

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Die Monte-Carlo-Methode für Amerikanische Optionen

BACHELORARBEIT

VON

CHRISTIAN WEBER

Aufgabenstellung und Betreuung:

Prof. Dr. Lars Grüne

Bayreuth, 3. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Notationsverzeichnis	IV
1 Einleitung	1
2 Einführung in die Optionsbewertung	4
2.1 Optionen	4
2.1.1 Definitionen	4
2.1.2 Beispiele für den praktischen Optionseinsatz	7
2.2 Risikoneutrale Bewertung	9
2.2.1 Marktannahmen	9
2.2.2 Fairer Preis und risikoneutrale Bewertung	10
2.3 Simulation des Basiswerts	11
2.3.1 SDGL und der Wiener Prozess	12
2.3.2 Die geometrische Brown'sche Bewegung	13
2.4 Grundalgorithmus der Optionsbewertung	16
3 Die Monte-Carlo-Methode	18
3.1 Mathematische Grundlagen der Methode	18
3.2 Algorithmus zur Bewertung europäischer Optionen mit der MC-Methode	20
3.3 Varianzreduktion	20
3.4 Probleme bei der Anwendung auf amerikanische Puts	22
3.4.1 Theoretische Aufgabenstellung zur Berechnung einer optimalen Ausübungsstrategie	22
3.4.2 Probleme bei der Approximation einer optimalen Ausübungsstrategie mit der Monte-Carlo-Methode	24
3.5 Erster naiver Ansatz zur Bewertung eines amerikanischen Puts	25
3.6 Gründe für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode	27

4 Die Bündelmethode von Tilley	28
4.1 Grundidee	28
4.2 Der Bündelalgorithmus	29
4.3 Konvergenzverhalten des Bündelalgorithmus	33
4.3.1 Gründe für Ungenauigkeiten des MC-Schätzers	33
4.3.2 Schätzungen des Optionswerts in Abhängigkeit des Bündelparameters α und die Bedeutung der “scharfen Grenze”	34
4.3.3 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl R	38
4.3.4 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N	39
4.4 Auswertung anhand eines Beispiels	40
5 Die Methode von Grant, Vora und Weeks	42
5.1 Grundidee	42
5.2 Der Algorithmus von Grant, Vora und Weeks (GVW)	43
5.3 Kritische Ausübungsgrenze und Hinweise zur Implementierung	46
5.4 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Parameter	49
5.5 Auswertung anhand eines Beispiels	52
6 Vergleich der beiden Methoden und Schlussfazit	54
A Inhalt der CD-ROM	60
Literaturverzeichnis	61

Abbildungsverzeichnis

2.1	Optionswert eines Calls (links) und eines Puts (rechts) zu einem Zeitpunkt $t < T$	6
2.2	Veranschaulichung von Beispiel 2.7: Mögliche Gewinne bzw. Verluste in Abhängigkeit vom Aktienkurs $S(T)$	8
2.3	Simulation von Kurspfaden auf Basis der geometrischen Brown'schen Bewegung	15
3.1	Kritischer Ausübungswert S^* zu einem festen Zeitpunkt $t < T$ (links) und kritische Ausübungsgrenze für die gesamte Optionslaufzeit (rechts)	24
3.2	Die Problematik bei Anwendung der MC-Methode auf amerikanische Optionen .	25
4.1	Übergangszone und "scharfe Grenze" in $x_{rg(k)}(t, k)$	30
4.2	Schätzungen des Optionswerts in Abhängigkeit von α	36
4.3	Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl R	38
4.4	Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N	39
4.5	Histogramm (Algorithmus mit antithetischen Zufallsvariablen)	41
4.6	Histogramm (Algorithmus ohne antithetische Zufallsvariablen)	41
5.1	Bestimmung eines kritischen Ausübungswerts	46
5.2	Kritische Ausübungsgrenze für $M=500$ (links) und für $M=10000$ (rechts)	47
5.3	Kritische Ausübungsgrenze in Abhängigkeit von M	48
5.4	Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl M	50
5.5	Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N	51
5.6	Histogramm (Algorithmus mit antithetischen Zufallsvariablen)	52
5.7	Histogramm (Algorithmus ohne antithetische Zufallsvariablen)	53

Notationsverzeichnis

Allgemein gültige Notation

$S(t)$	–	Basiswert zur Zeit t
$t = 0$	–	Ausgabezeitpunkt der Option
K	–	Ausübungspreis
T	–	Verfallstag, Fälligkeitsdatum der Option (in Jahren)
$V(t, S(t))$	–	Optionswert, Optionspreis
$I(t, S(t))$	–	Innerer Optionswert
r	–	Zeitlich konstanter, risikofreier Marktzinssatz
μ	–	Erwartete Rendite
σ	–	Konstante Volatilität
$W(t), W(t, \omega)$	–	Wiener Prozess
$S(t, k)$	–	Basiswert des Pfads k in Abh. der Zeit; Kurspfad k
$F(t, S(t))$	–	Fortführungswert der Option
$S^*(t)$	–	kritischer Ausübungswert zur Zeit t

Insbesondere für die Kapitel 4 und 5

$V(t, k)$	–	Optionswert auf Basis des k -ten Pfads zur Zeit t
$I(t, k)$	–	Innerer Wert auf Basis des k -ten Pfads zur Zeit t
$F(t, k)$	–	Fortführungswert auf Basis des k -ten Pfads zur Zeit t
N	–	Anzahl an verwendeten Zeitschritten
$\Delta t = \frac{T}{N}$	–	Länge eines Zeitschritts

Insbesondere für Kapitel 4 (Tilley)

R	–	Anzahl an Kurspfaden
Q	–	Anzahl an Bündeln
P	–	Anzahl an Pfaden pro Bündel
α	–	Bündelparameter

Insbesondere für Kapitel 5 (GVW)

M	–	Anzahl an Kurspfaden zur Approximation der kritischen Ausübungsgrenze
R	–	Anzahl an Kurspfaden zur Schätzung des Optionswerts auf Grundlage der kritischen Ausübungsgrenze

Kapitel 1

Einleitung

Es ist bekannt, dass analytische Lösungen oft nur für Spezialfälle oder “einfache” mathematische Probleme erhältlich sind. So ist es bei der ständig steigenden Komplexität an weltweit gehandelten Finanzprodukten nicht verwunderlich, dass diese Verfahren auch bei der praktischen Optionsbewertung schnell an ihre Grenzen stoßen. Schon bei der Bestimmung des Preises einer amerikanischen Option ist man aufgrund der dynamischen Entscheidungsproblematik¹ dazu gezwungen, deren Wert numerisch zu approximieren. Wenn die Option zusätzlich noch auf komplexen stochastischen Prozessen beruht oder wenn ihr mehrere Basiswerte zugrunde liegen, werden auch konventionelle Ansätze² sehr zeitaufwendig oder sind nicht mehr anwendbar. Diesbezüglich weist die Monte-Carlo-Methode, die auf einer stochastischen Simulation basiert, einen hohen Grad an Flexibilität auf. Jedoch wurde lange Zeit die Auffassung vertreten, dass deren Anwendung auf Optionen ohne vorzeitige Ausübungsmöglichkeiten beschränkt sei. So schrieb unter anderem Hull im Jahre 1993 (vgl. [8, S. 334]), dass die Monte-Carlo-Simulation nur für die Bewertung europäischer Optionen geeignet sei. Erst ab Mitte der 90er Jahre wurde diese Annahme vermehrt widerlegt. James A. Tilley (1993) verwendete als erster die stochastische Simulation, um den Preis einer amerikanischen Option zu schätzen. Zunächst werden hierbei mögliche Kursentwicklungen des Basiswerts durch die Simulation von einzelnen Pfaden dargestellt. Im zweiten Schritt wird zur Bestimmung der Ausübungsstrategie ein rückwärts-rekursiver Algorithmus durchgeführt, der auf einer Bündeltechnik basiert. Im Gegensatz dazu werden bei der Methode von Grant, Vora und Weeks (1996) Simulationen aufeinanderfolgend gebraucht. In einem rekursiv-dynamischen Programmierungsablauf werden die Ausübungsgrenzen zu jedem vorzeitigen Ausübungszeitpunkt approximiert. Anschließend wird der Optionswert durch eine Vorwärtssimulation, die auf den zuvor erhaltenen Grenzen beruht, bestimmt. Diese beiden

¹Zu jedem vorzeitigen Ausübungszeitpunkt stellt sich die Frage, ob Ausüben oder Halten der Option die optimale Strategie darstellt

²Zum Beispiel die Binomialmethode oder Finite-Differenzen-Methoden

Methoden werden in der vorliegenden Bachelorarbeit detailliert vorgestellt und in verschiedenen Anwendungsszenarien getestet. Dabei wird sowohl auf die Konvergenzeigenschaften und die Genauigkeit der Schätzungen als auch auf die benötigte Rechnerzeit eingegangen. Letztendlich wird anhand von verschiedenen Testläufen ein Vergleich zwischen diesen beiden Algorithmen gezogen.

Neben den genannten Methoden gibt es noch zahlreiche weitere Ansätze zur Bewertung von amerikanischen Optionen mit der Monte-Carlo-Methode, die im Laufe der letzten Jahre auch teilweise weiterentwickelt und verbessert wurden. Diese werden jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt. Die folgende Auswahl an Methoden soll dem Leser lediglich einen Überblick geben. Unter anderem schlagen Broadie und Glasserman (1996, 1997) zwei Algorithmen vor, die auf der Schätzung von Ober- und Untergrenzen des Optionspreises beruhen, die schließlich gegen den wahren Optionswert konvergieren. Die eine Methode basiert dabei auf einem nicht-rekombinierbaren Baum, die andere auf einem stochastischen Gitter. Die Algorithmen von Carrier (1996) und Longstaff und Schwartz (2001) sind Weiterentwicklungen der grundlegenden Idee von Tilley. Dabei werden Ausgleichsrechnungen durchgeführt, um eine optimale Ausübungsstrategie zu bestimmen. Bei Longstaff und Schwartz kommt hierzu die Methode der kleinsten Quadrate zum Einsatz.

Nach Veröffentlichung dieser Erkenntnisse änderte auch Hull in der vierten Auflage seines Buches (2001) seine ursprüngliche Aussage. Nun ist lediglich zu lesen, dass bei Anwendung der Monte-Carlo-Simulation auf Optionen mit vorzeitigen Ausübungsmöglichkeiten Probleme auftreten. (vgl. [9, S. 579]). Tatsächlich stellt die Bewertung von amerikanischen Optionen mit der Monte-Carlo-Methode eine Herausforderung dar. Denn die Kurspfade werden während des Simulationsvorgangs zeitlich vorwärts durchschritten und so bleibt zu den jeweiligen potenziellen Ausübungszeitpunkten zunächst unklar, ob das Optionsrecht in Anspruch genommen werden soll oder nicht, weil es hierfür möglicherweise einen günstigeren zukünftigen Zeitpunkt gibt.

Das Kapitel 2 dieser Arbeit enthält eine Einführung in die Grundlagen der Optionsbewertung, wobei wir uns zunächst - dem leichteren Verständnis wegen - vornehmlich auf europäische Optionen konzentrieren. Im dritten Kapitel wird die Vorgehensweise der Monte-Carlo-Methode erklärt, bevor explizit auf die Problematik bei der Anwendung auf amerikanische Optionen hingewiesen wird. In den Kapiteln 4 und 5 beschäftigen wir uns ausführlich mit den Algorithmen von Tilley und von Grant, Vora und Weeks und testen diese anhand von ausgewählten Parametern. Dabei werden wir uns auf den eindimensionalen Fall³ konzentrieren. Zum einen, weil man daran die Vorgehensweisen gut verständlich darlegen kann, zum anderen, weil hierfür Vergleichswerte herkömmlicher numerischer Methoden⁴ existieren, die als sehr genau gelten. In Kapitel

³D.h, der Option liegt nur ein Basiswert zugrunde

⁴Darunter fallen, wie zuvor schon erwähnt, die Binomial- oder Finite-Differenzen-Methoden

6 werden beide Methoden anhand einer ausgewählten Testreihe hinsichtlich ihrer Genauigkeit und der aufgewendeten Rechnerzeit miteinander verglichen. Letztendlich wird ein Schlussfazit gezogen und ein Ausblick gegeben auf die Anwendung der vorgestellten Methoden auf höherdimensionale Optionen bzw. auf Optionen, denen ein komplexer stochastischer Prozess zugrunde liegt.

Kapitel 2

Einführung in die Optionsbewertung

In diesem Kapitel soll zunächst anhand von Definitionen und zwei Beispielen geklärt werden, was eine Option überhaupt ist und mit welcher Vorgehensweise man hierfür einen fairen Preis berechnen kann. Dabei spielt das Prinzip der risikoneutralen Bewertung eine wichtige Rolle. Darüber hinaus wird die Frage geklärt, wie mögliche Kursentwicklungen des zugrunde liegenden Basiswerts simuliert werden können. Auf Basis dieser Ergebnisse wird letztendlich der Grundalgorithmus der Optionsbewertung vorgestellt, der den Leitfaden für die numerische Berechnung des Preises einer europäischen Option gibt.

2.1 Optionen

2.1.1 Definitionen

Definition 2.1 (Option)

Eine *Option* ist ein Vertrag, der dem Inhaber das Recht (nicht aber die Verpflichtung) gibt, einen *Basiswert*¹ S mit unsicherer zukünftiger Wertentwicklung zu einem vorab vereinbarten *Ausübungspreis* K zu kaufen (*Call-Option*) bzw. zu verkaufen (*Put-Option*). Da sich ihr Wert von einem Basiswert ableitet, bezeichnet man Optionen auch als *Derivate*.

Bei einer *Option europäischen Typs* kann der Kauf bzw. Verkauf nur zu einem vorher festgelegten *Ausübungszeitpunkt*² $T > 0$, der gleichzeitig das Ende der Laufzeit darstellt, stattfinden. Hat sich der Basiswert zu seinen Gunsten entwickelt, so kann der Inhaber die Option zum Zeitpunkt T ausüben, anderenfalls lässt er sie verfallen.

Bei einer *Option amerikanischen Typs* ist die Ausübung zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$

¹Mit $S(t)$ meinen wir im Folgenden der Arbeit den Basiswert zum Zeitpunkt t , wobei $S(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$.

² T wird auch *Fälligkeitsdatum* oder *Verfallstag* genannt und gibt außerdem die vereinbarte Länge der Laufzeit in Jahren an. Der Startzeitpunkt der Optionslaufzeit sei als $t = 0$ festgelegt.

während der Laufzeit möglich, wobei T wiederum ein vertraglich festgelegter Zeitpunkt in der Zukunft ist.

Bemerkung 2.2

- Beim Basiswert einer Option kann es sich beispielsweise um Aktien, Anleihen, Indizes, Währungen oder Rohstoffe (wie Gold, Kupfer oder Rohöl) handeln.
- In der Praxis findet mit der Optionsausübung oftmals gar kein Erwerb bzw. gar keine Veräußerung des Basiswerts statt. Stattdessen wird ein Barausgleich durchgeführt. Dabei wird der Differenzbetrag zwischen vereinbartem Ausübungspreis K und aktuellem Marktpreis S ermittelt und direkt an den Optionsinhaber ausgezahlt.
- Einer Option können auch mehrere Basiswerte zugrunde liegen (*mehrdimensionaler Fall*). Bei nur einem Basiswert sprechen wir von einer *eindimensionalen Option*.

Der Emittent einer Option (in der Regel eine Bank oder Versicherung) verlangt bei der Herausgabe zum Zeitpunkt $t = 0$ für das Optionsrecht, welches er dem Inhaber der Option gewährt, eine gewisse Prämie. Diese ergibt sich aus den einzelnen Einflussfaktoren (z.B.: Basiswert, Volatilität, erwartete Rendite³, Länge der Laufzeit). Bei der Optionsbewertung geht es darum, den Optionspreis $V(t, S(t))$ in Abhängigkeit vom Basiswert zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ zu bestimmen. Dieser Preis setzt sich zusammen aus dem sogenannten *inneren Wert* und dem *Zeitwert* der Option. Darüber hinaus ist insbesondere der Optionswert $V(0, S(0))$ von Interesse, um die Höhe der oben erwähnten Prämie zum Ausgabebetrag $t = 0$ festzulegen.

Definition 2.3 (Innerer Wert einer Option)

Der *innere Wert* einer Option ergibt sich im Wesentlichen aus der Differenz zwischen Ausübungspreis K und aktuellem Kurs des Basiswerts.

Liegt bei einem $\begin{cases} \text{Call} \\ \text{Put} \end{cases}$ der aktuelle Kurs des Basiswerts $\begin{cases} \text{über} \\ \text{unter} \end{cases}$ dem festgelegten Ausübungspreis, so weist die Option einen (positiven) inneren Wert auf. Man spricht im Fachjargon davon, dass sich die Option *“im Geld”* befindet.

Entspricht der Kurs des Basiswerts dem Ausübungspreis, so ist die Option *“am Geld”*. Sie besitzt dabei keinen inneren Wert.

Der innere Wert ist ebenfalls gleich Null, wenn bei einem $\begin{cases} \text{Call} \\ \text{Put} \end{cases}$ der aktuelle Kurs des Ba-

³Näheres zu diesen Begriffen findet man unter Abschnitt 2.3.

siswerts $\begin{cases} \text{unter} \\ \text{über} \end{cases}$ dem vorher vereinbarten Ausübungspreis liegt. In diesem Fall ist die Option “aus dem Geld”.

Damit erhalten wir für einen Call bzw. Put jeweils eine Formel für den inneren Optionswert I_C bzw. I_P zu einem Zeitpunkt t :

$$I_C(t, S(t)) = \max \{S(t) - K, 0\} =: (S(t) - K)^+$$

$$I_P(t, S(t)) = \max \{K - S(t), 0\} =: (K - S(t))^+$$

Definition 2.4 (Zeitwert einer Option)

Der *Zeitwert* einer Option ist als Preisaufschlag zu interpretieren, der die Wahrscheinlichkeit von vorteilhaften Kursentwicklungen in der Zukunft widerspiegelt. Folglich wird sein Wert im Wesentlichen von der Restlaufzeit der Option, der erwarteten Rendite und der Volatilität des Basiswerts bestimmt. Er errechnet sich aus der Differenz zwischen aktuellem Optionswert und innerem Wert, seine direkte Berechnung bereitet jedoch Schwierigkeiten⁴.

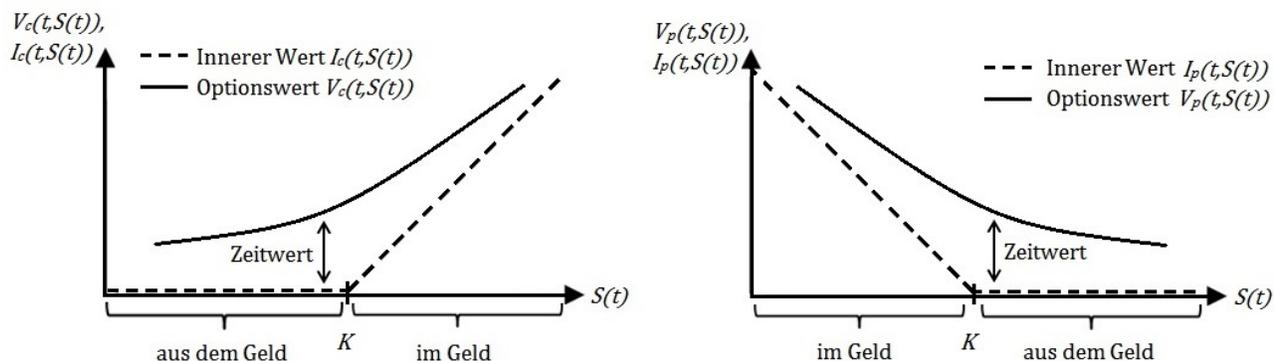


Abbildung 2.1: Optionswert eines Calls (links) und eines Puts (rechts) zu einem Zeitpunkt $t < T$

Bemerkung 2.5

Je kürzer die verbleibende Zeit bis zum Fälligkeitsdatum, desto niedriger ist der Zeitwert, da die Wahrscheinlichkeit einer Kursänderung des Basiswerts mit abnehmender Restlaufzeit sinkt. Zum Fälligkeitsdatum T ist der Zeitwert einer Option offensichtlich gleich Null. Sobald während der Laufzeit eine Wahrscheinlichkeit für positive Kursentwicklungen in der Zukunft besteht, ist der Zeitwert größer als Null.

⁴Dies ist auch ein Grund dafür, warum sich die Bewertung von amerikanischen Optionen als schwierig herausstellt. Mehr dazu in Abschnitt 3.4.

Da europäische Optionen nur zum Verfallstag T ausgeübt werden können, ist deren Bewertung wesentlich einfacher als die von amerikanischen Optionen. Um einen Einstieg in die Optionsbewertung zu geben, konzentrieren wir uns vorerst auf europäische Optionen.

Satz 2.6 (Wert einer Option zum Laufzeitende)

Gemäß Bemerkung 2.5 und Definition 2.3 ergibt sich der Wert einer Call-Option in Abhängigkeit vom Basiswert S zum Fälligkeitsdatum T wie folgt:

$$V_C(T, S(T)) = I_C(T, S(T)) =: (S(T) - K)^+$$

Gerade umgekehrt ergibt sich der Wert einer Put-Option zum Laufzeitende:

$$V_P(T, S(T)) = I_P(T, S(T)) =: (K - S(T))^+$$

Die beiden Gleichungen gelten sowohl für europäische als auch für amerikanische Optionen.

2.1.2 Beispiele für den praktischen Optionseinsatz

Der praktische Einsatz von Optionen gestaltet sich vielfältig. So können sie zum einen als Spekulations-, zum anderen auch als Absicherungsinstrument eingesetzt werden. Im Folgenden geben wir hierzu je ein Anwendungsbeispiel. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns dabei auf europäische Optionen, die Beispiele sind aber ohne Weiteres auf amerikanische Optionen übertragbar.

Anwendungsbeispiel 2.7 (Optionen als Spekulationsinstrument)

Optionen bieten eine gute Möglichkeit für Spekulationsgeschäfte an den Börsen. Nehmen wir an, wir spekulieren auf den Kursanstieg einer dividendenlosen Aktie innerhalb eines Jahres. Der aktuelle Kurs der Aktie betrage $S_0 = 100\text{€}$. Um mögliche Vorteile eines Optionskaufs gegenüber einem direkten Investment deutlich zu machen, werden wir beide Fälle separat betrachten:

1. Angenommen, wir *kaufen die Aktie an der Börse* zum Marktpreis von $S_0 = 100\text{€}$. Damit partizipieren wir direkt an den Kursschwankungen des Wertpapiers. Steigt die Aktie tatsächlich innerhalb des einen Jahres auf beispielsweise $S_T = 120\text{€}$, so ergibt sich aus unserem Investment eine Rendite in Höhe von 20%. Sollte der Aktienkurs jedoch wider Erwarten fallen und am Ende des Jahres einen geringeren Wert als $S_0 = 100\text{€}$ aufweisen, so ergeben sich Verluste, die bis hin zum Totalverlust der 100€ führen können.

2. Nehmen wir an, wir kaufen eine Call-Option auf die Aktie mit Ausübungspreis $K = 100\text{€}$ zum Preis⁵ von 10€ . Geht unsere Spekulation auf und der Aktienkurs steigt wiederum auf $S_T = 120\text{€}$, so üben wir unsere Option zum Laufzeitende aus. Wir erwerben das Wertpapier für den vereinbarten günstigeren Preis $K = 100\text{€}$ und verkaufen es an der Börse sofort wieder zum aktuellen Marktpreis von $S_T = 120\text{€}$. Daraus ergibt sich abzüglich des Optionspreises ein Gewinn von 10€ , was angesichts unseres Kapitaleinsatzes von lediglich 10€ einer Rendite von 100% entspricht. Bei einer negativen Entwicklung des Aktienkurses lassen wir unsere Option einfach verfallen und uns entsteht somit höchstens ein Verlust in Höhe des Optionspreises von 10€ . Man beachte aber, dass dies 100% des eingesetzten Kapitals entspricht.

In äquivalenter Weise kann man durch den Kauf einer Put-Option von fallenden Kursen profitieren. Der Effekt, durch den Erwerb einer Option im Gegensatz zum direkten Investment mit wesentlich geringerem Kapitaleinsatz prozentual stärker an Kursgewinnen (bzw. -verlusten) des Basiswerts partizipieren zu können, wird auch *Hebeleffekt* genannt.

Es ist jedoch zu beachten, dass auch bei positiven Kursentwicklungen gegebenenfalls der direkte Kauf mehr Rendite abwerfen kann als der Erwerb einer Option. Anhand von Abbildung 2.2 (rechts) kann man erkennen, dass dies im Anwendungsbeispiel 2.7 in einem kleinen Kursbereich rechts des Ausübungspreises $K = 100$ der Fall ist.

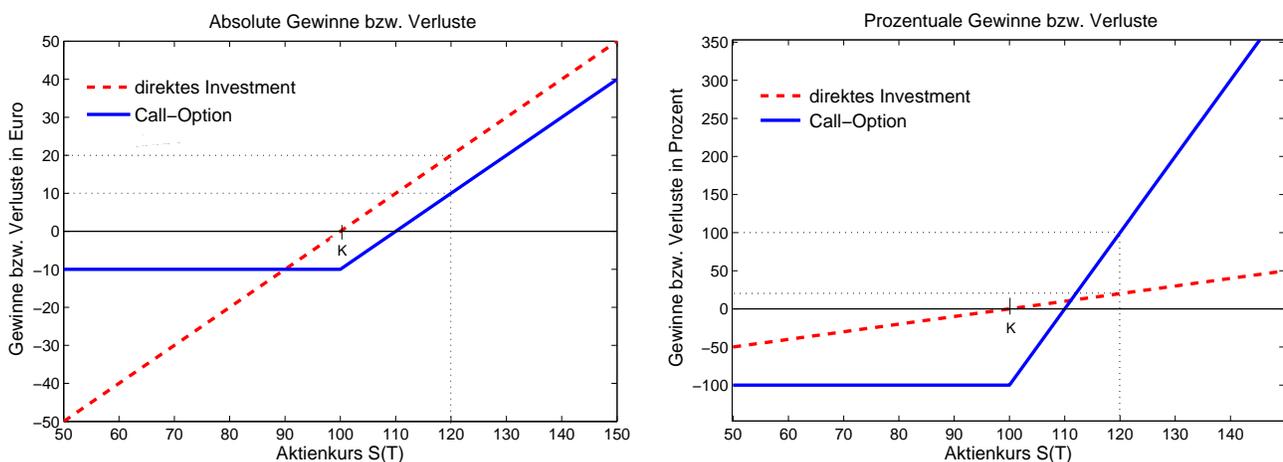


Abbildung 2.2: Veranschaulichung von Beispiel 2.7:
Mögliche Gewinne bzw. Verluste in Abhängigkeit vom Aktienkurs $S(T)$

⁵Dies entspricht ungefähr dem wahren Optionswert, der u.a. mit der Monte-Carlo- oder Binomialmethode berechnet werden kann. Wir unterstellen dabei einen risikofreien Marktzins $r = 0.05$ und eine Volatilität des Aktienkurses in Höhe von $\sigma = 0.2$. Die Begrifflichkeiten werden in dieser Arbeit noch genauer erläutert.

Anwendungsbeispiel 2.8 (Optionen als Absicherungsinstrument)

Andererseits bieten Optionen auch eine gute Möglichkeit, sich beispielsweise gegen Währungsschwankungen abzusichern. Betrachten wir hierzu ein deutsches Maschinenunternehmen, das sein Produkt für 1 Mio. US-Dollar am amerikanischen Markt verkauft. Die Zahlung wird 3 Monate nach Lieferung fällig und auch erst zu diesem Termin erwartet. Der Wechselkurs bei Vertragsabschluss betrage 0.75€ pro US-Dollar, was dem Unternehmen nach aktuellem Stand 750000€ einbringen würde. Fällt nun der Wert des US-Dollars innerhalb der 3 Monate auf 0.70€ pro US-Dollar, so erhält das deutsche Unternehmen bei Umtausch der 1 Mio. US-Dollar lediglich 700000€ und hat somit einzig und allein wegen der Wechselkursschwankung einen Verlust von 50000€ zu Buche stehen. Bei beliebig stark fallendem Kurs können so unvorhersehbare Verluste entstehen. Jedoch kann sich das Unternehmen durch den Erwerb einer Put-Option das Recht sichern, in 3 Monaten die 1 Mio. US-Dollar zum Ausübungspreis von 750000€ zu verkaufen. Der Optionspreis⁶ hierfür betrage 10700€. Fällt nun der Wechselkurs in beliebiger Höhe, so erhält das deutsche Unternehmen abzüglich des Optionspreises in jedem Fall mindestens 739300€. Zudem besteht weiterhin die Möglichkeit, von einem steigenden Dollarkurs zu profitieren, indem das Unternehmen die Put-Option verfallen lässt.

2.2 Risikoneutrale Bewertung

Wie bereits erwähnt und anhand der vorangegangenen Beispiele ersichtlich, hat der Optionsvertrag einen gewissen Preis. Mittels des von Black, Scholes und Merton⁷ eingeführten Konzepts der risikoneutralen Bewertung werden wir klären, wie man hierfür einen fairen Wert berechnen kann.

2.2.1 Marktannahmen

Wir müssen zunächst einige Grundannahmen treffen, um den Finanzmarkt mathematisch modellieren zu können.

- Zinsen werden kontinuierlich mit einem *festen Zinssatz* r berechnet. Legt man den Betrag X für T Jahre an, so erhält man eine Auszahlung von $e^{rT}X$.
- Der Markt ist arbitragefrei, das heißt, es gibt keine risikofreie Finanzanlage, mit der ein höherer Gewinn erzielt werden kann als mit einer festverzinslichen Anlage. Mit einer ri-

⁶Der angegebene Wert entspricht wiederum ungefähr dem wahren Optionspreis bei einem risikofreien Marktzins von $r = 0.05$ und einer Volatilität des Wechselkurses von $\sigma = 0.1$

⁷Die Entwicklung der modernen Optionstheorie von Black, Scholes und Merton wurde 1997 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

sikofreien Anlage vom Betrag X mit Laufzeit T kann also nie ein Betrag $Y > e^{rT}X$ erwirtschaftet werden.

- Kredite können jederzeit und mit beliebig langer Laufzeit zum Zinssatz r aufgenommen werden.
- Andererseits kann auch jederzeit Geld zum zeitlich unveränderlichen Zinssatz r für einen beliebigen Zeitraum festverzinslich angelegt werden.
- Transaktionskosten werden vernachlässigt und es werden keine Dividenden ausgeschüttet.

2.2.2 Fairer Preis und risikoneutrale Bewertung

Nehmen wir an, wir kennen den Wert $P(T) > 0$ eines Finanzprodukts P zu einem Zeitpunkt T in der Zukunft. Interessant ist nun, wie viel dieses Produkt zu einem früheren Zeitpunkt $t < T$ wert ist.

Satz 2.9 (Fairer Preis)

Der zukünftige Wert $P(T) > 0$ eines Finanzprodukts sei bekannt. Dann ergibt sich zu einem Zeitpunkt $t < T$ aus den Marktannahmen folgender *fairer Preis*:

$$P(t) = e^{r(t-T)}P(T),$$

wobei $e^{r(t-T)}$ als *Diskontierungs-* oder *Abzinsfaktor* bezeichnet wird.

Beweis: (i) Angenommen, wir besitzen ab dem Zeitpunkt $t = 0$ das Finanzprodukt P und veräußern es zum Zeitpunkt $0 \leq t < T$, wobei wir den Wert $P(T) > 0$ bereits sicher kennen. Den Verkaufserlös $P(t)$ investieren wir sofort in eine festverzinsliche Anleihe B . Durch den Verkauf dieser Anleihe zum Zeitpunkt T erhalten wir unter Voraussetzung der getroffenen Marktannahmen den Betrag $B(T) = e^{r(T-t)}P(t)$. Kaufen wir gleichzeitig das Produkt P zum bekannten Preis $P(T)$ zurück, so haben wir insgesamt $X = 0$ investiert, denn am Ende sind die Besitzverhältnisse wieder so, als hätten wir kein Geschäft getätigt. Infolgedessen haben wir aber den Betrag $B(T) - P(T)$ erwirtschaftet, der unter der Annahme der Arbitragefreiheit gleich Null sein müsste. Angenommen, der Preis des Finanzproduktes zum Zeitpunkt t sei $P(t) > e^{r(t-T)}P(T)$. Dann hätten wir zum Zeitpunkt T einen risikofreien Gewinn Y in Höhe von

$$Y = B(T) - P(T) = e^{r(T-t)}P(t) - P(T) > \underbrace{e^{r(T-t)}e^{r(t-T)}}_{=1}P(T) - P(T) = 0 = e^{rT} \underbrace{X}_{=0}$$

erzielt. Dies ist ein Widerspruch zur getroffenen Marktannahme der Arbitragefreiheit. Folglich muss gelten $P(t) \leq e^{r(t-T)}P(T)$.

(ii) Analog kann man zeigen, dass $P(t) \geq e^{r(t-T)}P(T)$ gelten muss. Dabei nimmt man zum Zeitpunkt $0 \leq t < T$ einen Kredit auf, um das Finanzprodukt P zu erwerben und verkauft dieses letztendlich wieder zum bekannten Preis $P(T) > 0$. Durch Rückzahlung des Kredits mit Zinsen und Annahme der Arbitragefreiheit kommt man zum oben genannten Ergebnis. \square

Das Problem bei der Optionsbewertung liegt darin, dass der Optionswert $V(T, S(T))$ zum Zeitpunkt T nicht sicher bekannt ist. Unter Einbeziehung eines geeigneten Kursmodells⁸ für den Basiswert S kann man jedoch den Erwartungswert $E(V(T, S(T)))$ der Option zum Laufzeitende berechnen. Das Prinzip der *risikoneutralen Bewertung* besagt nun, dass der Wert einer Option $V(t, S(t))$ zu einem Zeitpunkt $t < T$ analog der Formel aus Satz 2.9 wie folgt berechnet werden kann:

$$V(t, S(t)) = e^{r(t-T)}E(V(T, S(T))) \quad (2.1)$$

Grundlage dieser Gleichung ist, dass der sogenannte *faire Optionswert* nicht über den zufälligen zukünftigen Optionswert definiert wird, sondern vielmehr über das Kapital, welches der Emittent aufwenden muss, um sich gegen Verluste aus dem Optionsgeschäft abzusichern. Dabei legt sich der Herausgeber zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Portfolio Π in Höhe des Optionspreises an, das sich aus β Anteilen einer festverzinslichen Anleihe und aus Δ Anteilen des zugrunde liegenden Basiswerts zusammensetzt. Der Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt

$$\Pi(0) = \beta B(0) + \Delta S(0).$$

Durch geeignetes Umschichten der Anteile β und Δ kann der Emittent erreichen, dass sich der Wert des Portfolios gemäß dem Optionswert entwickelt⁹. Wird dieses Portfolio nun zum Laufzeitende verkauft, kann der Herausgeber damit die möglichen Verluste aus dem Optionsgeschäft abdecken und sichert sich gegen das Risiko ab. Dieses Vorgehen wird auch *Hedging* genannt (vgl. hierzu auch [7, Kap. 2] für genauere mathematische Hintergründe).

2.3 Simulation des Basiswerts

Wir wissen nun, dass wir für die risikoneutrale Bewertung von Optionen den Erwartungswert des Optionspreises zum Laufzeitende T benötigen. Dieser Wert ist jedoch abhängig vom Basiswert $S(T)$. Um diesen zu bestimmen, braucht man Kenntnis über die zeitliche Entwicklung

⁸Darauf werden wir im nächsten Abschnitt noch genauer eingehen.

⁹Weil ein solches Portfolio den Optionswert nachbildet, heißt es auch *replizierendes Portfolio*.

des Basiswerts¹⁰. Für die Modellierung eines solchen Aktienkursverlaufs gibt es verschiedene mathematische Ansätze. Dabei sollten mindestens der Mittelwert des Kurses und seine Varianz widergespiegelt werden. Wir wollen hier ein Modell vorstellen, das auf einer stochastischen Differentialgleichung (SDGL) beruht und für das Verhalten von Aktienkursen sehr weit verbreitet ist. Es handelt sich dabei um die sogenannte geometrische Brown'sche Bewegung.

2.3.1 SDGL und der Wiener Prozess

In stochastische Differentialgleichungen gehen sowohl deterministische als auch stochastische Einflüsse ein. Im Allgemeinen dienen sie dazu, zeitabhängige Vorgänge (in unserem Fall die Entwicklung eines Aktienkurses) zu modellieren. Eine sogenannte *Itô-stochastische Differentialgleichung* wird allgemein geschrieben als:

$$dS(t) = a(t, S(t))dt + b(t, S(t))dW(t),$$

wobei $a, b : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gewöhnliche reelle Funktionen sind. Gemeint ist mit dieser symbolischen Schreibweise die längere Integralschreibweise:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(\tau, S(\tau))d\tau + \int_0^t b(\tau, S(\tau))dW(\tau), \quad S(0) \in \mathbb{R}^n \text{ fest} \quad (2.2)$$

Das zweite Integral, das den stochastischen Anteil widerspiegelt, ist das *Itô-Integral* (siehe [7, Kap. 4]), wobei $W(t)$ ein sogenannter Wiener Prozess¹¹ ist. Um zu verstehen, worum es sich dabei handelt, führen wir zunächst die Definition eines allgemeinen stochastischen Prozesses ein.

Definition 2.10 (Stochastischer Prozess)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Daneben sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ die Menge aller reellen Zahlen, versehen mit der Borelschen σ -Algebra. Eine Funktion

$$X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ gerade eine Zufallsvariable

$$X(t) := X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

¹⁰Wir nehmen hier an, dass es sich beim Basiswert um eine Aktie handelt. Für andere Arten von Basiswerten muss man ggf. andere Modelle heranziehen.

¹¹Benannt nach dem US-amerik. Mathematiker Norbert Wiener.

ist, heißt *stochastischer Prozess*. Dabei sind alle Zufallsvariablen $X(t, \cdot)$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ definiert. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist die Realisierung

$$X(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto X(t, \omega)$$

eine gewöhnliche reelle Funktion und wird bei stochastischen Prozessen üblicherweise als *Pfad* bezeichnet.

Der stochastische Prozess, den wir für unsere Kursmodellierung benötigen, ist - wie oben bereits erwähnt - der Wiener Prozess, der ursprünglich in der Physik zur Beschreibung der zufälligen Bewegung eines Teilchens auf einer Wasseroberfläche eingeführt wurde.

Definition 2.11 (Wiener Prozess)

Ein stochastischer Prozess $W(t, \omega)$, der für $t \geq 0$ definiert ist, heißt *Wiener Prozess*, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $W(t)$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $E(W(t)) = 0$ und $Var(W(t)) = t$.
- (ii) Für $t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W(t_1) - W(t_0)$ wieder normalverteilte Zufallsvariablen mit $E(W(t_1) - W(t_0)) = 0$ und $Var(W(t_1) - W(t_0)) = t_1 - t_0$.
- (iii) Für $s_1 \geq s_0 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W(s_1) - W(s_0)$ und $W(t_1) - W(t_0)$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

Man kann beweisen, dass die Pfade eines Wiener Prozesses fast sicher stetig in t , aber auch fast sicher nirgends differenzierbar sind. Wie man nun den Ausdruck " $dW(\tau)$ " in (2.2) genau zu verstehen hat, kann man in [7, Kap. 4] nachlesen. Dort finden sich auch weitere Hintergründe zu stochastischen Differentialgleichungen.

2.3.2 Die geometrische Brown'sche Bewegung

Zur Beschreibung eines Aktienkursverlaufs verwenden wir eine spezielle stochastische Differentialgleichung, die man erhält, wenn man in der allgemeinen Form (2.2) die Funktionen $a(t, S(t)) = \mu S(t)$ und $b(t, S(t)) = \sigma S(t)$ setzt.

Definition 2.12 (Geometrische Brown'sche Bewegung)

Die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{2.3}$$

heißt *geometrische Brown'sche Bewegung* und wird zur Modellierung von Aktienkursen verwendet. Dabei ist μ die *erwartete Rendite* und σ die *Volatilität* des Aktienkurses. Die beiden Parameter werden als konstant angenommen und modellieren das mittlere Wachstum bzw. die Varianz des Kurses.

Bemerkung 2.13

- Mit Hilfe des Itô-Lemmas (siehe [7, Kap. 4]) kann man nachweisen, dass

$$S(t, S_0) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right) \quad (2.4)$$

die Lösung von (2.3) ist, wobei $S_0 = S(0)$ der Anfangswert des Aktienkurses ist.

- Des Weiteren kann man zeigen, dass für den Erwartungswert bzw. die Varianz des Kurses zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ gilt:

$$E(S(t, S_0)) = S_0 e^{\mu t} \quad \text{und} \quad \text{Var}(S(t)) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Da man auch der Entwicklung des Basiswerts S die risikoneutrale Bewertung zugrunde legen muss, gilt analog zu (2.1): $S(0) = S_0 = e^{-rT} E(S(T, S_0))$ bzw. $E(S(T, S_0)) = S_0 e^{rT}$. Zusammen mit dem Ergebnis für den Erwartungswert des Kurses aus Bemerkung 2.13 mit $t = T$ folgt direkt:

$$\mu = r$$

Das bedeutet, dass man unter dem Grundsatz der risikoneutralen Bewertung annimmt, dass sich der Basiswert einer Option erwartet wie eine festverzinsliche Anleihe entwickelt.

Für die Modellierung eines Aktienkurses anhand des beschriebenen Kursmodells muss also nur noch die Volatilität σ festgelegt werden. Dieser Parameter kann entweder aus vergangenen Kursverläufen historisch oder aus Marktwerten implizit geschätzt werden. Typische Werte für σ liegen in einem Bereich von 20% bis 40%.

Bei der Lösung (2.4) für das Modell der geometrischen Brown'schen Bewegung handelt es sich um einen zeitkontinuierlichen Kursprozess. Für die numerischen Berechnungen, die wir im Folgenden dieser Arbeit im Zusammenhang mit der Monte-Carlo-Methode durchführen werden, benötigen wir allerdings eine zeitdiskrete Version dieses Prozesses. Wir gehen hier von äquidistanten Stützstellen t_i , $i = 0, \dots, N$, mit Abstand $\Delta t := t_i - t_{i-1}$ aus, wobei $t_0 = 0$ und $t_N = T$ gilt. Um das Wachstum des Aktienkurses während einer Zeitperiode Δt zu bestimmen, benötigt

man jeweils Zufallsvariablen $\Delta W(t) := W(t_i) - W(t_{i-1})$, die gemäß der Definition 2.11 des Wiener Prozesses $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ -verteilt sind. Entsprechend zu (2.4) erhalten wir als zeitdiskrete Lösung für die geometrische Brown'sche Bewegung einen Kursprozess mit vorgegebenem Anfangswert $S(t_0)$ (siehe u.a. [9, S. 579]):

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \underbrace{Z \sqrt{\Delta t}}_{=\Delta W(t)} \right) \quad (2.5)$$

oder äquivalent dazu $S(t_i) = S(t_{i-1}) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right)$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Zur rekursiven Konstruktion eines vollständigen Kurspfads $S(t_i, \omega)$, $i = 0, \dots, N$, $\omega \in \Omega$ fest¹², wird für jeden Zeitschritt eine Realisierung $z := Z(\omega)$ der Zufallsvariablen $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ benötigt. Der äquidistante Abstand zwischen den Zeitpunkten beträgt $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Wird eine Anzahl von R Kurspfaden simuliert, so schreiben wir im Folgenden dieser Arbeit die einzelnen Pfade S_k , $k = 1, \dots, R$, mit vorgegebenen identischen Anfangswerten $S(t_0)$ als:

$$S(t_i, k) := S_k(t_i, \omega) = \underbrace{S_k(t_{i-1}, \omega)}_{=S(t_{i-1}, k)} \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma z_k \sqrt{\Delta t} \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

wobei $z_k := Z_k(\omega)$ die Realisierungen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sind.

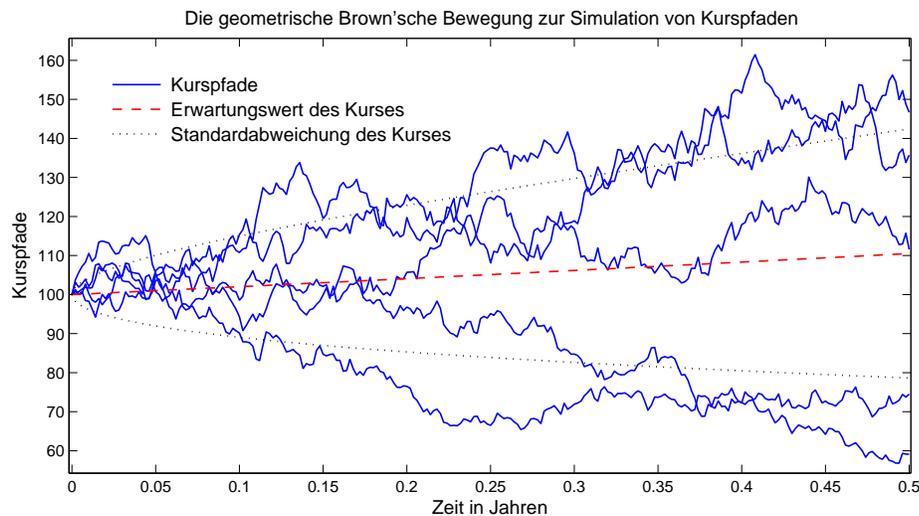


Abbildung 2.3: Simulation von Kurspfaden auf Basis der geometrischen Brown'schen Bewegung

¹²Wie in Definition 2.10 beziehen wir uns hier wieder auf einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Abbildung 2.3 zeigt fünf mögliche Aktienkursentwicklungen über einen Zeitraum von einem halben Jahr ($T = 0.5$). Bei den Simulationen über jeweils $N = 250$ diskrete Zeitpunkte werden eine Volatilität $\sigma = 40\%$ und ein risikofreier Marktzins $r = 20\%$ unterstellt. Zusätzlich sind in der Grafik der Erwartungswert und die Standardabweichung des Kurses abgebildet, die gemäß Bemerkung 2.13 berechnet werden können.

Es sei bemerkt, dass die Annahme von diskreten Zeitpunkten bei der Modellierung von Aktienkursen tatsächlich sinnvoll erscheint, da man als Akteur an den weltweiten Finanzmärkten die Zeitintervalle zwischen zwei Trades auch nicht beliebig verkürzen kann.

2.4 Grundalgorithmus der Optionsbewertung

Aus den bisher erhaltenen Ergebnissen können wir eine Vorgehensweise für die risikoneutrale Bewertung von europäischen Optionen angeben.

Algorithmus 2.14 (Grundalgorithmus zur Bewertung von europäischen Optionen)

- (1) Bestimme eine Formel für den Wert $V(T, S(T))$ zum Laufzeitende in Abhängigkeit des Basiswerts $S(T)$.
- (2) Bestimme abhängig vom Basiswert $S(t)$ zur Zeit $t < T$ mit Hilfe eines stochastischen Kursmodells die Zufallsvariable $S(T) = S(T, \omega)$.
- (3) Berechne den Optionswert als den abgezinnten Erwartungswert

$$V(t, S(t)) = e^{r(t-T)} E(V(T, S(T))).$$

Schritt (1) haben wir im Satz 2.6 behandelt, Schritt (2) war Bestandteil des vorhergehenden Abschnitts und kann anhand von (2.5) bestimmt werden. Der letzte Schritt basiert auf der risikoneutralen Bewertung aus Abschnitt 2.2.2 (siehe Gleichung (2.1)). Einzig die explizite Berechnung des Erwartungswerts in Schritt (3) bleibt noch offen. Diese kann beispielsweise mit der Monte-Carlo-Methode erfolgen, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird. Der Grundalgorithmus der Optionsbewertung kann für europäische Optionen herangezogen werden, da deren Ausübung nur zum Laufzeitende T möglich ist. Bei amerikanischen Optionen bleibt hingegen zunächst unklar, wann sie ausgeübt werden sollen, und daher kann man sich bei deren Bewertung auch nicht ausschließlich auf den Wert $V(T, S(T))$ zum Laufzeitende berufen, da die Ausübung zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t < T$ vorteilhaft sein könnte. Die Schwierigkeit dabei wird sein, einen optimalen Ausübungszeitpunkt herauszufinden. Darauf werden wir aber später

noch genauer eingehen.

Algorithmus 2.14 kann demnach in dieser Form NICHT für Optionen mit vorzeitigen Ausübungsmöglichkeiten verwendet werden.

Bemerkung 2.15

Unter den getroffenen Marktannahmen kann man beweisen (siehe [7, Kap. 2]), dass der Ertrag $(S(t) - K)^+$ eines amerikanischen Calls bei vorzeitiger Ausübung immer kleiner oder gleich dem Optionswert zum jeweiligen Zeitpunkt $t < T$ ist, also $(S(t) - K)^+ \leq V(t, S(t)) = e^{r(t-T)}E(V(T, S(T)))$ für alle $t < T$. Daraus folgt, dass ein vorzeitiges Einlösen des Optionsrechts niemals sinnvoll ist und der Wert einer amerikanischen Call-Option dem einer europäischen gleicht.

Der Wert eines amerikanischen Puts unterscheidet sich jedoch im Allgemeinen von dem der jeweils entsprechenden europäischen Variante. Deswegen werden wir in den folgenden Kapiteln vornehmlich amerikanische Put-Optionen betrachten.

Kapitel 3

Die Monte-Carlo-Methode

In diesem Kapitel wird erklärt, wie man mit Hilfe von stochastischen Simulationen den Erwartungswert einer Option zum Laufzeitende T numerisch approximieren kann. Dabei konzentrieren wir uns zunächst auf die mathematischen Grundlagen, auf denen die Monte-Carlo-Methode (MC-Methode) basiert, bevor wir zeigen, wie man auf Basis dieser Methode den fairen Wert von europäischen Optionen berechnen kann. Wir werden außerdem eine Möglichkeit vorstellen, die Konvergenzgeschwindigkeit der MC-Methode zu beschleunigen. Anschließend werden die Probleme bei der Anwendung auf Optionen mit vorzeitigen Ausübungsmöglichkeiten herausgestellt und ein erster naiver Ansatz zur Bewertung eines amerikanischen Puts gegeben. Letztendlich werden wir die entscheidenden Gründe dafür nennen, warum die MC-Methode für die Bewertung von amerikanischen Optionen trotzdem interessant ist.

3.1 Mathematische Grundlagen der Methode

Die grundlegende Idee der Monte-Carlo-Methode kann wie folgt erklärt werden. Um den Erwartungswert $\tilde{\mu} := E(X)$ einer Zufallsvariablen X zu bestimmen, führt man wiederholte Simulationen mit einem Zufallsgenerator am Computer durch. Darunter kann man sich das Ziehen von “Pseudo-”Zufallszahlen x_1, \dots, x_n vorstellen. Wir interpretieren hier die x_i , $i = 1, \dots, n$, als Realisierungen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen $X_i \sim X$, also $x_i = X_i(\omega)$. Anschließend approximiert man den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X mit dem arithmetischen Mittel aller Realisierungen: $E(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Die mathematische Grundlage dieser Approximation liefert der zentrale Grenzwertsatz aus der Stochastik.

Satz 3.1 (Zentraler Grenzwertsatz)

Es seien $X_i \sim X$, $i = 1, \dots, n$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\tilde{\mu} = E(X)$ und Varianz $\tilde{\sigma}^2 = Var(X)$. Des Weiteren sei $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann besitzt die neue Zufallsvariable Y_n den Erwartungswert $n\tilde{\mu}$ und die Varianz $n\tilde{\sigma}^2$. Betrachtet man die standardisierte Zufallsvariable $Y_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))}{\sqrt{Var(Y_n)}}$, so besagt der *zentrale Grenzwertsatz*, dass deren Verteilung für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung konvergiert. Genauer gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))}{\sqrt{Var(Y_n)}} \leq \alpha\right) = F(\alpha),$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Man kann mit Hilfe dieser Aussage in zwei Schritten zeigen, dass für große n mit hoher Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \approx \tilde{\mu} = E(X) \quad (3.1)$$

Zunächst lässt sich die standardisierte Zufallsvariable Y_n^* umschreiben zu $Y_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))}{\sqrt{Var(Y_n)}} = \frac{Y_n - n\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein.

$$(i) \quad P\left(\frac{Y_n}{n} - \tilde{\mu} \leq \varepsilon\right) = P\left(Y_n - n\tilde{\mu} \leq n\varepsilon\right) = P\left(\frac{Y_n - n\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} - \tilde{\mu} \leq \frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\tilde{\sigma}}\right) \underset{\substack{\text{Satz 3.1} \\ \text{für große } n}}{\approx} F\left(\frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\tilde{\sigma}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$$

$$(ii) \quad P\left(\frac{Y_n}{n} - \tilde{\mu} \leq -\varepsilon\right) = P\left(\frac{Y_n - n\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} - \tilde{\mu} \leq -\frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\tilde{\sigma}}\right) \underset{\substack{\approx \\ \text{für große } n}}{\approx} F\left(-\frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\tilde{\sigma}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

Aus (i) und (ii) lässt sich folgern, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ in einem beliebig kleinen Intervall um den Erwartungswert $\tilde{\mu}$ liegt, für große n gegen 1 konvergiert, d.h.: $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \tilde{\mu}\right| < \varepsilon\right) = 1$, für beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich (3.1).

Als Monte-Carlo-Methode bezeichnet man das abstrakte Konzept, den Erwartungswert einer Zufallsvariablen - auf Basis von n simulierten Zufallsexperimenten $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ - als arithmetisches Mittel zu schätzen.

3.2 Algorithmus zur Bewertung europäischer Optionen mit der MC-Methode

Mit den erhaltenen Ergebnissen können wir nun die Schritte (2) und (3) aus dem Grundalgorithmus 2.14 für die Bewertung von europäischen Optionen umsetzen. Den Parameter Δt für die Simulation der Kursprozesse aus Gleichung (2.5) setzen wir gleich T , da bei einer europäischen Option lediglich der Basiswert $S(T)$ zum Fälligkeitsdatum T von Interesse ist. Daraus ergibt sich für die Schritte aus Algorithmus 2.14:

(2) Setze $S(T) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma Z\sqrt{T}\right)$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(3) Simuliere gemäß (2.6) R Kurswerte $S(T, 1), \dots, S(T, R)$ und approximiere den Optionswert $V(0, S(0))$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den diskontierten Mittelwert $e^{-rT} \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R V(T, S(T, k))$.

Je nachdem, ob man einen Call oder Put betrachtet, setzt man für die Berechnung des Optionswerts V zum Laufzeitende die entsprechende Formel aus Satz 2.6 ein.

3.3 Varianzreduktion

Man kann versuchen, die Konvergenz der Monte-Carlo-Simulation dahingehend zu beschleunigen, dass man eine gewünschte Genauigkeit der Schätzung bereits bei einer kleineren Anzahl von verwendeten Zufallsvariablen erreicht. Um das Vorgehen zu verstehen, beschäftigen wir uns zunächst mit den theoretischen Hintergründen.

Definition 3.2 (p-Konfidenzintervall)

Es seien X_i , $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\tilde{\mu}$ und Varianz $\tilde{\sigma}^2$. Des Weiteren sei $p \in (0, 1)$ eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit und $\varepsilon > 0$. Ein Intervall der Form $I = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \varepsilon, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \varepsilon\right]$ wird *p-Konfidenzintervall* genannt, falls der Erwartungswert $\tilde{\mu}$ mit Wahrscheinlichkeit p innerhalb des Intervalls I liegt, d.h.: $P(\tilde{\mu} \in I) = p$.

Man kann zeigen, dass für gegebenes $p \in (0, 1)$ eine Folge $p_n \rightarrow p$ und ein $l > 0$ existieren, so dass die zugehörigen p_n -Konfidenzintervalle I_n von folgender Form sind (siehe [7, Kap. 5]):

$$I_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{l\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{l\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

Auf Basis dieses Intervalls können wir nun Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Monte-Carlo-Methode treffen. Es ist zum einen leicht zu erkennen, dass die Größe des Intervalls mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt, was die langsame Konvergenz der Methode in Abhängigkeit von n begründet. Man muss z.B. 10000 mal so viele Simulationen durchführen, um den Fehler bei der Schätzung des Erwartungswerts um den Faktor 100 zu verringern. Es ist zum anderen aber auch zu sehen, dass die Größe des Intervalls zusätzlich von $\tilde{\sigma}$ und damit von der Varianz der simulierten Zufallsvariablen abhängt. Wenn es uns gelingt, normalverteilte Zufallsvariablen zu erzeugen, die bei gleichem Erwartungswert $\tilde{\mu}$ eine geringere Varianz besitzen, so haben wir eine Möglichkeit gefunden, die Konvergenz der Methode unabhängig von der verwendeten Anzahl an Simulationen zu beschleunigen.

Dass dies tatsächlich möglich ist, zeigen wir anhand eines europäischen Puts. Den Optionswert zum Laufzeitende in Abhängigkeit von der Zufallsvariablen $S(T)$ (siehe (2.5)) fassen wir dazu als eine Funktion f auf:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Z \mapsto \left(K - S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma Z \sqrt{T} \right) \right)^+,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt und damit auch $f(Z)$ eine Zufallsvariable ist. Verwendet man zu Z stets die zugehörige sogenannte *antithetische* Zufallsvariable $-Z$, so kann man beweisen, dass für die neue Zufallsvariable $\tilde{f}(Z) := \frac{f(Z)+f(-Z)}{2}$ gilt:

$$E(\tilde{f}(Z)) = E(f(Z)) \quad \text{und} \quad Var(\tilde{f}(Z)) \leq \frac{1}{2} Var(f(Z))$$

Die Erwartungswerte stimmen überein, da $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und somit auch $-Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt ist. Der Beweis für die Ungleichung der Varianzen lässt sich in [7, Kap. 5] nachlesen. Letztere Ungleichung zeigt die gewünschte Varianzreduktion bei gleichbleibender Anzahl an verwendeten Zufallsvariablen und führt damit zur Beschleunigung der Konvergenz der MC-Methode.

Für die Simulation von R Kurspfaden zur Berechnung des erwarteten Optionswerts eines europäischen Puts zum Laufzeitende T bedeutet das Folgendes:

Zur Simulation der R Kurspfade gemäß (2.6) ziehen wir nicht wie bisher R Zufallszahlen¹ z_k , $k \in \{1, 2, \dots, R\}$, sondern nur $\frac{R}{2}$ Zufallszahlen $z_1, z_3, z_5, \dots, z_{R-1}$. Für gerade k verwendet man die jeweiligen Realisierungen der zugehörigen antithetischen Zufallsvariablen, d.h. wir setzen $z_k := -z_{k-1}$. Für ungerade k berechnet man folglich die Kurswerte $S(T, k)$ wie in (2.6) be-

¹Wir gehen hier von einer geraden Anzahl von Kurspfaden aus. Anderenfalls würde es einen Pfad geben, zu dem es keinen Pfad mit zugehöriger antithetischer Zufallszahl gibt.

geschrieben, für gerade k ergibt sich:

$$S(T, k) = S(t_0, k) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma(-z_{k-1})\sqrt{T} \right)$$

Bei der Simulation der Kurspfade von amerikanischen Optionen führt ein analoges Vorgehen über mehrere Zeitschritte hinweg ebenfalls zu einer Varianzreduktion bei der Schätzung des Optionswerts. In Kapitel 4 werden wir nochmals kurz darauf zurückkommen und die getroffene Aussage grafisch veranschaulichen.

3.4 Probleme bei der Anwendung auf amerikanische Puts

Wir haben bisher gesehen, wie man mit der Monte-Carlo-Methode den Wert von europäischen Optionen bestimmen kann. Dieses Verfahren lässt sich jedoch, wie in der Einleitung bereits erwähnt, nicht ohne Weiteres auf amerikanische Optionen verallgemeinern. Zwar kann der Wert einer amerikanischen Call-Option gemäß Bemerkung 2.15 unter den getroffenen Marktannahmen aus der Berechnung des entsprechenden europäischen Calls abgeleitet werden, für einen Put gilt dies aber nicht. Dies ist auch der Grund dafür, weswegen wir im Folgenden nur die Bewertung amerikanischer Puts betrachten.

Die Schwierigkeit dabei besteht darin, zu jedem potentiellen vorzeitigen Ausübungszeitpunkt² t_i , $i \in \{1, \dots, N - 1\}$ mit $t_N = T$, auf Grundlage des Basiswerts/Aktienkurses $S(t_i)$ zu entscheiden, ob man die Option ausübt oder nicht, wobei man den zukünftigen Kursverlauf nicht sicher kennt. Der Einfachheit halber werden wir von nun an die diskreten Zeitpunkte t_0, t_1, \dots, t_N mit den entsprechenden Indizes $0, 1, \dots, N$ bezeichnen³.

3.4.1 Theoretische Aufgabenstellung zur Berechnung einer optimalen Ausübungsstrategie

Löst man das Optionsrecht zu einem diskreten Zeitpunkt t während der Laufzeit ein, so realisiert man den inneren Wert der Put-Option $I(t, S(t)) = (K - S(t))^+$. Dies ist nur sinnvoll, wenn man bei der Fortführung der Option über die restliche Laufzeit einen geringeren Wert erwartet. Im Zusammenhang damit geben wir die folgende Definition an:

²Wir gehen davon aus, dass die Option frühestens zum Zeitpunkt t_1 ausgeübt werden darf, man könnte alternativ auch eine sofortige Ausübung in t_0 erlauben, was aber in der Realität wirtschaftlich wenig Sinn macht.

³ $t = 1$ ist also gleichbedeutend mit $t = t_1$, $t = 2$ entspricht $t = t_2$, usw.

Definition 3.3 (Fortführungswert)

Übt man eine Option zu einem Zeitpunkt $t < T$ nicht aus, so ergibt sich in Abhängigkeit vom Basiswert ein *Fortführungswert*

$$F(t, S(t)) := e^{-r\Delta t} E(V(\underbrace{t+1}_{(\hat{=}t+\Delta t)}, S(\underbrace{t+1}_{(\hat{=}t+\Delta t))}).$$

Man berechnet den Fortführungswert $F(t, S(t))$ also, indem man den Erwartungswert des Optionswerts zum darauffolgenden diskreten Zeitpunkt $t+1$ ($\hat{=} t+\Delta t$) um eine Zeitperiode $\Delta t = \frac{T}{N}$ diskontiert.

Die Approximation dieses Erwartungswerts sollte im Zusammenhang mit der MC-Methode wieder durch die Berechnung des arithmetischen Mittels über eine gewisse Anzahl von Kurswerten geschehen.

Bemerkung 3.4

Der Optionswert zu einem Zeitpunkt $0 \leq t < T$ ergibt sich als das Maximum aus innerem Wert und Fortführungswert, d.h. $V(t, S(t)) = \max \{I(t, S(t)), F(t, S(t))\}$.

Der Fortführungswert steht in Relation zum Zeitwert der Option, wobei er im Gegensatz zum Zeitwert nicht die Wahrscheinlichkeit für positive Kursänderungen in der Zukunft einpreist, sondern die erwartete Kursentwicklung in der folgenden Zeitperiode. Ein Fortführungswert, der zu einem Zeitpunkt t während der Laufzeit oberhalb/unterhalb des inneren Optionswerts liegt, deutet auf einen entsprechend hohen/niedrigen Zeitwert hin.

Der Aktienkurs, bei dem der Fortführungswert dem inneren Optionswert gleicht, wird *kritischer Ausübungswert* $S^*(t)$ genannt. Um diesen Wert zu berechnen, muss man folglich die Gleichung

$$e^{-r\Delta t} E(V(t+1, S(t+1))) = I(t, S(t)) \tag{3.2}$$

für $S(t)$ lösen. In Abbildung 3.1 (links) ist $S^*(t)$ als derjenige Aktienkurs zu erkennen, bei dem sich die Kurven für den Fortführungswert $F(t)$ und inneren Wert $I(t)$ schneiden. Für Kurswerte unterhalb von $S^*(t)$ ist eine vorzeitige Ausübung vorteilhaft, für Kurswerte oberhalb von $S^*(t)$ erweist sich das Halten der Option als die bessere Strategie. Auf diese Weise kann man theoretisch für jeden potentiellen Ausübungszeitpunkt einen kritischen Ausübungswert berechnen und erhält letztendlich die sogenannte *kritische Ausübungsgrenze*, die eine optimale Ausübungsstrategie vorgibt und in Abbildung 3.1 (rechts) zu sehen ist.

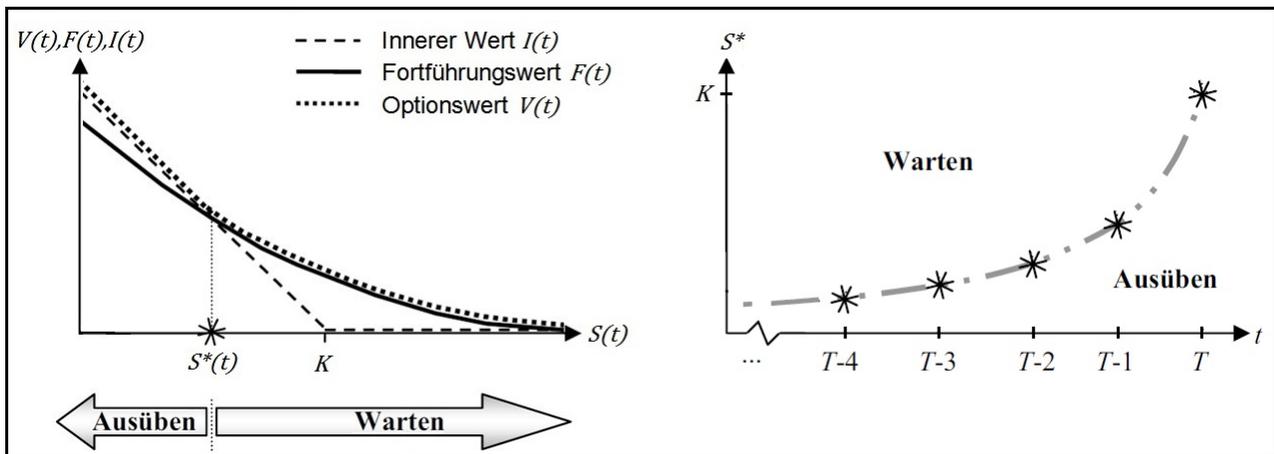


Abbildung 3.1: Kritischer Ausübungswert S^* zu einem festen Zeitpunkt $t < T$ (links) und kritische Ausübungsgrenze für die gesamte Optionslaufzeit (rechts)

Für Aktienkurswerte $S(t) < S^*(t)$ üben wir die Option zum jeweils aktuellen Zeitpunkt aus, für $S(t) \geq S^*(t)$ warten wir auf einen günstigeren zukünftigen Ausübungszeitpunkt. Charakteristisch für den Verlauf der kritischen Ausübungsgrenze für einen amerikanischen Put ist die exponentielle Zunahme bis hin zum Ausübungspreis K zum Fälligkeitsdatum T .

3.4.2 Probleme bei der Approximation einer optimalen Ausübungsstrategie mit der Monte-Carlo-Methode

Das große Problem bei der Bewertung von amerikanischen Optionen mit der Monte-Carlo-Methode ist die Approximation der kritischen Ausübungswerte S^* und in diesem Zusammenhang vor allem die Bestimmung des Fortführungswerts $F(t, S(t))$. Da in dessen Berechnung der Erwartungswert des Optionswerts zum nächsten Zeitschritt einfließt, handelt es sich um ein dynamisches Entscheidungsproblem, für dessen Lösung man gewöhnlich einen rückwärtsrekursiven Algorithmus verwendet. Vom Fälligkeitsdatum T an berechnet man zeitlich rückwärts eine optimale Ausübungsstrategie und kann so den Optionswert schätzen. Bei der MC-Methode werden jedoch die Kurspfade gemäß (2.6) zeitlich vorwärts simuliert. Hieraus ergibt sich ein gravierender Widerspruch: Wir wollen zur Lösung eines Problems, das einen rückwärtsrekursiven Algorithmus benötigt, ein Verfahren einsetzen, das zeitlich vorwärts ausgerichtet ist. Das Problem, das dabei auftritt, soll anhand von Abbildung 3.2 deutlich werden. Wie wir gesehen haben, muss man für die Berechnung eines kritischen Ausübungswerts zu einem Zeitpunkt t den Erwartungswert des Optionswerts über die von $S(t)$ ausgehenden zukünftigen Kurspfade kennen.

In der Binomialmethode⁴ z.B. sind diese Werte vorhanden, bei der Monte-Carlo-Simulation hingegen nicht. Denn hier werden nur einzelne Pfade $S(t)$, $t \in [0, T]$, aber keine Bäume betrachtet. In Abbildung 3.2 sollen die rot eingefärbten Linien, die zum Zeitpunkt $t = 3$ vom blau gekennzeichneten Pfad ausgehen, mögliche Kursentwicklungen darstellen, die man benötigen würde, um den Erwartungswert des Optionswerts (auf Basis des gekennzeichneten Pfads) zum Zeitpunkt $t = 4$ zu berechnen. Um einen rückwärtsrekursiven Algorithmus anzuwenden, müssten die rot eingefärbten Kursentwicklungen natürlich für alle Pfade und für alle Zeitpunkte vorhanden sein, was bei den Kurssimulationen jedoch offensichtlich zu keiner Zeit der Fall ist.

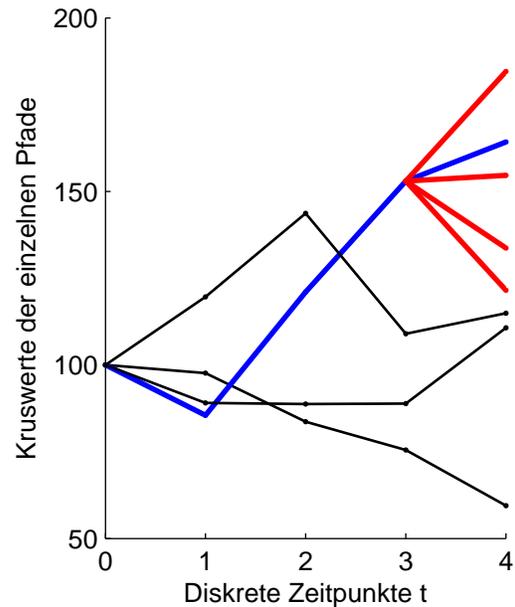


Abbildung 3.2: Die Problematik bei Anwendung der MC-Methode auf amerikanische Optionen

3.5 Erster naiver Ansatz zur Bewertung eines amerikanischen Puts

Wir werden nun eine Variation der Methode vorstellen, die einen ersten naiven Ansatz zur Bewertung eines amerikanischen Puts auf Grundlage der MC-Simulation darstellt. Zur Schätzung des Optionspreises wird dabei zu jedem diskreten Zeitpunkt t die Vorteilhaftigkeit einer vorzeitigen Ausübung entlang jedes Pfads einzeln überprüft, anstatt auf Basis des erwarteten Optionswerts über die von $S(t)$ ausgehenden zukünftigen Kurspfade. Welche Konsequenzen ein solches Vorgehen nach sich zieht, wird anhand eines Beispiels am Ende des Abschnitts deutlich. In einem ersten Schritt simulieren wir hierzu gemäß (2.6) R zufällige Kurspfade $S(t, k)$ über N diskrete Zeitpunkte⁵, wobei $k = 1, \dots, R$. Anschließend überprüfen wir rückwärtsrekursiv, vom Verfalltag T an, entlang jedes einzelnen Pfads die Vorteilhaftigkeit einer vorzeitigen Ausübung, indem wir jeweils den Optionswert $V(t+1, k)$ abzinsen und mit dem inneren Wert $I(t, k)$

⁴Siehe hierzu [7, Kap.3]

⁵ $S(t, k)$ ist der simulierte Kurswert des Pfads k zum Zeitpunkt t , analog dazu verwenden wir im Folgenden die Bezeichnungen $I(t, k)$ und $V(t, k)$ für den inneren Wert bzw. den Optionswert auf Basis des k -ten Pfads.

vergleichen. Weil wir hierbei lediglich einzelne, vorgegebene Pfade betrachten und somit die Berechnung des Erwartungswerts aus (3.2) wegfällt, können wir alternativ auch für jeden Pfad jeweils einen optimalen Ausübungszeitpunkt $\tilde{t}(k) \in (0, T]$ als denjenigen Zeitpunkt berechnen, zu dem der (auf den Zeitpunkt $t = 0$) diskontierte Optionswert $e^{-rt}V(t, S(t, k))$ am größten ist.

Algorithmus 3.5 (Erster naiver Ansatz zur Bewertung eines amerikanischen Puts)

- (1) Simuliere gemäß (2.6) R Kurspfade $S(t, k) = S(t-1, k) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma z_k \sqrt{\Delta t}\right)$ über jeweils N diskrete Zeitpunkte, wobei gilt: $S(0, k) = S(0)$ für alle k .
- (2) Berechne für jeden Pfad k einen optimalen Ausübungszeitpunkt $\tilde{t}(k)$.
- (3) Bestimme den Optionspreis mit folgendem Monte-Carlo-Schätzer:

$$V(0, S(0)) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R e^{-r\tilde{t}(k)} (K - S(\tilde{t}(k), k))^+$$

In der Regel überschätzt man mit diesem Vorgehen den wahren Optionswert sehr deutlich. Das liegt daran, dass die Berechnung der vorzeitigen Ausübungszeitpunkte nicht auf dem Erwartungswert, sondern auf einzelnen Kurspfaden basiert, deren zukünftigen Verlauf man vorgibt, genau zu kennen. Dies entspricht einer Ausübungsentscheidung mit “Blick in die Zukunft”, welche in der Praxis offensichtlich nicht umsetzbar ist.

Um die getroffene Aussage zu bestätigen, wurde der Algorithmus 3.5 in MATLAB implementiert. Bei einem risikofreien und festen Zinssatz $r = 0.1$ ($= \mu$), einer Volatilität $\sigma = 0.4$ und dem Fälligkeitsdatum $T = 0.5$ ergibt sich beispielsweise für $S(0) = K = 100$ bei $R = 50000$ verwendeten Kurspfaden und $N = 40$ diskreten potentiellen Ausübungszeitpunkten ein geschätzter Optionspreis⁶ von 16.156. Dieser Wert liegt deutlich über dem “exakten” Optionswert von 9.218.

Bemerkung 3.6

Als *exakten oder wahren Optionswert* legen wir hier und auch in den folgenden Kapiteln denjenigen Wert fest, den man bei Anwendung der Binomialmethode mit 2400 Zeitschritten pro Jahr erhält. Beim obigen Beispiel wurden also 1200 Zeitschritte verwendet, da die Optionslaufzeit nur ein halbes Jahr ($T = 0.5$) beträgt. Die Binomialmethode auf Grundlage des von Cox, Ross und Rubinstein beschriebenen Verfahrens, welches man in [9, Kap. 9, S. 303-306] nachlesen kann, wurde ebenfalls programmiert. Die Quellcodes zur Binomialmethode (`binomial.m`) und zu Al-

⁶Es wurden hierzu 1000 Schätzungen durchgeführt. Der angegebene Wert ist der Durchschnittswert dieser Versuchsreihe.

gorithmus 3.5 (`naive_methode.m`) befinden sich - ebenso wie die Programme zu allen anderen implementierten Verfahren dieser Arbeit - auf der beiliegenden CD-ROM.

3.6 Gründe für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode

Wegen der Probleme, die bei der Anwendung der Monte-Carlo-Methode auftreten, gehören die Binomialmethode, andere Gittermethoden⁷ oder Finite-Differenzen-Methoden zu den vorrangigen Verfahren zur Bewertung von amerikanischen Optionen. Darüber hinaus benötigen diese Methoden bei einfachen Optionsverträgen⁸ im Vergleich zu Monte-Carlo-Simulationen wesentlich weniger Rechnerzeit. Jedoch können sie oft nur ein oder zwei Unsicherheitsvariablen verarbeiten. Beim amerikanischen Put auf Grundlage eines Basiswerts gibt es nur eine Unsicherheitsquelle, nämlich die Kursentwicklung, die wir mit der geometrischen Brown'schen Bewegung modellieren. Bei mehrdimensionalen Optionen kommt pro Basiswert folglich mindestens eine Unsicherheitsvariable hinzu. Zusätzlich können bei komplexeren Kursmodellen weitere stochastische Variablen einfließen. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn man in einem Modell von einer zeitlich veränderlichen Volatilität $\sigma(t)$ ausgeht.

Die zur Berechnung aufgewendete Zeit steigt bei den zu Beginn des Abschnitts genannten herkömmlichen Verfahren - falls diese dann überhaupt noch anwendbar sind - typischerweise exponentiell mit der Anzahl an stochastischen Variablen, bei der Monte-Carlo-Methode jedoch lediglich (annähernd) linear. Das ist auch der Grund dafür, warum die Monte-Carlo-Simulation numerisch tendenziell effektiver wird, wenn bei der Optionsbewertung mehr als zwei Unsicherheitsvariablen vorhanden sind. Außerdem lassen sich bei ihrer Durchführung komplexere stochastische Kursprozesse berücksichtigen. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass ein Standardfehler für die Schätzwerte geliefert werden kann (vgl.[9, S. 582]).

Die genannten Aspekte machen deutlich, warum die MC-Methode für amerikanische Optionen interessant ist. Wir werden in den folgenden zwei Kapiteln jeweils eine Methode zur Bewertung eines eindimensionalen amerikanischen Puts vorstellen und numerischen Tests unterziehen, um die Funktionsweise dieser Simulationsverfahren zu verstehen. Im Anschluss wird jeweils ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen gegeben, die zur Anwendung auf mehrdimensionale Optionen nötig werden. Es sei erwähnt, dass bei beiden Verfahren versucht wird, die Monte-Carlo-Simulation in den grundlegenden Rückwärts-Algorithmus der stochastischen dynamischen Programmierung zu integrieren.

⁷Wie z.B. Trinomialbäume.

⁸Darunter fallen Optionen, denen nur ein Basiswert und ein unkompliziertes Kursmodell zugrunde liegen.

Kapitel 4

Die Bündelmethode von Tilley

Im Jahre 1993 veröffentlichte James A. Tilley als erster eine Methode, die es ermöglicht auf Basis der Monte-Carlo-Simulation eine eindimensionale amerikanische Put-Option zu bewerten. Zunächst werden die Grundzüge dieses Verfahrens vorgestellt, bevor der Algorithmus detailliert angegeben wird. Im Anschluss daran wird auf Besonderheiten bei der Implementierung hingewiesen, mit deren Hilfe die Effizienz des Programms gesteigert werden kann. Daraufhin führen wir numerische Tests bezüglich der Konvergenzeigenschaft in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern durch und legen die zugehörigen Simulationsergebnisse grafisch dar. In diesem Zusammenhang wird auch darauf eingegangen, wie mögliche Abweichungen vom exakten Optionswert zu erklären sind. Letztendlich wird auf Grundlage von festgelegten Parametern eine ausführliche Bewertung einer amerikanischen Put-Option durchgeführt.

4.1 Grundidee

Das Problem, das bei der Bestimmung einer kritischen Ausübungsgrenze auftritt (siehe Abschnitt 3.4), wird bei dem Verfahren, das Tilley vorschlägt, mit einer Bündeltechnik gelöst. Bevor der eigentliche Algorithmus angewendet wird, werden R Pfade über N diskrete Zeitpunkte hinweg gemäß (2.6) simuliert. Der k -te Pfad ist durch die Folge $\{S(0), S(1, k), S(2, k), \dots, S(N, k)\}$ gegeben, wobei $S(0)$ für alle Pfade bekannt und gleich ist. Zum Verfallstag N kann man sofort angeben, ob eine Ausübung vorteilhaft ist, indem man überprüft, ob der jeweilige Pfad einen positiven inneren Wert aufweist. Nun geht man rückwärts-rekursiv vom Zeitpunkt $N - 1$ aus vor und fasst zu jedem Zeitpunkt $0 < t < N$ ähnliche Basiswerte jeweils in einem Bündel zusammen, um einen Schätzwert für den Fortführungswert zu erlangen und letztendlich eine Ausübungsstrategie zu bestimmen.

4.2 Der Bündelalgorithmus

Der Algorithmus, der hier vorgestellt wird, basiert auf den Ausführungen von Tilley (siehe [12]) und bezieht sich auf die Bewertung einer eindimensionalen amerikanischen Put-Option. Die Darstellung des ursprünglichen Algorithmus ist um einige Details ergänzt worden, die zum besseren Verständnis beitragen und somit das Programmieren erleichtern sollen.

Algorithmus 4.1 (Bündelalgorithmus von Tilley)

Simuliere zunächst R Kurspfade $S(t, k)$ für $t = 0, \dots, N$ und speichere diese ab. (Jeder Pfad besitzt eine feste Kennzahl $k = 1, \dots, R$, die den kompletten Algorithmus über gleich bleibt.)

Bestimme nun auf Basis jedes einzelnen Pfads den Optionswert $V(N, k) = I(N, k)$ zum Fälligkeitsdatum ($t = N$) und lege für jeden Pfad einen *Indikator* $z(N, k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(N, k) > 0 \\ 0, & \text{falls } I(N, k) \leq 0 \end{cases}$ fest, der angibt, ob die Option zum Zeitpunkt N ausgeübt werden soll (d.h. $z(N, k) = 1$) oder nicht (d.h. $z(N, k) = 0$).

Führe nun den rückwärts-rekursiven Algorithmus aus, beginnend beim letzten vorzeitigen Ausübungszeitpunkt $t = N - 1$:

- (1) Sortiere die R Aktienkurspfade zum Zeitpunkt t der Größe nach, beginnend mit dem Pfad des höchsten Kurswerts¹ und ordne jedem Pfad eine Variable $rg(k) = 1, \dots, R$ zu, in der die aktuelle Position in der zuvor sortierten Rangfolge gespeichert wird. Für den Pfad mit dem größten Kurswert gilt folglich $rg(k) = 1$, für den Pfad mit dem kleinsten Kurswert gilt $rg(k) = R$.
- (2) Teile die sortierten Pfade in Q verschiedene Bündel zu je P Pfaden auf (folglich gilt: $QP = R$): Die ersten P Pfade ins erste Bündel, die zweiten P Pfade ins zweite Bündel usw., bis schließlich die letzten P Pfade dem Q -ten Bündel zugeordnet werden. $B(t, k)$ sei dabei die Menge an Pfaden, die sich zum Zeitpunkt t im selben Bündel wie Pfad k befinden.
- (3) Berechne für jeden Pfad den inneren Wert $I(t, k) = (K - S(t, k))^+$.

¹Man kann den Algorithmus auch für amerikanische Call-Optionen verwenden, dann muss man allerdings die Kurspfade genau anders herum sortieren.

- (4) Berechne für jeden Pfad den Fortführungswert $F(t, k)$ wie folgt²:

$$F(t, k) = e^{-r\Delta t} \frac{1}{P} \sum_{j \in B(t, k)} V(t+1, j) \quad j = 1, \dots, R$$

Den erwarteten Optionswert eines Pfads k zur nachfolgenden Periode berechnet man also als das arithmetische Mittel über die Optionswerte $V(t+1, j)$ von allen Pfaden j , die sich zum aktuellen Zeitpunkt t im selben Bündel wie Pfad k befinden.

- (5) Vergleiche für jeden Pfad den inneren Wert $I(t, k)$ mit dem Fortführungswert $F(t, k)$ und definiere jeweils eine *vorläufige Indikatorvariable* $x_{rg(k)}(t, k)$, die angibt, ob man die Option ausüben soll oder nicht:

$$x_{rg(k)}(t, k) := \begin{cases} 1, & \text{falls } I(t, k) > F(t, k), \quad \text{d.h.: Option ausüben} \\ 0, & \text{falls } I(t, k) \leq F(t, k), \quad \text{d.h.: Option halten} \end{cases}$$

Dabei muss man sich $\{x_{rg(k)}(t, k) : k = 1, \dots, R\}$ als Folge von Nullen und Einsen vorstellen, wobei der Index $rg(k)$ die Position in der Folge angibt. Die Indikatorvariablen sind in dieser Folge also gemäß der Umsortierung aus Schritt (1) angeordnet. Somit gibt $x_1(t, k)$ als erste Zahl in dieser Folge beispielsweise an, ob der Kurspfad mit dem größten aktuellen Kurswert ausgeübt werden soll oder nicht.

- (6) Untersuche die Folge $\{x_{rg(k)}(t, k) : k = 1, \dots, R\}$: Sei $a := \inf \{rg(k) | x_{rg(k)}(t, k) = 1\}$ und $b := \sup \{rg(k) | x_{rg(k)}(t, k) = 0\}$, d.h. a gibt die Position der ersten 1 und b die Position der letzten 0 an. Definiere nun die “*Übergangszone*”³ zwischen Halten und Ausüben der Option als diejenige Folge von Nullen und Einsen, die mit $x_a(t, k)$ beginnt und mit $x_b(t, k)$ endet. Bestimme anschließend eine “*scharfe Grenze*” zwischen Halten und Ausüben der Option als den Beginn der ersten Folge von Einsen, deren Länge die Länge von allen nachfolgenden Zahlenfolgen von Nullen übertrifft. Der Index dieser führenden 1 wird mit rg^* bezeichnet.

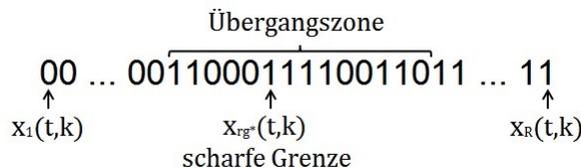


Abbildung 4.1: Übergangszone und “scharfe Grenze” in $x_{rg(k)}(t, k)$

²Mit $F(t, k)$ ist hier wiederum der Fortführungswert auf Basis des k -ten Pfads zur Zeitperiode t gemeint.

³Eine solche Zone muss es nicht zwingend geben, ist bei einer hohen Pfadanzahl R in der Regel aber vorhanden.

- (7) Definiere für jeden Pfad eine *neue Indikatorvariable*⁴ $y_{rg(k)}(t, k)$, die die “scharfe Grenze” einbezieht:

$$y_{rg(k)}(t, k) := \begin{cases} 1, & \text{falls } rg(k) \geq rg^* \quad \text{d.h.: Option ausüben} \\ 0, & \text{falls } rg(k) < rg^* \quad \text{d.h.: Option halten} \end{cases}$$

- (8) Definiere für jeden Pfad den aktuellen Optionswert $V(t, k)$ wie folgt:

$$V(t, k) = \begin{cases} I(t, k), & \text{falls } y_{rg(k)}(t, k) = 1 \\ F(t, k), & \text{falls } y_{rg(k)}(t, k) = 0 \end{cases}$$

- (9) Setze $t := t - 1$ und gehe zu Schritt (1), falls⁵ $t > 0$.

Definiere nun den Indikator $z(t, k)$ für alle $t < N$, der letztendlich den Ausübungszeitpunkt jedes einzelnen Pfads bestimmt, wie folgt:

$$z(t, k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y_{rg(k)}(t, k) = 1 \text{ und } y_{rg(k)}(s, k) = 0 \text{ für alle } s < t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sollte daraufhin für einen Pfad \tilde{k} gelten⁶ $z(t, \tilde{k}) = 1$ für ein $t < N$, so setze den zu Beginn berechneten Indikator $z(N, \tilde{k})$ gleich Null.

Damit erreicht man, dass für jeden Pfad gilt: Entweder die Option wird nie ausgeübt ($z(t, k) = 0$ für alle t) oder die Option wird nur zum frühestmöglichen zuvor berechneten Zeitpunkt, den wir hier mit \tilde{t} bezeichnen, ausgeübt ($z(\tilde{t}, k) = 1$ und $z(t, k) = 0$ für alle $t \neq \tilde{t}$).

Letztendlich bestimmt man den Optionswert $V(0, S(0))$ mit folgendem Monte-Carlo-Schätzer (MC-Schätzer):

$$V(0, S(0)) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \sum_{t=1}^N z(t, k) e^{-r(\Delta t)t} I(t, k), \quad (4.1)$$

wobei $z(t, k)$ angibt, ob und zu welchem Zeitschritt t man einen Pfad k ausübt und $I(t, k)$ jeweils der zugehörige innere Optionswert ist, den man bei Ausübung realisiert und mit $e^{-r(\Delta t)t}$ um t Zeitschritte der Länge $\Delta t = \frac{T}{N}$ diskontiert.

⁴Die Notation sei hier analog zu der, die bei $x_{rg(k)}(t, k)$ unter Schritt (5) eingeführt wurde.

⁵Wenn eine sofortige Ausübung zum Zeitpunkt $t = 0$ erlaubt wird, müsste die Bedingung heißen: falls $t \geq 0$.

⁶Dies kann nach der vorherigen Definition von $z(t, k)$ pro Pfad höchstens für genau ein $t < N$ der Fall sein.

Bemerkung 4.2 (Hinweise zur Implementierung)

Der Bündelalgorithmus von Tilley ist im Rahmen dieser Arbeit in MATLAB implementiert worden. Der Quellcode (tilley.m), der auf der beiliegenden CD-Rom zu finden ist, enthält ausführliche Kommentare zum jeweiligen Vorgehen. Grundsätzlich ist bei der Programmierung versucht worden, sich an der Darstellung von Algorithmus 4.1 zu orientieren und auch die Bezeichnungen der Variablen sind weitestgehend darauf abgestimmt worden. Beim Versuch, den Algorithmus hinsichtlich der Rechnerzeit so effektiv wie möglich zu implementieren, sind bewusst kleine Modifikationen vorgenommen worden, die vornehmlich einer Einsparung von Speicherplatz dienen. In diesem Zusammenhang führen wir im Programmcode die Vektoren “z_tk” und “I_tk_stern” der Länge R ein, deren Einträge zu Beginn allesamt gleich Null sind:

Wird für einen Pfad \tilde{k} in Schritt (8) eine Ausübung zu einem aktuellen Zeitschritt \tilde{t} des rückwärts-rekursiven Algorithmus (oder bereits zu Beginn zum Zeitpunkt $t = N$) signalisiert, so überschreiben wir die zugehörigen Einträge mit $z_tk(\tilde{k}) = \tilde{t}$ und $I_tk_stern(\tilde{k}) = I(\tilde{t}, \tilde{k})$. Somit wird erreicht, dass am Ende des Rückwärts-Algorithmus der Vektor z_tk die letztendlichen Ausübungszeitpunkte der einzelnen Pfade und der Vektor I_tk_stern die jeweils passenden inneren Werte enthält. Dies führt zu einem in seiner Darstellung von (4.1) abweichenden Monte-Carlo-Schätzer: $\frac{1}{R} \sum_{k=1}^R e^{-r(\Delta t)(z_tk(k))} I_tk_stern(k)$. Dabei übernimmt der Vektor z_tk im Programmcode die gleiche Funktion wie der Indikator $z(t, k)$ aus der Darstellung von Algorithmus 4.1, denn auch $z(t, k)$ bewirkt, dass für jeden Pfad der frühestmögliche zuvor berechnete Ausübungszeitpunkt realisiert wird.

Diese Modifikation bringt den Vorteil mit sich, dass man nur noch die Aktienkurswerte in einer $(N + 1) \times R$ -Matrix abspeichern muss⁷, wobei die Zeilen für die diskreten Zeitschritte stehen und die einzelnen Spalten jeweils einem bestimmten Pfad zuzuordnen sind. Alle anderen Werte können nach der beschriebenen Vorgehensweise in Vektoren der Länge R abgespeichert werden, deren Einträge zu jedem Rekursionsschritt überschrieben werden können. Dies ist auch für die Optionswerte $V(t, k)$ möglich, denn diese werden in jedem Rekursionsdurchlauf erst in Schritt (8) aktualisiert und somit liegt in Schritt (4) jeweils noch der gewünschte Wert $V(t + 1, k)$ der vorherigen Zeitperiode vor.

Im Programmcode weisen die Einträge der Vektoren “rg” und “S_buendelnr” den jeweiligen Pfaden die Größenposition bzw. die zugehörige Bündelnummer zum jeweils aktuellen Zeitschritt zu.

Des Weiteren sei bemerkt, dass zur Simulation der Aktienkurspfade zu Beginn des Algorithmus antithetische Zufallszahlen verwendet werden.

⁷Bemerkung: Zusammen mit dem Zeitpunkt $t = 0$ gibt es $(N+1)$ Zeitpunkte für jeden Kurspfad.

4.3 Konvergenzverhalten des Bündelalgorithmus

Für Algorithmus 4.1 sind die Anzahl der Zeitschritte N , die Bündelanzahl Q , und die Anzahl der Pfade pro Bündel P im Voraus festzulegen. Die gesamte Pfadanzahl R ergibt sich aus dem Produkt PQ . Um eine möglichst genaue Approximation des wahren Optionswerts in einer akzeptablen Rechnerzeit zu erlangen, gilt es, eine sinnvolle Wahl dieser Parameter zu treffen. Diesbezüglich werden wir zunächst Gründe darlegen, die für Ungenauigkeiten des Monte-Carlo-Schätzers (4.1) verantwortlich sind, bevor wir anschließend anhand von numerischen Simulationen das Konvergenzverhalten des Bündelalgorithmus in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern grafisch veranschaulichen. In diesem Zusammenhang wird unter anderem auch die Bedeutung der “scharfen Grenze” aus Schritt (6) herausgestellt.

4.3.1 Gründe für Ungenauigkeiten des MC-Schätzers

Ungenauigkeiten des MC-Schätzers (4.1) haben ihren Ursprung vor allem in der Tatsache, dass die verwendete Pfadanzahl R endlich ist. Daraus ergeben sich zwei Fehlerquellen bei der Approximation der kritischen Ausübungsgrenze:

- (i) Einerseits wird die theoretisch kontinuierliche Verteilung der möglichen Kursentwicklungen zu jedem Zeitschritt nicht fein genug nachgebildet⁸.
- (ii) Andererseits wird zur mathematischen Schätzung des Fortführungswerts das arithmetische Mittel von einer endlichen Anzahl von P Kurspfaden verwendet.

Ungenauigkeiten, die durch (i) hervorgerufen werden, können durch eine Erhöhung der Bündelanzahl Q reduziert werden.

Fehler vom Typ (ii) können vermindert werden, indem man die Anzahl an Pfaden pro Bündel P erhöht.

Bei einer fest vorgegebenen Pfadanzahl R verhalten sich die Parameter P und Q jedoch invers zueinander und somit muss zur Reduzierung der Fehlerquellen (i) und (ii) ein Kompromiss gefunden werden. Es sei bemerkt, dass Fehler bei der Approximation der kritischen Ausübungsgrenze in der Regel zu einer Unterschätzung des wahren Optionspreises führen.

Ein weiterer Aspekt, der nicht vergessen werden darf, ist die Tatsache, dass bei der Methode von Tilley während des rückwärts-rekursiven Algorithmus die selben Pfade verwendet werden, wie anschließend zur Schätzung des Optionswerts. Was nichts anderes bedeutet, als dass zur

⁸Sind beispielsweise nur 2 Bündel vorhanden, so erhält man pro Zeitschritt lediglich 2 verschiedene Fortführungswerte. Man unterstellt sozusagen dem Aktienkurs damit, dass er sich jeweils bis zum nächsten Zeitschritt auf nur 2 unterschiedliche Weisen entwickeln kann, obwohl insgesamt jeweils eine große Anzahl an R Kurspfaden vorhanden ist.

Approximation der Ausübungsstrategie Informationen aus der Zukunft einfließen. Dieser Effekt wirkt sich jedoch bei Weitem nicht so sehr auf den geschätzten Preis aus, wie noch bei dem ersten naiven Ansatz aus Abschnitt 3.5. Denn jetzt werden - für hinreichend großes P - die Fortführungswerte in Schritt (4) nicht nur auf Basis eines einzelnen Pfads, sondern auf Grundlage des arithmetischen Mittels von P Optionswerten gebildet. Für $P \rightarrow \infty$ dürfte diese Fehlerquelle verschwindend gering werden, was bereits ein Blick auf die Grafiken zu den nachfolgenden numerischen Tests vermuten lässt.

Alles in allem ist zu erwähnen, dass sich für fest gewählte Parameter aufgrund der beschriebenen Einflussfaktoren schwer voraussagen lässt, ob die Schätzung durch Algorithmus 4.1 den wahren Optionswert über- oder unterschätzt. Um das Verhalten des Monte-Carlo-Schätzers in Abhängigkeit der Parameter zu untersuchen, führen wir im Folgenden numerische Simulationen durch.

4.3.2 Schätzungen des Optionswerts in Abhängigkeit des Bündelparameters α und die Bedeutung der “scharfen Grenze”

Wie im vorherigen Abschnitt angedeutet, hat das Verhältnis zwischen der Bündelanzahl Q und den Pfaden pro Bündel P Einfluss auf die Schätzung des Optionswerts. Wir wollen nun numerisch untersuchen, welche Aufteilung hinsichtlich der Genauigkeit des Algorithmus am besten erscheint.

In diesem Zusammenhang wollen wir den *Bündelparameter* α einführen, der das Verhältnis zwischen P und Q wiedergibt. Er wird durch die Gleichung

$$Q := R^\alpha$$

definiert. Daraus lässt sich mit $R = PQ$ direkt die Gleichung $P = R^{1-\alpha}$ ableiten.

Da zur Durchführung des Algorithmus mindestens ein Bündel verwendet werden muss und die Bündelanzahl Q aber offensichtlich auch nicht größer als die Gesamtanzahl an Pfaden R sein kann, gilt: $0 \leq \alpha \leq 1$. Der Wert $\alpha = 0$ hat eine Einteilung in nur ein Bündel zu R Kurspfaden zur Folge, wohingegen der Wert $\alpha = 1$ eine Einteilung in R Bündel zu je einem Pfad nach sich zieht. Dabei ist zu beachten, dass bei einer vorgegebenen Pfadanzahl R der Bündelparameter α nur so gewählt werden darf, dass ganzzahlige Werte P und Q induziert werden. Sind R und Q gegeben, so kann man $\alpha = \frac{\log(Q)}{\log(R)}$ berechnen.

Bemerkung 4.3 (Konvergenz des MC-Schätzers)

Wie in [12] zu lesen ist, kann bewiesen werden, dass der MC-Schätzer (4.1) für ein konstantes $0 < \alpha < 1$ für $R \rightarrow \infty$ gegen eine optimale Ausübungsstrategie und somit gegen den korrekten Wert konvergiert⁹. Denn daraus folgt sowohl $Q \rightarrow \infty$ als auch $P \rightarrow \infty$, womit die zuvor genannten Fehlerquellen eliminiert werden. Diese Aussage gilt unter der Voraussetzung, dass die im Algorithmus verwendete Anzahl an möglichen Ausübungszeitpunkten N im Optionsvertrag fest vereinbart wird. Da wir beim amerikanischen Put hier jedoch davon ausgehen, dass die Option zu jedem Zeitpunkt $t \in (0, T]$ ausgeübt werden darf, hängt das Konvergenzverhalten zusätzlich noch von der Anzahl an Zeitschritten N ab, was in Abschnitt 4.3.4 detailliert untersucht wird.

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit des Bündelparameters α an einem vorgegebenem Beispiel genauer untersuchen. Gegeben sei ein amerikanischer Put mit einer Laufzeit von einem halben Jahr ($T = 0.5$). Des Weiteren seien $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ und $K = S(0) = 100$. Für die durchzuführenden Simulationen verwenden wir $N = 40$ Zeitschritte und eine Pfadanzahl $R = 4096 = 2^{12}$. Wir haben hier bewusst eine Zweierpotenz als Pfadanzahl ausgewählt, weil dadurch verschiedene Aufteilungen in Bündel und Pfade pro Bündel erleichtert werden. Die relativ kleine Pfadanzahl ist darin begründet, dass hierbei auftretende Unterschiede deutlicher zu erkennen sind. Denn wie bereits erwähnt, konvergiert der Algorithmus für $R \rightarrow \infty$ für alle $0 < \alpha < 1$ gegen den (selben) korrekten Wert.

Wir beginnen nun damit die 4096 Pfade in $Q = 2^1$ Bündel und $P = 2^{11}$ Pfade pro Bündel aufzuteilen, woraus sich der Bündelparameter $\alpha = \frac{\log(2)}{\log(4096)} \approx 0.083$ ergibt. Auf Grundlage dieser Einteilung bestimmen wir einen ersten Optionswert. Wir führen dieses Vorgehen fort, indem wir die Zweierpotenz von Q jeweils um eins erhöhen und die Zweierpotenz von P gleichzeitig um eins vermindern. Schließlich schätzen wir den Optionswert für $Q = 2^{11}$ und $P = 2^1$, woraus sich ein α von $\frac{\log(2^{11})}{\log(4096)} \approx 0.917$ ergibt. Zur Bestimmung des Optionswerts verwenden wir jeweils das arithmetische Mittel von 100 durchgeführten Schätzungen mit Algorithmus 4.1, um ein repräsentatives Resultat zu erhalten. Das Ergebnis aus den durchgeführten Simulationen wird anhand von Abbildung 4.2 veranschaulicht¹⁰.

Um die Bedeutung der “scharfen Grenze” aus Schritt (6) des Bündelalgorithmus für das Konvergenzverhalten der Methode herauszustellen, haben wir eine Variante von Algorithmus 4.1 ohne “scharfe Grenze” programmiert (`tilley_ohne_scharfe_grenze.m`). Führen wir damit - unter ansonsten gleich bleibenden Voraussetzungen - ebenfalls Schätzungen des Optionspreises in

⁹Infolgedessen werden wir bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ nicht in Betracht ziehen.

¹⁰Die tatsächlich geschätzten Optionswerte sind dabei als Punkte markiert, die miteinander verbunden sind.

Abhängigkeit von α durch, so erhalten wir ein viel breiteres Spektrum an Werten als zuvor. Während die geschätzten Optionswerte beim Algorithmus mit integrierter “scharfer Grenze” lediglich in einem Intervall von 8.9 bis 9.3 liegen, erstrecken sich die erhaltenen Werte bei der Variante ohne “scharfe Grenze” über einen Bereich von 8.8 bis 10.8.

Abbildung 4.2 führt uns somit die Bedeutung der Einführung einer “scharfen Grenze” vor Augen. Mit ihr wird im Allgemeinen die Konvergenz des Monte-Carlo-Schätzers (4.1) für alle $0 < \alpha < 1$ verbessert.

Angesichts der erhaltenen Ergebnisse und hinsichtlich einer gewünschten Genauigkeit des Algorithmus bei einer festgelegten Pfadanzahl halten wir es für vernünftig für die folgenden numerischen Tests den Bündelparameter α gleich 0.5 zu setzen. Zu einem ähnlichen Entschluss kommt auch Tilley (siehe [12]).

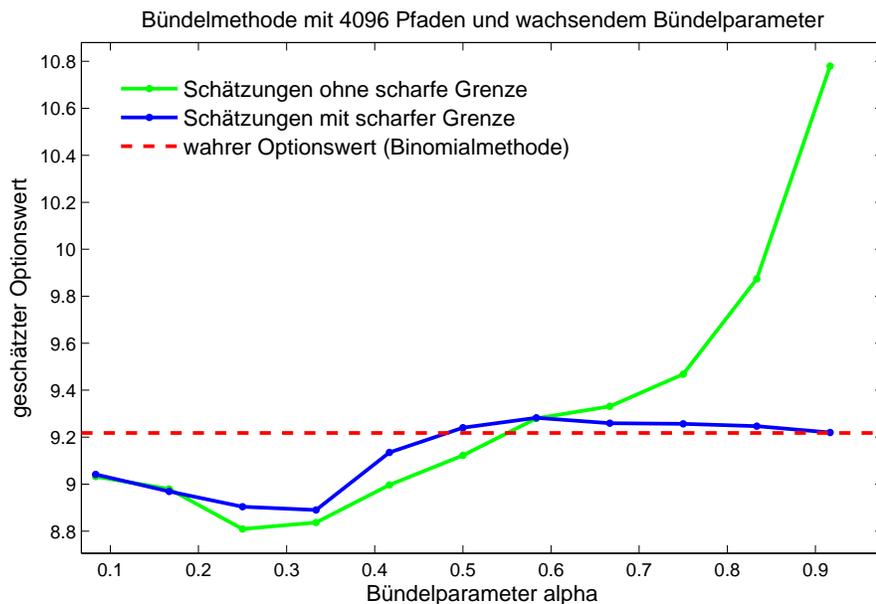


Abbildung 4.2: Schätzungen des Optionswerts in Abhängigkeit von α

Bemerkung 4.4 (Interpretation der Abbildung 4.2)

Es wird nun versucht zu erklären, wie es zu den in Abbildung 4.2 ersichtlichen Unterschieden bei der Optionspreisschätzung zwischen Algorithmus 4.1 und der Variante ohne “scharfe Grenze” kommt.

Die “scharfe Grenze” bewirkt, dass es zu jedem Rekursionsschritt in Algorithmus 4.1 einen kritischen Kurswert¹¹ $S^*(t, k)$ gibt. Für größere Werte wird die Option gehalten, für kleinere Werte

¹¹Das ist jeweils der Kurswert, der zur Indikatorvariablen $y_{rg^*}(t, k)$ gehört.

wird eine Ausübung veranlasst¹².

Ohne eine solche “scharfe Grenze” existiert eine “Übergangszone” (vgl. Abb. 4.1), in der offensichtliche Fehler bei den Ausübungsentscheidungen auftreten. Immer dann, wenn in der “Übergangszone” eine 1 vor einer 0 steht, bedeutet das nämlich für betreffende Pfade k_1 und k_2 : Obwohl gilt $S(t, k_1) > S(t, k_2)$ und Pfad k_2 somit einen größeren inneren Wert aufweist als Pfad k_1 , wird Pfad k_1 ausgeübt, Pfad k_2 jedoch nicht. Ein solches Szenario kann immer dann auftreten, wenn sich die Pfade k_1 und k_2 in unterschiedlichen Bündeln befinden. Denn dann wird für Pfad k_2 ein höherer Fortführungswert berechnet als für Pfad k_1 , was folglich zu dem beschriebenen Fehler in der Ausübungsentscheidung führen kann.

Je mehr Bündel es also bei einer konstanten Pfadanzahl R gibt, desto breiter kann tendenziell auch die “Übergangszone” werden und desto schwerwiegender können folglich die Unterschiede zwischen den geschätzten Optionswerten der beiden Algorithmen ausfallen. Dies ist anhand von Abbildung 4.2 zu erkennen. Für kleine Bündelparameter α sind sich die geschätzten Optionswerte sehr ähnlich, für große α hingegen weichen sie stark voneinander ab. Die Variante des Algorithmus ohne “scharfe Grenze” ähnelt für große α immer mehr dem Algorithmus 3.1 (erster naiver Ansatz). Für $\alpha = 1$ wäre sie sogar identisch mit diesem Verfahren. Die “scharfe Grenze” aus dem Bündelalgorithmus scheint in diesem Fall dem grundlegenden Effekt einer Optionspreisüberschätzung beim Einfließen von zukünftigen Informationen sehr gut entgegenzuwirken. Denn hier liegen die geschätzten Optionswerte für sämtliche Bündelparameter $\alpha \geq 0.40$ in einem relativ kleinen Bereich um den wahren Optionswert.

Anzumerken ist, dass für den “Knick”, der bei der Darstellung der geschätzten Optionswerte in einem Bereich um $\alpha \approx 0.3$ zu beobachten ist, keine plausible Erklärung gefunden wurde. Interessant ist, dass Tilley in seiner Arbeit (siehe [12]) bei einer ähnlichen Abbildung erst ab einem Bündelparameter von $\alpha \approx 0.3$ mit der Darstellung der geschätzten Optionswerte beginnt. Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass es aufgrund mehrerer Einflussfaktoren, die teilweise entgegengesetzt wirken, im Allgemeinen nur sehr schwer möglich ist, vorauszusagen, ob der Bündelalgorithmus den wahren Optionspreis bei einer bestimmten Wahl der Parameter über- oder unterschätzt.

Ab hier werden wir wieder ausschließlich die Bündelmethode mit integrierter “scharfer Grenze” in Form von Algorithmus 4.1 verwenden.

¹²Vgl. Schritt (7) des Algorithmus 4.1. Zu beachten ist, dass sich $y_{rg(k)}(t, k)$ auf die der Größe nach geordneten Pfade bezieht.

4.3.3 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl R

Nun soll das Verhalten der durch den Bündelalgorithmus geschätzten Optionswerte bei Veränderung der Pfadanzahl R demonstriert werden. Wir setzen den Bündelparameter $\alpha = 0.5$, was gleichbedeutend ist mit $P = Q$. Betrachtet wird die Put-Option aus vorherigem Abschnitt unter unveränderten Marktbedingungen ($T = 0.5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = S(0) = 100$). Für den Algorithmus verwenden wir $N = 40$ Zeitschritte.

Um stets zu erreichen, dass $P = Q$ gilt, gehen wir bei den Simulationen folgendermaßen vor: Wir setzen $P = Q = 12i$ ($\Rightarrow R = 144i^2$), wobei wir $i \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ wählen, und approximieren für die unterschiedlichen Pfadanzahlen den Optionspreis. Um den Optionswert zu bestimmen, führen wir jeweils 100 Schätzungen durch und bilden das arithmetische Mittel.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, wird für $R \rightarrow \infty$ eine optimale Ausübungsstrategie umgesetzt. Abbildung 4.3 unterstützt diese These. Man kann sehr gut erkennen, wie die geschätzten Optionswerte mit steigender Pfadanzahl gegen den wahren Optionswert konvergieren. Anhand von Abbildung 4.3 und weiteren Simulationen, die in diesem Zusammenhang durchgeführt worden sind, sind wir zu dem Entschluss gekommen für alle folgenden Anwendungen des Bündelalgorithmus eine feste Pfadanzahl $R = 40000$ zu verwenden. Ab dieser Anzahl ändert sich die Genauigkeit der Schätzungen bei den Anwendungsfällen, die wir in der vorliegenden Arbeit behandeln, nicht mehr merklich. Durch ein zu großes R wird der Rechenaufwand nur unnötig erhöht und mehr Speicherplatz verbraucht, was eine steigende Rechnerzeit zur Folge hat.

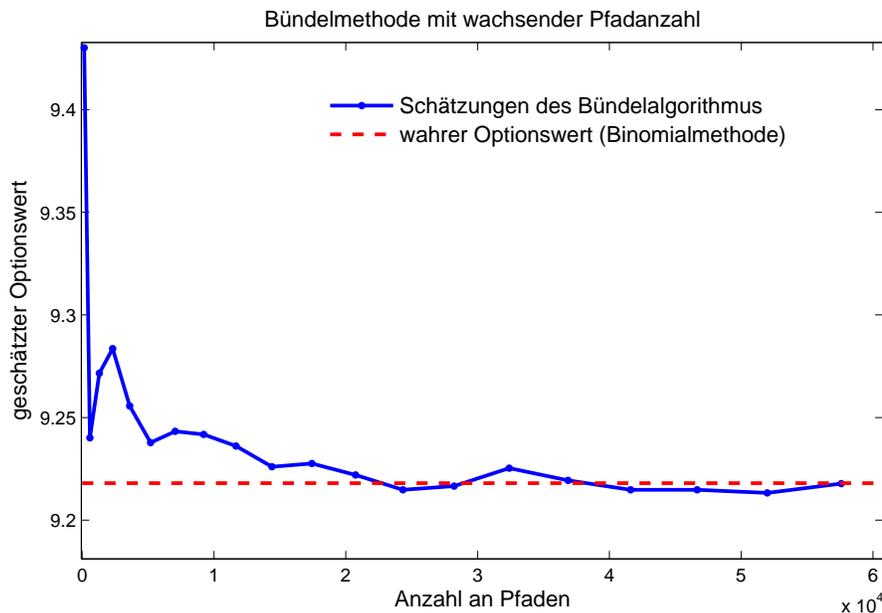


Abbildung 4.3: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl R

4.3.4 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N

Da wir bei den amerikanischen Put-Optionen kontinuierliche Ausübungsmöglichkeiten über die gesamte Laufzeit unterstellen, genügt es nicht, wenn der Monte-Carlo-Schätzer (4.1) eine optimale Ausübungsstrategie bezogen auf eine feste Anzahl an Ausübungszeitpunkten bestimmt. Denn dann werden bei der Approximation einer optimalen Ausübungsstrategie womöglich günstigere Ausübungszeitpunkte, die zwischen den vorgegebenen diskreten Zeitpunkten liegen, ignoriert. Dies führt im Allgemeinen zu einer Unterschätzung des wahren Optionswerts.

Wir demonstrieren dies anhand der Put-Option aus den vorangegangenen Tests ($T = 0.5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = S(0) = 100$), wobei wir für den Bündelalgorithmus die Parameter $Q = P = 200$ setzen. Zunächst bestimmen wir den Optionswert für nur einen Zeitschritt. Dieser Spezialfall ist gleichzusetzen mit einem europäischen Put, was auch der erhaltene Optionswert von 8.702 bestätigt, der dem wahren Optionspreis¹³ eines europäischen Puts von 8.701 nahezu gleicht. Wir bestimmen anschließend die Optionswerte zu einer jeweils ausgewählten Anzahl von $N \in \{5, 10, 15, \dots, 60\}$ Zeitschritten wiederum durch das arithmetische Mittel von je 100 Schätzungen. Die zugehörige Abbildung 4.4 zeigt die erwartete Konvergenz von unten an den wahren Optionswert.

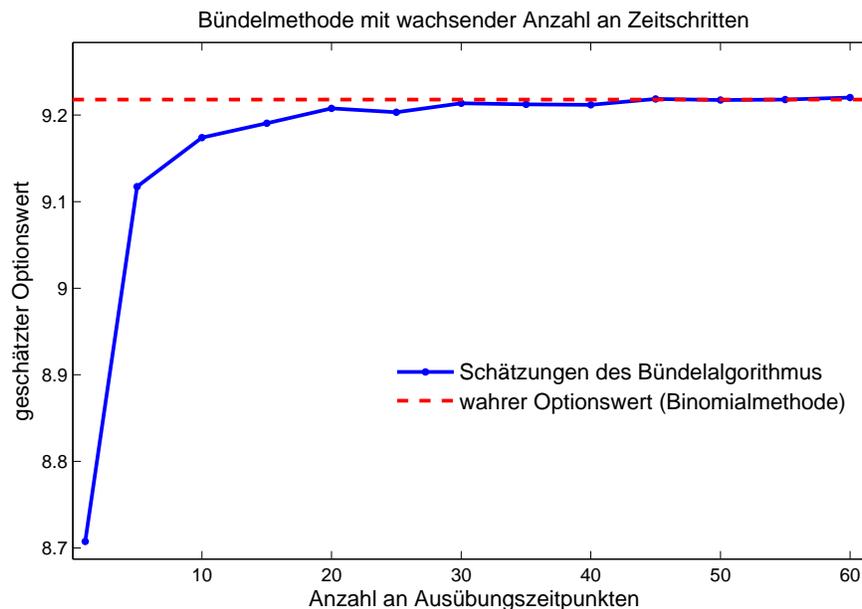


Abbildung 4.4: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N

¹³Als "wahrer" Preis wird der Wert der Binomialmethode für einen europäischen Put angenommen. Dieser wird zusätzlichen zum Wert der zugehörigen amerikanischen Option vom Programm binomial.m, das sich auf der beiliegenden CD-ROM befindet, ausgegeben.

4.4 Auswertung anhand eines Beispiels

Wir haben in den letzten Abschnitten auf Grundlage von numerischen Simulationen geeignete Werte für die Parameter des Bündelalgorithmus heuristisch hergeleitet. Jetzt wollen wir den Monte-Carlo-Schätzer (4.1) aus dem Bündelalgorithmus unter Verwendung von 40 diskreten Ausübungszeitpunkten und 40000 Pfaden, die in 200 Bündeln zu je 200 Pfaden aufgeteilt sind, auf seine Genauigkeit bezüglich des wahren Optionswerts testen. Dazu führen wir 1000 unabhängige Schätzungen durch und stellen die erhaltenen Optionswerte $V_1, V_2, \dots, V_{1000}$ auf 2 Nachkommastellen gerundet in einem Histogramm (siehe Abbildung 4.5) dar. Den Erwartungswert μ_V des Monte-Carlo-Schätzers berechnen wir durch das arithmetische Mittel: $\tilde{\mu}_V = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} V_i$. Die Standardabweichung $\tilde{\sigma}_V$, die ein Maß für die Streuung der approximierten Stichprobenwerte um den Erwartungswert ist, kann durch den Schätzer $\tilde{\sigma}_V = \sqrt{\frac{1}{1000-1} \left(\sum_{i=1}^{1000} (V_i - \tilde{\mu}_V)^2 \right)}$ bestimmt werden. Wir erhalten damit aus unseren Simulationen einen Erwartungswert $\tilde{\mu}_V = 9.216$ und eine Standardabweichung $\tilde{\sigma}_V = 0.0275$.

Um den in Abschnitt 3.3 erwähnten Effekt der Varianzreduktion im Bezug auf amerikanische Optionen herauszustellen, führen wir die gleiche Versuchsreihe nochmals durch, wobei wir bei der Simulation der Kurspfade für den Bündelalgorithmus auf antithetische Zufallszahlen verzichten. Der zugehörige Programmcode (`tilley_ohne_var_red.m`) befindet sich auf der beiliegenden CD-ROM. Daraus ergibt sich ein nahezu identischer Erwartungswert $\hat{\mu}_V = 9.214$, jedoch eine fast doppelt so hohe Standardabweichung von $\hat{\sigma}_V = 0.0533$. Die zugehörigen Varianzen unterscheiden sich folglich sogar fast um den Faktor 4. Ein Vergleich zwischen den Abbildungen 4.5 und 4.6 macht den Effekt der Varianzreduktion deutlich. Aus diesem Grund werden wir uns im weiteren Verlauf der Arbeit weiterhin auf die Variante des Algorithmus mit antithetischen Zufallszahlen (`tilley.m`) konzentrieren.

Die rot gestrichelte Linie in den Abbildungen zeigt jeweils die Dichtefunktion der Normalverteilung mit entsprechendem Erwartungswert und Standardabweichung. Schon mit bloßem Auge lässt sich daran erkennen, dass die Schätzwerte aus dem Bündelalgorithmus normalverteilt sind. Mögliche Erklärungen für die Tatsache, dass der Erwartungswert der Schätzungen nicht exakt mit dem wahren Optionswert von 9.218 übereinstimmt, haben wir in den vorherigen Kapiteln schon ausführlich erläutert. Wir sehen aber, dass der Bündelalgorithmus unter den zuvor ausgewählten Werten für die Parameter sehr gute Schätzungen für den Optionswert liefert. Der geschätzte Optionswert $\tilde{\mu}_V = 9.216$ liegt lediglich 0.002 unterhalb des korrekten Werts, was einer Abweichung von gerade einmal 0.02% entspricht. Auf die benötigte Rechnerzeit werden wir bei Vergleichen mit dem Algorithmus von Grant, Vora und Weeks in Kapitel 6 eingehen.

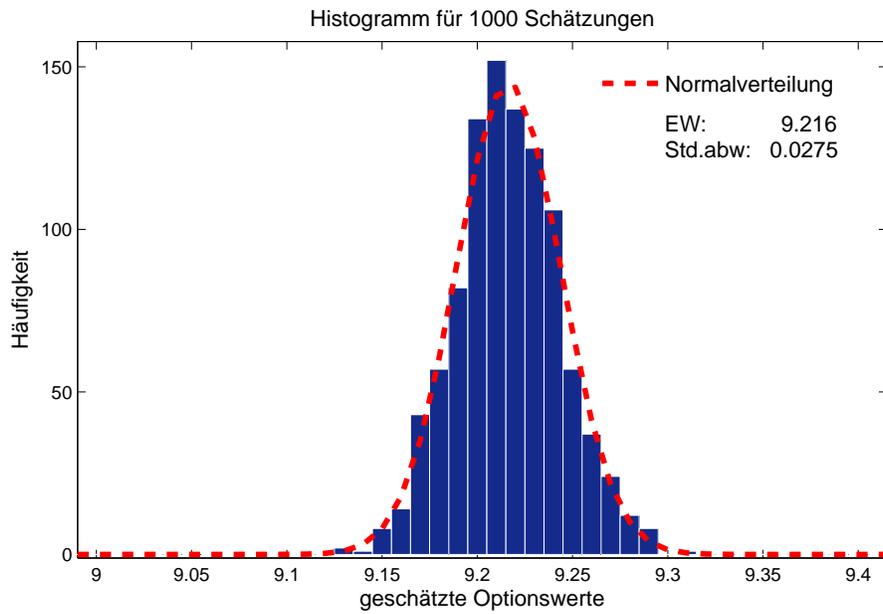


Abbildung 4.5: Histogramm (Algorithmus mit antithetischen Zufallsvariablen)

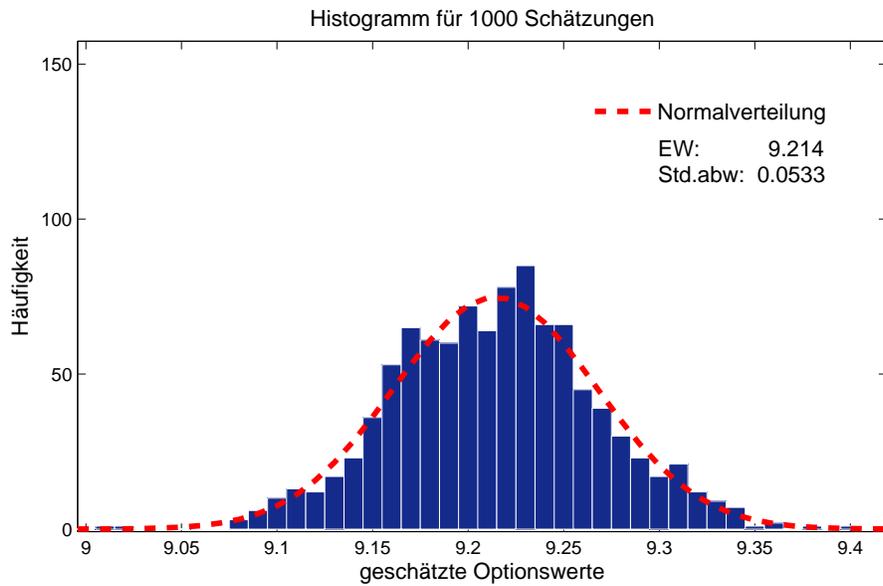


Abbildung 4.6: Histogramm (Algorithmus ohne antithetische Zufallsvariablen)

Kapitel 5

Die Methode von Grant, Vora und Weeks

Dwight Grant, Gautam Vora und David E. Weeks veröffentlichten im Jahre 1996 eine weitere Methode zur Bewertung von eindimensionalen amerikanischen Put-Optionen, wobei ebenfalls die Monte-Carlo-Simulation in einen rückwärts-rekursiven Algorithmus integriert wird. Zu Beginn dieses Kapitels wird die Grundidee des Verfahrens erläutert und auf den Unterschied zur Bündelmethode hingewiesen, bevor der Algorithmus detailliert vorgestellt wird. Im Anschluss daran werden das Vorgehen und das Problem bei der Berechnung der kritischen Ausübungspreise näher betrachtet und veranschaulicht. Dies soll unter anderem zu einem besseren Verständnis im Hinblick auf die Hinweise zur Implementierung beitragen. Letztendlich wird das Konvergenzverhalten der Methode in Abhängigkeit der zu wählenden Parameter untersucht und eine Optionsbewertung am Beispiel eines amerikanischen Puts durchgeführt.

5.1 Grundidee

Beim Verfahren von Tilley werden bekanntlich die Kurspfade zur Berechnung einer optimalen Ausübungsstrategie zu Beginn des Algorithmus vollständig simuliert und abgespeichert. Dagegen werden bei der Methode von Grant, Vora und Weeks (GVW) die Kurssimulationen aufeinanderfolgend - zu jedem Zeitschritt des rückwärts-rekursiven Algorithmus - durchgeführt, um letztendlich eine kritische Ausübungsgrenze zu approximieren. Gemäß den theoretischen Überlegungen aus Abschnitt 3.4 setzt man zur Bestimmung der kritischen Ausübungswerte $S^*(t)$ zu den einzelnen diskreten Ausübungszeitpunkten $t \in \{1, \dots, N\}$ jeweils den Fortführungswert gleich dem inneren Wert der Option. Nachdem die Ausübungsgrenze vollständig festgelegt worden ist, wird auf deren Grundlage der Optionswert durch weitere, zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnende Simulationen geschätzt. Zu bemerken ist, dass hier die Kurspfade zur Schätzung des Optionswerts - im Unterschied zum Bündelalgorithmus - unabhängig von den Pfaden sind, die zuvor zur Approximation der Ausübungsgrenze verwendet werden.

5.2 Der Algorithmus von Grant, Vora und Weeks (GVW)

Das Verfahren, das wir hier betrachten, basiert auf den Ausführungen von Grant, Vora und Weeks [6] und einem Artikel aus der finanzwissenschaftlichen Fachzeitschrift “Journal of Computational Finance” [5, S. 11-12] über die Methode von GVW. Der folgende Algorithmus zur Bewertung eines eindimensionalen amerikanischen Puts ist mit einigen Erläuterungen versehen und drückt die theoretische Vorgehensweise aus. Bei der Implementierung müssen jedoch kleine Abänderungen getroffen werden, wie wir später noch sehen werden.

Um Missverständnissen bei der Notation vorzubeugen, verwenden wir für den Optionswert die abgekürzte Bezeichnung $V(t) := V(t, S(t))$, für den Fortführungswert $F(t) := F(t, S(t))$ und für den inneren Wert der Option $I(t) := I(t, S(t))$. Damit sollen Verwechslungen mit entsprechenden Werten, die sich auf einzelne Kurspfade beziehen, vermieden werden. N ist wiederum die Anzahl an diskreten Ausübungszeitpunkten und $\Delta t = \frac{T}{N}$ die Länge eines Zeitschritts.

Algorithmus 5.1 (Methode von GVW)

Bestimme zuerst die kritischen Ausübungswerte $S^*(t)$ für alle Zeitpunkte $t \in \{1, \dots, N\}$:

Setze $S^*(N) = K$, denn zum Fälligkeitsdatum wird bekanntlich eine Put-Option für alle Werte unterhalb vom Ausübungspreis K ausgeübt, für Werte oberhalb von K hingegen nicht.

Führe nun auf Basis von $S^*(N) = K$ einen rückwärts-rekursiven Algorithmus aus, beginnend zum letzten vorzeitigen Ausübungszeitpunkt $t = N - 1$:

Bemerkung: Es wird zunächst die theoretische Vorgehensweise erläutert:

$$\text{Zu jedem Zeitpunkt } t \text{ gilt: } V(t) = \begin{cases} K - S(t) & \text{falls } S(t) < S^*(t) \\ e^{-r\Delta t} E(V(t+1)|S(t)) & \text{falls } S(t) \geq S^*(t) \end{cases}.$$

Denn liegt der Basiswert $S(t)$ unter dem gesuchten kritischen Ausübungswert, wird die Option ausgeübt und der innere Wert $I(t) = K - S(t)$ realisiert. Liegt $S(t)$ dagegen darüber, so wird die Option gehalten und es ergibt sich der Fortführungswert $F(t) = e^{-r\Delta t} E(V(t+1)|S(t))$. Der Erwartungswert des Optionswerts zur nachfolgenden Periode hängt hier vom jeweils aktuellen Basiswert $S(t)$ ab.

Für den gesuchten kritischen Wert $S^*(t)$ gleicht der innere Wert $I(t)$ gerade dem Fortführungswert $F(t)$, d.h.

$$(K - S^*(t)) - e^{-r\Delta t} E(V(t+1)|S^*(t)) = 0$$

Gibt man sich eine Funktion $f(x) = (K - x) - e^{-r\Delta t}E(V(t+1)|x)$ vor, so erhält man durch Einsetzen des gesuchten Werts $S^*(t)$ folglich die zugehörige Nullstelle. Es wird ein Suchlauf nach dem kritischen Ausübungswert gestartet, indem man $S^*(t)$ zunächst gleich dem zuvor berechneten kritischen Wert $S^*(t+1)$ setzt und $f(S^*(t))$ berechnet. Ist der Funktionswert gleich Null, so hat man den kritischen Wert $S^*(t)$ gefunden, wenn nicht, so verkleinert man $S^*(t)$ und setzt den erhaltenen Wert erneut in die Funktion f ein. Dieses Prozedere führt man solange durch, bis man einen Vorzeichenwechsel des Funktionswerts registriert, denn dann hat man einen Bereich gefunden, in dem die Nullstelle der Funktion und somit $S^*(t)$ liegen muss.

Man kann so vorgehen, weil theoretisch die kritische Ausübungsgrenze vom Zeitpunkt $t = 0$ aus gesehen exponentiell steigend ist (vgl. Abb. 3.1), d.h. der kritische Ausübungswert $S^*(t+1)$ müsste eine obere Schranke für $S^*(t)$ vorgeben.

Nachdem die theoretischen Hintergründe dargelegt worden sind, folgt nun die Umsetzung des rückwärts-rekursiven Algorithmus, beginnend zum Zeitpunkt $t = N - 1$:

- (1) Setze $s := S^*(t+1)$.
- (2) Bestimme auf Basis der bereits erhaltenen kritischen Ausübungswerte den Fortführungswert wie folgt:

Simuliere ausgehend vom aktuellen Zeitpunkt t eine Anzahl von M Kurspfaden mit dem Startwert s und vergleiche zu jedem Zeitpunkt $\tau \in \{t+1, \dots, N\}$ die Kurswerte $S(\tau, m)$, $m \in \{1, \dots, M\}$, mit den bereits erhaltenen kritischen Ausübungswerten $S^*(\tau)$. Sobald dabei ein Pfad zu einem Zeitpunkt $\tilde{\tau}$ den kritischen Ausübungswert $S^*(\tilde{\tau})$ unterschreitet, wird er ausgeübt und sein innerer Wert $I(\tilde{\tau}, m) = K - S(\tilde{\tau}, m)$ auf den aktuellen Zeitpunkt t diskontiert. Daraus resultiert direkt der jeweilige Fortführungswert $F(t, m)$ für jeden Pfad. Der Fortführungswert der Option $F(t)$ ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel:

$$F(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M F(t, m).$$

- (3) Berechne den Wert der Funktion $f(s) = I(t) - F(t) = (K - s) - F(t)$.
- (4) Falls¹ $s = S^*(t+1)$: Setze $f_{att} := f(s)$ und $s := s - \delta$ für ein $\delta > 0$ und gehe zu Schritt (2).

¹Diese Bedingung bedeutet, dass man für den aktuellen Zeitschritt t gerade das erste Mal die Funktion $f(s)$ berechnet hat.

- (5) Falls $f_{alt}f(s) \leq 0$: Ein Intervall $[s, s + \delta]$, in dem die Nullstelle der Funktion f liegt, ist gefunden. Berechne letztendlich den kritischen Ausübungswert $S^*(t)$ durch lineare Interpolation zwischen den Punkten $(s, f(s))$ und $(s + \delta, f_{alt})$. Setze anschließend $t := t - 1$ und
- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{gehe zu Schritt (1),} & \text{falls } t > 0. \\ \text{beende den rückwärts-rekursiven Algorithmus,} & \text{falls } t = 0. \end{array} \right.$$
- (6) Falls die Nullstelle der Funktion f noch nicht gefunden ist, setze $f_{alt} := f(s)$ und $s := s - \delta$ für ein $\delta > 0$ und gehe zu Schritt (2).

Bestimme letztendlich den Optionswert auf Basis der zuvor erhaltenen kritischen Ausübungsgrenze:

Simuliere ausgehend vom Zeitpunkt $t = 0$ eine Anzahl von R Kurspfaden mit dem Startwert $S(0)$, der zum Ausgabezeitpunkt der Option bekannt ist. Sobald ein Pfad dabei zum ersten Mal zu einem Zeitpunkt $\tilde{t} \in \{1, \dots, N\}$ die kritische Ausübungsgrenze unterschreitet, wird er ausgeübt und sein innerer Wert $I(\tilde{t}, k) = K - S(\tilde{t}, k)$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ diskontiert. Nach diesem Vorgehen erhält man die Optionswerte der einzelnen Pfade $V(0, k)$ für $k \in \{1, \dots, R\}$. Bestimme letztendlich daraus den Optionswert $V(0)$ als arithmetisches Mittel:

$$V(0) = \sum_{k=1}^R V(0, k)$$

Bemerkung 5.2

Für die aufeinanderfolgenden Simulationen während des rückwärts-rekursiven Algorithmus werden für die Berechnung eines Kursunterschieds zwischen zwei festen Zeitpunkten \hat{t} und $\hat{t} + 1$ für jeden Pfad jeweils die selben Zufallszahlen verwendet wie in den Rekursionsschritten zuvor. Es muss also pro Zeitschritt für jeden Pfad jeweils nur eine neue Zufallszahl gezogen werden, welche die Kursentwicklung vom aktuellen Zeitpunkt des Rückwärts-Algorithmus zur nachfolgenden Periode bestimmt.

Welcher Wert für $\delta > 0$ bei der Implementierung (GrVoWe.m) verwendet wird und welche Probleme aufgrund von numerischen und verfahrensbedingten Ungenauigkeiten bei der Anwendung des beschriebenen Algorithmus zur Bestimmung der kritischen Ausübungsgrenze auftreten können, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

5.3 Kritische Ausübungsgrenze und Hinweise zur Implementierung

Da die kritische Ausübungsgrenze eine optimale Ausübungsstrategie vorgibt, hat die Genauigkeit ihrer Approximation maßgeblichen Anteil an der Schätzung des Optionswerts. Aus diesem Grund wird das Vorgehen zur Bestimmung der kritischen Ausübungswerte nochmals explizit anhand eines Beispiels veranschaulicht. Gegeben sei ein amerikanischer Put ($T = 0.5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = S(0) = 100$). Der Einfachheit halber betrachten wir die Methode von GVW mit nur $N = 2$ Zeitschritten. Auf Basis von $M = 6000$ Kurspfaden soll ein kritischer Ausübungswert S^* zum einzigen vorzeitigen Ausübungszeitpunkt² $t = \frac{T}{2}$ bestimmt werden. Hierzu werden zunächst, wie im Algorithmus 5.1 vorgegeben - unter der Voraussetzung, dass der aktuelle Kurswert S dem Ausübungspreis $K = 100$ gleicht - der Fortführungswert und der innere Wert der Option berechnet. Wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist, unterscheiden sich die betreffenden Werte für $S = 100$ noch deutlich. Man wiederholt nun dieses Vorgehen für $S \in \{96, 92, 88, 84\}$. Der Wert $\delta > 0$ aus Algorithmus 5.1 wird also gleich 4 gesetzt. Auf Grundlage zahlreicher numerischer Simulationen hat sich die Wahl von $\delta = 4$ hinsichtlich der Optionen, die in dieser Arbeit bewertet werden, als sinnvoll herausgestellt.

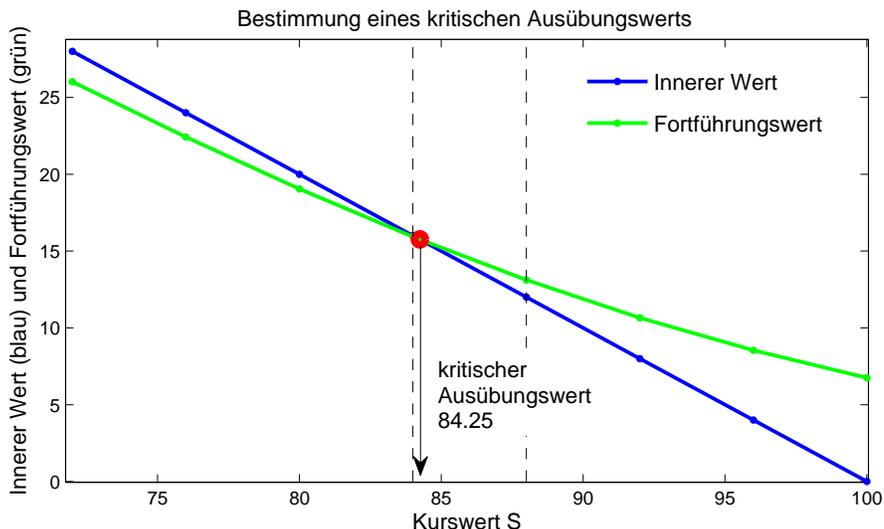


Abbildung 5.1: Bestimmung eines kritischen Ausübungswerts

²Beachte: Hier gibt t ausnahmsweise einmal nicht den Index des Zeitschritts, sondern direkt den Zeitpunkt $\frac{T}{2} = 0.25$ an.

Für einen vorgegebenen Kurswert $S = 88$ liegt der Fortführungswert noch oberhalb des inneren Werts der Option, für $S = 84$ jedoch bereits leicht darunter (d.h. die Funktion f aus Algorithmus 5.1 wechselt in diesem Bereich ihr Vorzeichen). Durch lineare Interpolation erhält man letztendlich den Schnittpunkt der Graphen für den Fortführungswert und den inneren Wert (bzw. die Nullstelle der Funktion f). Der daraus resultierende Kurswert $S = 84.25$ ist der gesuchte kritische Ausübungswert.

Für eine größere Anzahl an verwendeten Zeitperioden geht man zu jedem vorzeitigen Ausübungszeitpunkt analog vor. Es ist dabei zu beobachten, dass die Unterschiede der Fortführungswerte und der inneren Werte der Option bei einer steigenden Anzahl an diskreten Zeitpunkten N immer feiner werden, was an der Abnahme der Zeitschrittlänge $\Delta t = \frac{T}{N}$ liegt. Da die Fortführungswerte jeweils nicht exakt, sondern auf Grundlage der Monte-Carlo-Methode bestimmt werden, kann es somit dazu kommen, dass die Kurve für die Fortführungswerte nicht mehr streng monoton verläuft und folglich in der Funktion f aus Algorithmus 5.1 mehrere Nullstellen auftreten. Insbesondere ist die Funktion f nicht einmal stetig, wodurch die Anwendung von herkömmlichen numerischen Nullstellenverfahren³ problematisch wird. Wenn man zur Bestimmung der vorzeitigen Ausübungswerte eine ausreichend große Anzahl von Kurspfaden M verwendet, so liegen mögliche Nullstellen jedoch sehr nahe beieinander. Bei der Programmierung (GrVoWe.m) wird stets die erste gefundene Nullstelle zur Bestimmung des kritischen Ausübungswerts verwendet. Da - wie in [6] erwähnt und anhand von Abbildungen in den nachfolgenden Abschnitten ersichtlich - kleine Fehler in der Approximation der kritischen Ausübungsgrenze lediglich einen geringen Einfluss auf die letztendliche Optionswertschätzung haben, ist diesem Vorgehen nichts entgegenzusetzen.

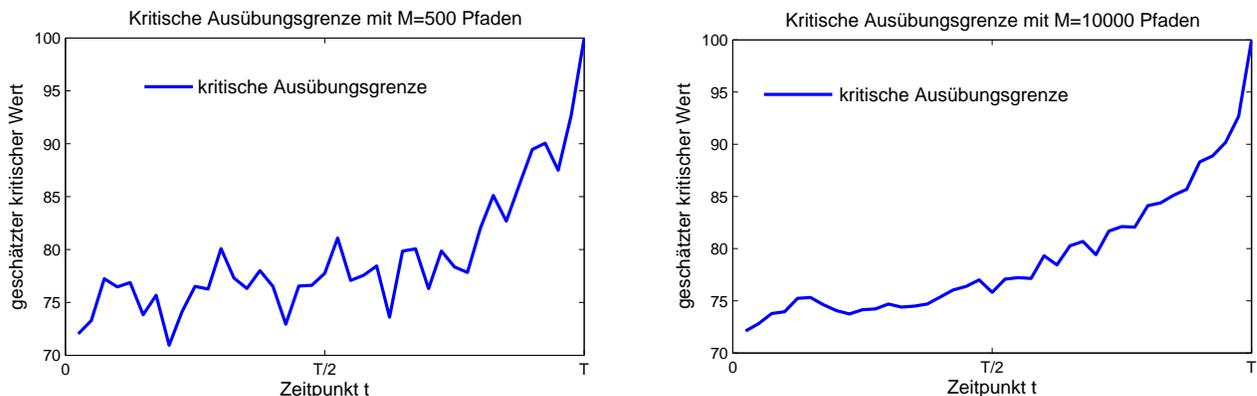


Abbildung 5.2: Kritische Ausübungsgrenze für $M=500$ (links) und für $M=10000$ (rechts)

³Darunter fallen z.B. das Bisektions- oder das Newtonverfahren.

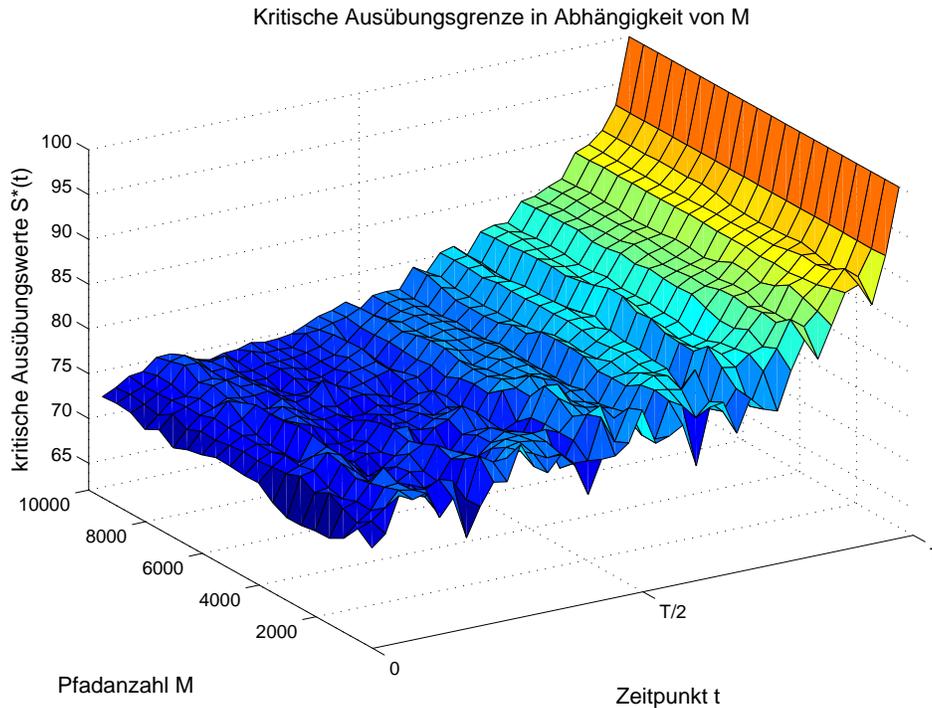


Abbildung 5.3: Kritische Ausübungsgrenze in Abhängigkeit von M

Aufgrund der numerischen Fehler bei der Approximation des Fortführungswerts kann es vorkommen, dass ein kritischer Wert $S^*(\tilde{t})$ größer ist als $S^*(\tilde{t}+1)$. Dies wird anhand der Abbildung 5.3 deutlich. Zu sehen sind die kritischen Ausübungsgrenzen für den zuvor betrachteten amerikanischen Put mit $N = 40$ Zeitschritten und variierender Pfadanzahl M . In Abbildung 5.2 sind die Querschnitte zu den zugehörigen festen Pfadanzahlen $M = 500$ und $M = 10000$ dargestellt. Man kann erkennen, dass für wachsendes M die theoretisch exponentiell steigende kritische Ausübungsgrenze immer besser approximiert wird.

Verwendet man - wie in Algorithmus 5.1 praktiziert - zu jedem Zeitpunkt $\tilde{t} \in \{1, \dots, N-1\}$ jeweils den kritischen Ausübungswert der nachfolgenden Periode $S^*(\tilde{t}+1)$ als obere Schranke für die Suche nach einem kritischen Ausübungswert $S^*(\tilde{t})$, so kann es offensichtlich dazu kommen, dass man den gesuchten Wert $S^*(\tilde{t})$ bei der Nullstellensuche der Funktion f nicht berücksichtigt. Um dies zu umgehen, wird bei der Programmierung des Algorithmus zu einem Zeitpunkt \tilde{t} nicht $S^*(\tilde{t}+1)$, sondern jeweils ein etwas größerer Wert⁴ als obere Schranke für den gesuchten kritischen Wert $S^*(t)$ verwendet. Obendrein wird darauf geachtet, dass ein kritischer

⁴In der Implementierung (GrVoWe.m) ist das jeweils ein Wert zwischen $S^*(\tilde{t}+1) + 4$ und $S^*(\tilde{t}+1) + 8$. Diese Werte wurden auf Basis von zahlreichen Simulationen für die in dieser Arbeit zu bewertenden Optionen als geeignet befunden.

Wert $S^*(\tilde{t} + 1)$, der große Abweichungen nach unten hin aufweist, bei der Festlegung einer oberen Schranke für die Nullstellensuche im nächsten Rekursionsschritt zum Zeitpunkt \tilde{t} ignoriert wird. Die genaue Umsetzung wird anhand des Quellcodes (GrVoWe.m), der mit ausführlichen Kommentaren versehen ist, deutlich.

Bemerkung 5.3

Bei der Implementierung des Algorithmus werden sowohl für die Kurssimulationen der M Pfade zur Berechnung einer optimalen Ausübungsstrategie als auch für die Simulationen der R Kurspfade zur letztendlichen Schätzung des Optionswerts antithetische Zufallszahlen verwendet.

5.4 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Parameter

Zur Durchführung einer Optionsbewertung mit der Methode von GVW sind im Voraus die Pfadanzahl M , die Anzahl an Zeitschritten N und die Anzahl an Kurspfaden R festzulegen. Wir betrachten hier, wie im Kapitel zuvor beim Bündelalgorithmus von Tilley, inwieweit die Wahl der einzelnen Parameter das Konvergenzverhalten der Methode beeinflusst.

Bemerkung 5.4

Bei der Methode von GVW läuft die Bestimmung einer optimalen Ausübungsstrategie unabhängig von der letztendlichen Schätzung des Optionswerts ab. Sobald am Ende des Algorithmus einer der R simulierten Kurspfade die zuvor berechnete Ausübungsgrenze unterschreitet, wird er ausgeübt, ohne dabei zu wissen, wie er sich zukünftig entwickeln wird. Da hierbei also im Gegensatz zum Bündelalgorithmus keine Informationen aus der Zukunft einfließen, fällt der Effekt einer möglichen Überschätzung des wahren Optionswerts weg.

Fehler bei der Approximation der kritischen Ausübungsgrenze führen zu einer Unterschätzung des wahren Optionspreises, weil man folglich keiner optimalen Ausübungsstrategie nachgeht.

Werden zu wenig diskrete Ausübungszeitpunkte N betrachtet, so ignoriert man womöglich wiederum bessere Ausübungszeitpunkte, die zwischen den gewählten diskreten Zeitpunkten liegen. Folglich wird der wahre Optionspreis ebenfalls unterschätzt.

Gemäß Bemerkung 5.4 müssten die mit dem Algorithmus von GVW geschätzten Optionswer-

te mit wachsender Anzahl an verwendeten Zeitpunkten N und steigender Pfadanzahl M von unten an den wahren Optionswert konvergieren. Dass dies tatsächlich so ist, wird anhand der Abbildungen 5.4 und 5.5 veranschaulicht.

Dabei wird wiederum jeweils eine amerikanische Put-Option betrachtet ($T = 0.5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $K = S(0) = 100$). Zur Erstellung der nachfolgenden Grafiken wird die Pfadanzahl R gleich 40000 gesetzt. In den Abbildungen stellen die geschätzten Optionswerte jeweils das arithmetische Mittel von 100 durchgeführten Schätzungen dar.

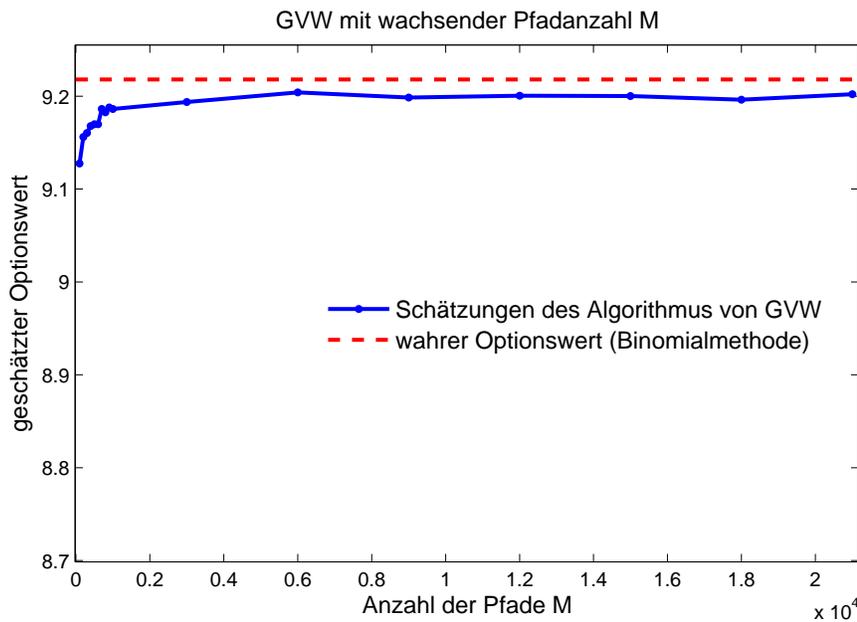


Abbildung 5.4: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Pfadanzahl M

Betrachtet man Abbildung 5.4, zu deren Erstellung $N = 40$ Zeitschritte⁵ verwendet werden, so fällt auf, dass bereits ab einer Pfadanzahl von $M = 1000$ ein guter Näherungswert für den wahren Optionswert erreicht ist. Mit einer weiter ansteigenden Anzahl an Pfaden zur Bestimmung der Ausübungsgrenze verbessert sich die Genauigkeit der Schätzungen nicht wesentlich. Dadurch wird ersichtlich, dass die zuvor erwähnten numerischen Fehler bei der Approximation der Ausübungsgrenze, die für kleine Werte von M doch deutlich zu erkennen waren, keine große Auswirkung auf die Schätzung des Optionspreises haben. Es wird als angemessen empfunden, für alle folgenden Anwendungen der Methode von GVW die Pfadanzahl $M = 6000$ zu wählen.

⁵Die Wahl fällt insbesondere deswegen auf $N = 40$, weil beim Bündelalgorithmus die selbe Anzahl an Zeitschritten verwendet wird und später ein möglichst "fairer" Vergleich zwischen den beiden Methoden gezogen werden soll.

Abbildung 5.5 zeigt die erwartete Konvergenz von unten gegen den wahren Optionswert bei einer steigenden Anzahl an verwendeten diskreten Ausübungszeitpunkten. Für $N = 1$ entspricht der einzige Ausübungszeitpunkt dem Verfallstag T und somit erhalten wir, wie zuvor schon bei der Bündelmethode erwähnt, nahezu exakt den Wert eines europäischen Puts von 8.701.

Auch hier erscheint uns hinsichtlich weiterer Optionsbewertungen im Rahmen dieser Arbeit - analog zur Bündelmethode - eine Wahl von $N = 40$ Zeitschritten als gerechtfertigt.

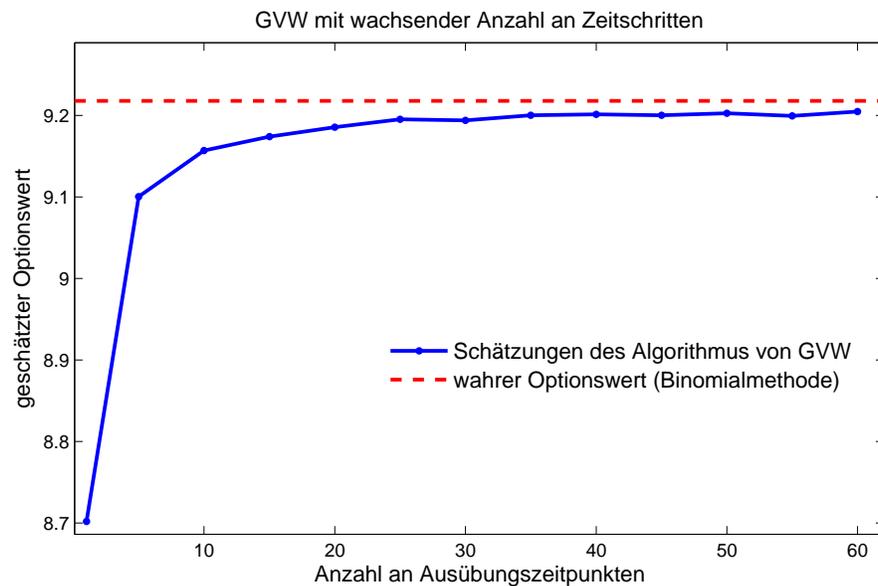


Abbildung 5.5: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Anzahl an Zeitschritten N

Bemerkung 5.5

Die Pfadanzahl R zur letztendlichen Bestimmung des Optionspreises hat keinerlei Einfluss auf die zu approximierende Ausübungsstrategie. Eine zu kleine Anzahl an Pfaden R führt lediglich dazu, dass die während einer Versuchsreihe geschätzten einzelnen Optionspreise breiter verstreut um den erwarteten Optionswert liegen, wodurch die Standardabweichung steigt. Um später einen möglichst fairen Vergleich zur Methode von Tilley herstellen zu können, verwenden wir im weiteren Verlauf der Arbeit ebenfalls eine Anzahl von $R = 40000$ Kurspfaden.

5.5 Auswertung anhand eines Beispiels

Nachdem in den letzten Abschnitten auf Basis von durchgeführten Simulationen geeignete Werte für die zu wählenden Parameter hergeleitet wurden ($M = 6000$, $N = 40$, $R = 40000$), wollen wir nun eine amerikanische Put-Option mit Fälligkeitsdatum $T = 0.5$ und einem aktuellen Kurswert von $S(0) = 100 = K$ ausführlich bewerten. Die Volatilität des Aktienkurses beträgt dabei $\sigma = 0.4$ und der risikofreie Marktzins liegt bei $r = 0.1$.

Es werden 1000 unabhängige Schätzungen $V_1, V_2, \dots, V_{1000}$ unter Verwendung des Algorithmus von GVW durchgeführt und die erhaltenen Ergebnisse in einem Histogramm (siehe Abbildung 5.6) veranschaulicht. Wie schon bei der Auswertung des Bündelalgorithmus im Kapitel zuvor erkennt man, dass die erhaltenen Werte normalverteilt sind. Der erwartete Optionswert von 9.199 ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der einzelnen Schätzungen. Er liegt lediglich 0.21% unterhalb des angenommenen wahren Optionswerts von 9.218. Die Standardabweichung der einzelnen Schätzungen $V_1, V_2, \dots, V_{1000}$ beträgt 0.0287 und kann gemäß der Formel aus Abschnitt 4.4 bestimmt werden.

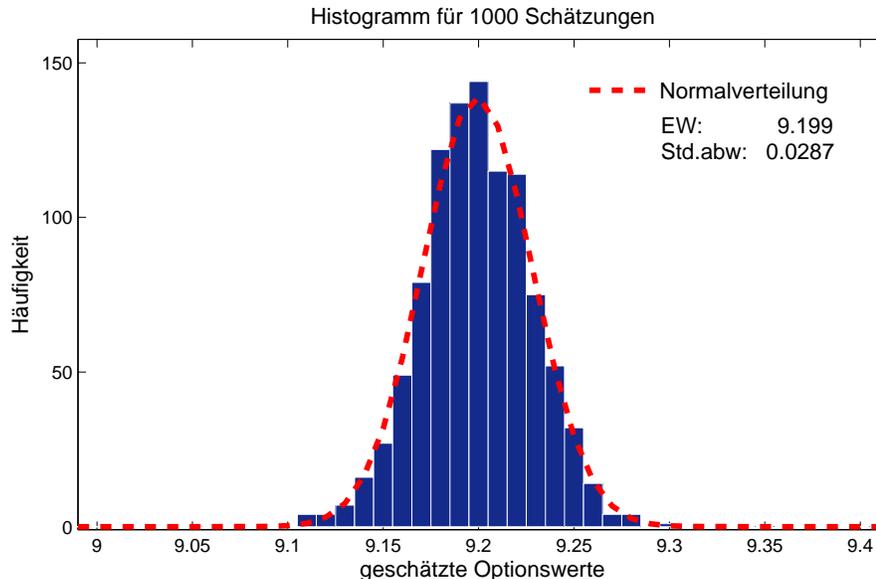


Abbildung 5.6: Histogramm (Algorithmus mit antithetischen Zufallsvariablen)

Um auch hier den Effekt einer Varianzreduktion (siehe Abschnitt 3.3) zu verdeutlichen, wird das gleiche Vorgehen für eine Variante (GrVoWe_ohne_var_red.m) des Algorithmus von GVW wiederholt, bei der zur Simulation aller verwendeter Kurspfade auf antithetische Zufallszahlen verzichtet wird. Daraus resultiert ein nahezu unveränderter erwarteter Optionswert von 9.200, jedoch eine fast doppelt so hohe Standardabweichung von 0.0535. Ein Vergleich zwischen den Abbildungen 5.6 und 5.7 macht auch hier deutlich, was die Verwendung von antithetischen Zufallszahlen bei den Kurssimulationen bewirkt.

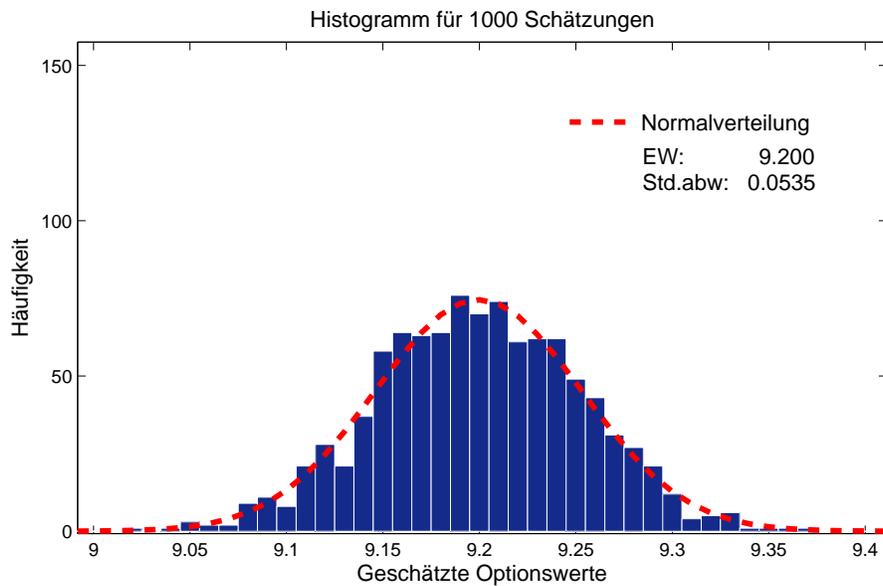


Abbildung 5.7: Histogramm (Algorithmus ohne antithetische Zufallsvariablen)

Kapitel 6

Vergleich der beiden Methoden und Schlussfazit

In den vorangegangenen Kapiteln sind die Methoden von Tilley und von Grant, Vora und Weeks umfangreich erörtert worden. Wir haben die Verfahren im Bezug auf eine ausgewählte Put-Option hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens untersucht und geeignete Werte für die zu wählenden Parameter hergeleitet. Für die Bündelmethode verwenden wir demnach $Q = 200$ Bündel zu je $P = 200$ Pfaden und für den Algorithmus von Grant, Vora und Weeks $M = 6000$ Pfade zur Approximation der Ausübungsgrenze und $R = 40000$ Pfade zur letztendlichen Schätzung des Optionspreises. Wir wollen nun die Verfahren unter verschiedenen Marktbedingungen testen und miteinander vergleichen. Dabei kommt es uns sowohl auf die Genauigkeit bezüglich des wahren Optionswerts als auch auf die aufgewendete Rechnerzeit an.

Um ein repräsentatives Ergebnis zu erhalten, werden zur Bewertung einer Option jeweils 1000 unabhängige Schätzungen durchgeführt und der - durch das arithmetische Mittel berechnete - erwartete Optionswert in eine der nachfolgenden Tabellen in die entsprechende Spalte mit der Bezeichnung "Optionswert" eingetragen. Zusätzlich wird jeweils die Laufzeit der Algorithmen für die 1000 Schätzungen gemessen. Die daraus resultierende, durchschnittliche Dauer pro Schätzung in Sekunden ist in der entsprechenden Spalte "Ø Zeit in [s]" zu finden.

Der "wahre Optionswert", den man bei Anwendung der Binomialmethode mit 2400 Zeitschritten pro Jahr erhält, ist in den Tabellen jeweils rot gekennzeichnet und befindet sich direkt unter den geschätzten Optionswerten.

Wir betrachten im Folgenden eindimensionale amerikanische Put-Optionen mit einer Laufzeit von einem halben Jahr ($T = 0.5$) bzw. mit einer Laufzeit von einem Jahr ($T = 1$). Wie in den vorherigen Kapiteln festgelegt, verwenden wir für beide Algorithmen zur Bewertung einer Option mit halbjähriger Laufzeit $N = 40$ Zeitschritte. Für $T = 1$ wird es als sinnvoll erachtet, die Anzahl an diskreten Zeitpunkten auf $N = 80$ zu verdoppeln, um die Länge $\Delta t = \frac{T}{N}$ der

einzelnen Zeitschritte nicht zu verändern.

Wir unterstellen allen folgenden Szenarien einen zeitlich konstanten, risikofreien Marktzins von $r = 0.1$.

In Tabelle 6.1 gehen wir davon aus, dass der Option ein Basiswert mit Volatilität $\sigma = 0.4$ und Anfangswert $S(0) = 100$ zugrunde liegt. Wir betrachten den amerikanischen Put zu drei unterschiedlichen Ausübungspreisen $K \in \{90, 100, 110\}$. Wie man anhand der eingetragenen absoluten Werte sehen kann, liefern beide Verfahren durchwegs sehr gute Näherungswerte. Die durch die Methode von Grant, Vora und Weeks geschätzten Optionswerte liegen allesamt ungefähr 0.20% unter den entsprechenden wahren Optionswerten. Die Abweichungen der durch den Bündelalgorithmus von Tilley bestimmten Optionspreise vom wahren Wert schwanken zwischen 0.02% (sowohl für $K = 100$ und $T = 0.5$ als auch für $K = 110$ und $T = 1$) und 0.12% (für $K = 90$ und $T = 0.5$). Damit liefert die Methode von Tilley in allen untersuchten Fällen eine genauere Approximation des wahren Optionswerts.

Auffallend ist, dass der Algorithmus von GVW für $T = 0.5$ für alle Ausübungspreise mit einer benötigten Rechnerzeit von etwa 0.5 Sekunden pro Schätzung mehr als doppelt so schnell ist wie die Bündelmethode, die jeweils ungefähr 1.2 Sekunden in Anspruch nimmt. Bei einer Optionslaufzeit von einem Jahr ($T = 1$) ist der zeitliche Unterschied relativ gesehen nicht mehr ganz so groß, denn die aufgewendete Rechnerzeit des Bündelalgorithmus hat sich im Vergleich zu $T = 0.5$ lediglich verdoppelt, wohingegen bei der Methode von GVW eine Verdreifachung zu registrieren ist. Mögliche Gründe dafür werden in Bemerkung 6.1 genauer erläutert. Trotzdem nimmt das Verfahren von GVW auch bei einer Optionslaufzeit von einem Jahr noch deutlich weniger Zeit zur Bestimmung der Optionswerte in Anspruch.

$S(0) = 100$ $r = 0.1$ $\sigma = 0.4$		$T = 0.5$		$T = 1$	
		Ø Zeit in [s]	Optionswert	Ø Zeit in [s]	Optionswert
$K = 90$	Tilley:	1.185	4.992	2.405	7.552
	GVW:	0.517	4.987	1.454	7.545
	Binomial:		4.998		7.558
$K = 100$	Tilley:	1.203	9.216	2.440	11.955
	GVW:	0.504	9.199	1.413	11.937
	Binomial:		9.218		11.958
$K = 110$	Tilley:	1.240	14.962	2.483	17.500
	GVW:	0.484	14.938	1.372	17.472
	Binomial:		14.968		17.504

Tabelle 6.1: Vergleich anhand eines amerikanischen Puts mit $\sigma = 0.4$ und $S(0) = 100$

Um zu sehen wie sich die geschätzten Optionswerte der Methoden bei variierender Volatilität verhalten, wird nun unter ansonsten unveränderten Bedingungen $\sigma = 0.2$ gesetzt. In Tabelle 6.2 sind die zugehörigen Ergebnisse zu sehen. Bei einer Optionslaufzeit $T = 0.5$ und einem Ausübungspreis $K = 90$ bestimmen beide Verfahren mit jeweils 0.984 einen Optionswert, der 0.61% unterhalb des wahren Optionspreises von 0.990 liegt. Bei $T = 1$ und $K = 90$ wird mit der Methode von GVW sogar erstmals ein genauere Optionspreis geschätzt als mit dem Bündelalgorithmus. Die Abweichungen der geschätzten Optionswerte reichen bei der Methode von Tilley von 0.12% (für $K = 100$ und $T = 1$) bis 0.93% (für $K = 90$ und $T = 1$), beim Algorithmus von GVW von 0.34% (für $K = 110$ und $T = 0.5$) bis 0.71% (für $K = 100$ und $T = 0.5$).

Beide Verfahren liefern auch bei veränderter Volatilität gute Approximationen, die weniger als 1% vom jeweils wahren Optionswert abweichen.

Die aufgewendeten Rechnerzeiten pro Schätzung gleichen jeweils ungefähr den entsprechenden Werten aus Tabelle 6.1 und damit stellt die Methode von Grant, Vora und Weeks auch hier den deutlich schnelleren Algorithmus dar.

$S(0) = 100$ $r = 0.1$ $\sigma = 0.2$		$T = 0.5$		$T = 1$	
		Ø Zeit in [s]	Optionswert	Ø Zeit in [s]	Optionswert
$K = 90$	Tilley:	1.160	0.984	2.373	1.701
	GVW:	0.531	0.984	1.566	1.708
	Binomial:		0.990		1.717
$K = 100$	Tilley:	1.202	3.911	2.464	4.810
	GVW:	0.519	3.890	1.494	4.798
	Binomial:		3.918		4.816
$K = 110$	Tilley:	1.279	10.274	2.573	10.703
	GVW:	0.470	10.262	1.424	10.678
	Binomial:		10.297		10.719

Tabelle 6.2: Vergleich anhand eines amerikanischen Puts mit $\sigma = 0.2$ und $S(0) = 100$

In einem abschließenden Vergleich werden die geschätzten Optionswerte bei einem veränderten Anfangswert des Basiswerts ($S(0) = 50$) miteinander verglichen. Die Ausübungspreise $K \in \{40, 50, 60\}$ sind entsprechend angeglichen worden. Die Volatilität sei nun wieder $\sigma = 0.4$. In Tabelle 6.3 ist zu erkennen, dass sich die erhaltenen Schätzungen der beiden Methoden für einen Ausübungspreis $K < S(0)$ wiederum nahezu gleichen. Für größere Ausübungspreise liegen abermals die vom Bündelalgorithmus bestimmten Optionspreise näher am wahren Optionswert.

Dabei weichen die geschätzten Werte beider Verfahren in allen Fällen weniger als 0.5% vom wahren Optionswert ab.

Die in diesem Zusammenhang benötigten Rechnerzeiten der Algorithmen gleichen wieder jeweils in etwa denen aus den vorangegangenen Tabellen.

$S(0) = 50$ $r = 0.1$ $\sigma = 0.4$		$T = 0.5$		$T = 1$	
		Ø Zeit in [s]	Optionswert	Ø Zeit in [s]	Optionswert
$K = 40$	Tilley:	1.163	1.131	2.374	2.143
	GVW:	0.543	1.129	1.582	2.144
	Binomial:		1.134		2.150
$K = 50$	Tilley:	1.220	4.607	2.443	5.976
	GVW:	0.517	4.597	1.529	5.964
	Binomial:		4.609		5.979
$K = 60$	Tilley:	1.257	11.062	2.530	12.072
	GVW:	0.484	11.042	1.463	12.050
	Binomial:		11.066		12.074

Tabelle 6.3: Vergleich anhand eines amerikanischen Puts mit $\sigma = 0.4$ und $S(0) = 50$

Bemerkung 6.1

Hinsichtlich der benötigten Rechnerzeiten fällt anhand der drei Tabellen auf, dass beim Algorithmus von GVW jeweils mit steigendem Ausübungspreis eine etwas geringere Zeit für die Bestimmung der Optionswerte aufgewendet wird. Das führen wir darauf zurück, dass sowohl die Pfade M als auch die Pfade R hierbei jeweils nur so weit simuliert werden, bis sie das erste mal die kritische Ausübungsgrenze unterschreiten. Bei $K = 60$ ist dies tendenziell früher der Fall als bei $K = 40$, was die geringe Zeitersparnis erklärt.

Im Gegensatz dazu steigen die Rechnerzeiten beim Bündelalgorithmus bei Erhöhung des Ausübungspreises K leicht an. Das liegt daran, dass die Kurspfade hier komplett vor dem Algorithmus simuliert werden und somit unabhängig von K sind. Gleichzeitig werden bei einem höheren Ausübungspreis tendenziell mehr Pfade pro Zeitschritt ausgeübt, wodurch im Bündelalgorithmus mehr (positive) innere Optionswerte berechnet werden müssen, was schließlich zu einem

leichten Anstieg der Rechnerzeit führt.

Es ist zusätzlich zu beobachten, dass die jeweils aufgewendete Zeit zur Durchführung der Methode von Tilley bei einer Erhöhung der Zeitschritte von $N = 40$ (für $T = 0.5$) auf $N = 80$ (für $T = 1$) ebenfalls ungefähr verdoppelt wird. Das liegt daran, dass die Berechnungen, die jeweils in einem Schritt des rückwärts-rekursiven Algorithmus ablaufen, unabhängig von der Gesamtanzahl an verwendeten Zeitschritten sind. Bei der Methode von GVW hingegen werden zu jedem Rekursionsschritt des Rückwärts-Algorithmus M Pfade simuliert, die - falls sie die zuvor bestimmten kritischen Ausübungswerte nicht unterschreiten - über die gesamte restliche Laufzeit der Option simuliert werden. Das bedeutet, dass eine Verdoppelung an Zeitschritten zusätzlich einen höheren Rechenaufwand, in Form von Pfadsimulationen, in einzelnen Rekursionsschritten nach sich zieht. Dadurch ist auch zu erklären, warum sich die benötigte Rechnerzeit beim Algorithmus von GVW für $T = 1$ im Vergleich zu $T = 0.5$ jeweils nahezu verdreifacht.

Wir haben anhand der durchgeführten Auswertungen gesehen, dass es durchaus möglich ist, auf Grundlage der Monte-Carlo-Simulation den Wert einer amerikanischen Put-Option zu bestimmen. Selbst unter variierenden Einflussfaktoren haben sowohl der Bündelalgorithmus von Tilley als auch die Methode von Grant, Vora und Weeks sehr genaue Approximationen des wahren Optionswerts geliefert. Bemerkenswert ist, dass während der gesamten hier durchgeführten Testreihe alle geschätzten Optionswerte nicht einmal 1% vom jeweils entsprechenden wahren Optionswert abgewichen sind. Die Tatsache, dass der Bündelalgorithmus tendenziell etwas näher am wahren Optionspreis liegt, wird darauf zurückgeführt, dass, wie in Kapitel 4 erwähnt, bei der Methode von Tilley zur Approximation der Ausübungsstrategie Informationen aus der Zukunft einfließen, wodurch die geschätzten Werte leicht über denen des Algorithmus von Grant, Vora und Weeks liegen müssten. Wie anhand der Tabellen ersichtlich, ist die hier implementierte Methode von Grant, Vora und Weeks unter der getroffenen Wahl der Parameter deutlich schneller als der Bündelalgorithmus und somit erscheint sie uns - unter einer gewissen Toleranz hinsichtlich der Genauigkeit - für die Optionsbewertung vorteilhaft.

Im Laufe der vorliegenden Arbeit, ist bereits angesprochen worden, dass die Verwendung der Monte-Carlo-Methode zur Bewertung von amerikanischen Optionen gegenüber herkömmlichen Verfahren erst dann tendenziell effektiver wird, wenn mehr als zwei stochastische Variablen vorhanden sind. Die beschriebenen Verfahren können ohne Probleme verwendet werden, um auch komplexere stochastische Kursmodelle als die geometrische Brown'sche Bewegung zu be-

rücksichtigen, insofern sich dafür zeitdiskrete Darstellungen finden. Dazu verwendet man im Algorithmus jeweils zur Simulation der einzelnen Pfade den entsprechenden Kursprozess. In [6, S. 221-223] ist ein Beispiel für die Bewertung eines amerikanischen Puts auf Grundlage eines sogenannten “jump-diffusion”-Prozesses angegeben. Dabei wird eine zusätzliche stochastische Variable einbezogen, durch die mögliche Kurssprünge des Basiswerts modelliert werden.

Die Erweiterungen der zwei betrachteten Methoden auf höherdimensionale Optionen gestalten sich jedoch schwierig und sind alles andere als offensichtlich. In [6] und [5] wird davon ausgegangen, dass dabei die Umsetzung des Bündelalgorithmus größere Probleme bereitet, denn es ist unklar, wie genau die Einteilung in verschiedene Bündel in höheren Dimensionen aussehen soll. Nichtsdestotrotz werden unter anderem in [5, S. 9-10 und S. 13] sowohl für die Methode von Tilley als auch für das Verfahren von Grant, Vora und Weeks nötige Modifikationen vorgestellt, um spezielle höherdimensionale amerikanische Optionen, die sich auf das Maximum von n , $n \in \mathbb{N}$, Basiswerten beziehen, zu bewerten.

Eine detaillierte Betrachtung von mehrdimensionalen amerikanischen Optionen und Ansätze zu deren Bewertung mittels der Monte-Carlo-Simulation würden jedoch ein eigenes Thema für sich darstellen.

Anhang A

Inhalt der CD-ROM

Datei	Beschreibung
main_GrVoWe_histogramm.m	Programm zur Erstellung der Histogramme der Abbildungen 5.6 und 5.7
GrVoWe.m	Implementierung des Algorithmus von Grant, Vora und Weeks (mit antithetischen Zufallsvariablen für die Pfadsimulationen)
GrVoWe_grenze.m	Berechnet die kritische Ausübungsgrenze für die Abbildungen 5.2 und 5.3
GrVoWe_ohne_var_red.m	Implementierung des Algorithmus von GVW ohne Verwendung von antithetischen Zufallszahlen für die Erzeugung der Kurspfade
log_qr.m	Programm zur Berechnung des Bündelparameters $\alpha = \frac{\log Q}{\log R}$
main_abb_2_2.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 2.2
main_geomBB.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 2.3: Simulation von Kurspfaden auf Grundlage der geometrischen Brown'schen Bewegung
main_GrVoW_abb_5_1.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 5.1
main_GrVoWe_grenze.cpp	Programm zur Erstellung der kritischen Ausübungsgrenzen für die Abbildungen 5.2 und 5.3 unter Verwendung von GrVoWe_grenze.m

Datei	Beschreibung
main_GrVoWe_histogramm.m	Programm zur Erstellung der Histogramme der Abbildungen 5.6 und 5.7
main_GrVoWe_pfad_M.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 5.4
main_GrVoWe_zeit.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 5.5
main_tilley_alpha.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 4.2
main_tilley_histogramm.m	Programm zur Erstellung der Histogramme der Abbildungen 4.5 und 4.6
main_tilley_pfadanzahl.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 4.3
main_tilley_zeit.m	Programm zur Erstellung von Abbildung 4.4
naive_methode.m	Implementierung des ersten naiven Ansatzes zur Bewertung eines amerikanischen Puts (Algorithmus 3.5)
tilley.m	Implementierung des Bündelalgorithmus von Tilley (Algorithmus 4.1) unter Verwendung von antithetischen Zufallszahlen
tilley_ohne_scharfe_grenze.m	Implementierung der Variante des Bündelalgorithmus ohne eine scharfe Grenze (für Abbildung 4.2)
tilley_ohne_var_red.m	Implementierung des Bündelalgorithmus ohne antithetische Zufallszahlen

Die aufgelisteten Programme wurden allesamt in MATLAB geschrieben und befinden sich auf der beiliegenden CD-ROM im Ordner "Programme". Die Darstellung der erstellten Abbildungen wurden größtenteils im Nachhinein in MATLAB noch modifiziert. Des Weiteren ist auf der CD-ROM die vorliegende Arbeit im PDF-Format vorzufinden.

Literaturverzeichnis

- [1] Broadie M. and Glasserman P., *Pricing American-Style Securities Using Simulation*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.21, No.8/9, 1997, S.1323-1352
- [2] Broadie M. and Glasserman P., *A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options*, working paper, 1998
- [3] Carriere J.F., *Valuation of the Early-Exercise Price for Derivative Securities using Simulations and Splines*, Insurance: Mathematics and Economics, 19, 1996, S.19-30
- [4] Prof. Dr. Christmann A., *Skript zur Vorlesung Einführung in die Stochastik*, 2011
- [5] Fu M.C., Laprise S.B., Madan D.B., Su Y., Wu R., *Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches*, Journal of Computational Finance, Vol.4, No.3, Spring 2001, S.39-88
- [6] Grant D., Vora G. and Weeks D., *Simulation and the Early-Exercise Option Problem*, Journal of Financial Engineering, Vol.5, No.3, 1996, S.211-227
- [7] Prof. Dr. Grüne L., *Skript zur Vorlesung Numerische Methoden der Finanzmathematik*, 2013
- [8] Hull J.C., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 2nd edition, 1993
- [9] Hull J.C., *Optionen, Futures und andere Derivate*, Oldenbourg, 4. Auflage, 2001
- [10] Longstaff F.A., and Schwartz E.S., *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, The Review of Financial Studies, Vol.14, No.1, Spring 2001, S.113-148
- [11] Dr. Mußhoff O. und Dr. Hirschauer N., *Lösung komplexer Optionsbewertungsprobleme mittels stochastischer Simulation und dynamischer Programmierung*, WiSt - Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Heft 11, Nov. 2004, S.660-663.
- [12] Tilley J.A., *Valuing American Options in a Path Simulation Model*, Transactions of the Society of Actuaries, 45, 1993, S.83-104

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Diese Arbeit lag in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde zur Erlangung eines akademischen Grades vor.

Bayreuth, den 3. Dezember 2013

(Christian Weber)