu berechnen.

Ein erstrebenswertes Ziel ist es, auch für nichtlineare Differentialgleichungen eine allgemeine Aussage darüber treffen zu können, welche Anforderungen ein numerisches Verfahren erfüllen muss, um die Stabilitätseigenschaften der exakten Lösung auf die diskrete Lösung zu vererben. Diese Fragestellung ist Bestand aktueller Forschung. Francis Clarke erwähnt in seiner Abhandlung „Lyapunov Functions and Feedback in Nonlinear Control“ [2] die Möglichkeit für nichtlineare Systeme semikonkave Ljapunov-Funktionen zu betrachten und mit Hilfe dieser ein stabilisierendes Feedback für Kontrollfunktionen zu finden. Eine semikonkave Funktion ist dabei definiert als eine Funktion, die aus einer stetigen und einer konkaven Funktion zusammengesetzt ist. Die semikonkave Funktion muss nicht stetig differenzierbar sein. Sie ist aber in jedem Fall lokal Lipschitz-stetig, da stetige und konkave Funktionen diese Eigenschaft haben. Die Frage, die sich stellt, lautet, ob semikonkave Funktionen auch auf dem Feld der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Vererbung ihrer Stabilitätseigenschaften auf die diskrete Approximation helfen können, weitere Verallgemeinerungen finden und beweisen zu können.

# A Grundlegende Informationen

In diesem Abschnitt sollen einige Begrifflichkeiten, die im Verlauf der Arbeit erwähnt wurden, aufgegriffen und zum Verständnis der Zusammenhänge erläutert werden. Dies beinhaltet die Invarianz unter Autonomisierung, welche eine Eigenschaft einiger Runge-Kutta-Verfahren bezeichnet, die im Bezug auf autonomisierte Differentialgleichungen von Bedeutung ist. Weiterhin wird erklärt, was man unter der Kondition eines Problems versteht und was die Linearisierung einer Differentialgleichung darstellt. Auch die Begriffe *exakte Differentialgleichung* und *erstes Integral* werden besprochen. Schließlich wird noch kurz erläutert, warum man Stabilität auch als Lipschitz-Stetigkeit auf lange Sicht verstehen kann.

## Invariant unter Autonomisierung

Wie im Kapitel 2 schon erläutert wurde, kann man jede nichtautonome DGL in eine autonome DGL höherer Dimension transformieren. Um sich bei der Analyse von Differentialgleichungen weiterhin auf die Betrachtung autonomer Differentialgleichungen beschränken zu können, muss ein Runge-Kutta-Verfahren *invariant unter Autonomisierung* sein, d.h. für Lösungen  $z$  der autonomisierten und Lösungen  $x$  der nichtautonomen DGL, vgl. Bemerkung 2.7, muss

$$\tilde{z}(t_i) = \begin{pmatrix} t_i \\ \tilde{x}(t_i) \end{pmatrix}$$

gelten, wobei  $\tilde{z}$  und  $\tilde{x}$  die durch ein Runge-Kutta-Verfahren approximierten Lösungen sind. Diese Eigenschaft wird nicht automatisch erfüllt. Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann

invariant unter Autonomisierung, wenn es konsistent ist und die Bedingung

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

für  $i = 1, \dots, s$  erfüllt. Das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel erfüllen dieses Kriterium und sind somit invariant unter Autonomisierung.

## Kondition

Die Kondition beschreibt die Wirkung von Eingabefehlern und ist somit ein Hilfsmittel, um die Robustheit eines Verfahrens zu analysieren, d.h. sie beantwortet die Frage, wie stark sich kleine Änderungen in den Eingabedaten auf die Genauigkeit der Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  auswirken. Ist ein Verfahren robust, so heißt das, dass kleine Fehler in den Eingabedaten, die zum Beispiel durch Rundungsfehler oder Messfehler entstanden sind, im Endergebnis wenige bis keine Auswirkungen haben.

Man berechnet die Kondition bzgl. Störungen  $\Delta x_0$  im Anfangswert  $x_0$ , d.h. als eine Abschätzung von

$$\kappa := \max_{\Delta x_0 \in \mathbb{R}^n, \|\Delta x_0\|=1} \left\| \frac{\partial}{\partial x_0} x(t; t_0, x_0) \Delta x_0 \right\|.$$

Hierzu bestimmt man die Jacobimatrix der Abbildung

$$\text{Eingabe} \rightarrow \text{Ausgabe}.$$

Die eindeutige Lösung einer Differentialgleichung ist gegeben durch  $x(t) = \Phi(t; t_0)x_0$ , wobei  $\Phi(t; t_0)$  die sogenannte *Übergangsmatrix* darstellt. Daraus ergibt sich, dass man die Abbildung

$$x \mapsto \Phi(t; t_0)\Delta x,$$

die den zu störenden Zustand zur Zeit  $t_0$  (Eingabe) auf den Zustand  $t$  (Ausgabe) abbildet, für gestörte Anfangswerte  $\Delta x_0$  differenzieren muss. Die Ableitung existiert, sofern  $f$  stetig differenzierbar nach  $x$  ist. Man betrachtet das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x(t; t_0, x_0))y(t), \quad y(t_0) = \Delta x_0, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $f_x$  die Ableitung von  $f$  nach  $x$  ist. Die Lösung von (A.1) kann man schreiben als

$$y(t; t_0, \Delta x_0) = W(t; t_0) \Delta x_0$$

mit  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Übergangsmatrix der zugehörigen *Variationsgleichung*, auch bezeichnet als *Linearisierung*, siehe unten. Die Norm  $\|W(t; t_0)\|$  gibt dann die Konditionszahl  $\kappa$  an. Ausführlicher ist diese Erläuterung bei [3] zu finden.

Ein Problem ist schlecht konditioniert, wenn kleine Änderungen in den Problemdaten zu großen Änderungen in der Lösung führen, d.h. wenn die Kondition betragsmäßig groß ist. Die Robustheit des Verfahrens ist bei einem schlecht konditionierten Problem enorm wichtig. Man beachte, dass die Kondition eine Eigenschaft des Problems, z.B. der zu lösenden Differentialgleichung, ist und nicht des Verfahrens.

Die Kondition der Approximation, also die *diskrete Kondition*, ist gegeben für die kleinste Zahl  $\kappa_\Delta$ , die die Ungleichung

$$\max_{t \in \mathcal{T}} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}^*(t)| \leq \kappa_\Delta |\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0^*|$$

für  $\tilde{x}_0^* \rightarrow \tilde{x}_0$  erfüllt.  $\tilde{x}(t)$  bzw.  $\tilde{x}^*(t)$  bezeichnet dabei die zum Anfangswert  $\tilde{x}_0$  bzw.  $\tilde{x}_0^*$  gehörende Gitterfunktion und  $\mathcal{T}$  das gegebene Gitter. Sind  $\tilde{x}$  und  $\tilde{x}^*$  vernünftige Approximationen der entsprechenden kontinuierlichen Lösungen, so gilt  $\kappa_\Delta \approx \kappa$ . Bei steifen Problemen kann man dies für explizite Verfahren nur durch sehr kleine Schrittweiten erreichen, falls das Verfahren konvergent ist. Diese Probleme sind also schwer zu lösen, obwohl sie gut konditioniert sind, was charakteristisch für steife Probleme ist. Näheres findet man in [3, Kap. 3] und [3, S.138].

## Linearisierung nichtlinearer Differentialgleichungen

Für nichtlineare Systeme besteht die Möglichkeit durch Linearisierung Aussagen über die Stabilität des Systems zu treffen. Linearisierung bedeutet hier, dass man nichtlineare Systeme durch ein lineares System annähert.

Entlang einer Lösung  $x(t; t_0, x_0)$  definiert man für eine kompakte Teilmenge  $I \subset I_{t_0, x_0}$  des maximalen Existenzintervalls eine lineare Abbildung

$$A(t) := \frac{df}{dx}(t, x(t; t_0, x_0)) \text{ für alle } t \in I.$$

Mit dieser Matrix lässt sich die lineare zeitinvariante Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t)$$

aufstellen. Diese Gleichung bezeichnet man als *Linearisierung* oder auch *Variationsgleichung* der nichtlinearen DGL  $\dot{x} = f(t, x)$  entlang der Lösung  $x(t; t_0, x_0)$ .

Für ein Gleichgewicht  $x^* = x_0$  vereinfacht sich die Berechnung der Linearisierung. Man muss nun lediglich die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  berechnen:

$$A(t) = \frac{df}{dx}(t, x(t; t_0, x_0)) = \frac{df}{dx}(t, x_0).$$

Geht man zusätzlich von einem autonomen Vektorfeld aus, erhält man für  $A$  die Gleichung

$$A(t) \equiv A = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Die Lösung der zugehörigen Linearisierung, deren Übergangsmatrix durch  $\Phi(t; t_0) := e^{A(t-t_0)}$  gegeben ist, lautet dann

$$z(t; t_0, z_0) = \Phi(t; t_0)z_0.$$

Ein anschauliches Beispiel mit dem mathematischen Pendel ist in [10, Kap. 4.2] dargestellt. Die Linearisierung stellt in einer Umgebung des Gleichgewichts  $x^*$  eine gute Approximation der Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung dar. Im Zusammenhang mit dieser Eigenschaft lassen sich ähnliche Kriterien wie für die linearen Differentialgleichungen auch für nichtlineare Differentialgleichungen finden. So existiert ein zum Eigenwertkriterium für lineare DGL analoges Kriterium zum Nachweis von Stabilität und exponentieller Stabilität auch für nichtlineare DGL. Für den Nachweis benötigt man das Konzept der Ljapunov-Funktionen, wie es in dieser Arbeit schon erläutert wurde. Weitere Ausführungen findet man auch bei [8, Kap. 7].

## Exakte Differentialgleichungen und erste Integrale

Im Folgenden werden die Begriffe exakte Differentialgleichung und erstes Integral anhand der entsprechenden Kapitel aus [1] und [10] erläutert.

### Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen sind nur für eindimensionale Probleme oder für zweidimensionale autonome Systeme formulierbar.

**Definition A.1** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$h(t, x)\dot{x} + g(t, x) = 0 \tag{A.2}$$

mit  $g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  heißt *exakt*, falls eine stetig differenzierbare Funktion  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = g(t, x) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = h(t, x)$$

gelten. Die Funktion  $F$  heißt dann *Stammfunktion* von  $g$  und  $h$ . □

Beachte, dass man mit  $f(t, x) = -\frac{g(t, x)}{h(t, x)}$  aus der Gleichung (A.2) wieder die bekannte Form  $\dot{x}(t) = f(t, x)$  erhält. Obige Schreibweise vermeidet lediglich, dass der Fall  $h(t, x) = 0$  gesondert betrachtet werden muss.

Es existieren verschiedene Kriterien, um die Exaktheit einer Differentialgleichung zu ermitteln. Einen kurzen Überblick bekommt man in [10, Kap. 5.2].

Insbesondere hat die Stammfunktion  $F$  aus Definition A.1 für eine beliebige Anfangsbedingung  $(t_0, x_0)$  die besondere Eigenschaft, dass sie entlang jeder Lösungskurve konstant ist, d.h.  $F(t, x(t; t_0, x_0)) = F(t_0, x_0)$  für alle  $t \in I_{t_0, x_0}$ . Das bedeutet, dass man die Funktion  $F$  zur Berechnung der Lösungen verwenden kann.

Mit Hilfe von sogenannten *integrierenden Faktoren* ist es möglich, auch allgemeine Differentialgleichungen in exakte Differentialgleichungen zu transformieren, um so auch hier mit Hilfe eines ersten Integrals nichtkonstante Lösungen berechnen zu können. Die Multiplikation von  $g$  und  $h$  mit dem gleichen Faktor  $M: D \rightarrow \mathbb{R}$  ändert aufgrund der Definition von

$f$  in Abhängigkeit von  $g$  und  $h$  nichts an der Lösung der DGL, wenn für alle  $(t, x) \in D$  gilt, dass  $M(t, x) \neq 0$ , d.h.  $M$  eine nullstellenfreie stetig differenzierbare Funktion ist. Durch diese Multiplikation kann man aber erreichen, dass

$$M(t, x)h(t, x)\dot{x} + M(t, x)g(t, x) = 0$$

exakt ist, obwohl (A.2) es nicht ist.  $M$  heißt dann *integrierender Faktor* oder auch *eulerscher Multiplikator*. Es gibt allerdings kein allgemein gültiges Verfahren zur Bestimmung dieser Faktoren. Nicht einmal die Existenz eines solchen ist sicher.

## Erstes Integral

Für zweidimensionale autonome Systeme  $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t))^T$  kann man analog zum Begriff der Stammfunktion  $F$  einen Terminus definieren, der das Auffinden von nicht konstanten Lösungen einer Differentialgleichung ebenfalls sehr vereinfacht. Er erlaubt, genau wie auch die Stammfunktion, die Darstellung der Lösungskurven als Niveaumengen  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x) = c\}$ .

**Definition A.2** Eine stetig differenzierbare Funktion  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *erstes Integral* einer zweidimensionalen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

falls die Beziehung

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x)f_1(x) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x)f_2(x) = 0$$

für alle  $x \in D$  gilt. □

Jede auf einer offenen Teilmenge von  $D$  konstante Funktion ist trivialerweise für die Differentialgleichung ein erstes Integral. Um relevante Aussagen treffen zu können, sind diese Lösungen nicht zielführend. Deshalb betrachtet man die nicht-trivialen ersten Integrale, wo  $F$  auf einer offenen Teilmenge von  $D$  nicht konstant sind.

Die besondere Eigenschaft des ersten Integrals ist es, dass es entlang der Lösungen von (A.3)



konstant ist. Die Lösungen einer DGL laufen also entlang der Höhenlinien

$$F^{-1}(l) := \{x \in D \mid F(x) = l\} .$$

Die Existenz und Berechenbarkeit erster Integrale ist allerdings keineswegs gewährleistet. Für eine exakte Differentialgleichung kann man das erste Integral analog zur Stammfunktion berechnen, vgl. [1, Kap. 5.1], beispielsweise wie das erste Integral für das Räuber-Beute-Modell.

Im Prinzip sucht man bei der Bestimmung erster Integrale zuerst nach einem geeigneten integrierenden Faktor, so dass das zweidimensionale autonome System durch die Multiplikation mit diesem Faktor in eine exakte Differentialgleichung transformiert wird. Das erste Integral der Differentialgleichung entspricht dann der Stammfunktion der exakten Version der Differentialgleichung.

## Stabilität und Lipschitz-Stetigkeit auf lange Sicht

Stabilität ist ein Werkzeug, um die Entwicklung der Lösungen von Differentialgleichungen für  $t \rightarrow \infty$  zu untersuchen. Der folgende Abschnitt zeigt auf, dass die Stabilität als Lipschitz-Stetigkeit auf lange Sicht verstanden werden kann. Zuerst betrachte man das Lemma A.3, welches zeigt, dass eine obere Schranke für die Matrixnorm der Matrix-Exponentialfunktion einer stabilen Matrix existiert.

**Lemma A.3** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine stabile Matrix. Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$\|e^{At}\| \leq c \quad \text{für alle } t > 0 .$$

□

Das folgende Lemma aus [8] zeigt den Zusammenhang zwischen Stabilität und Lipschitz-Stetigkeit auf unendlichen Intervallen. Für den Beweis nimmt man an, dass das Gleichgewicht  $x^* = 0$  ist. Sollte  $x^* \neq 0$  sein, so kann man das gegebene DGL-System transformieren in  $\tilde{f}(x) = f(x + x^*)$ , so dass  $x^* = 0$  ist. Beachte, dass hier lediglich die Kurve verschoben wird, der Verlauf der Trajektorie ändert sich nicht.

**Lemma A.4** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann stabil, wenn die Lösungen  $x(t; x_0)$  der entsprechenden linearen DGL (2.4) mit Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  gleichmäßig Lipschitzstetig in  $x_0$  für alle  $t \geq 0$  sind, d.h. wenn eine Konstante  $L > 0$  existiert, so dass

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \text{ für alle } t \geq 0$$

gilt. □

*Beweis.* Sei  $A$  stabil. Dann gibt es nach Lemma A.3 ein  $c > 0$ , so dass die Matrix-Exponentialfunktion nach oben beschränkt ist, also  $\|e^{At}\| \leq c$  für alle  $t \geq 0$ . Es folgt damit für die Lösungen  $x(t; x_1)$  und  $x(t; x_2)$

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| = \|e^{At}x_1 - e^{At}x_2\| \leq \|e^{At}\|\|x_1 - x_2\| \leq c\|x_1 - x_2\|$$

und somit mit  $L = c$  die Lipschitz-Stetigkeit.

Sei nun  $x(t; x_0)$  Lipschitz-stetig. Dann gilt

$$\|x(t; x_0) - 0\| = \|x(t; x_0) - x(t; 0)\| \leq L\|x_0 - 0\|$$

für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  für alle  $t \geq 0$ . Somit folgt Stabilität für  $x^*$  mit  $\delta = \varepsilon/L$  und  $\delta$  und  $\varepsilon$  die Variablen aus der Definition der Stabilität 4.3. □

## B Matlab-Files

### Inhalt der beigefügten CD-Rom

Auf der beiliegenden CD-Rom befinden sich alle Programme, die zum Erstellen vieler Grafiken verwendet wurden, die im Rahmen dieser Arbeit zur Veranschaulichung der vorgestellten Zusammenhänge gedient haben. Die Implementierung erfolgte mit MATLAB<sup>®</sup> Version R2009b. Die folgende Liste zählt die enthaltenen Dateien auf und beschreibt die Funktions- und Anwendungsweise. Unter anderem liegt auch eine digitale Version der Diplomarbeit als PDF Dokument vor. Für die Art der jeweiligen Datei steht die Abkürzung „F“ für „Funktion“ und „S“ für „Skript-Datei“. Skript-Dateien stellen jeweils die ausführbaren Dateien dar.

Dateiname	Beschreibung	Art	Abbildung
<b>diplomarbeit.pdf</b>	Diplomarbeit in digitaler Form	PDF	
<b>bsp_gdgl.m</b>	Graphische Darstellung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t)$ für $a \in \{-0,5, 1, 1,5\}$	S	2.1
<b>gdgl01.m</b>	Rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t)$ für $a = 1$	F	
<b>gdgl02.m</b>	Rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t)$ für $a = 1,5$	F	
<b>gdgl03.m</b>	Rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t)$ für $a = -0,5$	F	
<b>bsp_steif.m</b>	Vergleich von explizitem und implizitem Euler-Verfahren am Beispiel <b>bsp_steif_f.m</b>	S	3.3
<b>bsp_steif_f.m</b>	Rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ mit $\lambda = -100$	F	

<code>pendel_plot.m</code>	Visualisierung einiger spezieller Lösungskurven für das mathematische Pendel	S	4.1
<code>pendel_f.m</code>	Vektorfeld $f$ der Modellierung des mathematischen Pendels	F	
<code>pendel_ljapunov_plot.m</code>	Graphische Darstellung der Ljapunov-Funktion aus <code>pendel_ljapunov_f.m</code>	S	4.4
<code>pendel_ljapunov_f.m</code>	Eine Ljapunov-Funktion für das mathematische Pendels	F	
<code>lotka_volterra.m</code>	Rechte Seite des Räuber-Beute-Modells für unbeschränkte Ressourcen	F	
<code>lotka_volterra_beschr.m</code>	Rechte Seite des Räuber-Beute-Modells für beschränkte Ressourcen	F	
<code>lv_ljapunov_f.m</code>	Ljapunov-Funktion des Räuber-Beute-Modells	F	
<code>lv_unbeschraenkt.m</code>	Visualisierung von Trajektorien des Räuber-Beute-Modells unter Verwendung von <code>lotka_volterra.m</code> und <code>lv_ljapunov_f.m</code>	S	4.5
<code>lv_ljapunov.m</code>	Graphische Darstellungen der Ljapunov-Funktion für das Räuber-Beute-Modell in Abhängigkeit von $t$ und $x$	S	4.6, 5.4
<code>lv_beschraenkt_iE.m</code>	Graphische Darstellung der Lösung des Räuber-Beute-Modells mit dem impliziten Euler-Verfahren	S	5.5
<code>lv_beschraenkt_iMR.m</code>	Graphische Darstellung der Lösung des Räuber-Beute-Modells mit der impliziten Mittelpunktsregel	S	5.6
<code>bsp_lf_quadr_iE.m</code>	Plot der Lösung des Beispiels 4.13 mit dem impliziten Euler-Verfahren	S	5.3
<code>bsp_lf_quadr_iMR.m</code>	Plot der Lösung des Beispiels 4.13 mit der impliziten Mittelpunktsregel	S	5.7
<code>bsp_lf_quadr_f.m</code>	Rechte Seite der Differentialgleichung aus Beispiel 4.13	F	

<code>eulerIm.dat</code>	Werte für die Matrix $A$ aus dem Butcher-Tableau des impliziten Euler-Verfahrens	Daten	
<code>eulerImbc.dat</code>	Werte für die Vektoren $b$ und $c$ aus dem Butcher-Tableau des impliziten Euler-Verfahrens	Daten	
<code>mittelpunktIm.dat</code>	Werte für die Matrix $A$ aus dem Butcher-Tableau der impliziten Mittelpunktsregel	Daten	
<code>mittelpunktImbc.dat</code>	Werte für die Vektoren $b$ und $c$ aus dem Butcher-Tableau der impliziten Mittelpunktsregel	Daten	

## Grundlegende Idee

Die Grundidee hinter allen Implementierungen, die die Berechnung einer Lösung für die DGL mit der impliziten Mittelpunktsregel oder dem impliziten Euler-Verfahren beinhalten, soll an dieser Stelle erläutert werden. Die Implementierung folgt einem allgemeinen Algorithmus für Runge-Kutta-Verfahren, der in [7] vorgestellt wird. Alle verwendeten Notationen werden im Anschluss an den Algorithmus anhand eines Beispiels erläutert.

### Algorithmus B.1 Lösung eines AWP mit dem impliziten Runge-Kutta-Verfahren

**Eingabe:** Anfangsbedingung  $(t_0, x_0)$ , Endzeit  $T$ , Schrittzahl  $N$ , Einschrittverfahren  $\Phi$

- (1) Setze  $h := (T - t_0)/N$  und  $\tilde{x}_0 = x_0$
- (2) Für  $i = 0, \dots, N - 1$  :
  - (a) Berechne  $t_{i+1} = t_i + h$  und löse das nichtlineare Gleichungssystem  $k = F(k)$
  - (b) Berechne  $\tilde{x}_{i+1} := \Phi(t_i, \tilde{x}_i, h) = \tilde{x}_i + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$ .

**Ausgabe:** Werte der Gitterfunktion  $\tilde{x}(t_i) = \tilde{x}_i$  in  $t_0, \dots, t_N$  □

Am Beispiel der Skript-Datei `lv_bounded_iE.m` sei die Funktionsweise erläutert. Analog gelten die kommenden Aussagen für Dateien, die `iE` und `iMR` im Namen tragen. Letztere verwenden die implizite Mittelpunktsregel zur Lösung der DGL. `lv_bounded_iE.m` enthält den Algorithmus, der für die Lösung des Räuber-Beute-Modells mit dem impliziten Euler-Verfahren verwendet wurde. Die Werte des zugehörigen Butcher-Tableaus werden aus den Dateien `eulerIm.dat` und `eulerImbc.dat` geladen.

Die Lösung wird zu einem Anfangswert `x0` unter Verwendung von drei unterschiedlichen

Schrittweiten ermittelt, die über die im Vektor `varN` festgehaltene Anzahl der Schritte berechenbar sind. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Aufgabe besteht darin, das durch

$$k = F(k)$$

gegebene Gleichungssystem mit

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s \cdot n} \text{ und } F(k) = \begin{pmatrix} f\left(t + c_1 h, x + h \sum_{j=1}^s a_{1j} k_j\right) \\ \vdots \\ f\left(t + c_s h, x + h \sum_{j=1}^s a_{sj} k_j\right) \end{pmatrix}$$

numerisch zu lösen. Man sucht also einen Fixpunkt der Funktion  $F$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt eine Funktion  $f: A \rightarrow A$  genau dann einen eindeutigen Fixpunkt  $x^*$  auf einer kompakten Teilmenge  $A$  eines vollständig normierten Raumes, wenn  $f$  eine Kontraktion ist.

Für Gleichung  $k = F(k)$  ist die zugrundeliegende Funktion  $f$  nach Voraussetzung Lipschitz-stetig mit Konstante  $L$ . Damit ist auch die Abbildung  $F$  mit der Lipschitz-Konstante  $hL$  Lipschitz-stetig. Falls  $K := hL$  so gewählt werden kann, dass  $K < 1$ , folgt damit, dass  $F$  eine Kontraktion darstellt, denn es gilt

$$\|F(k_1) - F(k_2)\| \leq K \|k_1 - k_2\|.$$

Somit kann man mit Hilfe der Fixpunktiteration das nichtlineare Gleichungssystem  $k = F(k)$  iterativ lösen, ohne Ableitungen oder ähnliche Hilfsmittel vorher berechnen zu müssen. Das stellt einen großen Vorteil dar. In der Implementierung wird das Problem mit dem Gesamtschrittverfahren

$$k^{(j+1)} = F(k^{(j)}), \tag{B.1}$$

gelöst. Als Startwert wird der Wert  $k_i^{(0)} = f(t_0 + c_i h, x_0)$  verwendet. In den darauffolgenden Schritten wird mit  $k$  aus dem vorangegangenen Schritt gerechnet. Für ein geeignetes Abbruchkriterium vergleicht man jeweils den alten mit dem neu berechneten Wert für  $k$ . Wenn gilt

$$\|k^{(j+1)} - k^{(j)}\| \leq \varepsilon$$

für ein  $\varepsilon > 0$ , dann ist ein zufriedenstellend genauer Wert für  $k$  gefunden und der Algorithmus geht zum nächsten Schritt über. Eine geeignete Wahl für die Fehlertoleranz  $\varepsilon$  kann man treffen, indem man sich überlegt, unter welchen Voraussetzungen das Verfahren eine gewünschte Konsistenzordnung erfüllt. Das Abbruchkriterium hängt dann von der Schrittweite ab. Für die in dieser Arbeit erforderliche Güte der Implementierung genügt es,  $\varepsilon$  auf den Wert `eps` =  $10^{-5}$  zu setzen.

Der Nachteil der Fixpunktiteration ist, dass sie vergleichsweise langsam konvergiert. Außerdem kann es für größere Schrittweiten passieren, dass kein geeigneter Startwert ermittelt werden kann. Ist nämlich die Lipschitz-Konstante  $L$  des Problems sehr groß, so muss  $h$  ausreichend klein gewählt werden, um die Kontraktionseigenschaft weiterhin zu gewährleisten. Für die Differentialgleichungen in der vorliegenden Arbeit tritt dieses Phänomen nur in der Hinsicht auf, dass man mit Absicht unsinnig große Schrittweiten wählt, um die asymptotische Stabilität zu verdeutlichen.

Eine Alternative zum Gesamtschrittverfahren (B.1) stellt das Einzelschrittverfahren dar. Dieses konvergiert etwas schneller als das Gesamtschrittverfahren, denn es wird berücksichtigt, dass es bereits bekannte Werte gibt, die zur Ermittlung des aktuellen Werts nicht wiederholt berechnet werden müssen. Im vorliegenden Fall genügt es zur Lösung des Gleichungssystems das Gesamtschrittverfahren zu verwenden.

Auf den folgenden Seiten ist der Schrifttext der wichtigsten MATLAB<sup>®</sup>-Dateien nochmals abgedruckt. Alle Dateien sind auch auf der beiliegenden CD-Rom zu finden.

## Lotka-Volterra-Modell: Lösung mit implizitem Euler-Verfahren

```
1 clear all;
2 close all;
3
4 % Einlesen des Butcher Arrays
5 verfahren = 'eulerIm';
6 a = load([verfahren, '.dat']) ;
7 tmp = load([verfahren, 'bc.dat']) ;
8 c = tmp(1,:)';
9 b = tmp(2,:)';
10
11 % Genauigkeit
12 eps = 10^(-5) ;
13
14 % Anzahl der Schritte
15 varN = [17 30 100];
16
17 % Festlegen der Problemparameter
18 T = 15;
19 t0 = 0;
20 x0 = [1.5 1]';
21 f = @lotka_volterra_beschr;
22
23 % Matrix der zur Schrittzahl N gehoerigen Loesungen X
24 X = zeros(size(x0,1).*size(varN,2),max(varN)+1);
25
26 for m = 1:size(varN,2)
27
28     % benoetigte Hilfsgrößen inklusive Gitterfeinheit
29     N = varN(m);
30     h = (T-t0)/N;
31     t = zeros(1,N+1);
32     t(N+1) = T;
33     s = size(c,1);
34     k = zeros(size(x0,1),s);
35     kAlt = zeros(size(x0,1),s);
36     x = zeros(size(x0,1),max(varN)+1);
37     x(:,1) = x0;
38
39     % Berechnung der x_i durch das Runge-Kutta-Verfahren mit
40     % Gesamtschrittverfahren
41     for l = 0:N-1
42         t(l+1) = l*h;
43
44         % Startwert fuer Fixpunktiteration
45         for i = 1:s;
```



```
45     k(:,i) = f(t+c(i)*h , x(:, l+1)); % Koeffizienten k_i
46     end
47
48     % Loese nichtlineares GLS k = F(k)
49     kAlt = k(1,1) + 2*eps ;
50     while(norm(k - kAlt,'fro')>eps)
51         kAlt = k ;
52         for i = 1:s;
53             k(:,i) = f(t+c(i)*h,x(:,l+1)+h.*k*a(i,:))' ;
54         end
55     end
56
57     x(:,l+2) = x(:,l+1)+h.*k*b ;
58
59     end
60
61     X(m,:) = x(1,:);
62     X(m+size(varN,2), :) = x(2,:);
63 end
64
65 % Phasenportrait des Lotka-Volterra-Modells mit unterschiedlichen
66   Schrittweiten
67 plot(X(1,1:varN(1)+1), X(4,1:varN(1)+1),'r-', X(2,1:varN(2)+1),
68       X(5,1:varN(2)+1), 'b-',X(3,1:varN(3)+1), X(6,1:varN(3)+1),'k-')
69 axis([0.8 1.4 0.8 1.4]);
70 xlabel('x_1(t)');
71 ylabel('x_2(t)');
```

## Lotka-Volterra-Modell: Lösung mit impliziter Mittelpunktsregel

```
1  clear all;
2  close all;
3
4  % Einlesen des Butcher Arrays
5  verfahren = 'mittelpunktIm';
6  a = load([verfahren, '.dat']) ;
7  tmp = load([verfahren, 'bc.dat']) ;
8  c = tmp(1,:)';
9  b = tmp(2,:)';
10
11 % Genauigkeit
12 eps = 10(-5) ;
13
14 % Anzahl der Schritte
15 varN = [17 30 100];
16
17 % Festlegen der Problemparameter
18 T = 15;
19 t0 = 0;
20 x0 = [1.5 1]';
21 f = @lotka_volterra_beschr;
22
23 % Matrix der zur Schrittzahl N zugehoerigen Loesungen X
24 X = zeros(size(x0,1).*size(varN,2),max(varN)+1);
25
26 for m = 1:size(varN,2)
27
28   % benoetigte Hilfsgrößen inklusive Gitterfeinheit
29   N = varN(m);
30   h = (T-t0)/N;
31   t = zeros(1,N+1);
32   t(N+1) = T;
33   s = size(c,1);
34   k = zeros(size(x0,1),s);
35   kAlt = zeros(size(x0,1),s);
36   x = zeros(size(x0,1),max(varN)+1);
37   x(:,1) = x0;
38
39   % Berechnung der x_i durch das Runge-Kutta-Verfahren mit
   Gesamtschrittverfahren
40   for l = 0:N-1
41     t(l+1) = l*h;
42
```

```
43     % Startwert fuer Fixpunktiteration
44     for i = 1:s;
45         k(:,i) = f(t+c(i)*h , x(:, l+1));
46     end
47
48     % Loese nichtlineares GLS k = F(k)
49     kAlt = k(1,1) + 2*eps ;
50     while(norm(k - kAlt,'fro')>eps)
51         kAlt = k ;
52         for i = 1:s;
53             k(:,i) = f(t+c(i)*h,x(:,l+1)+h.*k*a(i,:)) ;,
54         end
55     end
56
57     x(:,l+2) = x(:,l+1)+h.*k*b ;
58
59     end
60
61     X(m,:) = x(1,:);
62     X(m+size(varN,2), :) = x(2,:);
63 end
64
65 % Phasenportrait Lotka-Volterra-Modell mit unterschiedlichen
66   Schrittweiten
67 plot(X(1,1:varN(1)+1), X(4,1:varN(1)+1), 'r-' ,X(2,1:varN(2)+1),
68       X(5,1:varN(2)+1), 'b-' ,X(3,1:varN(3)+1), X(6,1:varN(3)+1), 'k-')
69 axis([0.7 1.4 0.7 1.4]);
70 xlabel('x_1(t)');
71 ylabel('x_2(t)');
```

## Lotka-Volterra-Modell: Zugehörige Ljapunov-Funktion

```
1 function y = lotka_volterra_beschr(t,x)
2
3 % LOTKA_VOLTERRA_BESCHR. Rechte Seite der Differentialgleichung zum
4 % Rauber-Beute-Modell mit beschraenkten Ressourcen
5 % LOTKA_VOLTERRA_BESCHR(T,X) berechnet die rechte Seite in
6 % Abhaengigkeit von den Eingavektoren T und X
7
8 y = zeros(2,1) ;
9
10 a = 1 ;
11 b = 0.5 ;
12 c = 1 ;
13
14 y(1) = a.*x(1).*(1-x(2)) + b.*x(1).*(1-x(1)) ;
15 y(2) = -c.*x(2).*(1-x(1)) ;
```

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Lösungskurven von $\dot{x}(t) = ax(t)$ mit $x_0 = 0.5$ . . . . .	7
2.2	Das mathematische Pendel . . . . .	11
3.1	Schematische Darstellung des expliziten Euler-Verfahrens . . . . .	22
3.2	Graphische Veranschaulichung der Fehlerterme . . . . .	25
3.3	Vergleich von explizitem und implizitem Euler-Verfahren für eine steife DGL . . . . .	32
4.1	Spezielle Lösungskurven für die Pendelgleichung . . . . .	37
4.2	Unterschiedliche Stabilitätsbegriffe für ein Gleichgewicht . . . . .	39
4.3	Eine typische $\mathcal{KL}$ -Funktion . . . . .	44
4.4	Ljapunov-Funktion der Pendelgleichung mit Reibung . . . . .	52
4.5	Lösungskurven des Räuber-Beute-Modells ohne beschränkte Ressourcen . . . . .	57
4.6	Die Funktion $V$ und Niveaulinien für das Räuber-Beute-Modell (4.16) . . . . .	58
5.1	Stabilitätsgebiete für spezielle numerische Verfahren . . . . .	66
5.2	Beispiel einer konvexen Funktion im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	68
5.3	Lösung des Beispiels 4.13 durch das implizite Euler-Verfahren . . . . .	71
5.4	Die Funktion $V$ für das Räuber-Beute-Modell in Abhängigkeit von $t$ . . . . .	74
5.5	Lösung des Räuber-Beute-Modells durch das implizite Euler-Verfahren . . . . .	75
5.6	Lösung des Räuber-Beute-Modells durch die implizite Mittelpunktsregel . . . . .	77
5.7	Lösung des Beispiels 4.13 durch die implizite Mittelpunktsregel . . . . .	78



# Literaturverzeichnis

- [1] Bernd Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Berlin Heidelberg, 1. Aufl., 1997
- [2] Francis Clarke, *Lyapunov Functions and Feedback in Nonlinear Control aus Optimal Control, Stabilization, and Nonsmooth Analysis*, Marcio S. de Queiroz, Michael Malisoff und Peter Wolenski (Eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, Band 301, Springer, 2004, S.267-282
- [3] Peter Deuffhard, Folkmar Bornemann, *Numerische Mathematik II*, de Gruyter, Berlin, 3. Aufl., 2008
- [4] Lars Grüne, *Mathematische Kontrolltheorie I: Lineare Systeme*, Vorlesungsskript der Vorlesung gehalten an der Universität Bayreuth im Wintersemester 2008/2009
- [5] Lars Grüne, *Numerik Dynamischer Systeme*, Vorlesungsskript einer Vorlesung gehalten an der Universität Bayreuth im Wintersemester 2008/2009
- [6] Lars Grüne, *Numerische Mathematik I*, Vorlesungsskript der Vorlesung gehalten an der Universität Bayreuth im Wintersemester 2007/2008
- [7] Lars Grüne, *Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript der Vorlesung gehalten an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2012
- [8] Lars Grüne, *Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme*, Vorlesungsskript der Vorlesung gehalten an der Universität Bayreuth im Wintersemester 2002/2003
- [9] Lars Grüne, *Stabilität und Stabilisierung nichtlinearer Systeme*, Vorlesungsskript der Vorlesung gehalten an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt im Sommersemester 2002

- [10] Lars Grüne, Oliver Junge, *Gewöhnliche Differentialgleichungen—Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009
- [11] Wolfgang Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1967
- [12] Ernst Hairer, Syvert P. Nørsett, Gerhard Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer, Berlin Heidelberg, 2. Aufl., 1993, S.80-88
- [13] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2. Aufl., 2002, S.41-44
- [14] Iasson Karafyllis, Lars Grüne, *Feedback stabilization methods for the numerical solution of systems of ordinary differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B 16(1), 2011, S. 283-317
- [15] Joseph La Salle, Solomon Lefschetz, *Die Stabilitätstheorie von Ljapunow*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1967
- [16] A.M. Stuart, A.R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1998



# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel erstellt habe.

Diese Arbeit lag in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vor.

Bayreuth, 30. November 2012

---

Mirjam Schober