

**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

**Suboptimalitätsabschätzungen für die
Ökonomische Modellprädiktive
Regelung**

Masterarbeit

am

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Lars Grüne
Fakultät NW II
Universität Bayreuth

von

Anastasia Panin

Vorgelegt am 31. Januar 2014

Betreuer: Prof. Dr. Lars Grüne

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Inhalt und Aufbau dieser Arbeit	4
2	Grundlagen der Thematik dieser Arbeit	7
2.1	Grundlagen der Modellprädiktiven Regelung	8
2.1.1	Kosten der Standard MPC	19
2.1.2	Kosten der Ökonomischen MPC	20
2.1.3	Prinzip der dynamischen Programmierung	22
2.2	Grundlagen der Suboptimalitätstheorie	24
2.2.1	Motivation und Idee	24
2.3	Dissipativität und Vergleichsfunktionen	27
3	Stabilität der Ökonomischen MPC	33
3.1	Grundlagen der Stabilitätstheorie	34
3.2	Stabilitätssätze für endlichen Horizont mit Endbeschränkungen	45
3.2.1	Gleichgewichtsendpunktbedingung	46
3.2.2	Endkosten und Endregion	53
3.3	Stabilitätssatz für unendlichen Horizont	61
4	Turnpike Eigenschaft	77
4.1	Beispiel zur Turnpike Eigenschaft	79
4.2	Definition der Turnpike Eigenschaft	87
4.3	Sätze zur Turnpike Eigenschaft	90
4.3.1	Turnpike Eigenschaft für zulässige Trajektorien	91
4.3.2	Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien	95
5	Abschätzung der optimalen Wertefunktion	99
5.1	Annahmen und Hilfslemma	100
5.2	Sätze zur Abschätzung der optimalen Wertefunktion	111
5.2.1	Abschätzung für endlichen Horizont ohne Endbeschränkungen	111
5.2.2	Abschätzung für unendlichen Horizont	115

6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen	119
6.1 Suboptimalitätssatz für die Gleichgewichtsendpunktbedingung	120
6.2 Suboptimalitätssatz für Endkosten und Endregion	136
7 Fazit	141
Literaturverzeichnis	145
Programmverzeichnis	147
Erklärung	149

Kapitel 1

Einführung

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Herleitung von Suboptimalitätsschranken für Problemstellungen aus der Modellprädiktiven Regelung mit Ökonomischen Kosten. Dabei betrachten wir nur ganz bestimmte Problemstellungen, und zwar die auf einem endlichen Horizont und mit zusätzlichen Endbeschränkungen. Im Speziellen werden wir Suboptimalitätssätze für zwei Formen der Endbeschränkungen aufstellen. Zum einen für die sogenannte Gleichgewichtsendpunktbedingung und zum anderen für Endbeschränkungen in Form von Endkosten und Endregion. Dabei werden wir die Performance des Regelgesetzes, welches aus der Modellprädiktiven Regelung hervorgeht, im Hinblick auf ein bestimmtes Performance-Maß untersuchen und feststellen, dass dieses Regelgesetz nicht optimal bezüglich dieses Maßes ist. Jedoch werden wir in der Lage sein zu zeigen, dass der Suboptimalitätsfehler dieses Regelgesetzes mit zunehmendem Horizont beliebig klein werden kann, woraus dann auch die beiden Suboptimalitätssätze dieser Arbeit hervorgehen werden.

Im folgenden Abschnitt soll genauer auf die Thematik dieser Arbeit eingegangen werden und vorgestellt werden, wie diese inhaltlich aufgebaut ist.

Wir werden in der gesamten Arbeit "Modellprädiktive Regelung" mit dem Kürzel "MPC" für den englischen Begriff "Model Predictive Control" bezeichnen.

1.1 Inhalt und Aufbau dieser Arbeit

Im Folgenden soll erklärt werden, wie die einzelnen Kapitel dieser Arbeit zusammenhängen, welche Themen sie behandeln und welcher Zielsetzung sie dienen. Insgesamt folgen auf dieses Kapitel noch sechs weitere, wobei das letzte siebte Kapitel keine eigenständige Thematik abdeckt, sondern lediglich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammenfasst und einen Ausblick liefert.

Das folgende zweite Kapitel soll ganz einfach alle nötigen Grundlagen vermitteln, die die Voraussetzung zum Verständnis dieser Arbeit bilden.

Als erstes wird thematisch die Modellprädiktive Regelung abgedeckt mit allen Definitionen und Notationen, welche für uns vonnöten sind. Dabei gehen wir vor allem auf den Unterschied zwischen Ökonomischen Kosten und "Standard"-Kosten (welche nach einem bestimmten Kriterium gewählt werden) ein. Auch wollen wir im Folgenden die MPC mit Ökonomischen Kosten als "Ökonomische MPC" und die MPC mit Standard-Kosten als "Standard MPC" bezeichnen.

Außerdem wird ein fundamentales Konzept vorgestellt, welches in fast jedem Satz dieser Arbeit Anwendung findet, nämlich die sogenannte Dissipativitätseigenschaft.

Zusätzlich soll das zweite Kapitel die Idee der Suboptimalitätstheorie für die Ökonomische MPC sowie die Motivation dieser Arbeit genauer erläutern.

Bevor wir die eigentliche Suboptimalitätstheorie für die Ökonomische MPC mit Endbeschränkungen behandeln können, müssen wir uns erst in den Kapiteln 3 - 5 mit anderen Themengebieten aus der Modellprädiktiven Regelung beschäftigen. Diese Themenbereiche sind zunächst einmal eigenständig und unabhängig von den Suboptimalitätssätzen zu betrachten. Jedoch liefert uns jedes dieser drei Kapitel wichtige Sätze und Erkenntnisse, ohne die die Herleitung der Suboptimalitätsschranken nicht möglich wäre.

Zudem sei angemerkt, dass die Kapitel 3 - 5 auch untereinander verwoben sind und sich sowohl auf Ergebnisse aus vorherigen Kapiteln als auch alle auf die Dissipativitätsannahme stützen. Genauer decken diese drei Kapitel die folgenden Themengebiete ab:

Kapitel 3 behandelt die Stabilitätstheorie von ausgewählten Ökonomischen MPC-Problemstellungen. Hierbei werden Ergebnisse sowohl für endlichen, als auch für unendlichen Horizont geliefert.

Kapitel 1 Einführung

Kapitel 4 untersucht die Turnpike Eigenschaft. Was diese Eigenschaft darstellt, wird dabei umfassend an einem Beispiel und einer Definition veranschaulicht und unter welchen Umständen diese Eigenschaft auftritt, wird in zwei Sätzen behandelt.

Kapitel 5 liefert hilfreiche Abschätzungen für die optimale Wertefunktion. Auch hier werden in den Sätzen sowohl der endliche, als auch der unendliche Horizont abgedeckt.

Danach folgt im sechsten Kapitel der Kern dieser Arbeit. Unter Verwendung aller bis dahin erbrachten Ergebnisse, können schließlich zwei Suboptimalitätssätze aufgestellt und bewiesen werden. Wie schon erwähnt, beziehen sich diese Sätze auf zwei Ökonomische MPC-Problemstellungen mit Endbeschränkungen: Das Problem mit Gleichgewichtsendpunktbedingung und das Problem mit Endkosten und Endregion.

Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 7, welches die Ergebnisse diese Arbeit reflektiert und zusammenfasst. Zusätzlich werden weiterführende Themen angesprochen, die im Umfang dieser Arbeit nicht behandelt werden konnten.

Kapitel 2

Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

In den folgenden drei Abschnitten werden alle notwendigen Grundlagen zum Verständnis dieser Arbeit vermittelt.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich dabei mit der elementaren Theorie der Modellprädiktiven Regelung (sowohl der Standard als auch Ökonomischen MPC).

Im zweiten Abschnitt wird dann die eigentliche Intention dieser Arbeit - nämlich die Suboptimalitätstheorie für die Ökonomische MPC aufzustellen - näher erläutert und motiviert.

Zum Schluss wird im dritten Abschnitt die Dissipativitätseigenschaft erklärt und interpretiert.

Dieses Kapitel ist dabei vor allem an [6] und [8] angelehnt.

2.1 Grundlagen der Modellprädiktiven Regelung

Die Modellprädiktive Regelung bezeichnet ein Verfahren zur Berechnung eines Regelgesetzes für ein nichtlineares Kontrollsystem. Dabei soll das Regelgesetz ein vorgegebenes Kostenkriterium optimieren.

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich zeitdiskrete Kontrollsysteme der Form

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Es bezeichnen $x(k) \in X$ den Zustand und $u(k) \in U$ den Kontrollwert zum aktuellen Zeitschritt k , wobei X und U metrische Räume sind. Den Zustand zum Folgezeitschritt $k+1$ berechnet dabei die Systemabbildung $f : X \times U \rightarrow X$, die als Argument den aktuellen Zustand und den aktuellen Kontrollwert besitzt. Wir kürzen die obere Schreibweise meist ab mit

$$x^+ = f(x, u) \tag{2.1}$$

und schreiben x und u für die aktuellen Werte von Zustand und Kontrolle und x^+ für den Folgewert des Zustands.

Bemerkung 2.1:

Man beachte, dass in den meisten Anwendungen Kontrollsysteme zeitkontinuierlich modelliert werden und das meist in Form von Differentialgleichungen. Doch auch darauf lässt sich das Konzept der MPC übertragen, indem man diese in eine zeitdiskrete Form transformiert. Wie man dies für Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad t \in \mathbb{R}$$

bewerkstelligen kann, wird im zweiten Kapitel von [6] ausgeführt.

□

Wie schon erwähnt soll ein Kostenkriterium optimiert werden. Dazu benötigen wir (Stufen-)Kosten der Form

$$l(x(k), u(k)), \tag{2.2}$$

die von Zustand und Kontrollwert zu jedem Zeitschritt $k \in \mathbb{N}_0$ abhängen. Welche Anforderungen diese Kosten eigentlich erfüllen müssen, wird erst in den nächsten zwei Unterabschnitten behandelt. Diese Forderungen

an die Kostenfunktion (2.2) charakterisieren den wesentlichen Unterschied zwischen Standard und Ökonomischer MPC.

Doch vorerst genügt es zu wissen, dass das MPC-Regelgesetz diese Stufenkosten (2.2) für alle kommenden Zeitschritte $k \in \mathbb{N}_0$ minimieren soll. Zusätzlich soll das Regelgesetz in Feedback-Form vorliegen, d.h. in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand $x \in X$. Wir bezeichnen das Feedback mit $\mu : X \rightarrow U$ und erhalten durch das Einsetzen des Feedbacks in (2.1) den geschlossenen Regelkreis

$$x^+ = f(x, \mu(x)) \quad (2.3)$$

für alle $x \in X$. Systemgleichung (2.1) wird dagegen oft als der offene Regelkreis betitelt.

Der MPC-Algorithmus basiert also auf einem Optimierungsproblem. Um dieses formulieren zu können, wollen wir erst die Zielfunktion des Optimierungsproblems vorstellen. Als Zielfunktion definieren wir die Summe der Kosten (2.2) über eine bestimmte Anzahl an zukünftigen Zeitschritten. Die Anzahl der Zeitschritte bezeichnen wir als Horizont, wobei dieser sowohl endlich als auch unendlich sein kann. Schließlich erhalten wir als zu minimierende Zielfunktion

$$J_N(x, u(\cdot)) := \sum_{k=0}^{N-1} l(x(k), u(k))$$

für einen endlichen Horizont $N \in \mathbb{N}$ bzw.

$$J_\infty(x, u(\cdot)) := \sum_{k=0}^{\infty} l(x(k), u(k))$$

für unendlichen Horizont. Hierbei bezeichnet $x \in X$ den Anfangswert des Zustands, d.h. $x = x(0)$. Zudem gilt je nach Zielfunktion entweder $u(\cdot) \in U^N$ oder $u(\cdot) \in U^\infty$. Somit ist $u(\cdot)$ eine Kontrollfolge der Länge N oder unendlicher Länge. Erstere besteht dabei aus den Komponenten

$$(u(0), u(1), \dots, u(N-1)),$$

letztere aus unendlich vielen Komponenten

$$(u(0), u(1), u(2), \dots).$$

Wir kennzeichnen solche Kontrollfolgen im Folgenden meistens mit $u_{N,x}(\cdot)$ bzw. $u_{\infty,x}(\cdot)$, um zu verdeutlichen, dass diese Kontrollfolge N bzw. unendlich viele Folgenglieder besitzt und auf den Anfangszustand $x \in X$ ausgeübt wird. Eine von einer Kontrollfolge $u_{N,x}(\cdot)$ generierte Zustandsfolge, die die

Kapitel 2 Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

Systemgleichung (2.1) erfüllt, nennen wir (Zustands-)Trajektorie und bezeichnen diese mit $x_{u_{N,x}}(\cdot, x)$. Dabei gilt trivialerweise

$$x_{u_{N,x}}(0, x) = x$$

und

$$x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k))$$

für $k = 0, \dots, N-1$ (analog für eine Kontrollfolge $u_{\infty,x}(\cdot)$).

Was uns noch fehlt, um den MPC-Algorithmus aufzeigen zu können, sind Beschränkungen an Zustand und Kontrolle. Dazu fordern wir, dass alle Zustandswerte in einer Menge $x \in \mathbb{X} \subseteq X$ und alle Kontrollwerte in einer Menge $u \in \mathbb{U} \subseteq U$ liegen sollen. Wir fassen diese beiden Beschränkungsmengen oft zusammen als $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{U}$ und stellen somit die Bedingung

$$(x, u) \in \mathbb{Z}.$$

Zusätzlich stellen wir in der gesamten Arbeit die folgende allgemeine Annahme an das System, die Kosten und die Beschränkungsmengen:

Annahme 2.2: (System, Kosten und Beschränkungen)

Es seien f und l stetig. Zusätzlich seien \mathbb{X} und \mathbb{U} kompakt und somit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{U}$ beschränkt.

Schließlich wollen wir ein erstes allgemeines Optimierungsproblem formulieren, welches Grundbestandteil des MPC-Algorithmus sein wird. Wir betrachten einen endlichen Horizont $N \in \mathbb{N}$ und minimieren die Zielfunktion J_N über alle Kontrollfolgen $u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N$ unter bestimmten Nebenbedingungen. Dabei haben wir einen Anfangszustand $x \in \mathbb{X}$ gegeben.

Die Problemstellung lautet

$$\begin{aligned} & \min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ & \text{u.d.N. } \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), & k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demzufolge beinhalten die Nebenbedingungen eine Anfangsbedingung, die Systemgleichung und die Beschränkungen. Als nächstes wollen wir mithilfe der Beschränkungsmengen und des MPC-Optimierungsproblems (2.4) den Begriff der Zulässigkeit folgendermaßen definieren:

Definition 2.3: (Zulässigkeit)

Wir definieren die folgende Menge aller zulässigen Paare $(x, u(\cdot))$ als

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_N := \{ & (x, u(\cdot)) \mid x_u(0, x) = 0, x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)), \\ & (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, N-1, x_u(N, x) \in \mathbb{X} \} \end{aligned}$$

und die Menge der zulässigen Anfangswerte $x \in \mathbb{X}$ als

$$\mathbb{X}_N := \{x \in \mathbb{X} \mid \exists u(\cdot), \text{ sodass } (x, u(\cdot)) \in \mathbb{Z}_N\}.$$

Schließlich ist eine Kontrollfolge $u(\cdot)$ zulässig für einen Anfangswert x , wenn $(x, u(\cdot)) \in \mathbb{Z}_N$ gilt.

Für einen zulässigen Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$ erhalten wir aus (2.4) eine optimale Kontrollfolge, die die Zielfunktion J_N minimiert und die Nebenbedingungen einhält. Diese optimale Steuerfolge werden wir mit $u_{N,x}^*(\cdot)$ bezeichnen. Man beachte allerdings, dass das Problem (2.4) nicht notwendigerweise eine Lösung besitzt, und falls doch, dass diese Lösung nicht eindeutig sein muss. Aus diesem Grund stellen wir in der gesamten Arbeit die folgende Annahme auf:

Annahme 2.4: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Eine optimale Kontrollfolge $u_{N,x}^*(\cdot)$ des MPC-Optimierungsproblems existiere und sei eindeutig.

Bemerkung 2.5:

Welche Voraussetzungen man genau benötigt, um die Existenz einer optimalen Kontrollfolge zu garantieren, kann man beispielsweise in der zweiten Annahme in [8] finden. Man beachte indes, dass in der Annahme aus [8] unter anderem unsere [Annahme 2.2](#) vorausgesetzt wird. Die Eindeutigkeit der optimalen Kontrollfolge kann man allerdings o.B.d.A. voraussetzen, da sich bei mehreren Lösungen eine beliebige der Kontrollfolgen durch eine Auswahlfunktion selektieren lässt.

□

An dieser Stelle wollen wir noch die folgende zentrale Definition einer optimalen Wertefunktion tätigen:

Definition 2.6: (Optimale Wertefunktion)

Die Funktion $V_N : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $V_\infty : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$V_N(x) := \inf_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} J_N(x, u_{N,x}(\cdot))$$

bzw.

$$V_\infty(x) := \inf_{u_{\infty,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty} J_\infty(x, u_{\infty,x}(\cdot)),$$

heißt optimale Wertefunktion.

Man beachte, dass unter [Annahme 2.4](#)

$$V_N(x) = J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot))$$

gilt, wodurch das Infimum in [Definition 2.6](#) für diesen Fall ein Minimum ist.

Die Idee des MPC-Algorithmus besteht nun darin, in jedem Iterationsschritt Problemstellung (2.4) für einen Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$ zu lösen und danach für das Regelgesetz den ersten Wert der optimalen Kontrollfolge $u_{N,x}^*(\cdot)$ zu verwenden. Somit können wir das MPC-Feedback für den endlichen Horizont wie folgt definieren:

Definition 2.7: (MPC-Regelgesetz)

Das MPC-Regelgesetz $\mu_N : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ für Problemstellung (2.4) mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$ ist definiert durch

$$\mu_N(x) := u_{N,x}^*(0),$$

wobei $u_{N,x}^*(\cdot)$ die optimale Kontrollfolge von (2.4) mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$ ist.

Im darauffolgenden Iterationsschritt wird dann $x := f(x, \mu_N(x))$ als neuer Startwert gewählt und obige Vorgehensweise wiederholt. Auf diese Weise erhalten wir Trajektorien des geschlossenen Regelkreises (2.3), die wir mit $x_{\mu_N}(\cdot, x)$ bezeichnen wollen. Wir fassen den MPC-Algorithmus für das Optimierungsproblem (2.4) im Folgenden nochmal formell zusammen:

Algorithmus 2.8:

Gegeben sei ein Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$. Somit gilt für die Trajektorie des geschlossenen Regelkreises $x_{\mu_N}(0, x) = x$. Führe für jeden Iterationsschritt $i = 1, \dots, n$ durch:

- (1) Löse das Optimierungsproblem (2.4) mit Anfangswert x und bezeichne die Lösung mit $u_{N,x}^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N$.
- (2) Definiere das Feedback durch $\mu_N(x) := u_{N,x}^*(0)$.
- (3) Setze $x := f(x, \mu_N(x))$ und gehe zu (1) (Man beachte: hier gilt auch $x_{\mu_N}(i, x) = f(x, \mu_N(x))$).

□

Wir deuten darauf hin, dass die von [Algorithmus 2.8](#) erzeugten Trajektorien des offenen Regelkreises $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ Länge $N + 1$ und die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises $x_{\mu_N}(\cdot, x)$ Länge $n + 1$ besitzen.

Wir wollen nun diesen Abschnitt abschließen, indem wir alle relevanten MPC-Optimierungsprobleme aufzählen und deren Besonderheiten darlegen.

Die äquivalente Problemstellung zu (2.4) mit unendlichem Horizont ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \min_{u_{\infty,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^{\infty}} J_{\infty}(x, u_{\infty,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } J_{\infty}(x, u_{\infty,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} l(x_{u_{\infty,x}}(k, x), u_{\infty,x}(k)) \\ & \text{u.d.N. } \begin{cases} x_{u_{\infty,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{\infty,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{\infty,x}}(k, x), u_{\infty,x}(k)), & k \in \mathbb{N}_0 \\ (x_{u_{\infty,x}}(k+1, x), u_{\infty,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (2.5) \end{aligned}$$

Ferner stellen wir die zu [Definition 2.7](#) äquivalente Definition des MPC-Feedbacks für Problem (2.5) auf.

Definition 2.9: (MPC-Regelgesetz)

Das MPC-Regelgesetz $\mu_{\infty} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ für Problemstellung (2.5) mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}_{\infty}$ ist definiert durch

$$\mu_{\infty}(x) := u_{\infty,x}^*(0),$$

wobei $u_{\infty,x}^*(\cdot)$ die optimale Kontrollfolge von (2.5) mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}_{\infty}$ ist.

Für Optimierungsproblem (2.5) ist es im Allgemeinen nicht möglich eine direkte Lösung zu berechnen. In der Praxis angewandte MPC-Problemstellungen werden aus diesem Grund für einen endlichen Horizont formuliert und können als Approximation von (2.5) betrachtet werden.

Jedoch ist obige Problemstellung mit unendlichem Horizont (2.5) für uns aus dem Grund so wichtig, da sie uns das optimale Regelgesetz μ_{∞} aus [Definition 2.9](#) liefert. Gerade an diesem optimalen Regelgesetz μ_{∞} wollen wir die "Performance" des Regelgesetzes μ_N für endlichen Horizont aus [Definition 2.7](#) messen. Warum μ_{∞} als optimal betrachtet werden kann und wie man eigentlich Performance definiert und misst, wird aber erst im nächsten Abschnitt 2.2 dieses Kapitels zur Suboptimalitätstheorie genauer ausgeführt.

Kapitel 2 Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

Für die nächsten MPC-Optimierungsprobleme ist noch die folgende Definition eines Gleichgewichtspunktes erforderlich:

Definition 2.10: (Gleichgewichtspunkt)

Ein Zustandswert $x_E \in \mathbb{X}$ heißt Gleichgewichtspunkt des Systems (2.1), wenn es einen Kontrollwert $u_E \in \mathbb{U}$ gibt, sodass gilt

$$x_E = f(x_E, u_E).$$

Schließlich wollen wir noch die zwei wichtigen Problemstellungen mit Endbeschränkungen formulieren, für die wir in dieser Arbeit die Suboptimalitätssätze herleiten werden. Endbeschränkungen werden in der MPC meist eingeführt, um die Stabilitäts- und Optimalitätsanalyse der jeweiligen MPC-Problemstellungen zu erleichtern. Dabei können Endbeschränkungen die Stabilität und Performance der jeweiligen MPC-Regelgesetze unter Umständen sogar verbessern.

Die erste Art von Endbeschränkung, die wir betrachten wollen, bezeichnen wir als Gleichgewichtsendpunktbedingung. Das dazugehörige Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} & \min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ & \text{u.d.N.} \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), & k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k = 0, \dots, N-1 \\ x_{u_{N,x}}(N, x) = x_E \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Der Unterschied zu (2.4) liegt in der letzten zusätzlichen Nebenbedingung $x_{u_{N,x}}(N, x) = x_E$. Diese fordert also, dass die Zustandstrajektorie des offenen Regelkreises in einem Gleichgewichtspunkt x_E enden soll.

Die zweite Problemstellung mit Endbeschränkungen besitzt noch zusätzliche Endkosten $F : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Zudem relaxiert sie die Endbedingung aus (2.6) insofern, dass die Zustandstrajektorie nicht mehr direkt in einem Gleichgewichtspunkt x_E , sondern nur in einer Endregion $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$ enden soll, welche

x_E enthält. Diese Art der Endbeschränkungen bezeichnen wir als Endkosten und Endregion. Das zugehörige Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} & \min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ \text{mit } J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + F(x_{u_{N,x}}(N, x)) \\ \text{u.d.N. } & \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), & k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k = 0, \dots, N-1 \\ x_{u_{N,x}}(N, x) \in \mathbb{X}_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

An die Endkosten und die Endregion aus (2.7) stellen wir die folgende Bedingung:

Annahme 2.11: (Endkosten und Endregion)

Es seien $F : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$ kompakt. Zusätzlich enthalte \mathbb{X}_0 den Gleichgewichtspunkt x_E .

Bemerkung 2.12:

Man beachte, dass wann immer es nötig ist auch $F(x_E) = 0$ o.B.d.A. angenommen werden kann. Wir begründen das dadurch, dass man diese Bedingung immer durch eine lineare Transformation der Form

$$\tilde{F}(x) := F(x) - F(x_E)$$

erreichen kann. Dadurch verschiebt sich die Zielfunktion $J_N(x, u(\cdot))$ zwar um die Konstante $-F(x_E)$, jedoch hat dies keine Auswirkung auf die Lösung des Optimierungsproblems (2.7).

□

Das MPC-Regelgesetz für (2.6) und (2.7) definieren wir hingegen nicht noch einmal gesondert, da man die jeweiligen Definitionen aus [Definition 2.7](#) jeweils durch einsetzen der entsprechenden Problemstellungen erlangt.

Zum Schluss wollen wir noch den in [Definition 2.3](#) eingeführten Begriff der Zulässigkeit auf die MPC-Optimierungsprobleme (2.5), (2.6) und (2.7) ausweiten.

Definition 2.13: (Zulässigkeit)

- (i) Für Problemstellung (2.5) definieren wir die Menge aller zulässigen Paare $(x, u(\cdot))$ als

$$\mathbb{Z}_\infty := \{(x, u(\cdot)) \mid x_u(0, x) = 0, x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)), \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

und die Menge der zulässigen Anfangswerte $x \in \mathbb{X}$ als

$$\mathbb{X}_\infty := \{x \in \mathbb{X} \mid \exists u(\cdot), \text{ sodass } (x, u(\cdot)) \in \mathbb{Z}_\infty\}.$$

- (ii) Für Problemstellung (2.6) definieren wir die Menge aller zulässigen Paare $(x, u(\cdot))$ als

$$\mathbb{Z}_{N,b} := \{(x, u(\cdot)) \mid x_u(0, x) = 0, x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)), \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, N-1, x_u(N, x) = x_E\}$$

und die Menge der zulässigen Anfangswerte $x \in \mathbb{X}$ als

$$\mathbb{X}_{N,b} := \{x \in \mathbb{X} \mid \exists u(\cdot), \text{ sodass } (x, u(\cdot)) \in \mathbb{Z}_{N,b}\}.$$

- (iii) Für Problemstellung (2.7) definieren wir die Menge aller zulässigen Paare $(x, u(\cdot))$ als

$$\mathbb{Z}_{N,F} := \{(x, u(\cdot)) \mid x_u(0, x) = 0, x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)), \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, N-1, x_u(N, x) \in \mathbb{X}_0\}$$

und die Menge der zulässigen Anfangswerte $x \in \mathbb{X}$ als

$$\mathbb{X}_{N,F} := \{x \in \mathbb{X} \mid \exists u(\cdot), \text{ sodass } (x, u(\cdot)) \in \mathbb{Z}_{N,F}\}.$$

Bemerkung 2.14:

Man beachte, dass für die Mengen der zulässigen Anfangswerte demnach gilt

$$\mathbb{X}_{N,b} \subseteq \mathbb{X}_{N,F} \subseteq \mathbb{X}_N \subseteq \mathbb{X},$$

da sich diese nur in der Endbedingung für den Zustand $x_u(N, x)$ unterscheiden und $x_E \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$ erfüllt ist.

□

Mit den bisherigen Kenntnissen wollen wir uns nun in den nächsten beiden Unterabschnitten den Kosten (2.2) widmen.

2.1.1 Kosten der Standard MPC

In der Standard MPC werden die Kosten (2.2) so gewählt, dass ein sogenanntes "Tracking"-Problem gelöst werden kann. Hierbei besteht das Ziel darin, dass die Zustandstrajektorie des geschlossenen Regelkreises $x_{\mu_N}(\cdot, x)$ einer vorgegebenen Referenztrajektorie $x^{\text{ref}}(\cdot)$ so gut wie möglich folgt. Um das bestmöglichst zu erreichen, werden die Stufenkosten (2.2) so gewählt, dass sowohl ein hoher Abstand der Zustandstrajektorie zur Referenztrajektorie, als auch eine aufwändige Kontrolle mit hohen Kosten bestraft werden.

Wir betrachten in dieser Arbeit allerdings nur einen einfacheren Spezialfall des Tracking-Problems, in dem die Referenztrajektorie einem Gleichgewicht $x^{\text{ref}}(\cdot) \equiv x_E$ entspricht und erhalten auf diese Weise ein sogenanntes Stabilisierungsproblem.

Um das Stabilisierungsproblem lösen zu können, wird die folgende Annahme an die Kosten der Standard MPC gestellt:

Annahme 2.15: (Kosten der Standard MPC)

Sei x_E der Referenzgleichgewichtspunkt des Stabilisierungsproblems. Dann sollen die Kosten $l : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ der Standard MPC die Gleichung

$$l(x_E, u_E) = 0$$

und zusätzlich für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ mit $x \neq x_E$ die Ungleichung

$$l(x, u) \geq l(x_E, u_E)$$

erfüllen.

Demzufolge werden die Kosten $l(x_E, u_E)$, um die Trajektorie im Gleichgewicht zu halten, sowohl gleich Null als auch minimal für alle Paare $(x, u) \in \mathbb{Z}$ gewählt.

Eine weit verbreitete Wahl für solche Kosten, die die Stabilisierung des Systems bezüglich eines Gleichgewichts zum Ziel haben und [Annahme 2.15](#) erfüllen, ist beispielsweise durch

$$l(x, u) = |x|_{x_E}^2 + \lambda |u|_{u_E}^2$$

für ein $\lambda \geq 0$ gegeben. Hierbei bezeichnen wir mit $|x_1|_{x_2}$ den Abstand zwischen x_1 und x_2 .

2.1.2 Kosten der Ökonomischen MPC

In der Ökonomischen MPC hingegen werden die Kosten (2.2) nicht mehr im Zuge eines Stabilisierungsproblems gewählt, sondern sind durch eine ökonomische Zielsetzung oder einen ökonomischen Prozess vorgegeben. Dies können beispielsweise die Betriebskosten eines Unternehmens oder die Stoffmengen eines chemischen Reaktors sein, die es gilt zu optimieren. Da die Ökonomischen Kosten vorgegeben sind und an diese keine weiteren Forderungen gestellt werden, ist [Annahme 2.15](#) in der Regel nicht mehr erfüllt.

Man beachte, dass uns hier kein Referenzgleichgewichtspunkt mehr vorliegt wie im Fall der Standard MPC. Um dennoch eine Stabilitäts- und Optimalitätsanalyse durchführen zu können, werden wir uns im Rahmen dieser Arbeit auf die folgende Definition eines optimalen Gleichgewichtspunktes beziehen.

Definition 2.16: (Optimaler Gleichgewichtspunkt)

Ein Zustands-/Kontrollpaar (x_E, u_E) heißt optimaler Gleichgewichtspunkt des Systems (2.1), wenn er

$$(x_E, u_E) = \arg \min_{\substack{(x,u) \in \mathbb{Z} \\ x=f(x,u)}} l(x, u)$$

erfüllt.

Ein optimaler Gleichgewichtspunkt ist also unter allen Paaren $(x, u) \in \mathbb{Z}$ des Systems (2.1) derjenige mit dem minimalen Kosten. Ferner weisen wir darauf hin, dass in der restlichen Arbeit mit (x_E, u_E) immer der optimale Gleichgewichtspunkt nach [Definition 2.16](#) gemeint ist, auch wenn dies nicht ausdrücklich erwähnt wurde.

Da nun [Annahme 2.15](#) in der Regel nicht mehr erfüllt ist, können die Ökonomischen Kosten l durchaus negativ werden und sogar $l(x, u) < l(x_E, u_E)$ für ein Paar $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllen. Wir werden jedoch in der gesamten Arbeit die folgenden Annahme für die Ökonomischen Kosten treffen, welche uns viele Rechnungen und Schlussfolgerungen erleichtern wird. Diese Annahme kann o.B.d.A. mit einer analogen Begründung wie in [Bemerkung 2.12](#) getroffen werden.

Annahme 2.17: (Kosten der Ökonomischen MPC)

Sei (x_E, u_E) ein optimaler Gleichgewichtspunkt des Systems (2.1). Für die Kosten der Ökonomischen MPC gelte

$$l(x_E, u_E) = 0.$$

Wir schließen diesen Unterabschnitt ab mit einem kurzen Beispiel zu Ökonomischen Kosten.

Beispiel 2.18

Wir betrachten das System

$$x^+ = \alpha x + (1 - \alpha)u$$

mit $\alpha \in [0, 1)$. Die zugehörigen Kosten sind gegeben durch

$$l(x, u) = \left(x + \frac{u}{3}\right)(2u - x) + (x - u)^4 \quad (2.8)$$

und seien die Beschränkungen $\mathbb{X} = \mathbb{U} = \mathbb{R}$. Für jeden Zustand x erhalten wir demzufolge mit dem Kontrollwert $u = x$ einen Gleichgewichtspunkt und die Kosten für solch einen Gleichgewichtspunkt betragen

$$l(x, u)|_{u=x} = \frac{4}{3}x^2.$$

Nach [Definition 2.16](#) ergibt sich dann der optimale Gleichgewichtspunkt zu $(x_E, u_E) = 0$ mit den zugehörigen Kosten $l(x_E, u_E) = 0$. Jedoch besitzen die Kosten (2.8) zwei negative globale Minima bei $(x, u) = \pm(21\frac{\sqrt{6}}{64}, 7\frac{\sqrt{6}}{192})$. Somit ist $l(x, u) \geq l(x_E, u_E)$ nicht für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllt, weshalb [Annahme 2.15](#) hier nicht zutrifft.

□

2.1.3 Prinzip der dynamischen Programmierung

In diesem letzten Unterabschnitt zu den Grundlagen der Modellprädiktiven Regelung wollen wir noch kurz auf ein geläufiges Hilfsmittel aus der MPC eingehen, welches als das Prinzip der dynamischen Programmierung bekannt ist. Dieses Prinzip wird in der MPC vielfach sowohl in numerischen als auch analytischen Bereichen eingesetzt und wird in dieser Arbeit häufig in Berechnungen und Beweisen angewendet.

Wir werden hier nur einen kurzen Einblick in dieses Prinzip mithilfe von zwei Sätzen liefern und zudem die grundlegende Aussage dieses Prinzips betonen. Für ausführlichere Informationen zu diesem Thema verweisen wir überdies auf die Kapitel 3.4 und 4.2 in [6].

Wir halten nun den ersten Satz zum Prinzip der dynamischen Programmierung fest:

Satz 2.19: (Prinzip der dynamischen Programmierung)

Wir betrachten eine der Problemstellungen auf endlichem Horizont (2.4), (2.6) oder (2.7) mit $x \in \mathbb{X}_N$ (bzw. $\mathbb{X}_{N,b}$ oder $\mathbb{X}_{N,F}$). Sei zudem $u_{N,x}^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N$ die optimale Kontrollfolge der jeweils betrachteten Problemstellung. Dann gilt

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{K-1} l(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) + V_{N-K}(x_{u_{N,x}^*}(K, x))$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $K = 1, \dots, N$.

Beweis:

Wir verweisen auf den Beweis zu Theorem 3.15 in [6].

☒

Dieser Satz sagt also aus, dass Teilfolgen von optimalen Kontrollfolgen wiederum optimale Kontrollfolgen für die selbe Problemstellung mit angepasstem Horizont und angepasstem Anfangswert darstellen.

Wir wollen das im Folgenden etwas genauer ausführen. Sei dazu $u_{N,x}^*(\cdot)$ die optimale Kontrollfolge für Problem (2.4), (2.6) oder (2.7) mit Horizont N

Kapitel 2 Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

und Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$. Dann erhalten wir für jedes $K \in \{1, \dots, N - 1\}$ mit der Kontrollfolge

$$\tilde{u}(k) := u_{N,x}^*(k + K)$$

für $k = 0, \dots, N - K - 1$ ebenfalls eine optimale Kontrollfolge für den angepassten Horizont $N - K$ und Anfangswert $x_{u_{N,x}^*}(K, x) \in \mathbb{X}_{N-K}$. Dadurch gilt mit unserer Notation also

$$u_{N-K, x_{u_{N,x}^*}(K, x)}^*(\cdot) \equiv \tilde{u}(\cdot).$$

Für Genaueres zu diesen Überlegungen weisen wir auf Korollar 3.16 und dessen Beweis in [6] hin.

Wir fahren mit einer analogen Version von Satz 2.19 für die Problemstellung auf unendlichem Horizont (2.5) fort.

Satz 2.20: (Prinzip der dynamischen Programmierung)

Wir betrachten die Problemstellung (2.5) mit $x \in \mathbb{X}_\infty$. Sei zudem $u_{\infty,x}^*(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty$ die optimale Kontrollfolge dieser Problemstellung. Dann gilt

$$V_\infty(x) = \sum_{k=0}^{K-1} l(x_{u_{\infty,x}^*}(k, x), u_{\infty,x}^*(k)) + V_\infty(x_{u_{\infty,x}^*}(K, x))$$

für alle $K \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Der Beweis entspricht dem Beweis zu Theorem 4.4 in [6].

□

Auch hier sind also Teile von optimalen Trajektorien von Problem (2.5) abermals optimale Trajektorien für (2.5) mit angepasstem Anfangswert (siehe auch Korollar 4.5 und dessen Beweis in [6]).

2.2 Grundlagen der Suboptimalitätstheorie

Nachdem nun alle grundlegenden Aspekte der Modellprädiktiven Regelung eingeführt wurden, soll in diesem Abschnitt schließlich die Motivation dieser Arbeit näher gelegt und eine erste Idee der Herangehensweise an die Suboptimalitätstheorie aufgezeigt werden. Wir werden uns hierbei wieder oft auf [6] beziehen.

2.2.1 Motivation und Idee

Wie schon im ersten Abschnitt dieses Kapitels angesprochen, interessiert uns die Performance des MPC-Regelgesetzes für den endlichen Horizont μ_N . Dabei werden wir die Performance nur für die Problemstellungen mit Endbeschränkungen (2.6) und (2.7) untersuchen. Als erstes stellt sich dabei die Frage, was genau man unter Performance versteht und wie man diese messen kann.

Der Begriff "Performance" ist im Rahmen dieser Arbeit gleichbedeutend mit der Regelgüte des MPC-Regelgesetzes. Diese stellt indes ein Maß dar, mit der wir die Optimalität des Regelgesetzes μ_N bewerten und mit anderen Regelgesetzen vergleichen können. Dabei kann die Regelgüte auf unterschiedliche Weise gemessen werden, wohingegen wir uns in dieser Arbeit auf ein bestimmtes Maß beschränken werden.

Wir wollen also Aussagen darüber treffen, wie "nahe" das Feedback μ_N sich an einer optimalen Lösung befindet, wobei wir die optimale Lösung durch das Regelgesetz μ_∞ aus Definition 2.9 gegeben haben. Dieses Regelgesetz ist optimal in dem Sinne, dass es die Zielfunktion auf unendlichem Horizont J_∞ - und somit die Summe der Kosten für einen unendlich langen Zeitraum in der Zukunft - minimiert. Es gilt also

$$V_\infty(x) = J_\infty(x, \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(\cdot, x))) \quad (2.9)$$

für alle Anfangswerte $x \in \mathbb{X}_\infty$. Diese Gleichung folgt beispielsweise sofort aus Korollar 4.7 in [6], welches auf dem Prinzip der dynamischen Programmierung (vgl. Abschnitt 2.1.3) beruht und aussagt, dass μ_∞ ausgewertet an den Trajektorien des geschlossenen Regelkreises (2.3) eine optimale Kontrollfolge für die Zielfunktion J_∞ darstellt. Wir werden im Folgenden die rechte Seite von (2.9) mit $J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ abkürzen.

Jetzt bietet sich aber gerade die obige Zielfunktion aus (2.9) als Performance-Maß für beliebige zulässige Regelgesetze μ an, wobei ein Regelgesetz μ genau

Kapitel 2 Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

dann zulässig ist, wenn $\mu(x) \in \mathbb{U}$ für alle $x \in \mathbb{X}$ erfüllt ist. Auf diese Weise kann man nämlich eine Angabe darüber treffen, wie gut das zu betrachtende Regelgesetz μ die Kosten für alle kommenden Zeitschritte minimiert und wie nahe es an das Optimum V_∞ herankommt.

Wir stellen also das folgende Performance-Maß in dieser Arbeit auf, nämlich die Kosten auf unendlichem Horizont:

Definition 2.21 (Kosten auf unendlichem Horizont)

Sei μ ein zulässiges Regelgesetz für das System (2.1). Für die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises $x_\mu(\cdot, x)$, die dieses Regelgesetz für einen Anfangswert $x \in \mathbb{X}$ erzeugt, definieren wir die Kosten auf unendlichem Horizont als

$$J_\infty(x, \mu(\cdot)) := \sum_{k=0}^{\infty} l(x_\mu(k, x), \mu(x_\mu(k, x))).$$

Bemerkung 2.22:

Man beachte, dass obige Definition eine unendliche Summe aufweist und aus diesem Grund nicht für alle zulässigen Regelgesetze endlich sein muss. Unter Umständen kann sogar der Fall eintreten, dass $J_\infty(x, \mu(\cdot))$ für keines der zulässigen Regelgesetze einen endlichen Wert liefert. Jedoch werden wir in Stabilitätskapitel 3 in der Lage sein zu zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen obige Kosten für das optimale Regelgesetz $J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ und damit auch die optimale Wertefunktion $V_\infty(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$ endlich sind. Die Endlichkeit von V_∞ ist eine erforderliche Prämisse, um die Stabilitäts- und Suboptimalitätstheorie in dieser Arbeit aufzustellen.

□

Für Regelgesetze $\mu \neq \mu_\infty$, die nicht dem optimalen Gesetz entsprechen, werden diese Kosten in der Regel echt größer als der optimale Wert sein, also

$$J_\infty(x, \mu(\cdot)) > V_\infty(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}$.

Dies gilt gewiss auch für das von uns betrachtete Regelgesetz μ_N der Probleme (2.6) und (2.7). Demzufolge ist das Regelgesetz μ_N suboptimal bezüglich des Regelgüte-Maßes aus Definition 2.21, da es nicht ganz an den optimalen Wert V_∞ herankommt. Aus der Suboptimalitätseigenschaft von μ_N geht

auch die Bezeichnung der Suboptimalitätssätze in Kapitel 6 hervorgeht.

Uns interessiert folglich die Differenz

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) - V_\infty(x),$$

für die wir in dieser Arbeit Abschätzungen treffen und asymptotische Aussagen herleiten werden.

Ähnliche Aussagen zur Suboptimalität des Feedbacks μ_N wurden in [6] für den Fall der Standard MPC mit Endbeschränkungen bereits aufgestellt und bewiesen. Wir verweisen hierauf auf den Abschnitt 5.4 und insbesondere auf die Sätze 5.21 und 5.22. Unsere Motivation besteht nun darin, diese Ergebnisse auch für den Fall der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen zu erarbeiten.

Zum Schluss legen wir noch den Ansatz unserer Herangehensweise an die Problemstellung dar. Da es sehr schwierig ist Aussagen über die Kosten auf unendlichem Horizont $J_\infty(x, \mu_N(\cdot))$ zu treffen, werden wir diese durch die optimale Wertefunktion für (2.6) bzw. (2.7) abschätzen. Im sechsten Kapitel dieser Arbeit erlangen wir dann die Ungleichung

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_N$, weswegen wir uns in der restlichen Herleitung auf Abschätzungen für die Differenz

$$V_N(x) - V_\infty(x)$$

konzentrieren werden. Dies ist auch der selbe Ansatz, der in [6] verfolgt wird.

Die restliche Herleitung der Suboptimalitätsschranken wird aber im Grunde unterschiedlich zu [6] verlaufen. Zwar werden wir wie auch in [6] Ergebnisse aus der Stabilitätstheorie für den Beweis benutzen, diese jedoch auf eine andere Weise einsetzen. Außerdem werden wir noch auf zusätzliche Resultate aus anderen Themenbereichen der Ökonomischen MPC zurückgreifen, insbesondere auf Sätze zur Turnpike Eigenschaft.

Die weiteren Sätze zur Stabilität, zur Turnpike Eigenschaft und zur Abschätzung der optimalen Wertefunktion, auf die sich unser Beweis stützen wird, werden in den folgenden drei Kapiteln vorgestellt. Die wichtigste Voraussetzung, die wir dabei in fast jedem der Sätze treffen, bildet die sogenannte Dissipativitätseigenschaft. Da diese Eigenschaft fundamental für die Ergebnisse dieser Arbeit ist, wird sie im folgenden Abschnitt umfassend eingeführt.

2.3 Dissipativität und Vergleichsfunktionen

Die Dissipativitätseigenschaft bildet ein fundamentales Konzept, welches in der Ökonomischen Modellprädiktiven Regelung eine Reihe analytischer Schlussfolgerungen sicherstellt. Dabei stellt sie die wichtigste Bedingung dar, mithilfe derer Ergebnisse aus u.a. der Stabilitäts-, Optimalitäts- und Robustheitsanalyse der Ökonomischen MPC erzielt werden können.

Bevor wir uns der Dissipativitätseigenschaft widmen, wollen wir erst noch eine Reihe von Vergleichsfunktionen einführen, die wir für die Definition der Dissipativität sowie für weitere Definitionen und Sätze aus folgenden Kapiteln benötigen werden. Hierzu definieren wir die folgenden fünf Arten von Vergleichsfunktionen:

Definition 2.23 (Vergleichsfunktionen)

- (i) Eine Funktion $\alpha_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt \mathcal{K} -Funktion, wenn sie stetig und strikt monoton wachsend ist und wenn $\alpha_1(0) = 0$ gilt.
- (ii) Eine Funktion $\alpha_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt \mathcal{K}_∞ -Funktion, wenn $\alpha_2 \in \mathcal{K}$ gilt und α_2 unbeschränkt ist.
- (iii) Eine Funktion $\sigma_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt \mathcal{L} -Funktion, wenn sie stetig und strikt monoton fallend ist und wenn $\sigma_1(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.
- (iv) Eine Funktion $\sigma_2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion, wenn sie strikt monoton fallend ist und wenn $\sigma_2(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt.
- (v) Eine Funktion $\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt \mathcal{KL} -Funktion, wenn sie stetig ist und wenn $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ und $\beta(r, \cdot) \in \mathcal{L}$ gilt.

Vergleichsfunktionen werden es uns erleichtern das Grenzverhalten von Funktionen und Ausdrücken zu beschreiben. So gut wie alle Abschätzungen, die wir in dieser Arbeit treffen werden, werden mithilfe von Vergleichsfunktionen formuliert.

Ein Beispiel für eine \mathcal{KL} -Funktion β aus [Definition 2.23 \(v\)](#), welche im ersten Argument eine \mathcal{K} - und im zweiten Argument eine \mathcal{L} -Funktion darstellt, findet sich in [Abbildung 2.1](#) auf der kommenden Seite.

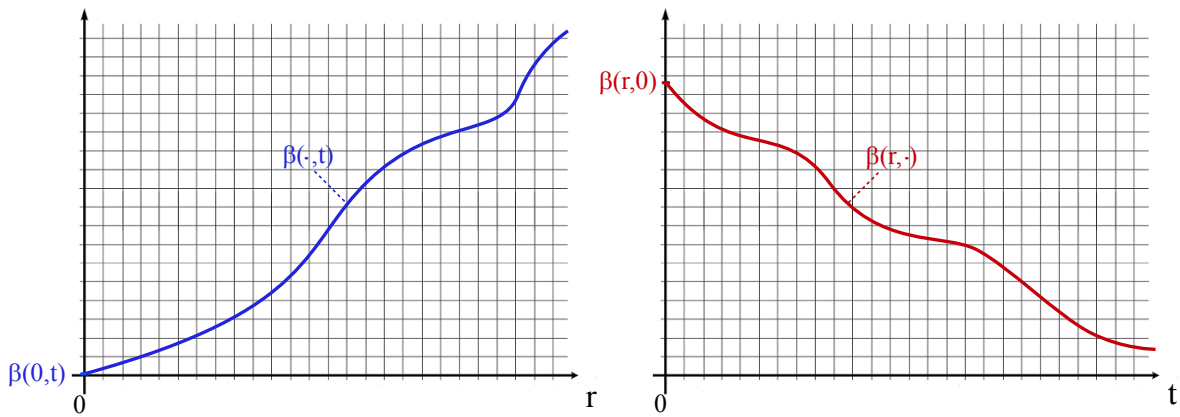


Abb. 2.1: Darstellung einer \mathcal{KL} -Funktion β , welche im ersten Argument eine \mathcal{K} -Funktion (links) und im zweiten Argument eine \mathcal{L} -Funktion (rechts) ist.

Wir wollen uns nun mit der Dissipativitätseigenschaft befassen und beginnen diese Thematik mit einer formellen Definition, welche der Definition 1 aus [8] entspricht.

Definition 2.24 (Dissipativität)

- (i) Das System (2.1) heißt dissipativ bezüglich der Versorgungsrate $s : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn eine auf \mathbb{X} beschränkte Funktion $\lambda : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass die Ungleichung

$$\lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq s(x, u)$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Dabei heißt λ auch Speicherfunktion des Systems (2.1).

- (ii) Das System (2.1) heißt strikt dissipativ bezüglich obiger Versorgungsrate s , wenn zusätzlich eine \mathcal{K}_∞ -Funktion $\rho : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ existiert, sodass die Ungleichung

$$\lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq -\rho(|x|_{x_E}) + s(x, u)$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.

- (iii) Das System (2.1) heißt dissipativ/strikt dissipativ mit stetiger Speicherfunktion, wenn λ zudem stetig auf \mathbb{X} ist.

Bemerkung 2.25:

(i) Man beachte, dass in Definition 1 aus [8] keine weiteren Voraussetzungen an die Speicherfunktion λ gestellt werden. Für unsere Zwecke benötigen wir aber die Beschränktheit und teilweise auch die Stetigkeit von λ , was wir auch in Definition 2.24 (i) bzw. (iii) ausdrücken. Jedoch sei angemerkt, dass es unter Annahme 2.2 genügen würde nur die Stetigkeit von λ zu verlangen, da dann die Beschränktheit sofort aus dem Satz von Weierstraß folgt.

(ii) Auch hier sei angemerkt, dass man o.B.d.A. $\lambda(x_E) = 0$ setzen kann, wann immer die Ungleichung aus Definition 2.24 verwendet wird. Dies kann hier ebenfalls durch eine lineare Transformation der Form

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) - \lambda(x_E)$$

erreicht werden, wodurch λ um eine Konstante verschoben wird. Jedoch bleibt die Dissipativitätsungleichung dabei erhalten, da sich durch die Transformation die Differenz

$$\tilde{\lambda}(f(x, u)) - \tilde{\lambda}(x) = \lambda(f(x, u)) - \lambda(x)$$

nicht ändert.

□

Wir wollen nun versuchen die in Definition 2.24 eingeführte Dissipativitätseigenschaft zu deuten.

Eine wichtige Interpretation von Dissipativität bezieht sich dabei auf die Energiebilanz des Systems (2.1), woher die Versorgungsrate s und die Speicherfunktion λ auch ihre Namen beziehen.

In diesem Fall stellt die Versorgungsrate $s(x, u)$ die Energie dar, mit der das System im Zustand $x \in \mathbb{X}$ mit dem Kontrollwert $u \in \mathbb{U}$ "versorgt" wird. Dabei interpretieren wir für jedes Paar $(x, u) \in \mathbb{Z}$ eine positive Versorgungsrate $s(x, u) > 0$ als Energiemenge, die dem System zugeführt wird und eine negative Versorgungsrate $s(x, u) < 0$ als Energiemenge, die dem System entzogen wird. Die Speicherfunktion $\lambda(x)$ hingegen verkörpert die Energie, die das System im Zustand $x \in \mathbb{X}$ gespeichert hat.

Mit dieser Betrachtungsweise lautet die Aussage der Dissipativitätsungleichung aus Definition 2.24 (i) demnach, dass die Zunahme der gespeicherten Energie des Systems nicht größer sein darf als die Menge der zugeführten Energie bzw. dass die Abnahme der gespeicherten Energie nicht kleiner sein

darf als die Menge der entzogenen Energie.

Solch ein dissipatives System darf also nur Energie "verbrauchen" (z.B. durch Abgabe von Energie an die Umgebung) und nicht selber erzeugen (vgl. mit dem englischen Begriff "dissipate" für "verbrauchen").

In diesem Fall ist die Dissipativitätsungleichung eine direkte Folgerung aus dem Energieerhaltungssatz der Physik.

Auf die eben vorgestellte Weise lässt sich Dissipativität interpretieren, wenn s als Energieversorgungsrate des Systems gewählt wird. In der Ökonomischen MPC hingegen ist es üblich die Versorgungsrate s mithilfe der Kosten (2.2) zu formulieren, welche ja bekanntlich ein ökonomisches Ziel repräsentieren. Man wählt dann

$$s(x, u) = l(x, u) - l(x_E, u_E) \quad (2.10)$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$. Jedoch sei darauf hingewiesen, dass hierbei nicht ausgeschlossen sein muss, dass (2.10) gerade die Energieversorgung des Systems darstellt, da die Ökonomischen Kosten sehr vielfältige Zielvorgaben verkörpern können. Die so gewählte Versorgungsrate (2.10) ist also gleich Null, wenn wir uns im optimalen Gleichgewichtspunkt (x_E, u_E) befinden. Ansonsten ist sie positiv, wenn die Kosten im Punkt (x, u) echt größer als $l(x_E, u_E)$ und negativ, wenn diese Kosten echt kleiner als $l(x_E, u_E)$ sind.

Wir werden in dieser Arbeit ebenfalls Dissipativität hinsichtlich der Versorgungsrate (2.10) formulieren und durchgehend die strikte Version der Dissipativität in den Sätzen verwenden.

Des Weiteren ist zu beachten, dass in der strikten Dissipativitätsungleichung in Definition 2.24 (ii) durch die \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ impliziert wird, dass die Änderung der Speicherfunktion $\lambda(f(x, u)) - \lambda(x)$ echt kleiner der Versorgungsrate $s(x, u)$ für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ mit $x \neq x_E$ ist und nur für den Zustand x_E gleich sein kann. Außerdem wird die Lücke zwischen $\lambda(f(x, u)) - \lambda(x)$ und $s(x, u)$ umso größer, je weiter der aktuelle Zustand x vom Gleichgewichtspunkt x_E entfernt ist - d.h. je größer der Abstand $|x|_{x_E}$ ist.

Mit der vorhin erbrachten Interpretation auf Energieebene würde das bedeuten, dass das System in jedem Zustand $x \in \mathbb{X}$, der nicht dem Gleichgewichtspunkt x_E entspricht, Energie verbraucht bzw. verliert und zwar umso mehr, je weiter x von x_E entfernt ist. Aus diesem Grund ist es intuitiv naheliegend, dass gerade der Zustand x_E für solch strikt dissipative Systeme erstrebenswert ist, da dieser am energieeffizientesten ist.

Diese einfachen Überlegungen lassen sich tatsächlich in der Ökonomischen MPC Literatur mehrfach belegen. Dass in strikt dissipativen Systemen gerade der optimale Gleichgewichtspunkt x_E "intuitiv erstrebenswert" ist, findet sich beispielsweise in den Tatsachen wieder, dass x_E ein asymptotisch

Kapitel 2 Grundlagen der Thematik dieser Arbeit

stabiler Gleichgewichtspunkt solcher Systeme ist und ein bestimmtes Optimalitätskriterium erfüllt. Eine Stabilitätsanalyse für MPC-Probleme, die die strikte Dissipativitätseigenschaft erfüllen, werden wir in dieser Arbeit in Kapitel 3 durchführen und für das eben erwähnte Optimalitätskriterium sei auf Proposition 6.4 in [2] verwiesen.

Kapitel 3

Stabilität der Ökonomischen MPC

Dieses Kapitel ist der Stabilität von ausgewählten Ökonomischen MPC-Problemstellungen gewidmet. Gleichwohl werden nicht alle möglichen MPC-Optimierungsprobleme auf Stabilität untersucht, sondern nur diejenigen, die für die Thematik dieser Arbeit von Bedeutung sind. Genauer gesagt wird insbesondere der Fall mit endlichem Horizont ohne Endbeschränkungen (2.4) fallen gelassen.

Es folgen drei Abschnitte, wobei im ersten Abschnitt die Grundlagen zur Stabilitätstheorie vermittelt werden. Daraufhin werden im zweiten Abschnitt die Stabilitätstheorie für endlichen Horizont mit Endbeschränkungen und im dritten Abschnitt die Stabilitätstheorie für unendlichen Horizont ausgearbeitet. Unterdessen wird sich herausstellen, dass in den letzten beiden Abschnitten die Dissipativitätseigenschaft als Voraussetzung eine wichtige Rolle spielen wird.

Der Grund weshalb wir mit der Stabilitätstheorie beginnen, ist die Tatsache, dass in den Sätzen und Beweisen aus folgenden Kapiteln immer wieder auf die Stabilitätseigenschaft zurückgegriffen wird.

3.1 Grundlagen der Stabilitätstheorie

Dieser Abschnitt strebt zwei Zielsetzungen an. Zum einen soll vermittelt werden, was man eigentlich unter Stabilität versteht und zum anderen soll ein allgemeiner Weg aufgezeigt werden, wie man die Stabilität von MPC-Problemstellungen beweisen kann. Dabei orientiert sich dieser Abschnitt stark an [6].

Es existieren mehrere Stabilitätsbegriffe, die sich alle in ihren Definitionen etwas voneinander abheben. Wenn jedoch im Folgenden von Stabilität die Rede ist, dann ist immer ein ganz bestimmter Stabilitätsbegriff gemeint, nämlich der der asymptotischen Stabilität. Hierzu folgt zunächst eine allgemeinere Definition der asymptotischen Stabilität eines Gleichgewichtspunktes. Diese entspricht der Definition 2.14 aus [6].

Definition 3.1: (Asymptotische Stabilität eines Gleichgewichtspunktes)

Sei x_E ein Gleichgewichtspunkt eines Differenzensystems $x^+ = g(x)$ mit der Übergangsabbildung $g : X \rightarrow X$, d.h. es gilt $g(x_E) = x_E$.

- (i) Der Gleichgewichtspunkt x_E ist lokal asymptotisch stabil.
 \Leftrightarrow Es existieren $\delta > 0$ und eine \mathcal{KL} -Funktion β , sodass die Ungleichung

$$|x(k, x)|_{x_E} \leq \beta(|x|_{x_E}, k)$$

für alle $x \in \mathcal{B}_\delta(x_E)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

- (ii) Der Gleichgewichtspunkt x_E ist global asymptotisch stabil.
 \Leftrightarrow Es existiert eine \mathcal{KL} -Funktion β , sodass obige Ungleichung für alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Wir übertragen diese allgemeine Definition, die sich auf Gleichgewichtspunkte eines Differenzensystems $x^+ = g(x)$ bezieht, sogleich auf die MPC-Problemstellung, indem wir als zu betrachtendes Differenzensystem den geschlossenen MPC-Regelkreis (2.3) wählen, also

$$g(x) = f(x, \mu(x)).$$

Folglich können wir Definition 3.1 nochmals umformulieren und auf das Regelgesetz $\mu : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ beziehen.

Definition 3.2: (Asymptotische Stabilität eines Regelgesetzes)

Sei x_E ein optimaler Gleichgewichtspunkt des geschlossenen Regelkreises (2.3) nach Definition 2.16.

Das MPC-Regelgesetz $\mu : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ aus Definition 2.7 oder Definition 2.9 stabilisiert den geschlossenen Regelkreis (global) asymptotisch.

$:\Leftrightarrow$ Es existiert eine \mathcal{KL} -Funktion β , sodass die Ungleichung

$$|x_\mu(k, x)|_{x_E} \leq \beta(|x|_{x_E}, k)$$

für die durch μ erzeugte Zustandstrajektorie $x_\mu(\cdot, x)$ für alle Anfangswerte $x \in \mathbb{X}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Bemerkung 3.3:

Man beachte, dass Definition 3.2 die viel stärkere Form der globalen Stabilität zum Ausdruck bringt. Die lokale asymptotische Stabilität lässt sich analog formulieren für Anfangswerte $x \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$ oder $x \in \mathcal{B}_\delta(x_E) \subseteq \mathbb{X}$ mit $\delta > 0$. Wir verzichten hier allerdings auf die lokale Definition, da in den kommenden Stabilitätssätzen μ den Regelkreis global stabilisieren wird und werden auch im Folgenden mit "asymptotischer Stabilität" durchgehend die globale Version bezeichnen.

□

Der Abstand einer asymptotisch stabilen Zustandstrajektorie zum optimalen Gleichgewichtspunkt lässt sich also mithilfe einer \mathcal{KL} -Funktion β abschätzen. Für diese \mathcal{KL} -Funktion gilt, dass sie gegen Null konvergiert für $(x \rightarrow x_E \vee k \rightarrow \infty)$.

Die asymptotische Stabilität besteht demzufolge aus zwei Bestandteilen. Der erste Bestandteil ist als Lyapunov-Stabilität bekannt. Diese sagt aus, dass je kleiner der Abstand zwischen Anfangswert x und Gleichgewicht x_E ist, desto kleiner auch der Abstand der Zustandstrajektorie $x_\mu(k, x)$ zum Gleichgewichtspunkt x_E für alle weiteren Zeitpunkte $k \in \mathbb{N}_0$ sein wird. Zusätzlich besteht asymptotische Stabilität aus der sogenannten Attraktion. Diese besagt letztlich, dass mit fortschreitender Zeit der Abstand der Zustandstrajektorie $x_\mu(\cdot, x)$ zum Gleichgewichtspunkt x_E beliebig klein wird.

Die zweite Zutat der asymptotischen Stabilität - die Attraktion - ist grafisch in Abbildung 3.1 dargestellt. Dabei wurde ein fester Anfangswert x festgehalten. Den optimalen Gleichgewichtspunkt wählen wir zur einfacheren

Darstellung als $x_E = 0$. Auch die \mathcal{KL} -Funktion β ist in der Abbildung enthalten, wobei β für einen festen Anfangswert zu einer \mathcal{L} -Funktion $\beta(|x|, \cdot)$ wird.

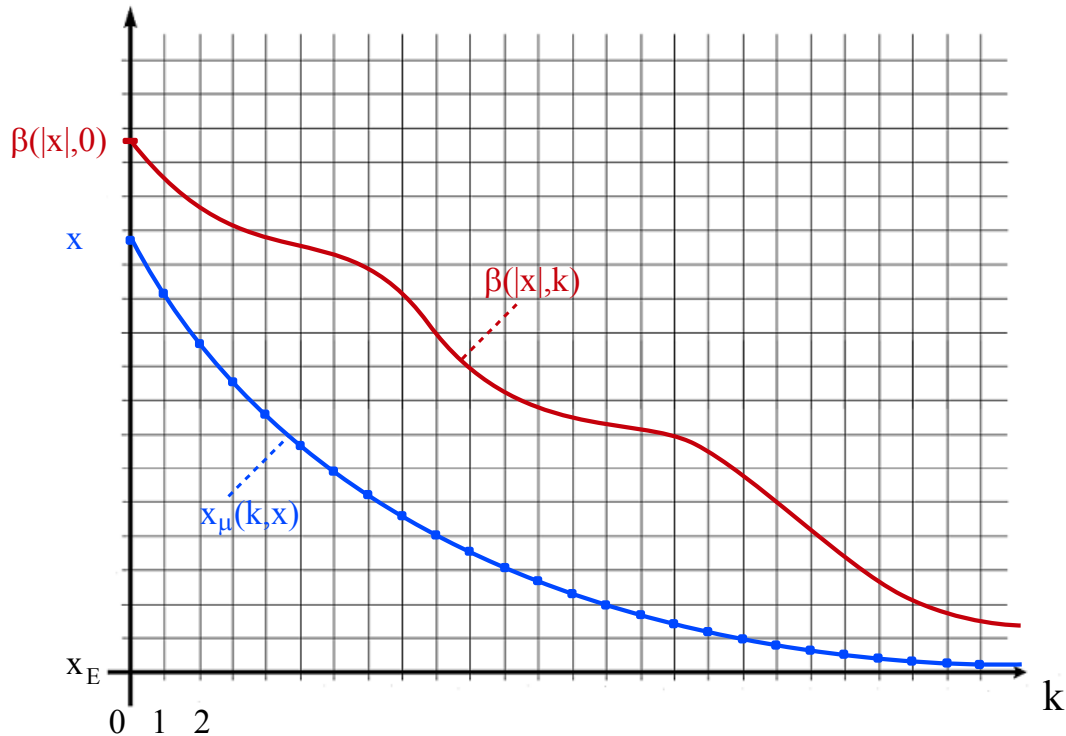


Abb. 3.1: Asymptotisch stabile Zustandstrajektorie $x_\mu(\cdot, x)$ und \mathcal{L} -Funktion $\beta(|x|_{x_E}, \cdot)$ mit optimalem Gleichgewichtspunkt $x_E = 0$.

Nachdem wir nun den Stabilitätsbegriff aufgezeigt haben, bleibt zu klären, wie man Stabilität in der MPC herleiten kann. Ein in der MPC-Literatur oftmals verwendetes Hilfsmittel bilden hierbei die sogenannten Lyapunov-Funktionen. Auch in dieser Arbeit werden alle Stabilitätsbeweise mithilfe von Lyapunov-Funktionen durchgeführt.

Aus diesem Grund werden wir im Folgenden zunächst definieren, was man unter einer Lyapunov-Funktion für allgemeine Differenzensysteme versteht. Anschließend äußern wir die Idee für den Beweis der asymptotischen Stabilität mittels Lyapunov-Funktionen. Danach stellen wir die Vorgehensweise vor, wie man das Konzept der Lyapunov-Funktionen in die MPC übertragen kann und den Abschluss bildet ein Satz mit vollständigem Beweis zur

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

asymptotischen Stabilität von allgemeinen Differenzensystemen, auf denen eine Lyapunov-Funktion definiert ist.

Die folgende Definition einer Lyapunov-Funktion deckt sich mit der Definition 2.18 aus [6].

Definition 3.4: (Lyapunov-Funktion)

Wir betrachten ein Differenzensystem $x^+ = g(x)$ mit einem Gleichgewichtspunkt x_E . $V : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist eine Lyapunov-Funktion für dieses System, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es existieren \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_1 und α_2 , sodass die Ungleichung

$$\alpha_1(|x|_{x_E}) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|_{x_E})$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

- (ii) Es existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_3 , sodass die Ungleichung

$$V(g(x)) \leq V(x) - \alpha_3(|x|_{x_E})$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Die Idee der Stabilitätsbeweise besteht nun darin, mithilfe der Ungleichung aus [Definition 3.4 \(ii\)](#) zu zeigen, dass $V(x(k))$ streng monoton fallend ist bezüglich der Trajektorien $x(k)$ des Differenzensystems $x^+ = g(x)$ und dass $V(x(k))$ zudem gegen Null konvergiert für $k \rightarrow \infty$. Infolgedessen lässt sich mithilfe der Ungleichung aus [Definition 3.4 \(i\)](#) beweisen, dass in diesem Fall auch $x(k) \rightarrow x_E$ gilt für $k \rightarrow \infty$.

Um diesen Sachverhalt auf MPC-Problemstellungen zu übertragen, definiert man lediglich wie gewohnt

$$g(x) := f(x, \mu(x))$$

und wählt die optimale Wertefunktion aus [Definition 2.6](#) als Lyapunov-Funktion für den geschlossenen Regelkreis (2.3). Zu zeigen bleibt dann, dass die optimale Wertefunktion die Eigenschaften einer Lyapunov-Funktion aus [Definition 3.4](#) erfüllt. Diese Thematik ist jedoch erst Bestandteil der folgenden beiden Abschnitte.

Doch zunächst einmal schließen wir diesen Abschnitt mit einem Stabilitätssatz für allgemeine Differenzensysteme $x^+ = g(x)$ ab und führen die weiter oben vorgestellte Beweisidee in ihren Einzelheiten aus.

Satz 3.5: (Stabilitätssatz für allgemeine Differenzensysteme)
 Sei x_E ein Gleichgewichtspunkt des Differenzensystems $x^+ = g(x)$.
 Es existiere eine Lyapunov-Funktion V für dieses System nach [Definition 3.4](#).
 Dann folgt, dass x_E ein (global) asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Differenzensystems $x^+ = g(x)$ ist.

Beweis:

Wir wollen in diesem Beweis die \mathcal{KL} -Funktion β aus [Definition 3.1](#) mithilfe der drei \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_1 , α_2 und α_3 aus [Definition 3.4](#) konstruieren.

Als erstes verwenden wir

$$\alpha_2^{-1}(V(x)) \leq |x|_{x_E}$$

aus [Definition 3.4 \(i\)](#). Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn wir α_3 auf beide Seiten anwenden, da α_3 strikt monoton wachsend ist. Wir erhalten

$$\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x)) \leq \alpha_3(|x|_{x_E}). \quad (3.1)$$

Zur einfacheren Darstellung definieren wir

$$\alpha' := \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}.$$

Dabei ist α' wiederum eine \mathcal{K}_∞ -Funktion, da sowohl Inverse als auch Kompositionen von \mathcal{K}_∞ -Funktionen wieder in \mathcal{K}_∞ liegen. Sei nun $x(\cdot, x)$ eine Trajektorie des Differenzensystems $x^+ = g(x)$. Dann können wir die Ungleichung aus [Definition 3.4 \(ii\)](#) auch schreiben als

$$\begin{aligned} V(x(k+1, x)) &\leq V(x(k, x)) - \alpha_3(|x(k, x)|_{x_E}) \\ &\stackrel{(3.1)}{\leq} V(x(k, x)) - \alpha'(V(x(k, x))). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Als nächstes wollen wir α' in [\(3.2\)](#) durch eine andere Funktion $\tilde{\alpha}$ abschätzen, um zu erreichen, dass die rechte Seite von [\(3.2\)](#) strikt monoton wachsend in $V(x(k, x))$ ist. Gleichzeitig wird die als $\tilde{\alpha}$ gewählte Funktion eine wichtige Rolle in der Konstruktion von β spielen. Wir definieren also

$$\tilde{\alpha}(r) := \min_{s \in [0, r]} \left(\alpha'(s) + \frac{r-s}{2} \right)$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

für alle $r \geq 0$. Hierzu zeigen wir als erstes, dass diese Funktion die gewollte strikte Monotonie für die rechte Seite von (3.2) erfüllt. Seien dazu $r_2 > r_1 \geq 0$ und bezeichne $s' := \arg \min_{s \in [0, r_1]} (\alpha'(s) + \frac{r_1 - s}{2})$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 r_2 - \tilde{\alpha}(r_2) &= r_2 - \min_{s \in [0, r_2]} \left(\alpha'(s) + \frac{r_2 - s}{2} \right) \\
 &\geq r_2 - \left(\alpha'(s') + \frac{r_2 - s'}{2} \right) \\
 &= \frac{r_2}{2} - \left(\alpha'(s') - \frac{s'}{2} \right) \\
 &> \frac{r_1}{2} - \left(\alpha'(s') - \frac{s'}{2} \right) \\
 &= r_1 - \left(\alpha'(s') + \frac{r_1 - s'}{2} \right) \\
 &= r_1 - \min_{s \in [0, r_1]} \left(\alpha'(s) + \frac{r_1 - s}{2} \right) \\
 &= r_1 - \tilde{\alpha}(r_1) \\
 &\geq r_1 - \left(\alpha'(0) + \frac{r_1 - 0}{2} \right) \\
 &\stackrel{\alpha' \in \mathcal{K}_\infty}{=} \frac{r_1}{2} \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned}
 r_2 - \tilde{\alpha}(r_2) &> r_1 - \tilde{\alpha}(r_1) \\
 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Um α' mit $\tilde{\alpha}$ abschätzen zu können, errechnen wir

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(r) &= \min_{s \in [0, r]} \left(\alpha'(s) + \frac{r - s}{2} \right) \\
 &\leq \alpha'(r) + \frac{r - r}{2} \\
 &= \alpha'(r)
 \end{aligned}$$

und ersetzen (3.2) durch

$$V(x(k+1, x)) \leq V(x(k, x)) - \tilde{\alpha}(V(x(k, x))). \tag{3.4}$$

Ferner definieren wir mithilfe von $\tilde{\alpha}$ eine Funktion β_1 durch die Rekursion

$$\beta_1(r, 0) := r$$

und

$$\beta_1(r, k + 1) := \beta_1(r, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k)).$$

Dazu wollen wir zunächst die folgende Ungleichung mithilfe der vollständigen Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in X$ beweisen:

$$V(x(k, x)) \leq \beta_1(V(x), k) \tag{3.5}$$

Der Induktionsanfang ergibt sich für $k = 0$ als

$$\begin{aligned} \beta_1(V(x), 0) &= V(x) \\ &= V(x(0, x)). \end{aligned}$$

Es gelte nun die Induktionsvoraussetzung

$$V(x(k, x)) \leq \beta_1(V(x), k).$$

Mithilfe von (3.4) sowie der kürzlich gezeigten strikten Monotonie der rechten Seite von (3.4) in $V(x(k, x))$ können wir berechnen, dass gilt

$$\begin{aligned} V(x(k + 1, x)) &\leq V(x(k, x)) - \tilde{\alpha}(V(x(k, x))) \\ &\stackrel{\substack{\text{Induktions-} \\ \text{voraussetzung}}}{\leq} \beta_1(V(x), k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(V(x), k)) \\ &= \beta_1(V(x), k + 1), \end{aligned}$$

womit die Induktionsbehauptung bewiesen wäre. Nun wollen wir noch zeigen, dass β_1 eine \mathcal{KL} -Funktion ist. Dazu zeigen wir erst die Monotonie-Eigenschaften einer \mathcal{KL} -Funktion. Abermals mithilfe der vollständigen Induktion beweisen wir die erste Monotonie-Eigenschaft, nämlich dass

$$\beta_1(r_2, k) > \beta_1(r_1, k) \geq 0$$

für alle $r_2 > r_1 \geq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Der Induktionsanfang ergibt sich trivialerweise zu $\beta_1(r_2, 0) = r_2 > r_1 = \beta_1(r_1, 0) \geq 0$. Es gelte nun die Voraussetzung

$$\beta_1(r_2, k) > \beta_1(r_1, k) \geq 0.$$

Dann können wir Ungleichung (3.3) anwenden und folgern

$$\begin{aligned} \beta_1(r_2, k + 1) &= \beta_1(r_2, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r_2, k)) \\ &\stackrel{(3.3)}{>} \beta_1(r_1, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r_1, k)) \\ &= \beta_1(r_1, k + 1) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt abgeschlossen wäre.

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Die zweite Monotonie-Eigenschaft lautet

$$\beta_1(r, k_1) > \beta_1(r, k_2) > 0$$

für alle $k_2 > k_1 \geq 0$ und alle $r > 0$. Um diese zu zeigen, wollen wir zuerst noch $\tilde{\alpha}$ abschätzen. Es bezeichne wieder $s' := \arg \min_{s \in [0, r]} (\alpha'(s) + \frac{r-s}{2})$. Sei

nun $s' \geq \frac{r}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{r}{2}\right) &\stackrel{\alpha' \in \mathcal{K}_\infty}{\leq} \alpha'(s') \\ &\stackrel{(r-s)/2 \geq 0}{\leq} \alpha'(s') + \frac{r-s'}{2} \\ &= \min_{s \in [0, r]} \left(\alpha'(s) + \frac{r-s}{2} \right) \\ &= \tilde{\alpha}(r). \end{aligned}$$

Für den anderen Fall $s' < \frac{r}{2}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{r}{4} &< \frac{r-s'}{2} \\ &\stackrel{\alpha' \in \mathcal{K}_\infty}{\leq} \alpha'(s') + \frac{r-s'}{2} \\ &= \min_{s \in [0, r]} \left(\alpha'(s) + \frac{r-s}{2} \right) \\ &= \tilde{\alpha}(r). \end{aligned}$$

Zusammengefasst können wir die folgende Abschätzung für $\tilde{\alpha}$, nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(r) &\geq \min \left\{ \alpha'\left(\frac{r}{2}\right), \frac{r}{4} \right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

für alle $r > 0$ aufstellen, da in diesem Fall sowohl $\alpha'\left(\frac{r}{2}\right) > 0$, als auch $\frac{r}{4} > 0$ gilt. Damit können wir nun die zweite Monotonie-Eigenschaft mithilfe der Rekursionsformel von β_1 beweisen, denn für $r > 0$ gilt

$$\beta_1(r, 0) = r > 0 \tag{3.6}$$

und

$$\begin{aligned} \beta_1(r, k+1) &= \beta_1(r, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k)) \\ &\stackrel{\tilde{\alpha}(\cdot) > 0}{<} \beta_1(r, k) \end{aligned} \tag{3.7}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Eine analoge Berechnung der Eigenschaft (3.3) eingeschränkt auf $r > 0$ führt zu

$$r - \tilde{\alpha}(r) > 0$$

für $r > 0$. Wenn wir dieses Ergebnis nochmals auf die Rekursionsformel anwenden, ergibt sich

$$\beta_1(r, k+1) = \beta_1(r, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k)) > 0 \quad (3.8)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zusammengenommen liefern die Ungleichungen (3.6), (3.7) und (3.8) für $r > 0$ und zwei beliebige $k_2 > k_1 \geq 0$ eben gerade

$$\beta_1(r, k_1) > \beta_1(r, k_2) > 0.$$

Die letzten beiden Eigenschaften einer \mathcal{KL} -Funktion, die noch zu zeigen sind, wären

$$\beta_1(0, k) = 0 \quad (3.9)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k) = 0 \quad (3.10)$$

für alle $r \geq 0$. Wir beginnen mit der ersten Eigenschaft und folgern aus der Rekursionsformel, die wir mit $\beta_1(0, 0) = 0$ initialisieren, dass (3.9) nur dann für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist, wenn $\tilde{\alpha}(0) = 0$ gilt. Dies folgt aber gerade aus der Definition von $\tilde{\alpha}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(0) &= \min_{s=0} \left(\alpha'(s) + \frac{0-s}{2} \right) \\ &= \alpha'(0) + \frac{0-0}{2} \\ &\stackrel{\alpha' \in \mathcal{K}_\infty}{=} 0. \end{aligned}$$

Für die zweite Eigenschaft (3.10) betrachten wir abermals die Monotonie-Eigenschaften von β_1 . Aus ihnen wird ersichtlich, dass β_1 in k strikt monoton fallend ist und von unten durch Null beschränkt. Daraus folgt, dass der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k)$ für alle $r \geq 0$ existiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Limes gleich Null ist. Diesbezüglich definieren wir den Grenzwert von β_1 als

$$\beta_\infty(r) := \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k)$$

für $r \geq 0$.

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Als nächstes verwenden wir die Rekursionsgleichung von β_1 , gegeben durch

$$\beta_1(r, k+1) = \beta_1(r, k) - \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k))$$

und berechnen dazu

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_1(r, k) - \beta_1(r, k+1)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k) - \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k+1) \\ &= \beta_\infty(r) - \beta_\infty(r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Durch die Stetigkeit von $\tilde{\alpha}$ folgt außerdem

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}(\beta_1(r, k)) \\ &= \tilde{\alpha}(\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_1(r, k)) \\ &= \tilde{\alpha}(\beta_\infty(r)). \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass $\tilde{\alpha}(0) = 0$ und für alle $r > 0$ zudem $\tilde{\alpha}(r) > 0$ gilt. Daraus folgt, dass $\beta_\infty(r) = 0$ gelten muss. Nun haben wir gezeigt, dass β_1 alle Eigenschaften einer \mathcal{KL} -Funktion besitzt. Man beachte jedoch, dass $\beta_1(r, k)$ nur für ganzzahlige k definiert ist, wohingegen die Definition einer \mathcal{KL} -Funktion sich auf $k \in \mathbb{R}_0^+$ bezieht. Diesen Missstand gleichen wir noch aus, indem wir eine weitere Funktion β_2 definieren durch

$$\beta_2(r, t) := (k+1-t)\beta_1(r, k) + (t-k)\beta_1(r, k+1)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und $t \in [k, k+1)$. Dabei verkörpert β_2 die lineare Interpolation von β_1 und entsteht demzufolge durch Verbindung der Punkte von β_1 durch Strecken. Demnach erfüllt $\beta_2(r, t)$ nun alle Eigenschaften einer \mathcal{KL} -Funktion für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$. Wir schließen den Beweis ab, indem wir β aus [Definition 3.1](#) durch

$$\beta(r, t) := \alpha_1^{-1} \circ \beta_2(\alpha_2(r), t)$$

konstruieren, und verwenden bisherige Ergebnisse, um die Ungleichung aus [Definition 3.1](#) herzuleiten.

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Dazu setzen wir mit dem linken Teil der Ungleichung aus [Definition 3.4 \(i\)](#) an und erhalten für alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} |x(k, x)|_{x_E} &\leq \alpha_1^{-1}(V(x(k, x))) \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} \alpha_1^{-1} \circ \beta_1(V(x), k) \\ &= \alpha_1^{-1} \circ \beta_2(V(x), k) \\ &\stackrel{\text{Def. 3.4 (i)}}{\leq} \alpha_1^{-1} \circ \beta_2(\alpha_2(|x|_{x_E}), k) \\ &= \beta(|x|_{x_E}, k). \end{aligned}$$

□

3.2 Stabilitätssätze für endlichen Horizont mit Endbeschränkungen

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Stabilitätssätze für die beiden Optimierungsprobleme mit endlichem Horizont und Endbeschränkungen (2.6) und (2.7) aufstellen.

Im ersten Unterabschnitt gehen wir dabei auf die Problemstellung mit Gleichgewichtsendpunktbedingung (2.6) und im zweiten Unterabschnitt auf die Problemstellung mit Endkosten und Endregion (2.7) ein. Dabei werden beide Stabilitätsbeweise kraft des im letzten Abschnitt vorgestellten Konzeptes der Lyapunov-Funktionen erfolgen.

Die folgenden beiden Unterabschnitte beziehen ihre Idee aus [8], insbesondere aus Abschnitt IV. Die Stabilitätsbeweise in dieser Arbeit werden indessen detaillierter erfolgen. Zudem werden beide Eigenschaften (i) und (ii) einer Lyapunov-Funktion aus Definition 3.4 gezeigt, wohingegen in [8] nur Bezug auf Eigenschaft (ii) genommen wurde.

3.2.1 Gleichgewichtsendpunktbedingung

Wir betrachten in diesem Unterabschnitt dementsprechend Problemstellung (2.6).

Wie schon am Anfang des Kapitels angesprochen wurde, werden wir strikte Dissipativität aus Definition 2.24 (ii) voraussetzen müssen, um asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises (2.3) zu garantieren. Doch bevor wir den Stabilitätssatz aufstellen können, benötigen wir erst noch das folgende Hilfslemma, welches die Differenz der optimalen Wertefunktion V_N entlang der Trajektorien des geschlossenen Regelkreises $x_{\mu_N}(\cdot, x)$ mithilfe der Stufenkosten (2.2) abschätzt.

Lemma 3.6:

Wir betrachten Problemstellung (2.6). Dann gilt für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{X}_{N,b}$, dass die Ungleichung

$$V_N(f(x, \mu_N(x))) - V_N(x) \leq l(x_E, u_E) - l(x, \mu_N(x))$$

erfüllt ist.

Beweis:

Dieser Beweis beruht auf Abschnitt 2.4.2 aus [9]. Sei $u_{N,x}^*(\cdot)$ eine optimale Kontrollfolge, die das Problem (2.6) für einen beliebigen Startwert $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ minimiert. Demnach gilt

$$V_N(x) = J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)).$$

Die einzelnen Komponenten dieser Kontrollfolge bezeichnen wir mit

$$u_{N,x}^*(\cdot) = (u_{N,x}^*(0), u_{N,x}^*(1), \dots, u_{N,x}^*(N-1))$$

und die zugehörige Zustandstrajektorie mit

$$x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x) = (x_{u_{N,x}^*}(0, x), x_{u_{N,x}^*}(1, x), \dots, x_{u_{N,x}^*}(N, x)),$$

wobei die Anfangs- und Gleichgewichtsendpunktbedingung dies zu

$$x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x) = (x, x_{u_{N,x}^*}(1, x), \dots, x_E)$$

vereinfacht. Für die zweite Komponente dieser Folge gilt außerdem

$$x_{u_{N,x}^*}(1, x) = f(x, u_{N,x}^*(0)) = f(x, \mu_N(x)) := x^+.$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Für diesen neuen Startwert x^+ soll nun $u_{N,x^+}^*(\cdot)$ eine optimale Kontrollfolge der selben Problemstellung (2.6) sein. Dementsprechend gilt

$$V_N(x^+) = J_N(x^+, u_{N,x^+}^*(\cdot)),$$

wobei u_{N,x^+}^* gegeben ist durch

$$u_{N,x^+}^*(\cdot) = (u_{N,x^+}^*(0), u_{N,x^+}^*(1), \dots, u_{N,x^+}^*(N-1)).$$

Nun stellt es sich als schwierig heraus $V_N(x)$ und $V_N(x^+)$ direkt miteinander zu vergleichen. Aus diesem Grund benötigen wir noch die folgende Abschätzung, nämlich

$$V_N(x^+) = J_N(x^+, u_{N,x^+}^*(\cdot)) \leq J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)) \quad (3.11)$$

für eine geschickt gewählte Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ zum Startwert $x^+ \in \mathbb{X}_{N,b}$. Wir wählen $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ so, dass uns der Vergleich von $J_N(x^+, u_{N,x^+}^*(\cdot))$ mit $J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x^+}(\cdot))$ erleichtert wird. Diesbezüglich definieren wir

$$\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot) = (u_{N,x}^*(1), u_{N,x}^*(2), \dots, u_{N,x}^*(N-1), u_E).$$

Da $x^+ = f(x, u_{N,x}^*(0))$ gilt, ergibt sich für \tilde{u}_{N,x^+} die zugehörige Zustandsfolge $\tilde{x}(\cdot, x^+) := x_{\tilde{u}_{N,x^+}}(\cdot, x^+)$ mit

$$\tilde{x}(\cdot, x^+) = (x_{u_{N,x}^*}(1, x), x_{u_{N,x}^*}(2, x), \dots, x_E, f(x_E, u_E)).$$

Dabei sind die von uns gewählten Folgen $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ und $\tilde{x}(\cdot, x^+)$ zulässig, da sie jeweils Teile von optimalen Trajektorien bilden, welche zusätzlich um x_E bzw. u_E verlängert wurden. Da sowohl die Kontrollfolgen $u_{N,x}^*(\cdot)$ und $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ als auch die Zustandsfolgen $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ und $\tilde{x}(\cdot, x^+)$ bis auf den ersten Wert von $u_{N,x}^*(\cdot)$ bzw. $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ und den letzten Wert von $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ bzw. $\tilde{x}(\cdot, x^+)$ übereinstimmen, können wir berechnen, dass gilt

$$\begin{aligned} V_N(x) &= J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) \\ &= J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) + l(x_{u_{N,x}^*}(0, x), u_{N,x}^*(0)) - l(x_E, u_E) \\ &= J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) + l(x, \mu_N(x)) - l(x_E, u_E) \\ &\stackrel{(3.11)}{\geq} V_N(x^+) + l(x, \mu_N(x)) - l(x_E, u_E). \end{aligned}$$

Dies liefert uns die gewünschte Ungleichung aus Lemma 3.6.

□

Man beachte, dass im Fall der Standard MPC sich die Ungleichung aus Lemma 3.6 mithilfe von Annahme 2.15 zu

$$V_N(f(x, \mu_N(x))) \leq V_N(x)$$

vereinfacht. Demnach verhält sich die optimale Wertefunktion V_N monoton fallend entlang der Lösungstrajektorien des geschlossenen Regelkreises (2.3). Diese Eigenschaft ist eine wichtige Voraussetzung zur Verwendung von V_N als Lyapunov-Funktion. Im Falle der Ökonomischen Kosten ist diese Ungleichung dagegen nicht mehr gewährleistet, weshalb die optimale Wertefunktion V_N im Ökonomischen Fall nicht mehr als Lyapunov-Funktion für den Stabilitätsbeweis herangezogen werden kann.

Folglich muss der Stabilitätsbeweis für die Ökonomischen Kosten auf eine andere Weise erfolgen. Dies bewerkstelligen wir durch ein Hilfsoptimierungsproblem, welches wir mithilfe der strikten Dissipativitätsannahme formulieren. Dieses Hilfsproblem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x)} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ & \text{u.d.N. } \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), & k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k = 0, \dots, N-1 \\ x_{u_{N,x}}(N, x) = x_E \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dabei bezeichnet L die durch die Speicherfunktion λ modifizierten Stufenkosten, welche definiert sind als

$$L(x, u) = l(x, u) + \lambda(x) - \lambda(f(x, u)). \tag{3.13}$$

Wir stellen nun den eigentlichen Stabilitätssatz dieses Unterabschnitts auf.

Satz 3.7: (Stabilitätssatz für die Gleichgewichtsendpunktbedingung)

Wir betrachten Problemstellung (2.6). Sei (x_E, u_E) der optimale Gleichgewichtspunkt des Systems nach Definition 2.16 und sei das System (2.1) strikt dissipativ mit stetiger Speicherfunktion λ nach Definition 2.24 bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Zudem existiere eine Kugel $\mathcal{B}_\nu(x_E)$ mit $\nu > 0$ sowie eine \mathcal{K}_∞ -Funktion $\tilde{\alpha}_2$, sodass es für jedes $x \in \mathcal{B}_\nu(x_E) \cap \mathbb{X}$ ein $u_x \in \mathbb{U}$ gibt mit $f(x, u_x) = x_E$ und für die modifizierten Kosten aus (3.13) gelte

$$L(x, u_x) \leq \tilde{\alpha}(|x|_{x_E}).$$

Dann stabilisiert das Regelgesetz μ_N den geschlossenen Regelkreis (2.3) asymptotisch bezüglich x_E auf $\mathbb{X}_{N,b}$.

Beweis:

Wie schon erwähnt stellen wir das Hilfoptimierungsproblem (3.12) auf. Man beachte, dass beide Optimierungsprobleme (2.6) und (3.12) die gleichen Nebenbedingungen besitzen und sich nur in ihren Zielfunktionen J_N und \tilde{J}_N unterscheiden. Somit stimmen auch die Mengen der zulässigen Kontrollfolgen und Trajektorien beider Problemstellungen überein.

Des Weiteren zeigen wir, dass auch die optimalen Kontrollfolgen beider Problemstellungen (2.6) und (3.12) identisch sind. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(k, x)) \right. \\
 &\quad \left. - \lambda(f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k))) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(k, x)) \right. \\
 &\quad \left. - \lambda(x_{u_{N,x}}(k+1, x)) \right) \\
 &= \lambda(x_{u_{N,x}}(0, x)) - \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\
 &= \lambda(x) - \lambda(x_E) + J_N(x, u_{N,x}(\cdot)).
 \end{aligned}$$

Die beiden zu minimierenden Zielfunktionen J_N und \tilde{J}_N unterscheiden sich also nur um den Term $\lambda(x) - \lambda(x_E)$, welcher konstant bezüglich $u_{N,x}$ ist. Wir folgern daraus, dass beide Zielfunktionen von derselben Kontrollfolge minimiert werden. Entsprechend stimmen die optimalen Lösungen beider Problemstellungen (2.6) und (3.12) überein. Der Kandidat für die Lyapunov-Funktion ist somit die optimale Wertefunktion des Hilfsoptimierungsproblems (3.12), die wir mit

$$\tilde{V}_N(x) = \inf_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot))$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ bezeichnen wollen. Wenn \tilde{V}_N alle Voraussetzungen einer Lyapunov-Funktion erfüllt und infolgedessen asymptotische Stabilität für den geschlossenen Regelkreis des Hilfsproblems (3.12) garantiert, überträgt sich dies durch die Übereinstimmung der optimalen Lösungen auch auf den geschlossenen Regelkreis des Originalproblems (2.6). Demzufolge bleibt nur noch zu zeigen, dass \tilde{V}_N der Definition einer Lyapunov-Funktion genügt. Wir beginnen mit der Ungleichung aus Definition 3.4 (ii). Dazu setzen wir mit der strikten Dissipativitätsungleichung aus Definition 2.24 (ii) an und

formen diese um zu

$$\begin{aligned}
 & \lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq -\rho(|x|_{x_E}) + s(x, u) \\
 \Leftrightarrow & \lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq -\rho(|x|_{x_E}) + l(x, u) - l(x_E, u_E) \\
 \Leftrightarrow & l(x_E, u_E) \leq l(x, u) + \lambda(x) - \lambda(f(x, u)) - \rho(|x|_{x_E}) \\
 \Leftrightarrow & l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \leq L(x, u) - \rho(|x|_{x_E}) \\
 \Leftrightarrow & l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E)) \leq L(x, u) - \rho(|x|_{x_E}) \\
 \Leftrightarrow & L(x_E, u_E) \leq L(x, u) - \rho(|x|_{x_E})
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$. Nun greifen wir auf das [Hilfslemma 3.6](#) zurück und wenden es auf das Hilfsproblem (3.12) an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_N(f(x, \mu_N(x))) & \leq \tilde{V}_N(x) + L(x_E, u_E) - L(x, \mu_N(x)) \\
 & \stackrel{(3.14)}{\leq} \tilde{V}_N(x) - \rho(|x|_{x_E}).
 \end{aligned}$$

Da ρ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, folgt die Ungleichung aus [Definition 3.4 \(ii\)](#). Als nächstes zeigen wir die linke Ungleichung in [Definition 3.4 \(i\)](#). Diesbezüglich berechnen wir, dass aus (3.13) und [Annahme 2.17](#) für die modifizierten Stufenkosten am optimalen Gleichgewichtspunkt gilt

$$\begin{aligned}
 L(x_E, u_E) & = l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E)) \\
 & = \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nun betrachten wir nochmals Ungleichung (3.14) und verbinden diese mit (3.15), wodurch für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ folgt

$$L(x, u) \geq \rho(|x|_{x_E}).$$

Zudem erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_N(x) & = \tilde{J}_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) \\
 & \geq \sum_{k=0}^{N-1} \rho(|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E}) \\
 & = \rho(|x|_{x_E}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \rho(|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E})}_{\geq 0} \\
 & \geq \rho(|x|_{x_E})
 \end{aligned}$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

mit derselben \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ . Für die rechte Seite von [Definition 3.4 \(i\)](#) verweisen wir auf den Beweis von [Proposition 5.7 \(ii\)](#) aus [\[6\]](#). Dieser lässt sich in der gleichen Form auf die Hilfsproblemstellung [\(3.12\)](#) übertragen.

□

3.2.2 Endkosten und Endregion

Dieser Unterabschnitt ist analog zum vorherigen Unterabschnitt gegliedert und führt die selben Schritte durch. Um die entsprechenden Schritte ausarbeiten zu können, müssen wir eine zusätzliche Annahme an die Endkosten stellen. Wir betrachten in diesem Unterabschnitt das Optimierungsproblem mit Endkosten und Endregion (2.7).

Die zusätzliche Annahme an die Endkosten, auf die wir in der Herleitung des Stabilitätssatzes noch angewiesen sind, wollen wir sogleich formulieren.

Annahme 3.8:

Es existiert ein Kontrollgesetz $\mu_0 : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{U}$, sodass für die Endkosten die Ungleichung

$$F(f(x, \mu_0(x))) - F(x) \leq l(x_E, u_E) - l(x, \mu_0(x))$$

für alle $x \in \mathbb{X}_0$ erfüllt ist. Zusätzlich sei \mathbb{X}_0 vorwärts invariant bezüglich dieses Kontrollgesetzes, d.h. für alle $x \in \mathbb{X}_0$ gelte $\mu_0(x) \in \mathbb{X}_0$.

Auch für diese Problemstellung (2.7) benötigen wir ein zu Lemma 3.6 analoges Hilfslemma, welches die Differenz der optimalen Wertefunktion entlang der Trajektorien des geschlossenen Regelkreises mithilfe der Kostenfunktion abschätzt.

Lemma 3.9:

Wir betrachten Problemstellung (2.7). Sei Annahme 3.8 erfüllt. Dann gilt für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{X}_{N,F}$, dass die Ungleichung

$$V_N(f(x, \mu_N(x))) - V_N(x) \leq l(x_E, u_E) - l(x, \mu_N(x))$$

erfüllt ist.

Beweis:

Wir führen den Beweis analog zum Beweis von Lemma 3.6 durch. Sei dazu wieder $u_{N,x}^*(\cdot)$ eine optimale Kontrollfolge für das Problem mit den Endkosten (2.7). Folglich gilt

$$V_N(x) = J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)).$$

Die einzelnen Komponenten bezeichnen wir mit

$$u_{N,x}^*(\cdot) = (u_{N,x}^*(0), u_{N,x}^*(1), \dots, u_{N,x}^*(N-1))$$

und die zugehörige Zustandstrajektorie mit

$$x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x) = (x, x_{u_{N,x}^*}(1, x), \dots, x_{u_{N,x}^*}(N, x)).$$

Den auf x folgenden Zustandswert kennzeichnen wir erneut mit x^+ , wobei gilt

$$x^+ = x_{u_{N,x}^*}(1, x) = f(x, u_{N,x}^*(0)) = f(x, \mu_N(x)).$$

Für diesen neuen Startwert x^+ soll nun $u_{N,x^+}^*(\cdot)$ eine optimale Trajektorie für selbige Problemstellung (2.7) sein, d.h.

$$V_N(x^+) = J_N(x^+, u_{N,x^+}^*(\cdot)).$$

Dabei ist u_{N,x^+}^* gegeben ist durch

$$u_{N,x^+}^*(\cdot) = (u_{N,x^+}^*(0), u_{N,x^+}^*(1), \dots, u_{N,x^+}^*(N-1)).$$

Um $V_N(x)$ und $V_N(x^+)$ miteinander zu vergleichen, schätzen wir wie gehabt $V_N(x^+)$ ab durch

$$V_N(x^+) = J_N(x^+, u_{N,x^+}^*(\cdot)) \leq J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)) \quad (3.16)$$

und wählen $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ als

$$\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot) = (u_{N,x}^*(1), u_{N,x}^*(2), \dots, u_{N,x}^*(N-1), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))).$$

Wir wählen hier als letzten Wert das Kontrollgesetz aus [Annahme 3.8](#). Dies können wir verwenden, da laut Nebenbedingungen von Problemstellung (2.7) $x_{u_{N,x}^*}(N, x) \in \mathbb{X}_0$ erfüllt sein muss. Da $x^+ = f(x, u_{N,x}^*(0))$ gilt, ergibt sich auch hier die zugehörige Zustandsfolge $\tilde{x}(\cdot, x^+) := x_{\tilde{u}_{N,x^+}}(\cdot, x^+)$ als

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\cdot, x^+) = \\ (x_{u_{N,x}^*}(1, x), x_{u_{N,x}^*}(2, x), \dots, x_{u_{N,x}^*}(N, x), f(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x)))). \end{aligned}$$

Die so gewählten Folgen $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ und $\tilde{x}(\cdot, x^+)$ sind abermals zulässig, da sie Teile von optimalen Trajektorien bilden, die um $\mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))$ bzw. $f(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x)))$ verlängert wurden. Darüber hinaus gilt laut [Annahme 3.8](#) sowohl

$$f(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))) \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

als auch

$$\mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x)) \in \mathbb{U}.$$

Die Kontrollfolgen $u_{N,x}^*(\cdot)$ und $\tilde{u}_{N,x^+}(\cdot)$ und die Zustandsfolgen $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ und $\tilde{x}(\cdot, x^+)$ stimmen erneut bis auf den ersten und letzten Wert überein und wir berechnen abermals

$$\begin{aligned} V_N(x) &= J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) \\ &= J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) + l(x, \mu_N(x)) - l(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))) \\ &\quad + F(x_{u_{N,x}^*}(N, x)) - F(f(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x)))). \end{aligned}$$

Da $x_{u_{N,x}^*}(N, x) \in \mathbb{X}_0$ gilt, verwenden wir die Abschätzung aus [Annahme 3.8](#) für die beiden hinteren Terme und erhalten

$$\begin{aligned} V_N(x) &\geq J_N(x^+, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) + l(x, \mu_N(x)) - l(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))) \\ &\quad + l(x_{u_{N,x}^*}(N, x), \mu_0(x_{u_{N,x}^*}(N, x))) - l(x_E, u_E). \\ &\stackrel{(3.16)}{\geq} V_N(x^+) + l(x, \mu_N(x)) - l(x_E, u_E). \end{aligned}$$

□

Auch hier verwenden wir für den Stabilitätsbeweis den Trick mit dem Hilfs-Optimierungsproblem, welches diesmal durch

$$\min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x)} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot))$$

$$\text{mit } \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \tilde{F}(x_{u_{N,x}}(N, x))$$

$$\text{u.d.N.} \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x_{u_{N,x}}(N, x) \in \mathbb{X}_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

gegeben ist. Indes stellen L wie zuvor die modifizierten Stufenkosten [\(3.13\)](#) dar und \tilde{F} die modifizierten Endkosten, gegeben durch

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \lambda(x) - \lambda(x_E). \quad (3.18)$$

Es folgt der Stabilitätssatz dieses Unterabschnitts.

Satz 3.10: (Stabilitätssatz für Endkosten und Endregion)

Wir betrachten Problemstellung (2.7). Es seien [Annahme 3.8](#) erfüllt, (x_E, u_E) der optimale Gleichgewichtspunkt des Systems (2.1) nach [Definition 2.16](#) und das System strikt dissipativ mit stetiger Speicherfunktion λ nach [Definition 2.24](#) bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Zudem existiere eine Kugel $\mathcal{B}_\nu(x_E) \subseteq \mathbb{X}_0$ mit $\nu > 0$ sowie eine \mathcal{K}_∞ -Funktion $\tilde{\alpha}_2$, sodass für die modifizierten Endkosten aus (3.18) für alle $x \in \mathcal{B}_\nu(x_E) \cap \mathbb{X}_0$ gelte

$$\tilde{F}(x) \leq \tilde{\alpha}(|x|_{x_E}).$$

Dann stabilisiert das Regelgesetz μ_N den geschlossenen Regelkreis (2.3) asymptotisch bezüglich x_E auf $\mathbb{X}_{N,F}$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt wieder analog zum Beweis von [Satz 3.7](#) mit einigen Anpassungen und zusätzlichen Berechnungen zu den Endkosten. Auch hier besitzen beide Optimierungsprobleme (2.7) und (3.17) die gleichen Nebenbedingungen und unterscheiden sich nur in ihren Zielfunktionen. Damit stimmen auch die Mengen der zulässigen Kontrollfolgen und Trajektorien der beiden Problemstellungen (2.7) und (3.17) überein.

Um zu zeigen, dass die optimalen Lösungen von beiden Problemen identisch sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \tilde{F}(x_{u_{N,x}}(N, x)) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(k, x)) \right. \\ &\quad \left. - \lambda(x_{u_{N,x}}(k+1, x)) \right) \\ &\quad + F(x_{u_{N,x}}(N, x)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)) - \lambda(x_E) \\ &= \lambda(x_{u_{N,x}}(0, x)) - \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ &\quad + F(x_{u_{N,x}}(N, x)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)) - \lambda(x_E) \\ &= \lambda(x) - \lambda(x_E) + J_N(x, u_{N,x}(\cdot)). \end{aligned}$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Die beiden Zielfunktionen J_N und \tilde{J}_N unterscheiden sich nur um eine Konstante und werden dementsprechend von derselben Kontrollfolge minimiert. Der Kandidat für die Lyapunov-Funktion ist abermals die optimale Wertefunktion des Hilfoptimierungsproblems (3.17), die gegeben ist durch

$$\tilde{V}_N(x) = \inf_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot))$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,F}$. Nun bleibt zu zeigen, dass \tilde{V}_N die Voraussetzungen einer Lyapunov-Funktion erfüllt. Wir zeigen als erstes wieder die Ungleichung aus Definition 3.4 (ii). Um Hilfslemma 3.9 anwenden zu können, müssen wir erst aufzeigen, dass Annahme 3.8 auch für die modifizierten Endkosten (3.18) erfüllt ist. Im Hinblick darauf setzen wir mit der Ungleichung aus Annahme 3.8 für die originalen Endkosten F an und berechnen

$$\begin{aligned} F(f(x, \mu_0(x))) &\leq F(x) + l(x_E, u_E) - l(x, \mu_0(x)) \\ \Leftrightarrow \tilde{F}(f(x, \mu_0(x))) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x, \mu_0(x))) &\leq \tilde{F}(x) + \lambda(x_E) - \lambda(x) \\ &\quad + l(x_E, u_E) - l(x, \mu_0(x)) \\ \Leftrightarrow \tilde{F}(f(x, \mu_0(x))) + l(x, \mu_0(x)) + \lambda(x) - \lambda(f(x, \mu_0(x))) &\leq \tilde{F}(x) + l(x_E, u_E) \\ &\quad + \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \\ \Leftrightarrow \tilde{F}(f(x, \mu_0(x))) + L(x, \mu_0(x)) &\leq \tilde{F}(x) + L(x_E, u_E). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entsprechend können wir nun Hilfslemma 3.9 für das Problem (3.17) verwenden und erhalten mithilfe der umgeformten strikten Dissipativitätsungleichung (3.14), dass gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(f(x, \mu_N(x))) &\leq \tilde{V}_N(x) + L(x_E, u_E) - L(x, \mu_N(x)) \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} \tilde{V}_N(x) - \rho(|x|_{x_E}). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir erneut erst die linke Ungleichung in Definition 3.4 (i). Diesbezüglich müssen wir aber erst beweisen, dass die modifizierten Endkosten $\tilde{F}(x)$ aus (3.18) nichtnegativ sind für alle $x \in \mathbb{X}_0$. Als erstes verwenden wir Ungleichung (3.19) und kombinieren diese mit Ungleichung (3.14). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{F}(f(x, \mu_0(x))) &\leq \tilde{F}(x) + L(x_E, u_E) - L(x, \mu_0(x)) \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} \tilde{F}(x) - \rho(|x|_{x_E}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Demzufolge sind die modifizierten Endkosten \tilde{F} entlang der Trajektorien, die vom Regelgesetz μ_0 erzeugt werden, strikt monoton fallend. Bezeichne nun $x_{\mu_0}(\cdot, x)$ solch eine Zustandstrajektorie, die vom Regelgesetz μ_0 zu

einem beliebigen Anfangswert $x \in \mathbb{X}_0$ generiert wird. Die Region \mathbb{X}_0 ist kompakt und vorwärtsinvariant bezüglich μ_0 laut Annahmen 2.11 und 3.8 ist. Somit ist $\tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x))$ beschränkt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{X}_0$, da $\tilde{F}(x_{\mu_0}(\cdot, x))$ aufgrund der Stetigkeit von F und λ ebenfalls stetig auf \mathbb{X}_0 ist. Damit gilt weiterhin, dass der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x))$$

für alle $x \in \mathbb{X}_0$ existiert. Wir wollen diesen Limes mit

$$\tilde{F}_\infty(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x))$$

bezeichnen. Als nächsten Schritt schreiben wir Ungleichung (3.20) nochmals um, indem wir sie auf jedes Folgenglied der Zustandstrajektorie $x_{\mu_0}(\cdot, x)$ anwenden und erhalten

$$\tilde{F}(x_{\mu_0}(k+1, x)) - \tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x)) \leq -\rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) \quad (3.21)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn wir nun den Grenzwert für $k \rightarrow \infty$ von Ungleichung (3.21) bilden, bekommen wir

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(k+1, x)) - \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x)) \leq -\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) \\ \Leftrightarrow & \tilde{F}_\infty(x) - \tilde{F}_\infty(x) \leq -\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq -\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}). \end{aligned}$$

Da ρ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, kann die letzte Ungleichung aber nur dann erfüllt sein, wenn

$$\begin{aligned} -\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) & \stackrel{\rho \text{ stetig}}{=} -\rho\left(\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}\right) \\ & = -\rho(|x_E|_{x_E}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\mu_0}(k, x) = x_E$$

gilt. Sei des Weiteren o.B.d.A. $F(x_E) = 0$ (vgl. [Bemerkung 2.12](#)). Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_E) & = F(x_E) + \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Demnach gilt für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\infty(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x)) \\ &\stackrel{\tilde{F} \text{ stetig}}{=} \tilde{F}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\mu_0}(k, x)\right) \\ &= \tilde{F}(x_E) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Anschließend summieren wir (3.21) über $k = 0, \dots, T - 1$ auf

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} \left(\tilde{F}(x_{\mu_0}(k, x)) - \tilde{F}(x_{\mu_0}(k+1, x)) \right) &\geq \sum_{k=0}^{T-1} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) \\ \Leftrightarrow \tilde{F}(x_{\mu_0}(0, x)) - \tilde{F}(x_{\mu_0}(T, x)) &\geq \sum_{k=0}^{T-1} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E})\end{aligned}$$

und bilden den Grenzwert für $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(0, x)) - \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{F}(x_{\mu_0}(T, x)) &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{T-1} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}) \\ \Rightarrow \tilde{F}(x) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \rho(|x_{\mu_0}(k, x)|_{x_E}).\end{aligned}$$

Aus der Definition einer \mathcal{K}_∞ -Funktion folgt damit $\tilde{F}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{X}_0$. Schließlich können wir mit der Herleitung der linken Ungleichung aus der Definition 3.4 (i) fortfahren. Aus (3.14) und (3.15) geht hervor, dass

$$L(x, u) \geq \rho(|x|_{x_E})$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ gilt. Insofern können wir abermals berechnen

$$\begin{aligned}\tilde{V}_N(x) &= \tilde{J}_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) + \underbrace{\tilde{F}(x_{u_{N,x}^*}(N, x))}_{\geq 0, \text{ da } x_{u_{N,x}^*}(N, x) \in \mathbb{X}_0} \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \rho(|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E}) \\ &= \rho(|x|_{x_E}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \rho(|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E})}_{\geq 0} \\ &\geq \rho(|x|_{x_E})\end{aligned}$$

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

mit $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. Für die rechte Seite von [Definition 3.4 \(i\)](#) können wir abermals auf [\[6\]](#) verweisen, genauer auf den Beweis von [Proposition 5.14 \(ii\)](#). Dieser lässt sich analog auf das Hilfsproblem [\(3.17\)](#) übertragen.

□

3.3 Stabilitätssatz für unendlichen Horizont

Schließlich wollen wir diesen Abschnitt der Stabilität des Regelgesetzes μ_∞ für unendlichen Horizont weihen und diese unter bestimmten Voraussetzungen beweisen. Die wichtigste dieser Voraussetzungen repräsentiert dabei erneut die strikte Dissipativität des Systems (2.1). Um die asymptotische Stabilität für unendlichen Horizont herzuleiten, werden wir uns vor allem auf Ergebnisse aus Abschnitt III in [7] und Kapitel 4 in [6] stützen.

Wir betrachten in diesem Abschnitt also das Optimierungsproblem auf unendlichem Horizont (2.5).

Der Beweis der asymptotischen Stabilität des geschlossenen Regelkreises (2.3) wird für das Problem (2.5) gleichermaßen durch ein Hilfoptimierungsproblem erfolgen, welches uns eine geeignete Lyapunov-Funktion darbieten wird. Um auf diese Weise verfahren zu können, müssen wir allerdings erst Bedingungen aufstellen, die die Beschränktheit der optimalen Wertefunktion V_∞ für das Optimierungsproblem (2.5) garantieren. Eine dieser Bedingungen ist die folgende asymptotische Kontrollierbarkeit des Systems (2.1), welche in der nächsten Annahme vorgestellt wird. Diese Annahme stimmt mit der Definition 4.2 aus [6] überein.

Annahme 3.11: (Asymptotische Kontrollierbarkeit)

Wir betrachten Problemstellung (2.5).

- (i) Das System (2.1) sei asymptotisch kontrollierbar bezüglich des optimalen Gleichgewichtspunktes (x_E, u_E) , d.h. es existiert eine \mathcal{KL} -Funktion $\tilde{\beta}$, sodass für alle Anfangswerte $x \in \mathbb{X}_\infty$ eine zulässige Kontrollfolge $u(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty(x)$ existiert, sodass die Ungleichung

$$|x_u(k, x)|_{x_E} \leq \tilde{\beta}(|x|_{x_E}, k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

- (ii) Die asymptotische Kontrollierbarkeit besitze zudem die Eigenschaft der kleinen Kontrolle, d.h. $u(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty(x)$ kann so gewählt werden, dass

$$|x_u(k, x)|_{x_E} + |u(k)|_{u_E} \leq \tilde{\beta}(|x|_{x_E}, k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Als erstes werden wir in einem separaten Satz beweisen, dass die asympto-

tische Kontrollierbarkeit und strikte Dissipativität des Systems (2.1) unter zusätzlichen Annahmen implizieren, dass die optimale Wertefunktion $V_\infty(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$ beschränkt ist. Unter Verwendung der Beschränktheit von V_∞ lässt sich dann unter nahezu den selben Annahmen die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises (2.3) mittels der oben erwähnten Idee herleiten.

Des Weiteren benötigen wir noch zwei vorbereitende Lemmata und zwei zusätzliche Annahmen an die Kostenfunktion und die optimale Wertefunktion. Wir beginnen mit dem ersten Lemma, auch bekannt als Sontags \mathcal{KL} -Lemma. Dieses Lemma hilft uns die \mathcal{KL} -Funktion $\tilde{\beta}$ aus [Annahme 3.11](#) mithilfe zweier \mathcal{K}_∞ -Funktionen abzuschätzen. Es lautet wie folgt:

Lemma 3.12: (Sontags \mathcal{KL} -Lemma)

Für jede \mathcal{KL} -Funktion $\tilde{\beta}$ existieren zwei \mathcal{K}_∞ -Funktionen γ_1 und γ_2 , sodass die Ungleichung

$$\tilde{\beta}(r, k) \leq \gamma_1(e^{-k} \cdot \gamma_2(r))$$

für alle $r \geq 0$ und alle $k \geq 0$ erfüllt ist.

Beweis:

Für den Beweis verweisen wir auf Proposition 7 in [10].

⊠

Mit der ersten der beiden \mathcal{K}_∞ -Funktionen aus [Lemma 3.12](#) wollen wir die Ökonomischen Kosten nun folgendermaßen in der nächsten Annahme abschätzen.

Annahme 3.13: (Abschätzung der Ökonomischen Kosten)

Es existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion γ_1 , sodass für die Kostenfunktion (2.2) die Ungleichung

$$l(x, u) \leq \gamma_1^{-1}(|x|_{x_E}) + \lambda \cdot \gamma_1^{-1}(|u|_{u_E})$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ und ein $\lambda \geq 0$ erfüllt ist.

Zu guter Letzt soll die folgende Annahme die Stetigkeit von V_∞ sicherstellen.

Annahme 3.14: (Stetigkeit der optimalen Wertefunktion)

Die optimale Wertefunktion $V_\infty(\cdot)$ von Problemstellung (2.5) sei stetig auf \mathbb{X}_∞ .

Für das zweite Lemma, dessen Ergebnis wir im Beweis des nächsten Satzes verwenden werden, aufstellen zu können, halten wir die folgende Definition des verfügbaren Speichers fest. Diese Definition stellt ein Analogon zu Definition 3 aus [7] für die Problemstellung ohne Durchschnittsbeschränkungen dar.

Definition 3.15: (Verfügbare Speicher)

Für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{X}$ ist der verfügbare Speicher S_a des Systems (2.1) mit den Beschränkungen $(x, u) \in \mathbb{Z}$ definiert als

$$S_a(x) := \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0,x)=x \\ x_u(k+1,x)=f(x_u(k,x),u(k)) \\ (x_u(k,x),u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k,x), u(k)),$$

wobei s die Versorgungsrate des Systems darstellt.

Bemerkung 3.16:

Man beachte, dass man in der obigen Definition für $T = 0$ die leere Summe

$$\sum_{k=0}^{-1} -s(x_u(k,x), u(k)) := 0$$

erhält, welche definitionsgemäß gleich Null ist. Somit ist der verfügbare Speicher S_a nach unten für alle $x \in \mathbb{X}$ durch Null beschränkt und demnach nichtnegativ.

□

Im Folgenden wollen wir die Interpretation von Dissipativität aus energetischer Sicht, die wir in Abschnitt 2.3 erbracht haben, auf den verfügbaren Speicher ausweiten. In dieser Interpretation stellte $s(x, u)$ die Energieversorgungsrate des Systems (2.1) für alle Paare $(x, u) \in \mathbb{Z}$ dar. Dabei bedeutete ein positiver Wert von s , dass dem System Energie zugeführt und ein negativer Wert von s , dass dem System Energie entzogen wurde.

Als erstes weisen wir nun darauf hin, dass in der Definition des verfügbaren Speichers S_a ein Minus vor der Versorgungsrate s steht. Dementsprechend trägt gerade die dem System in einem Punkt $(x, u) \in \mathbb{Z}$ entzogene Energie einen positiven Summanden $-s(x, u)$ zur Summe in [Definition 3.15](#) bei, da in diesem Fall $s(x, u) < 0$ gilt. Dem System in $(x, u) \in \mathbb{Z}$ zugeführte Energie hingegen führt zu einem negativen Summanden $-s(x, u)$ aufgrund von $s(x, u) > 0$. Der verfügbare Speicher $S_a(x)$ zu einem Anfangswert $x \in \mathbb{X}$ stellt also das Supremum über die aufsummierten Energieversorgungswerte (mit umgedrehtem Vorzeichen) aller vom System erzeugten zulässigen Trajektorien $x_u(\cdot, x)$ beliebiger Länge $T \geq 0$ dar. Somit kann der verfügbare Speicher S_a nur dann größer Null sein, wenn man dem System [\(2.1\)](#) mehr Energie entziehen kann als man ihm zuführt.

Zusammengefasst kennzeichnet der verfügbare Speicher $S_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}$ demnach eine obere Schranke der Energie, die man dem System in einem beliebig langen Zeitraum entziehen kann, wobei vorher zugeführte Energie nicht mit berücksichtigt wird. Unter diesem Gesichtspunkt kann man leicht folgern, dass ein positiver verfügbarer Speicher $S_a(x) > 0$ für ein $x \in \mathbb{X}$ impliziert, dass das System entweder selber Energie erzeugen kann oder aber im Zustand x eine Anfangsenergiemenge gespeichert hatte. Wir werden die Interpretation an dieser Stelle unterbrechen und nach dem folgenden Lemma fortführen.

Mithilfe von [Definition 3.15](#) formulieren wir das zweite Lemma, welches die Dissipativitätseigenschaft mit dem verfügbaren Speicher S_a in Zusammenhang bringt und dem Theorem 2 aus [\[7\]](#) gleicht. Die ursprüngliche Version für kontinuierliche Systeme kann man dagegen in [\[11\]](#), Theorem 1 finden.

Lemma 3.17: (Dissipativität und Verfügbarer Speicher)

Das System [\(2.1\)](#) ist genau dann dissipativ bezüglich der Versorgungsrate s , wenn der verfügbare Speicher S_a des Systems beschränkt auf \mathbb{X} ist.

Wir fahren nun mit der Interpretation des verfügbaren Speichers S_a fort und beurteilen [Lemma 3.17](#) aus der energetischen Sicht des Systems [\(2.1\)](#). Das System [\(2.1\)](#) ist also genau dann dissipativ, wenn S_a beschränkt ist. Wir haben schon in [Bemerkung 3.16](#) festgestellt, dass S_a nichtnegativ und dementsprechend von unten durch Null beschränkt ist.

Für den Fall $S_a(x) = 0$ kann dem System mit Anfangszustand $x \in \mathbb{X}$ keine Energie entzogen werden, die nicht vorher zugeführt wurde. Dies entspricht aber genau unserer Interpretation eines dissipativen Systems aus [Abschnitt 2.3](#).

Auch der Fall mit $0 < S_a(x) < \infty$ für $x \in \mathbb{X}$ kann auf ein dissipatives System zurückgeführt werden, indem man die Speicherfunktion aus [Definition 2.24](#) als $\lambda(x) := S_a(x)$ definiert. Dies ist möglich, da $S_a(x)$ beschränkt ist. In diesem Fall stellt $\lambda(x) = S_a(x)$ die Anfangsenergie dar, die das System im Zustand x gespeichert hat und das System erzeugt selbst keine weitere Energie. Somit kann man auch für $0 < S_a(x) < \infty$ auf ein dissipatives System schließen.

Schließlich betrachten wir den unbeschränkten Fall $S_a(x) = \infty$ für $x \in \mathbb{X}$. Das bedeutet also, dass dem System eine unendlich große Energiemenge entzogen werden kann, die vorher nicht zugeführt wurde. Da das System im Anfangswert x nur eine begrenzte Menge an Energie speichern kann (Speicherfunktion ist beschränkt auf \mathbb{X}), folgern wir, dass das System selber Energie erzeugen muss, um $S_a(x) = \infty$ zu erfüllen. Dies kann dann aber kein dissipatives System mehr sein.

Wenn man nun diese drei Fälle zusammenfasst, erhält man genau die Aussage aus [Lemma 3.17](#).

Wir wollen abschließend [Lemma 3.17](#) beweisen. Allerdings werden wir uns nicht an dem ursprünglichen Beweis orientieren, welcher in [\[11\]](#) zu finden ist und für kontinuierliche Systeme ohne Beschränkungen aufgestellt wurde. Stattdessen stellen wir in unserem Beweis eine mathematische Ausführung obiger Interpretationsidee vor.

Beweis: ([Lemma 3.17](#))

" \Rightarrow :"

Wir zeigen als erstes die Hinrichtung. Sei also das System dissipativ bezüglich der Versorgungsrate s nach [Definition 2.24 \(i\)](#). Dann existiert eine auf \mathbb{X} beschränkte Funktion $\lambda : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Ungleichung

$$\lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq s(x, u)$$

für alle Zustands-Kontrollpaare $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Wenn wir diese Ungleichung für eine zulässige Trajektorie $x_u(\cdot, x)$ mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}$ über $k = 0, \dots, T - 1$ aufsummieren, erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{T-1} \left(\lambda(x_u(k+1), x) - \lambda(x_u(k), x) \right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} s(x_u(k), x, u(k)),$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k), x, u(k)) \leq \lambda(x) - \lambda(x_u(T), x).$$

Wir wissen bereits, dass λ beschränkt ist laut [Definition 2.24](#). Sei dazu

$$C := 2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}} |\lambda(x)|.$$

Dann können wir die rechte Seite abschätzen mit

$$\sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \leq C.$$

Diese Ungleichung ist nun für beliebige $T \in \mathbb{N}_0$ und beliebige zulässige Trajektorien $x_u(\cdot, x)$ erfüllt. Demzufolge bleibt die Ungleichung erhalten, wenn wir das Supremum der linken Seite über alle $T \in \mathbb{N}_0$ und alle zulässigen Trajektorien $x_u(\cdot, x)$ bilden. Dies liefert uns anschließend

$$\sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0, x) = x \\ x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)) \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \leq C.$$

Die linke Seite ist gerade der verfügbare Speicher S_a und wir erhalten schlußendlich

$$0 \leq S_a(x) \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{X}$. Damit wäre die Hinrichtung bewiesen.

" \Leftarrow :"

Kommen wir nun zur Rückrichtung. Sei also der verfügbare Speicher S_a beschränkt auf \mathbb{X} . Demnach können wir ihn als Speicherfunktion $\lambda(x) := S_a(x)$ des Systems (2.1) verwenden. Im nächsten Schritt wollen wir den verfügbaren Speicher zu einem Anfangswert $x \in \mathbb{X}$ mit dem verfügbaren Speicher zum Nachfolgewert $f(x, u) \in \mathbb{X}$, der durch einen beliebigen Kontrollwert $u \in \mathbb{U}$ erzeugt wird, vergleichen.

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Dazu bilden wir die Differenz

$$\begin{aligned}
\lambda(x) - \lambda(f(x, u)) &= S_a(x) - S_a(f(x, u)) \\
&= \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0, x) = x \\ x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)) \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \\
&\quad - \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0, x) = f(x, u) \\ x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)) \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \\
&\geq -s(x, u) + \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(1, x) = f(x, u) \\ x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)) \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \\
&\quad - \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0, x) = f(x, u) \\ x_u(k+1, x) = f(x_u(k, x), u(k)) \\ (x_u(k, x), u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k, x), u(k)) \\
&= -s(x, u).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich die beiden Suprema in der vorletzten Zeile gegenseitig aufheben, zumal sie den selben Wert liefern. Dies begründen wir damit, dass das Supremum über alle $T \geq 0$ gebildet wird und somit T beliebig sein kann. Hinzukommend werden beide Male die gleichen Bedingungen an das Supremum gestellt mit dem einzigen Unterschied, dass einmal die Summe mit $k = 0$ und einmal mit $k = 1$ initialisiert wird. Infolgedessen wird beide Male über die Versorgungsrate der selben Zustands-Kontrollpaare aufsummiert mit dem Unterschied, dass für $k = 0$ das T um Eins niedriger sein wird als für $k = 1$. Insgesamt erhalten wir damit

$$\lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq s(x, u)$$

für beliebige Paare $(x, u) \in \mathbb{Z}$. Dies entspricht der Dissipativitätsungleichung aus [Definition 2.24 \(i\)](#).

☒

Schließlich sind wir im Besitz aller Werkzeuge, die wir für den Beweis des nächsten Satzes benötigen. Dieser liefert uns eine untere sowie obere Schranke für die optimale Wertefunktion $V_\infty(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$.

Satz 3.18: (Beschränktheit der optimalen Wertefunktion)

Wir betrachten Problemstellung (2.5). Das System (2.1) erfülle die asymptotische Kontrollierbarkeitsannahme 3.11 (i) und die strikte Dissipativitätsbedingung aus Definition 2.24 für die Versorgungsrate (2.10). Seien zudem die Ökonomischen Kosten (2.2) so wählbar, dass sie Annahme 3.13 für $\lambda = 0$ erfüllen. Dann existieren zwei Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle Anfangswerte $x \in \mathbb{X}_\infty$ gilt

$$C_1 \leq V_\infty(x) \leq C_2.$$

Wenn zusätzlich die Eigenschaft der kleinen Kontrolle aus Annahme 3.11 (ii) gegeben ist, dann gilt diese Ungleichung auch für Kosten, die Annahme 3.13 für beliebige $\lambda \geq 0$ erfüllen.

Beweis:

Wir zeigen erst die obere Schranke $V_\infty(x) \leq C_2$. Wir berechnen für allgemeine $\lambda \geq 0$ und für eine Kontrollfolge $u_{N,x}(\cdot)$, die Annahme 3.11 (ii) erfüllt, dass gilt

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &\leq J_\infty(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ &\stackrel{\text{Ann. 3.13}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\gamma_1^{-1}(|x_{u_{N,x}}(k, x)|_{x_E}) + \lambda \cdot \gamma_1^{-1}(|u_{N,x}(k)|_{u_E}) \right) \\ &\stackrel{\text{Ann. 3.11 (ii)}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\gamma_1^{-1}(\tilde{\beta}(|x|_{x_E}, k)) + \lambda \cdot \gamma_1^{-1}(\tilde{\beta}(|x|_{x_E}, k)) \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.12}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda) \cdot e^{-k} \gamma_2(|x|_{x_E}) \\ &\stackrel{\substack{\text{geometr.} \\ \text{Reihe}}}{=}{\frac{(1 + \lambda) \cdot \gamma_2(|x|_{x_E})}{1 - \frac{1}{e}}} \\ &= \frac{(1 + \lambda) \cdot e \cdot \gamma_2(|x|_{x_E})}{e - 1}. \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$. Da \mathbb{X} kompakt ist laut Annahme 2.2 und somit $\mathbb{X}_\infty \subseteq \mathbb{X}$ beschränkt ist, können wir

$$C_2 := \left((1 + \lambda) \cdot e \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_\infty} \gamma_2(|x|_{x_E}) \right) / (e - 1)$$

wählen und erhalten damit die gewünschte obere Schranke $V_\infty(x) \leq C_2$ für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$. Der Sonderfall mit $\lambda = 0$ ergibt sich durch analoge Vorgehensweise, indem jedes λ in der obigen Rechnung gleich Null gesetzt wird. Man beachte außerdem, dass in diesem Fall nur noch die [Annahme 3.11 \(i\)](#) - und nicht mehr [\(ii\)](#) - gebraucht wird. Es bleibt noch die untere Schranke $V_\infty(x) \geq C_1$ zu zeigen. Dafür machen wir Gebrauch von [Lemma 3.17](#), welches dank der Dissipativitätsannahme in Kraft tritt. Dieses Lemma sagt aus, dass der verfügbare Speicher S_a auf \mathbb{X} und demnach insbesondere auch auf $\mathbb{X}_\infty \subseteq \mathbb{X}$ beschränkt ist. Demzufolge existiert eine Konstante $c < \infty$ mit

$$S_a(x) = \sup_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0,x)=x \\ x_u(k+1,x)=f(x_u(k,x),u(k)) \\ (x_u(k,x),u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} -s(x_u(k,x), u(k)) \leq c.$$

Man beachte erneut, dass eine untere Schranke von S_a immer, d.h. auch ohne Dissipativitätsannahme, durch Null gegeben ist (vgl. [Bemerkung 3.16](#)). Ferner ist obige Ungleichung äquivalent zu

$$\inf_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0,x)=x \\ x_u(k+1,x)=f(x_u(k,x),u(k)) \\ (x_u(k,x),u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} s(x_u(k,x), u(k)) \geq -c. \quad (3.22)$$

Im Folgenden verwenden wir wieder [Annahme 2.17](#), welche aussagt, dass $l(x_E, u_E) = 0$ erfüllt ist. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &= J_\infty(x, u_{N,x}^*(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} l(x_{u_{N,x}^*}(k,x), u_{N,x}^*(k)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (l(x_{u_{N,x}^*}(k,x), u_{N,x}^*(k)) - l(x_E, u_E)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s(x_{u_{N,x}^*}(k,x), u_{N,x}^*(k)) \\ &\geq \inf_{\substack{T \geq 0 \\ x_u(0,x)=x \\ x_u(k+1,x)=f(x_u(k,x),u(k)) \\ (x_u(k,x),u(k)) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{k=0}^{T-1} s(x_u(k,x), u(k)) \\ (3.22) \quad &\geq -c, \end{aligned}$$

woraus mit $C_1 := -c$ die gewünschte Ungleichung $V_\infty(x) \geq C_1$ folgt.

☒

Wir haben zu Beginn schon geäußert, dass [Satz 3.18](#) einen vorbereitenden Satz für den Stabilitätssatz dieses Abschnitts verkörpert. Entsprechend können wir nun den Stabilitätssatz für das Regelgesetz des unendlichen Horizonts aufstellen. Dabei treffen wir hier zusätzlich zu den Annahmen aus [Satz 3.18](#) noch [Annahme 3.14](#) und nehmen darüber hinaus wieder an, dass die Speicherfunktion λ stetig ist.

Satz 3.19: (Stabilitätssatz für unendlichen Horizont)

Wir betrachten Problemstellung (2.5). Sei (x_E, u_E) der optimale Gleichgewichtspunkt des Systems (2.1) nach [Definition 2.16](#) und seien alle Voraussetzungen aus [Satz 3.18](#) erfüllt, also insbesondere die asymptotische Kontrollierbarkeit und die strikte Dissipativität des Systems mit stetiger Speicherfunktion λ bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Es gelte zudem [Annahme 3.14](#). Dann stabilisiert das Regelgesetz μ_∞ den geschlossenen Regelkreis (2.3) asymptotisch bezüglich x_E auf \mathbb{X}_∞ .

Beweis:

Auch in diesem Stabilitätsbeweis für das Problem mit unendlichem Horizont (2.5) werden wir den Weg über ein Hilfsproblem gehen und zeigen, dass dessen optimale Wertefunktion eine Lyapunov-Funktion für den geschlossenen Regelkreis (2.3) darstellt. Das Hilfsoptimierungsproblem ist in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} & \min_{u_{\infty,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty} \tilde{J}_\infty(x, u_{\infty,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } \tilde{J}_\infty(x, u_{\infty,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} L(x_{u_{\infty,x}}(k, x), u_{\infty,x}(k)) \\ & \text{u.d.N. } \begin{cases} x_{u_{\infty,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{\infty,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{\infty,x}}(k, x), u_{\infty,x}(k)), & k \in \mathbb{N}_0 \\ (x_{u_{\infty,x}}(k+1, x), u_{\infty,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (3.23) \end{aligned}$$

mit den modifizierten Stufenkosten L aus (3.13). Hier stimmen die Nebenbedingungen und dadurch auch die zulässigen Mengen der Kontroll- und

Kapitel 3 Stabilität der Ökonomischen MPC

Zustandsfolgen von (2.5) und (3.23) ebenfalls überein. Aus Satz 3.18 wissen wir bereits, dass $V_\infty(x) = J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ beschränkt ist für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$. Es gilt folglich

$$C_1 \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) \leq J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) \leq C_2. \quad (3.24)$$

Wir untersuchen im Folgenden, wie sich die Beschränktheit von $J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ auf die modifizierte Zielfunktion mit selbigem Regelgesetz $\tilde{J}_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ auswirkt. Diesbezüglich beginnen wir mit dem Limes inferior. Dazu setzen wir

$$C := 2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_\infty} |\lambda(x)|$$

und berechnen mithilfe der modifizierten Kosten (3.13), dass für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$ gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \tilde{J}_N(x, \mu_\infty(\cdot)) &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \\ &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \\ &\quad + \lambda(x_{\mu_\infty}(k, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(k+1, x))) \\ &= \liminf_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) \\ &\quad + \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(x_{\mu_\infty}(k, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(k+1, x))) \\ &= \liminf_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) \\ &\quad + \underbrace{\liminf_{N \rightarrow \infty} (\lambda(x_{\mu_\infty}(0, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(N, x)))}_{\geq -2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_\infty} |\lambda(x)|} \\ &\geq \liminf_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) - C \\ &\geq C_1 - C. \end{aligned}$$

Für den Limes inferior gilt also $\liminf_{N \rightarrow \infty} \tilde{J}_N(x, \mu_\infty(\cdot)) > -\infty$. Dies folgt andererseits auch dadurch, dass die modifizierten Kosten

$$L(x, u) \geq 0$$

aufgrund der Dissipativitätsannahme für alle Paare $(x, u) \in \mathbb{Z}$ erfüllen (vgl. Abschnitt 3.2). Demzufolge ist der eben erwähnte Limes inferior gleich Null.

Das eigentlich Interessante ist für uns hingegen der Limes superior aus (3.24), mit dessen Hilfe wir auch ein wichtiges Ergebnis auf dem Weg zur Stabilität von μ_∞ herleiten werden. Als erstes berechnen wir analog, dass gilt

$$\begin{aligned}
 \limsup_{N \rightarrow \infty} \tilde{J}_N(x, \mu_\infty(\cdot)) &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x)))) \\
 &\quad + \lambda(x_{\mu_\infty}(k, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(k+1, x))) \\
 &= \limsup_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) \\
 &\quad + \underbrace{\limsup_{N \rightarrow \infty} (\lambda(x_{\mu_\infty}(0, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(N, x)))}_{\leq 2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_\infty} |\lambda(x)|} \\
 &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} J_N(x, \mu_\infty(\cdot)) + C \\
 &\leq C_2 + C
 \end{aligned}$$

Dementsprechend existiert der Limes superior und es gilt

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \tilde{J}_N(x, \mu_\infty(\cdot)) < \infty.$$

Da die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} L(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \right)_{N \in \mathbb{N}_0}$$

ausschließlich nichtnegative Summanden $L(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt, kann ihr Limes superior für $N \rightarrow \infty$ nur dann existieren, wenn $L(x_{\mu_\infty}(\cdot, x), \mu_\infty(\cdot))$ eine Nullfolge ist, d.h. gegen Null konvergiert. Mit dem Ergebnis aus vorherigen Abschnitten dieses Kapitels, nämlich dass

$$L(x, u) \geq \rho(|x|_{x_E}) \tag{3.25}$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Z}$ und eine Funktion $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ erfüllt ist, folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(k)) = L(x_E, u_E) = 0$$

gelten muss. Daraus folgt wiederum der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\mu_\infty}(k, x) = x_E. \tag{3.26}$$

Die von dem Regelgesetz μ_∞ erzeugte Zustandstrajektorie $x_{\mu_\infty}(\cdot, x)$ konvergiert also gegen den Gleichgewichtspunkt x_E für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$. Wir weisen

darauf hin, dass durch (3.26) eines der zwei Bestandteile der asymptotischen Stabilität gegeben ist - nämlich die Attraktion (vgl. dazu Abschnitt 3.1). Nichtsdestotrotz können wir die Lyapunov-Stabilität daraus noch nicht folgern. Jedoch hilft uns (3.26) bei der folgenden wichtigen Rechnung weiter:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{\infty} L(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \\
 &= J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(x_{\mu_\infty}(k, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(k+1, x))) \\
 &= J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) + \lambda(x) - \lambda(x_E)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die letzte Zeile resultiert daraus, dass die Teleskopreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(x_{\mu_\infty}(k, x)) - \lambda(x_{\mu_\infty}(k+1, x)))$$

genau dann konvergiert, wenn $\lambda(x_{\mu_\infty}(k, x))$ für $k \rightarrow \infty$ ebenfalls konvergiert. Dies folgt aber sogleich aus der Stetigkeit von λ und (3.26). Als nächstes möchten wir eine der Gleichung (3.27) ähnelnde Gleichung für optimale Kontrollfolgen des Hilfsproblems (3.23) herleiten. Dafür überlegen wir uns, was die Zielfunktion $\tilde{J}_\infty(x, u_{\infty, x}(\cdot))$ erfüllen muss, damit eine optimale Kontrollfolge $u_{\infty, x}^*(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty$ existiert. Eine elementare Voraussetzung für die Existenz der optimalen Lösung ist sicherlich

$$\tilde{V}_\infty(x) = \tilde{J}_\infty(x, u_{\infty, x}^*(\cdot)) < \infty.$$

Dementsprechend müssen auch hier die modifizierten Kosten

$$L(x_{u_{\infty, x}^*}(\cdot, x), u_{\infty, x}^*(\cdot))$$

eine Nullfolge sein, um die Endlichkeit von $\tilde{V}_\infty(x)$ sicherzustellen. Mit (3.25) erlangen wir infolgedessen den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{u_{\infty, x}^*}(k, x) = x_E. \tag{3.28}$$

Damit können wir schließlich berechnen

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_\infty(x) &= \tilde{J}_\infty(x, u_{\infty, x}^*(\cdot)) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} L(x_{u_{\infty, x}^*}(k, x), u_{\infty, x}^*(k)) \\
 &= J_\infty(x, u_{\infty, x}^*(\cdot)) + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(x_{u_{\infty, x}^*}(k, x)) - \lambda(x_{u_{\infty, x}^*}(k+1, x))) \\
 &= J_\infty(x, u_{\infty, x}^*(\cdot)) + \lambda(x) - \lambda(x_E),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

denn auch diese Teleskopreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(x_{u_{\infty,x}^*}(k, x)) - \lambda(x_{u_{\infty,x}^*}(k+1, x)))$$

konvergiert aufgrund von (3.28) und der Stetigkeit von λ . Wenn wir nun (3.27) und (3.29) miteinander vergleichen, wird ersichtlich, dass die optimale Wertefunktion für Problemstellung (3.23) gerade durch

$$\tilde{V}_{\infty}(x) = \tilde{J}_{\infty}(x, \mu_{\infty}(\cdot))$$

gegeben ist. Für die asymptotische Stabilität von μ_{∞} müssen wir abschließend zeigen, dass $\tilde{V}_{\infty}(x)$ eine Lyapunov-Funktion nach Definition 3.4 ist. Wir beginnen mit der Ungleichung aus Definition 3.4 (ii). Diese erlangen wir mit dem Prinzip der dynamischen Programmierung (vgl. Abschnitt 2.1.3) und Ungleichung (3.25):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\infty}(x) &= L(x, \mu_{\infty}(\cdot)) + \tilde{V}_{\infty}(f(x, \mu_{\infty}(x))) \\ &\geq \rho(|x|_{x_E}) + \tilde{V}_{\infty}(f(x, \mu_{\infty}(x))) \end{aligned}$$

Es fehlen letztlich noch die beiden \mathcal{K}_{∞} -Schranken für $\tilde{V}_{\infty}(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}_{\infty}$ aus Definition 3.4 (i). Beginnend mit der unteren Schranke berechnen wir, dass gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\infty}(x) &= \tilde{J}_{\infty}(x, \mu_{\infty}(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} L(x_{\mu_{\infty}}(k, x), \mu_{\infty}(x_{\mu_{\infty}}(k, x))) \\ &\stackrel{(3.25)}{\geq} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(|x_{\mu_{\infty}}(k, x)|_{x_E}) \\ &= \rho(|x_{\mu_{\infty}}(0, x)|_{x_E}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \rho(|x_{\mu_{\infty}}(k, x)|_{x_E})}_{\geq 0} \\ &\geq \rho(|x|_{x_E}) \end{aligned}$$

mit $\rho \in \mathcal{K}_{\infty}$. Für die obere Schranke definieren wir die Funktion α als

$$\alpha(r) := \sup_{s \in \mathcal{B}_r(0)} \tilde{V}_{\infty}(s + x_E)$$

für alle $r \geq 0$ und werden zeigen, dass α eine \mathcal{K}_{∞} -Funktion ist, die monoton, aber nicht strikt monoton wachsend ist. Wie α aus \tilde{V}_{∞} entsteht, zeigt die folgende Abbildung 3.2.

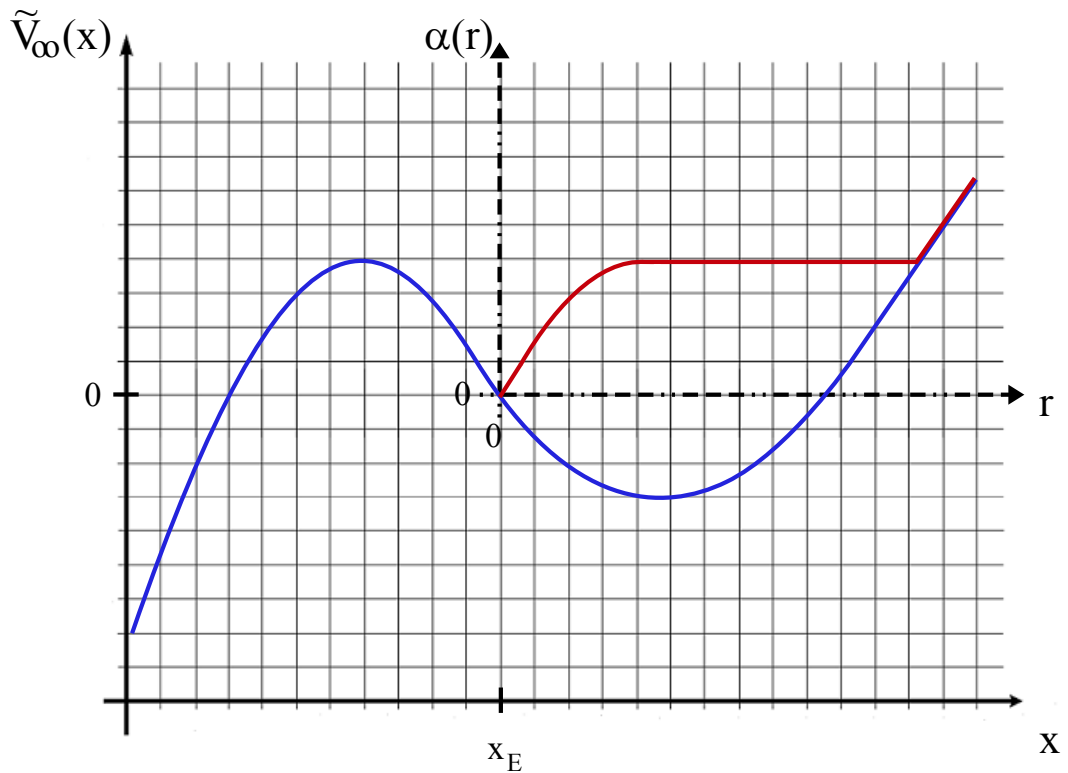


Abb. 3.2: Darstellung der Funktionen $\tilde{V}_\infty(x)$ im durchgängigen Koordinatensystem (blau) und $\alpha(r)$ im gestrichelten Koordinatensystem (rot).

Wir beginnen mit der ersten Eigenschaft einer \mathcal{K}_∞ -Funktion, nämlich dass gilt

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_0(0)} \tilde{V}_\infty(s + x_E) \\ &= \tilde{V}_\infty(0 + x_E) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus (3.25) und $L(x_E, u_E) = 0$. Nun setzen wir den Beweis mit der Monotonieeigenschaft fort und berechnen dazu für zwei beliebige $r_1 > r_2 \geq 0$, dass gilt

$$\begin{aligned} \alpha(r_1) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_{r_1}(0)} \tilde{V}_\infty(s + x_E) \\ &\geq \sup_{s \in \mathcal{B}_{r_2}(0)} \tilde{V}_\infty(s + x_E) \\ &= \alpha(r_2), \end{aligned}$$

da $\mathcal{B}_{r_2}(0) \subset \mathcal{B}_{r_1}(0)$ gilt. Schließlich folgt die Stetigkeit von α mit Gleichung (3.27) aus der Stetigkeit von $V_\infty(x) = J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot))$ nach [Annahme 3.14](#) und der Stetigkeit von λ . Weiterhin zeigen wir noch die folgende Abschätzung für $r := |x|_{x_E}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(|x|_{x_E}) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_{|x|_{x_E}}(0)} \tilde{V}_\infty(s + x_E) \\ &\geq \sup_{s=x-x_E} \tilde{V}_\infty(s + x_E) \\ &= \tilde{V}_\infty(x), \end{aligned}$$

da $x - x_E \in \mathcal{B}_{|x|_{x_E}}(0)$ erfüllt ist. Für die obere Schranke aus [Definition 3.4 \(i\)](#) ist letztendlich eine streng monotone \mathcal{K}_∞ -Funktion erforderlich. Allerdings ist es offensichtlich, dass sich solch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_2 , welche die Ungleichung

$$\alpha_2(r) \geq \alpha(r)$$

für alle $r \geq 0$ erfüllt, immer finden lässt, indem man beispielsweise alle konstanten Abschnitte von α löscht und die restlichen Abschnitte so verschiebt, dass sowohl $\alpha(0) = 0$, als auch die Stetigkeit der Funktion erhalten bleiben. Schlussendlich erhalten wir mit α_2 eine obere \mathcal{K}_∞ -Schranke, welche der Ungleichung (ii) in [Definition 3.4](#) genügt.

☒

Kapitel 4

Turnpike Eigenschaft

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der sogenannten Turnpike Eigenschaft, welche eine wichtige Rolle in der Herleitung der Suboptimalitätsschranken für die Problemstellungen mit Endbeschränkungen (2.6) und (2.7) in Kapitel 6 spielen wird. Wir werden diese Eigenschaft in dieser Arbeit hingegen nur für Optimierungsprobleme ohne Endbeschränkungen untersuchen und betrachten aus diesem Grund in dem gesamten Kapitel ausschließlich die Problemstellung für endlichen Horizont ohne Endbeschränkungen (2.4).

Das Kapitel ist dabei folgendermaßen aufgebaut. Noch in diesem Vorwort wird eine erste formlose Erläuterung der Turnpike Eigenschaft vorgenommen. Darauf folgt im ersten Abschnitt dieses Kapitels ein ausführliches Beispiel mit grafischer Verdeutlichung selbiger Eigenschaft. Im zweiten Abschnitt soll anschließend das Verständnis mit einer formellen Definition der Turnpike Eigenschaft vertieft werden, bevor wir uns zu guter Letzt der Frage widmen, unter welchen Bedingungen diese auftritt. Diese Frage beantworten wir schließlich im letzten Abschnitt mit einem Satz, der die Turnpike Eigenschaft für allgemeine zulässige Kontrollfolgen beweist. Zum Schluss wird dieser Satz auf optimale Kontrollfolgen des offenen Regelkreises (2.1) mithilfe einer zusätzlichen Kontrollierbarkeitsannahme übertragen und bewiesen.

Die Ergebnisse dieses Kapitels beruhen dabei vor allem auf [5] und [3].

Wir beginnen nun mit einer ersten Erklärung der Turnpike Eigenschaft, welche ein bestimmtes beobachtbares Verhalten von optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises (2.1) beschreibt. Dieses Verhalten wurde bei einer signifikanten Anzahl von Systemen festgestellt und wird im Folgenden beschrieben:

Die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ nähern sich erst dem optimalen Gleichgewichtspunkt x_E an und bleiben dann den Großteil der Zeit in seiner Nähe, bevor sie sich zum Schluss wieder vom ihm abwenden.

Der Begriff "Turnpike" bezeichnet im Englischen eine autobahnähnliche Straße. Dementsprechend lässt sich die Turnpike Eigenschaft mit einer Autofahrt von Punkt A nach Punkt B vergleichen. Wenn die Strecke lang genug ist, dann ist es intuitiv zeitoptimal zuerst von A zur nächsten Autobahnausfahrt zu fahren (vgl. mit dem Steuern zum Gleichgewicht), den überwiegenden Teil der Strecke auf der Autobahn ("Turnpike") zurückzulegen (vgl. mit dem Verweilen in der Nähe des Gleichgewichts) und in der Nähe von B die Autobahn wieder zu verlassen (vgl. mit dem Abwenden vom Gleichgewicht), um die restliche Strecke über kleinere Strassen zu bewältigen.

Jedoch weisen wir nochmals darauf hin, dass die Turnpike Eigenschaft nicht ausschließlich bei optimalen Trajektorien auftreten kann. Auch zulässige Trajektorien können unter bestimmten Bedingungen die Turnpike Eigenschaft aufweisen. Diese Thematik wird in Abschnitt 4.3 eingehend behandelt.

Zunächst veranschaulichen wir die Turnpike Eigenschaft im folgenden Abschnitt an einem Beispiel.

4.1 Beispiel zur Turnpike Eigenschaft

Die Turnpike Eigenschaft lässt sich am einfachsten an dem kommenden Beispiel aufzeigen, welches sowohl im dritten Abschnitt von [5] als auch im zweiten Abschnitt von [3] zu finden ist. Wir behandeln dieses Beispiel in dieser Arbeit allerdings etwas ausführlicher und bieten darüber hinaus eine Begründung an, weshalb sich in diesem Beispiel die optimalen Trajektorien gemäß der Turnpike Eigenschaft verhalten.

Für ein zweites, komplexeres Beispiel sei ebenfalls auf dieselben Abschnitte in [5] und [3] verwiesen.

Beispiel 4.1

Wir betrachten das System

$$f(x, u) = 2 \cdot x + u$$

mit $(x, u) \in \mathbb{R}^2$. Folglich generiert sich eine zu einer Kontrollfolge $u_{N,x}(\cdot)$ gehörende Trajektorie $x_{u_{N,x}}(\cdot, x)$ durch die Rekursion

$$\begin{aligned} x_{u_{N,x}}(0, x) &= x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) &= 2 \cdot x_{u_{N,x}}(k, x) + u_{N,x}(k) \end{aligned}$$

für $k = 0, \dots, N-1$. Die Kosten sind gegeben durch

$$l(x, u) = u^2$$

und als Beschränkung stellen wir die Forderung, dass die Zustandstrajektorien im Intervall $\mathbb{X} = [-1, 1]$ liegen sollen.

Man berechnet mühelos, dass zu jedem Zustand x mit dem Kontrollwert $u = -x$ ein Gleichgewichtspaar gegeben ist. Da der optimale Gleichgewichtspunkt laut [Definition 2.16](#) unter allen Gleichgewichtspaaren die Kosten (2.2) minimiert, erhalten wir ihn durch $(x_E, u_E) = (0, 0)$ mit den zugehörigen Kosten $l(x_E, u_E) = 0$.

Nun wird das Regelgesetz des geschlossenen Regelkreises μ_N versuchen, die Zustandstrajektorie $x_{\mu_N}(k, x)$ mit minimalem Aufwand in dem vorgegeben Beschränkungsintervall $\mathbb{X} = [-1, 1]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ zu halten. Diesen Aufwand können wieder mit dem Performance-Maß aus [Definition 2.21](#) - den Kosten auf unendlichem Horizont - bewerten:

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} l(x_{\mu_N}(k, x), \mu_N(x_{\mu_N}(k, x)))$$

Diese Kosten fallen umso kleiner aus, desto näher man sich am Gleichgewichtspunkt (x_E, u_E) befindet. Demzufolge wird die Trajektorie des geschlossenen Regelkreises $x_{\mu_N}(\cdot, x)$ in die Nähe von x_E steuern und dort bleiben, da dieses Verhalten die Kosten auf unendlichem Horizont minimiert.

Die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ verhalten sich ebenfalls so, dass der Aufwand, um die Beschränkung $\mathbb{X} = [-1, 1]$ einzuhalten, minimiert wird. In diesem Fall entspricht der Aufwand aber gerade der optimalen Wertefunktion

$$V_N(x) = J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)).$$

Auch hier lohnt es sich in die Nähe des Gleichgewichts (x_E, u_E) zu steuern und größtenteils in seiner Nähe zu bleiben. Zumal hier allerdings nur die Kosten auf einem endlichen Horizont N betrachtet werden, ist es in der Regel nicht lohnenswert bis zum Schluss die Trajektorie in der Nähe von x_E zu halten. Es kann dagegen kostenoptimaler sein, in den letzten Schritten nur noch die Beschränkung

$$x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x) \in \mathbb{X} = [-1, 1]$$

gerade so einzuhalten. Dadurch kann sich die Trajektorie durchaus auch von x_E abwenden. Dies ist genau der Fall in unserem Beispiel. Die soeben vorgestellten Überlegungen finden sich in den nachfolgenden Abbildungen wieder.

Die folgenden drei Abbildungen 4.1 - 4.3 zeigen jeweils zum einen die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises (rot) und zum anderen die des geschlossenen Regelkreises (blau) für drei verschiedene Horizonte $N_1 = 5$, $N_2 = 7$ und $N_3 = 10$.

Man erkennt das Verhalten der Trajektorien des offenen Regelkreises gemäß der Turnpike Eigenschaft, d.h. diese steuern erst in die Nähe des Gleichgewichts $x_E = 0$ und wenden sich zum Schluss wieder ab bis hin zum oberen Rand des Beschränkungsintervalls $x = 1$. Wohingegen die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises gegen das Gleichgewicht $x_E = 0$ steuern und dort für alle folgenden Zeitpunkte bleiben.

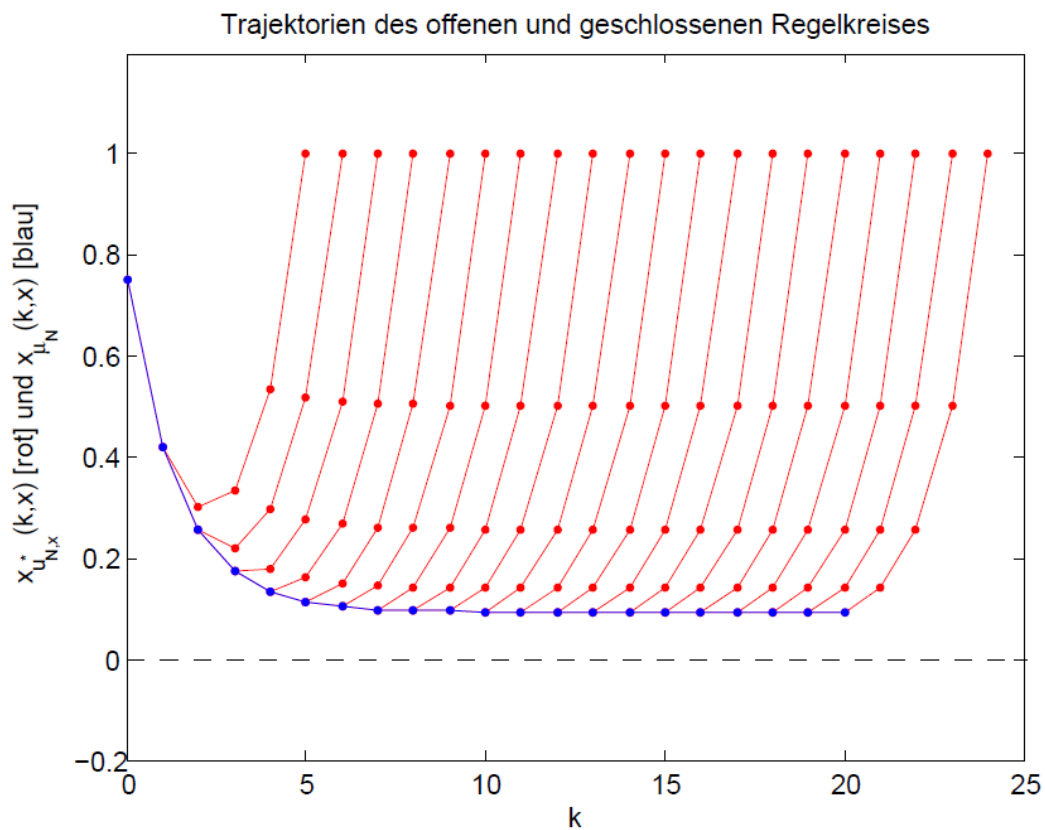


Abb. 4.1: Trajektorien des offenen (rot) und geschlossenen (blau) Regelkreises für Horizont $N_1 = 5$ mit Anfangswert $x = 0.75$ und Gleichgewichtspunkt $x_E = 0$ (gestrichelt).

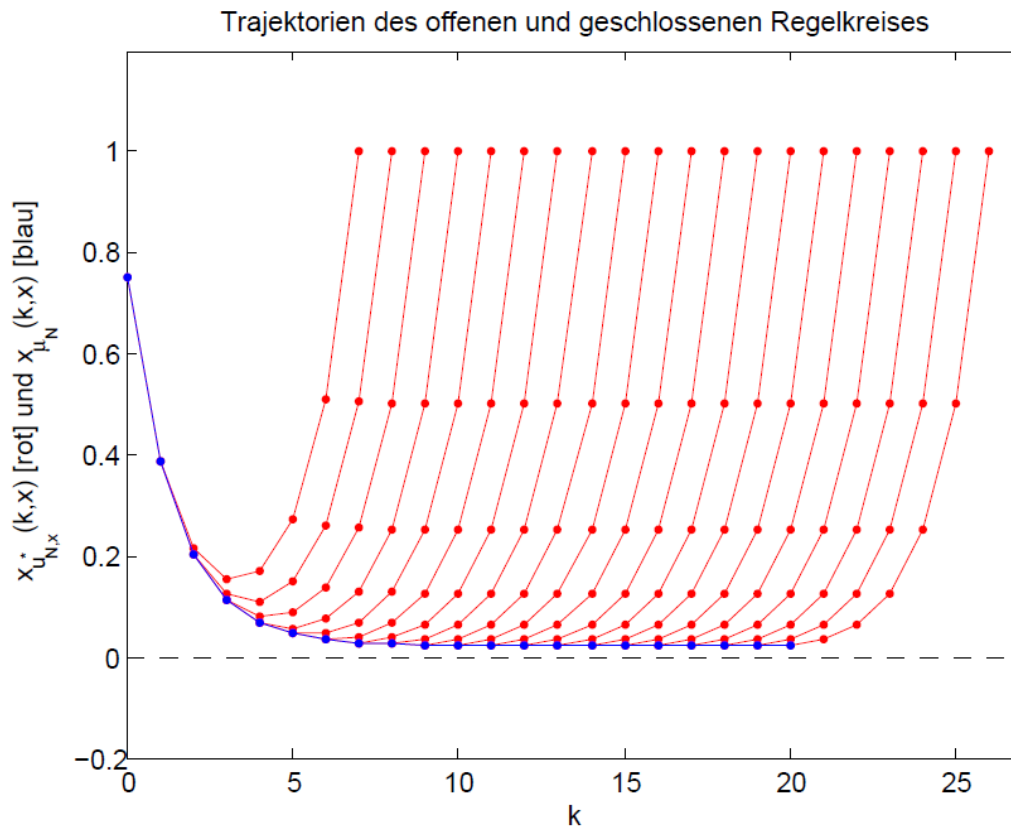


Abb. 4.2: Trajektorien des offenen (rot) und geschlossenen (blau) Regelkreises für Horizont $N_2 = 7$ mit Anfangswert $x = 0.75$ und Gleichgewichtspunkt $x_E = 0$ (gestrichelt).

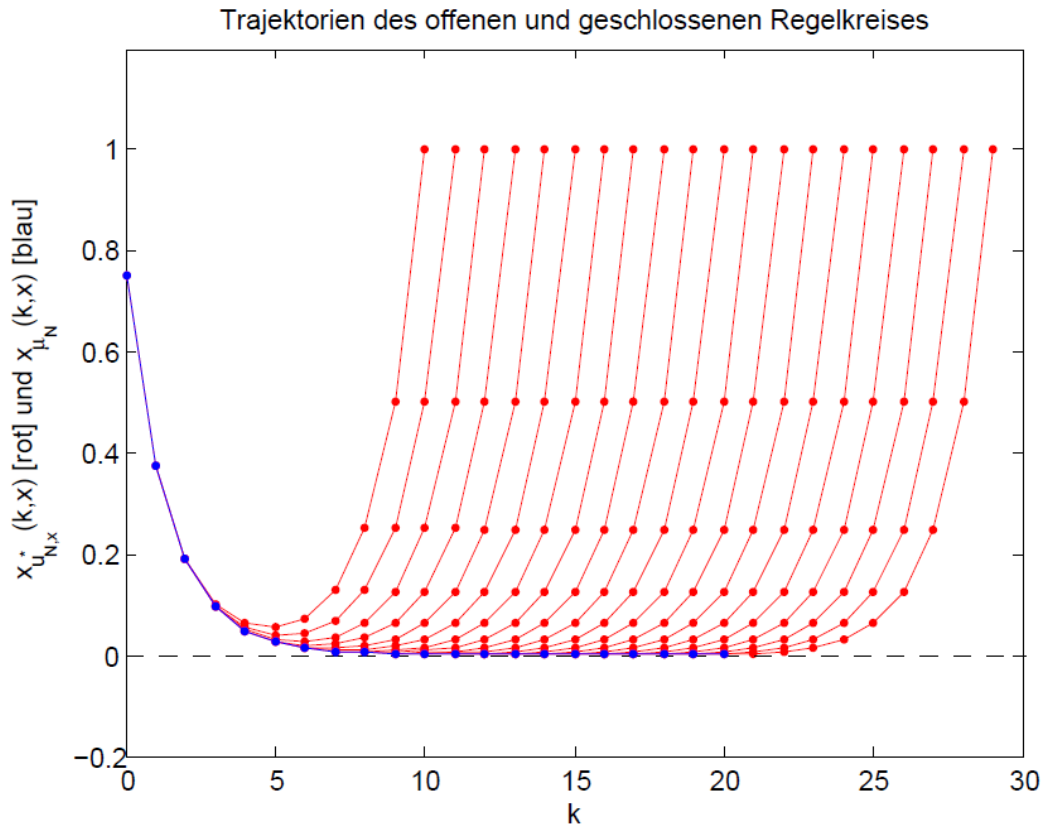


Abb. 4.3: Trajektorien des offenen (rot) und geschlossenen (blau) Regelkreises für Horizont $N_3 = 10$ mit Anfangswert $x = 0.75$ und Gleichgewichtspunkt $x_E = 0$ (gestrichelt).

Zudem beobachten wir, dass mit zunehmendem Horizont auch der minimale Abstand zwischen den optimalen Zustandstrajektorien und dem Gleichgewichtspunkt kleiner wird. Dieser Abstand ist gegeben durch

$$\min_{k=0, \dots, N} |x_{u_{N,x}}^*(k, x)|_{x_E}.$$

Numerische Auswertungen zeigen überdies sogar eine exponentielle Abnahme des Abstands mit zunehmendem Horizont N . Diese Tatsache ist in Abbildung 4.4 und Tabelle 4.5 dargestellt, wobei der Horizont schrittweise von $N = 5$ auf $N = 20$ erhöht wurde. Als Anfangswert wurde erneut $x = 0.75$ gewählt und der Abstand wurde in der ersten Iteration des MPC-Algorithmus gemessen. Aus den Messwerten in der Tabelle 4.5 erkennt man außerdem, dass der Abstand von N auf $N + 1$ jedesmal um etwa 30% abnimmt.

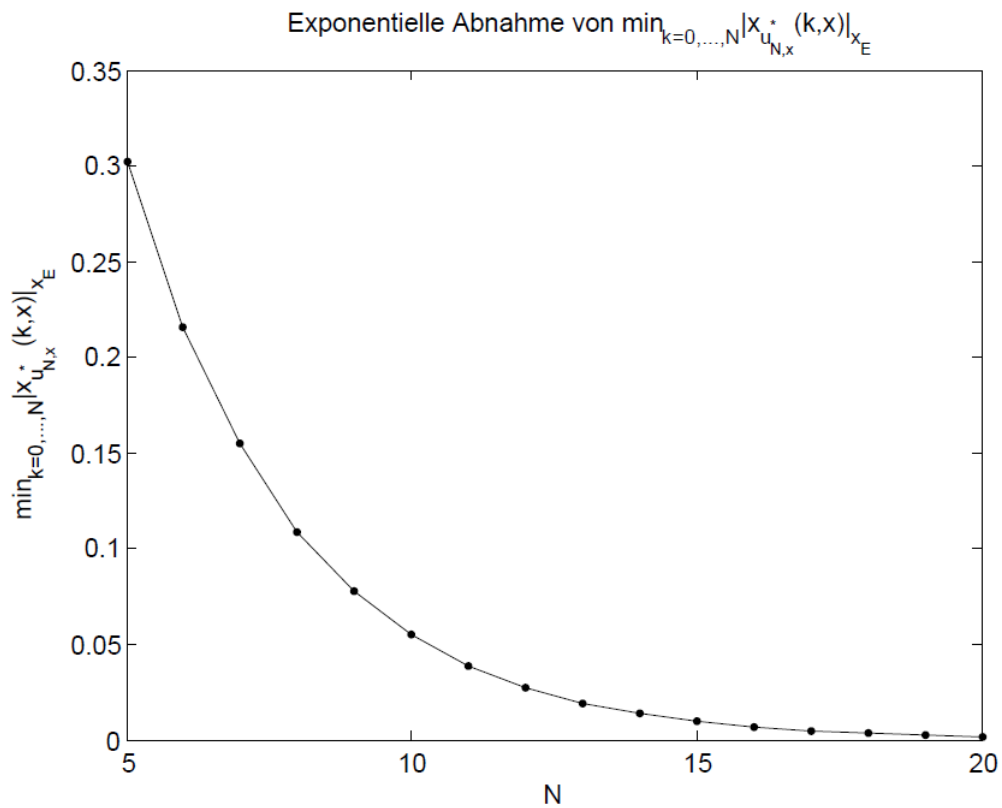


Abb. 4.4: Exponentielle Abnahme von $\min_{k=0, \dots, N} |x_{u_{N,x}}^*(k, x)|_{x_E}$ mit zunehmendem Horizont N .

N	$\min_{k=0, \dots, N} x_{u_{N,x}}^*(k, x) _{x_E}$	N	$\min_{k=0, \dots, N} x_{u_{N,x}}^*(k, x) _{x_E}$
5	0.3020527704	13	0.0195286098
6	0.2153845891	14	0.0136710186
7	0.1549166525	15	0.0097652700
8	0.1089493951	16	0.0068358064
9	0.0779574234	17	0.0048827515
10	0.0546341260	18	0.0034179346
11	0.0390415060	19	0.0024413795
12	0.0273370566	20	0.0017089633

Tab. 4.5: Messwerte für den Abstand $\min_{k=0, \dots, N} |x_{u_{N,x}}^*(k, x)|_{x_E}$ für Horizonte von $N = 5$ bis $N = 20$.

Kapitel 4 Turnpike Eigenschaft

Wir schließen das Beispiel mit einer letzten Abbildung ab, anhand derer wir zwei zusätzliche Beobachtungen aufzeigen wollen. Diesbezüglich wurden der Horizont auf $N = 25$ und der Anfangswert auf $x = -0.5$ geändert.

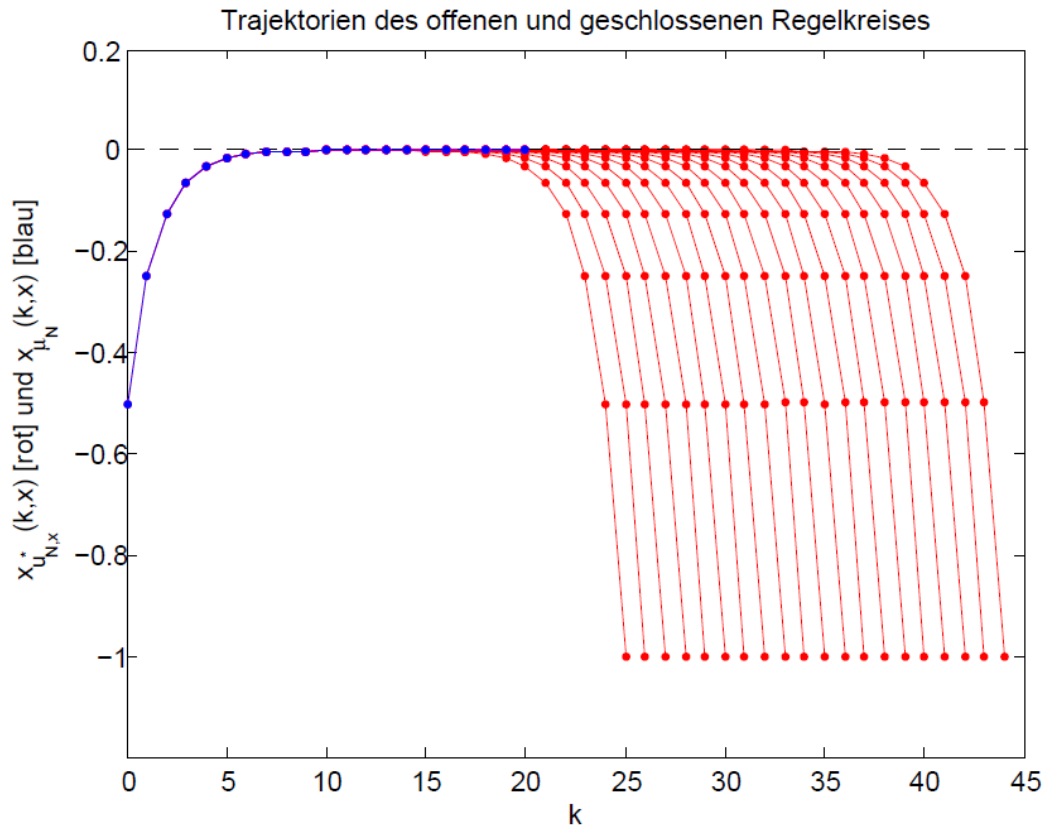


Abb. 4.6: Darstellung der Turnpike-Eigenschaft mit Anfangswert $x = -0.5$ und $N = 25$; Optimale Trajektorien steuern hier zu $x = -1$.

Zum einen stellen wir fest, dass die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises mit zunehmendem Horizont N auch eine längere Zeit in der Nähe des Gleichgewichtspunktes $x_E = 0$ verbringen (vgl. ergänzend dazu mit den Abbildungen 4.1 - 4.3).

Zum anderen weisen wir darauf hin, dass die optimalen Trajektorien zum Ende hin gerade zu dem Rand des Beschränkungsintervalls steuern, zu dem sie den kleineren Abstand haben. Wenn wir demzufolge mit einem Anfangswert unterhalb des Gleichgewichts $x_E = 0$ starten, dann steuern die optimalen Trajektorien erst das Gleichgewicht von unten an, bevor sie in

Richtung $x = -1$ vom Gleichgewicht abweichen. Dies ist in diesem Fall kostengünstiger als zum anderen Rand $x = 1$ zu steuern.

□

4.2 Definition der Turnpike Eigenschaft

Nachdem die Turnpike Eigenschaft erklärt und an einem Beispiel veranschaulicht wurde, folgt in diesem Abschnitt eine formelle Definition der Eigenschaft, welche der Definition 2.2 (i) aus [3] entspricht.

Definition 4.2: (Turnpike Eigenschaft)

Ein System (2.1) besitzt die Turnpike Eigenschaft auf einer Menge $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}_N$, wenn für einen Gleichgewichtspunkt $x_E \in \mathbb{X}$ folgendes gilt: Für alle $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion σ_{N_0} , sodass für jede optimale Trajektorie $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ mit Anfangswert $x \in \mathbb{X}_0$ und Horizont $N > N_0$ eine Menge $Q \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ der Mächtigkeit $|Q| \geq N_0$ existiert, sodass die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E} \leq \sigma_{N_0}(N)$$

für alle $k \in Q$ erfüllt ist.

Diese Definition sagt nicht nur aus, dass die optimalen Trajektorien in die Nähe des Gleichgewichts steuern, sondern vor allem auch, dass der minimale Abstand zwischen diesen Trajektorien und dem Gleichgewichtspunkt mit zunehmendem Horizont immer kleiner wird. Das entspricht genau den Ergebnissen, die wir zu Beispiel 4.1 gewonnen haben.

Wir führen im Folgenden Definition 4.2 für unser vorheriges Beispiel 4.1 mithilfe von zwei Abbildungen etwas genauer aus.

Die erste Abbildung 4.7 zeigt jeweils die optimalen Trajektorien, die der MPC-Algorithmus im ersten Iterationsschritt berechnet, mit Anfangswert $x = 0.75$ und verschiedenen Horizonten. Die Horizonte reichen dabei von $N = 5$ bis $N = 10$. Ferner setzen wir N_0 aus Definition 4.2 auf $N_0 = 3$ und zeichnen für jedes N zu der zugehörigen Trajektorie $x_{u_{N,0.75}^*}(\cdot, 0.75)$ einen möglichen Wert der $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion $\sigma_3(N)$ so ein, dass der Abstand der optimalen Trajektorie zum Gleichgewicht an mindestens $N_0 = 3$ Stellen kleinergleich $\sigma_3(N)$ ist.

Die zweite Abbildung 4.8 ergibt sich infolgedessen als Verknüpfung der Werte $\sigma_3(5), \dots, \sigma_3(10)$ zu einer Vergleichsfunktion, die die Definition einer $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion erfüllt.

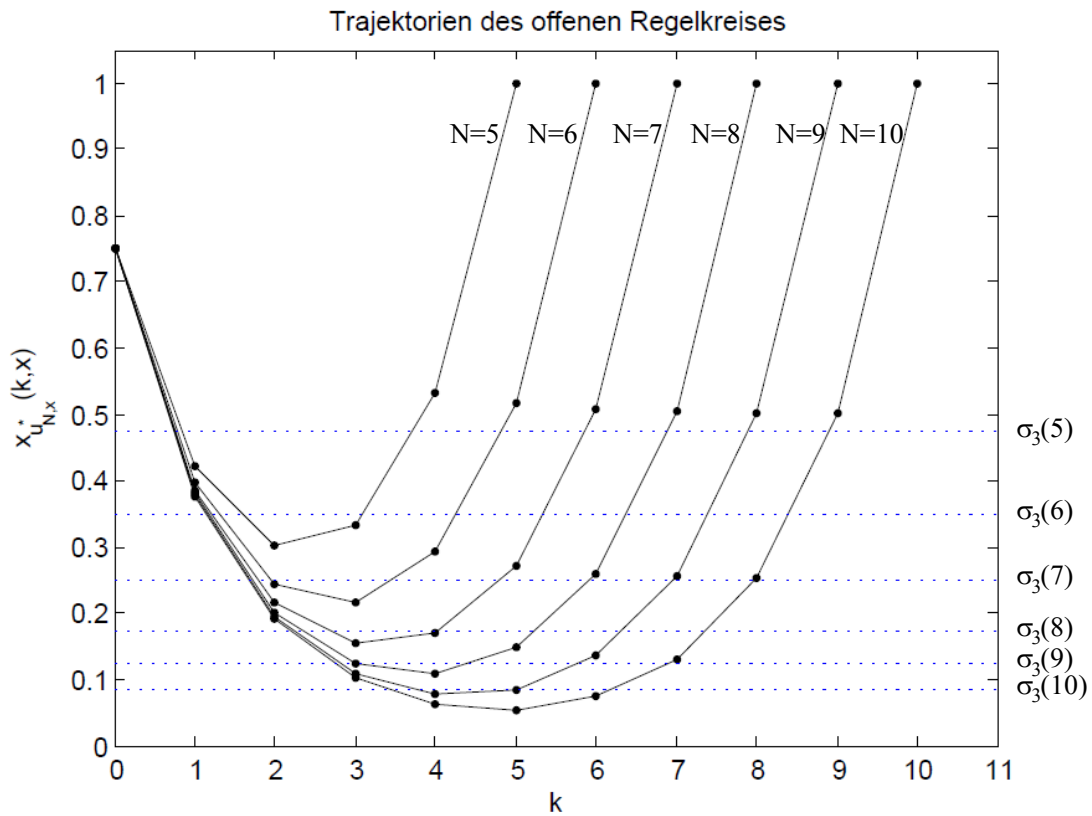


Abb. 4.7: Veranschaulichung von Definition 4.2 anhand von Beispiel 4.1 mit Horizonten $N = 5, \dots, 10$, Anfangswert $x = 0.75$ und $N_0 = 3$ aus Definition 4.2.

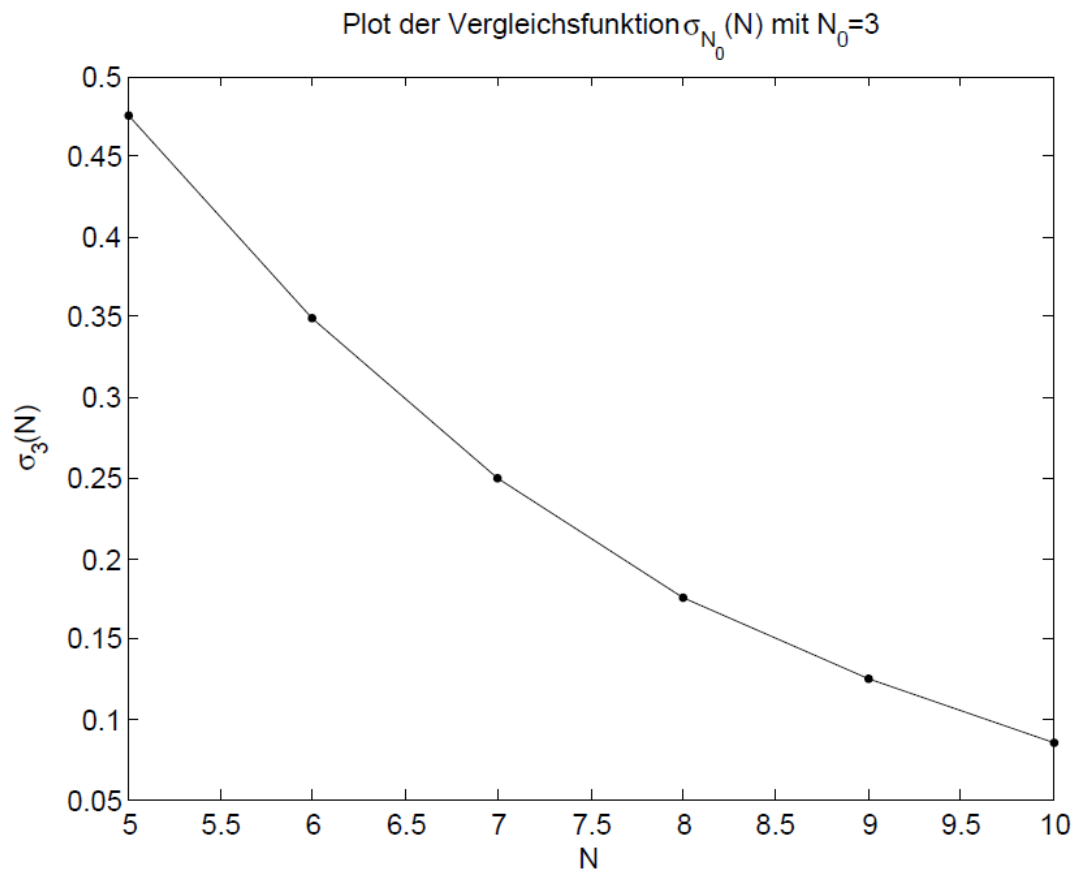


Abb. 4.8: Darstellung der Vergleichsfunktion $\sigma_3(N)$ aus Abbildung 4.7 für $N = 5, \dots, 10$.

4.3 Sätze zur Turnpike Eigenschaft

Wie wir bereits wissen, wird die Turnpike Eigenschaft in der Praxis bei einer großen Anzahl an Problemstellungen beobachtet. Bisher haben wir ausgiebig geklärt, was man unter der Turnpike Eigenschaft versteht. Verständlicherweise stellt sich uns demnach als nächstes die Frage, welche Voraussetzungen an das Optimierungsproblem (2.4) gestellt werden müssen, damit das System (2.1) die Turnpike Eigenschaft aufweist. Wie sich herausstellen wird, ist die wichtigste dieser Voraussetzungen abermals die strikte Dissipativität des Systems.

Wie bereits angeführt, beweisen wir im nächsten Unterabschnitt die Turnpike Eigenschaft erst für zulässige Trajektorien in einem allgemeineren Satz, bevor wir im zweiten Unterabschnitt diesen Satz für optimale Trajektorien des offenen Regelkreises (2.1) konkretisieren. Dabei basieren die Ergebnisse dieses Abschnitts auf [5].

4.3.1 Turnpike Eigenschaft für zulässige Trajektorien

Wir formulieren nun den zuvor erwähnten Satz, der uns Bedingungen liefert, unter denen die Turnpike Eigenschaft für zulässige Trajektorien bewiesen werden kann. Dieser Satz entspricht Theorem 5.3 aus [5].

Satz 4.3: (Turnpike Eigenschaft für zulässige Trajektorien)

Wir betrachten Problemstellung (2.4). Sei das System (2.1) strikt dissipativ nach Definition 2.24 (ii) bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Dann gilt, dass für alle $x \in \mathbb{X}_N$, alle $\delta > 0$ und alle $u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N$, welche die Ungleichung

$$J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \leq N \cdot l(x_E, u_E) + \delta \quad (4.1)$$

erfüllen, und für alle $\varepsilon > 0$, der Wert Q_ε mit

$$Q_\varepsilon := \left| \{k \in \{0, \dots, N-1\} \mid |x_{u_{N,x}}(k, x)|_{x_E} \leq \varepsilon\} \right|$$

die Ungleichung

$$Q_\varepsilon \geq N - \frac{\delta + C}{\rho(\varepsilon)}$$

erfüllt mit der Konstante $C := 2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_N} |\lambda(x)|$ und der \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ aus Definition 2.24 (ii).

Aus Satz 4.3 können wir schließlich alle Voraussetzungen ablesen, welche für die Turnpike Eigenschaft erforderlich sind. Diese sind zum einen die strikte Dissipativitätsannahme aus Definition 2.24 (ii), die an das System (2.1) und die Kosten (2.2) gestellt wird, und zum anderen Bedingung (4.1), die an die betrachtete Kontrollfolge $u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N$ geknüpft ist.

Des Weiteren sei noch angemerkt, dass Satz 4.3 obendrein sogar noch eine untere Schranke für die Menge Q_ε angibt. Diese verkörpert die Anzahl der Stellen $k \subseteq \{0, \dots, N-1\}$, an denen die Zustandstrajektorie einen Abstand kleiner gleich ε zum Gleichgewichtspunkt hat. Dies wird in der folgenden Abbildung 4.9 nochmals hervorgehoben.

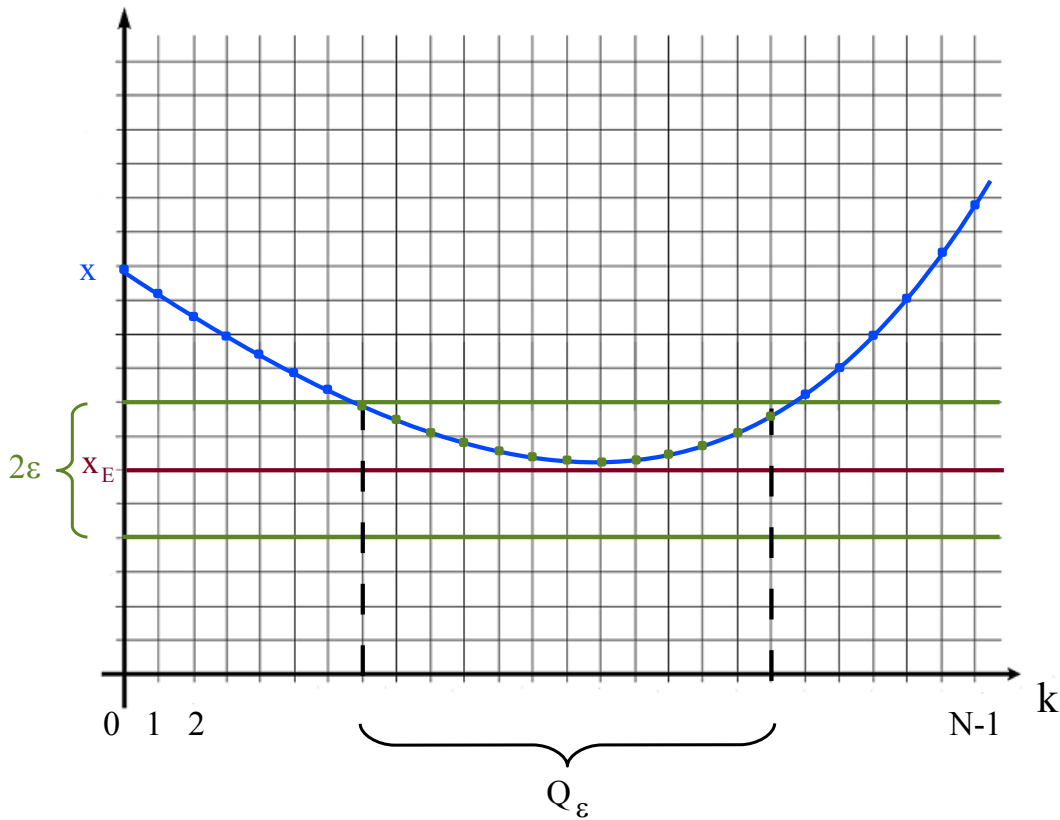


Abb. 4.9: Trajektorie $x_u(k, x)$, die an Q_ε Stellen einen Abstand zum Gleichgewichtspunkt x_E hat, der kleiner oder gleich ε ist.

Bemerkung 4.4:

Man beachte zudem, dass in der obigen Abbildung 4.9 die Menge Q_ε die Form eines Intervalls auf der Menge $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ besitzt, also alle Elemente von Q_ε benachbart sind. Auch im Beispiel 4.1 zuvor hatte Q_ε dieselbe Form eines Intervalls. Wohingegen in *Definition 4.2* und *Satz 4.3* diese Forderung an Q_ε nicht gestellt wird, sondern nur die viel allgemeinere Forderung $Q_\varepsilon \subseteq \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Dies ist für die Thematik dieser Arbeit zwar völlig ausreichend, dennoch stellt sich uns interessehalber die Frage, ob man beweisen kann, dass Q_ε diese Form eines Intervalls besitzt. Nach unserem Wissen wurde solch ein Beweis in der Literatur zur Turnpike Eigenschaft noch nicht erbracht.

□

Kapitel 4 Turnpike Eigenschaft

Wir kommen nun zum Beweis von [Satz 4.3](#).

Beweis: ([Satz 4.3](#))

Wir betrachten das Hilfoptimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{u_{N,x}(\cdot) \in \mathbb{U}^N} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) \\ & \text{mit } \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ \text{u.d.N. } & \begin{cases} x_{u_{N,x}}(0, x) = x \\ x_{u_{N,x}}(k+1, x) = f(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)), & k = 0, \dots, N-1 \\ (x_{u_{N,x}}(k+1, x), u_{N,x}(k)) \in \mathbb{Z}, & k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit den modifizierten Stufenkosten L aus [\(3.13\)](#). Für die Zielfunktion \tilde{J}_N aus [\(4.2\)](#) berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (l(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) + \lambda(x_{u_{N,x}}(k, x)) \\ &\quad - \lambda(x_{u_{N,x}}(k+1, x))) \\ &= J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) + \lambda(x) - \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)). \end{aligned}$$

Mit $C = 2 \cdot \sup_{x \in \mathbb{X}_N} |\lambda(x)|$ aus [Satz 4.3](#) können wir abschätzen, dass gilt

$$\begin{aligned} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) + \lambda(x) - \lambda(x_{u_{N,x}}(N, x)) \\ &\leq J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) + C \end{aligned}$$

und mithilfe von [Annahme \(4.1\)](#) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &\leq J_N(x, u_{N,x}(\cdot)) + C \\ &\leq N \cdot l(x_E, u_E) + C + \delta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Jetzt nehmen wir an, dass

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon &< N - \frac{\delta + C}{\rho(\varepsilon)} \\ \Leftrightarrow N - Q_\varepsilon &> \frac{\delta + C}{\rho(\varepsilon)} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Folglich gibt es eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ der Mächtigkeit $N - Q_\varepsilon$, sodass für alle $k \in \mathcal{N}$

$$|x_{u_{N,x}}(k, x)|_{x_E} > \varepsilon \quad (4.4)$$

gilt. Zu guter Letzt verwenden wir die aus der strikten Dissipativität resultierende Ungleichung (3.14), um \tilde{J}_N erneut abzuschätzen, und mittels (4.4) erhalten wir anschließend

$$\begin{aligned} \tilde{J}_N(x, u_{N,x}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{N-1} L(x_{u_{N,x}}(k, x), u_{N,x}(k)) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \left(L(x_E, u_E) + \rho(|x_{u_{N,x}}(k, x)|_{x_E}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E)) + \rho(|x_{u_{N,x}}(k, x)|_{x_E}) \right) \\ &> N \cdot l(x_E, u_E) + (N - Q_\varepsilon) \cdot \rho(\varepsilon) \\ &> N \cdot l(x_E, u_E) + \delta + C. \end{aligned}$$

Dies widerspricht aber Ungleichung (4.3). Aus diesem Grund muss

$$Q_\varepsilon \geq N - \frac{\delta + C}{\rho(\varepsilon)}$$

gelten.

□

4.3.2 Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien

Abschließend zeigen wir in diesem Unterabschnitt, dass die Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien des offenen Regelkreises erfüllt ist, wenn wir zur strikten Dissipativitätsannahme zusätzlich noch eine asymptotische Kontrollierbarkeitsannahme an das System (2.1) stellen. Wir gehen hierbei vor wie in Kapitel 5 in [5].

Um die asymptotische Kontrollierbarkeitsannahme formulieren zu können, müssen wir erst eine weitere Klasse von Vergleichsfunktionen einführen, die sogenannten \mathcal{KLS} -Funktionen.

Definition 4.5: (\mathcal{KLS} -Funktion)

Eine \mathcal{KLS} -Funktion $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\gamma \in \mathcal{KL}$
- (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(r, k) < \infty \quad \forall r \geq 0$
- (iii) $\eta(\cdot) := \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(\cdot, k) \in \mathcal{K}$

Demzufolge ist eine \mathcal{KLS} -Funktion eine \mathcal{KL} -Funktion, welche sich zu einer \mathcal{K} -Funktion aufsummieren lässt.

Es folgt die oben erwähnte asymptotische Kontrollierbarkeitsannahme, die die Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien des offenen Regelkreises garantieren soll. Diese Annahme deckt sich mit der Annahme 5.5 aus [5].

Annahme 4.6: (Asymptotische Kontrollierbarkeit)

Es existiert eine \mathcal{KLS} -Funktion γ , sodass für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{X}_N$ und für jeden Horizont $N \in \mathbb{N}$ es eine Kontrollfolge $u \in \mathbb{U}^N$ gibt, sodass die Ungleichung

$$l(x_u(k, x), u(k)) \leq l(x_E, u_E) + \gamma(|x|_{x_E}, k)$$

für alle $k = 0, \dots, N - 1$ erfüllt ist.

Somit kommen wir letztendlich zum wichtigsten Satz dieses Kapitels, der die Turnpike Eigenschaft für den offenen Regelkreis beweist. Dieser Satz ist eine etwas abgewandelte Form von Theorem 4.2 (c) aus [5].

Satz 4.7: (Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien)

Wir betrachten Problemstellung (2.4). Das System (2.1) sei strikt dissipativ nach Definition 2.24 (ii) bezüglich der Versorgungsrate (2.10) und asymptotisch kontrollierbar nach Annahme 4.6. Dann gilt:

Für jedes $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert eine $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion σ_{N_0} , sodass für jeden Startwert $x \in \mathbb{X}_N$ und für alle $N > N_0$ es eine Menge $Q \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ der Mächtigkeit $|Q| \geq N_0$ gibt, sodass für die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E} \leq \sigma_{N_0}(N)$$

für alle $k \in Q$ erfüllt ist.

Beweis:

Sei $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ eine Kontrollfolge, die Annahme 4.6 erfüllt. Dann erhalten wir durch Aufsummieren über $k = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{\tilde{u}_{N,x}}(k, x), \tilde{u}_{N,x}(k)) &\leq \sum_{k=0}^{N-1} l(x_E, u_E) + \sum_{k=0}^{N-1} \gamma(|x|_{x_E}, k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} l(x_E, u_E) + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(|x|_{x_E}, k). \end{aligned}$$

Da γ eine \mathcal{KLS} -Funktion ist, können wir $\eta \in \mathcal{K}$ aus Definition 4.5 verwenden und erlangen die äquivalente Ungleichung

$$J_N(x, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) \leq N \cdot l(x_E, u_E) + \eta(|x|_{x_E}).$$

Es gilt $\mathbb{X}_N \subseteq \mathbb{X}$ und \mathbb{X} ist beschränkt laut Annahme 2.2. Demnach ist auch der Abstand $|x|_{x_E}$ für alle $x \in \mathbb{X}_N$ beschränkt und wir können δ aus (4.1) als

$$\delta := \eta\left(\max_{x \in \mathbb{X}_N} |x|_{x_E}\right)$$

wählen.

Kapitel 4 Turnpike Eigenschaft

Somit berechnen wir für die optimalen Trajektorien, dass gilt

$$\begin{aligned} J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) &\leq J_N(x, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) \\ &\leq N \cdot l(x_E, u_E) + \eta(|x|_{x_E}) \\ &\leq N \cdot l(x_E, u_E) + \delta. \end{aligned}$$

Damit wird Voraussetzung (4.1) aus Satz 4.3 von der optimalen Kontrollfolge $u_{N,x}^*(\cdot)$ erfüllt. Diesen Satz können wir nun anwenden und definieren dazu für jedes $N_0 \in \mathbb{N}$ die Funktion σ_{N_0} durch

$$\sigma_{N_0}(N) = \begin{cases} 0 & \text{für } N \leq N_0 \\ \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{N - N_0}\right) & \text{für } N > N_0 \end{cases}$$

mit $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ aus Definition 2.24 (ii). Für $N \rightarrow \infty$ geht das Argument von ρ^{-1} gegen Null, womit auch ρ^{-1} gegen Null geht, da die Inverse einer \mathcal{K}_∞ -Funktion ebenfalls eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist. Außerdem folgt für zwei beliebige Horizonte $N_1 > N_2 > N_0$, dass gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{N_0}(N_1) &= \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{N_1 - N_0}\right) \\ &< \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{N_2 - N_0}\right) \\ &= \sigma_{N_0}(N_2). \end{aligned}$$

Demzufolge ist $\sigma_{N_0}(N)$ strikt monoton fallend für alle $N > N_0$. Daraus schließen wir, dass $\sigma_{N_0}(N)$ eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion für alle $N > N_0$ ist. Schließlich können wir $\sigma_{N_0}(N)$ für ε aus Satz 4.3 einsetzen und erlangen auf diese Weise für den Wert Q_ε und für alle $N > N_0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} Q_{\sigma_{N_0}(N)} &\geq N - \frac{\delta + C}{\rho(\sigma_{N_0}(N))} \\ &= N - \frac{\delta + C}{\rho\left(\rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{N - N_0}\right)\right)} \\ &= N - \frac{\delta + C}{\left(\frac{\delta + C}{N - N_0}\right)} \\ &= N - (N - N_0) \\ &= N_0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x}^*}(k, x)|_{x_E} \leq \sigma_{N_0}(N)$$

für mindestens N_0 Werte $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ erfüllt ist, womit [Satz 4.7](#) bewiesen wäre.

□

Kapitel 5

Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung zweier wichtiger Sätze, welche Verwendung im Beweis der Suboptimalitätssätze finden werden. Dafür betrachten wir im gesamten Kapitel wieder die Problemstellungen ohne Endbeschränkungen (2.4) und (2.5).

Der erste Satz in diesem Kapitel liefert eine Abschätzung für die betragsliche Differenz zweier optimaler Wertefunktionen V_N von Problemstellung (2.4) mit gleichem Horizont N und verschiedenen Anfangswerten $x \in \mathbb{X}_N$ und $y \in \mathbb{X}_N$.

Dabei gilt es zu zeigen, dass die folgende Ungleichung unter bestimmten Annahmen für alle Anfangswerte $x, y \in \mathbb{X}_N$, die sich in einer Kugel um den Gleichgewichtspunkt $\mathcal{B}_\delta(x_E)$ befinden, und für einen ausreichend großen Horizont N , sowie ausreichend kleine Radien δ erfüllt ist:

$$|V_N(x) - V_N(y)| \leq \beta_V(2\delta)$$

Hierbei bezeichnet β_V eine \mathcal{K}_∞ -Funktion.

Dieser Satz wird im zweiten Abschnitt des Kapitels aufgestellt und bewiesen, wobei wir uns hierbei erneut an [5] orientieren werden. Ebenfalls im zweiten Abschnitt bieten wir noch eine zweite, analoge Version obiger Abschätzung für die Problemstellung auf unendlichen Horizont (2.5) an, welche in [5] nicht behandelt wurde. Dafür werden wir jedoch zusätzlich auf Ergebnisse aus dem Stabilitätsabschnitt 3.3 zurückgreifen müssen.

Doch zunächst einmal wird im ersten Abschnitt ein Hilfslemma vorgestellt, welches den Beweis des darauffolgenden Satzes für endlichen Horizont erheblich erleichtern wird.

5.1 Annahmen und Hilfslemma

Für das Hilfslemma in diesem Abschnitt werden insgesamt drei Annahmen benötigt. Eine davon bildet wie gewohnt die strikte Dissipativitätsbedingung an das System (2.1) aus Definition 2.24 (ii). Die zwei weiteren Annahmen werden sogleich eingeführt.

Annahme 5.1:

Es existieren ein $\delta_c > 0$, ein $d \in \mathbb{N}$ und drei \mathcal{K}_∞ -Funktionen $\beta_x, \beta_u, \beta_l$, sodass für jede Trajektorie $x_{u_1}(\cdot, x)$ mit $x \in \mathbb{X}_d$ und $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}^d$, die

$$x_{u_1}(k, x) \in \mathcal{B}_{\delta_c}(x_E)$$

für alle $k = 0, \dots, d$ erfüllt, und für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{B}_{\delta_c}(x_E)$ es eine zulässige Kontrollfolge $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}^d$ gibt mit

$$x_{u_2}(d, x_1) = x_2,$$

sodass die folgenden drei Abschätzungen für alle $k = 0, \dots, d - 1$ erfüllt sind:

- (i) $\left\| x_{u_2}(k, x_1) - x_{u_1}(k, x) \right\| \leq \beta_x \left(\max \{ |x|_{x_1}, |x_{u_1}(d, x)|_{x_2} \} \right)$
- (ii) $\left\| u_2(k) - u_1(k) \right\| \leq \beta_u \left(\max \{ |x|_{x_1}, |x_{u_1}(d, x)|_{x_2} \} \right)$
- (iii) $\left| l(x_{u_2}(k, x_1), u_2(k)) - l(x_{u_1}(k, x), u_1(k)) \right| \leq \beta_l \left(\max \{ |x|_{x_1}, |x_{u_1}(d, x)|_{x_2} \} \right)$

Annahme 5.2:

Es existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_u , sodass für alle Paare $(x, u) \in \mathbb{Z}$ gilt

$$L(x, u) \leq l(x_E, u_E) + \rho_u(|x|_{x_E} + |u|_{u_E}).$$

Annahme 5.1 liefert uns Abschätzungen mithilfe von \mathcal{K}_∞ -Funktionen für zwei Zustandstrajektorien $x_{u_1}(\cdot, x)$ und $x_{u_2}(\cdot, x_1)$, sowie weitere Abschätzungen für deren zugehörige Kontrollfolgen und Kosten. Hierzu müssen $x_{u_1}(k, x)$ für alle $k = 0, \dots, d$ in einer Kugel um das Gleichgewicht herum bleiben und Anfangs- und Endwerte von $x_{u_2}(\cdot, x_1)$ in der gleichen Kugel liegen.

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Die beiden Trajektorien aus [Annahme 5.1](#) veranschaulichen wir in [Abbildung 5.1](#).

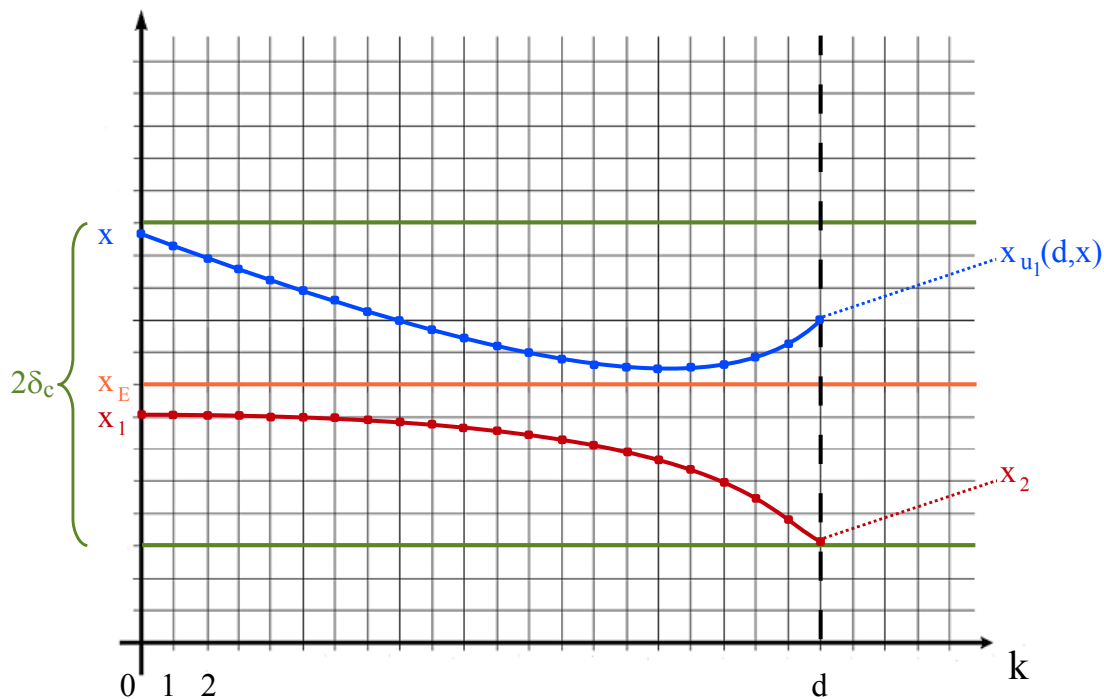


Abb. 5.1: Trajektorien $x_{u_1}(k, x)$ und $x_{u_2}(k, x_1)$ mit $k = 0, \dots, d$ aus [Annahme 5.1](#).

Im Anschluss halten wir das Hilfslemma fest, welches den Beweis des kommenden Satzes wesentlich vereinfachen wird. Dieses Lemma entspricht [Lemma 6.3](#) aus [\[5\]](#).

Lemma 5.3:

Es seien die Annahmen 5.1 und 5.2 erfüllt. Zusätzlich sei das System (2.1) strikt dissipativ nach Definition 2.24 (ii) bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Dann gilt:

Es existieren ein $N_1 > 0$, eine Funktion $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $P(N) \geq \frac{N}{2}$ und eine Funktion $\eta : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\eta(N, r) \rightarrow 0$ für $(N \rightarrow \infty \wedge r \rightarrow 0)$, sodass die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises mit Horizont $N \geq N_1$ und Anfangswert $x_1 \in \mathcal{B}_{\delta_c}(x_E)$ die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x_1}^*}(k, x_1)|_{x_E} \leq \eta(N, |x_1|_{x_E})$$

für alle $k = 0, \dots, P(N)$ erfüllen.

Beweis:

Wir werden im Beweis auf die Turnpike Eigenschaft aus dem vorherigen Kapitel zurückgreifen, im Speziellen auf Satz 4.3.

Als erstes wenden wir Annahme 5.1 an mit $x = x_E = x_2$ und $u_1(\cdot) \equiv u_E$. Dies ist zum besseren Verständnis in Abbildung 5.2 skizziert. Aus Teil (iii) der Annahme erhalten wir dann

$$\begin{aligned} l(x_{u_2}(k, x_1), u_2(k)) - l(x_E, u_E) &\leq |l(x_{u_2}(k, x_1), u_2(k)) - l(x_E, u_E)| \\ &\leq \beta_l(|x_1|_{x_E}) \end{aligned}$$

für alle $k = 0, \dots, d-1$. Diese Ungleichung summieren wir über $k = 0, \dots, d-1$ auf zu

$$\sum_{k=0}^{d-1} l(x_{u_2}(k, x_1), u_2(k)) \leq \sum_{k=0}^{d-1} l(x_E, u_E) + \sum_{k=0}^{d-1} \beta_l(|x_1|_{x_E}),$$

was äquivalent ist zu

$$J_d(x_1, u_2(\cdot)) \leq d \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \beta_l(|x_1|_{x_E}). \quad (5.1)$$

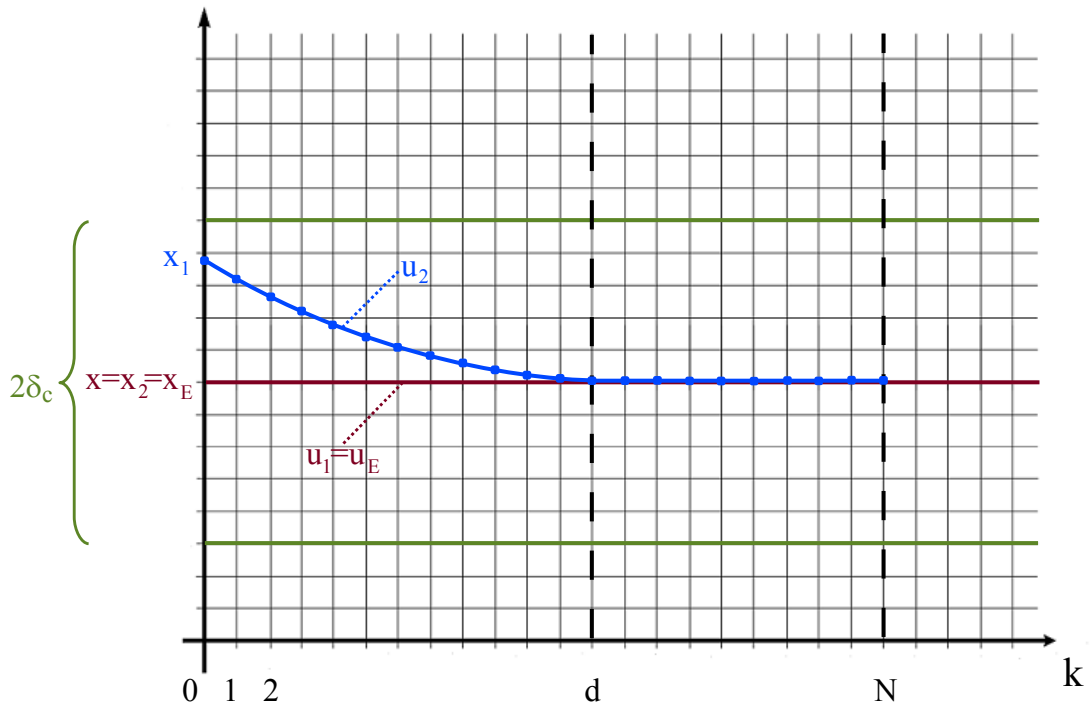


Abb. 5.2: **Annahme 5.1** mit $x = x_E = x_2$ und $u_1(\cdot) \equiv u_E$ für $k = 0, \dots, d$ und Kontrollfolge $u_2(\cdot)$ verlängert auf Horizont N .

Sei nun $N \geq d$. Dann erweitern wir $u_2(\cdot)$ so, dass gilt

$$u_2(k) = u_E$$

für $k = d, \dots, N-1$. Dies ist ebenfalls in Abbildung 5.2 dargestellt. Anschließend berechnen wir damit

$$\begin{aligned}
 J_N(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) &\leq J_N(x_1, u_2(\cdot)) \\
 &= J_d(x_1, u_2(\cdot)) + (N-d) \cdot l(x_E, u_E) \\
 &\stackrel{(5.1)}{\leq} d \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \beta_l(|x_1|_{x_E}) + (N-d) \cdot l(x_E, u_E) \\
 &= N \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \beta_l(|x_1|_{x_E}).
 \end{aligned}$$

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Wenn wir $\delta := d \cdot \beta_l(|x_1|_{x_E})$ wählen, ergibt sich aus obiger Rechnung folglich die Ungleichung

$$J_N(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) \leq N \cdot l(x_E, u_E) + \delta,$$

womit die Voraussetzungen aus [Satz 4.3](#) für $x = x_1$ und $u_{N,x}(\cdot) \equiv u_{N,x_1}^*(\cdot)$ erfüllt sind. Demnach können wir [Satz 4.3](#) anwenden und wählen ε und N so, dass für den Wert Q_ε gilt

$$Q_\varepsilon \geq 2d + 1.$$

Wenn wir jetzt $P(N)$ als das größte k definieren, für das die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x_1}^*}(k, x_1)|_{x_E} \leq \varepsilon \tag{5.2}$$

erfüllt ist, dann folgt die Ungleichung

$$P(N) \geq Q_\varepsilon - 1 \geq 2d.$$

Als nächsten Schritt verwenden wir erneut [Annahme 5.1](#) - diesmal mit $x_1 = x = x_E$, $u_1(\cdot) \equiv u_E$ und $x_2 = x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1)$. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir hier $u_2(\cdot)$ mit $\tilde{u}_2(\cdot)$. Dies wird in [Abbildung 5.3](#) beispielhaft veranschaulicht.

Eine analoge Rechnung mit [Annahme 5.1 \(iii\)](#) wie weiter oben im Beweis liefert uns dann

$$J_d(x_E, \tilde{u}_2(\cdot)) \leq d \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \beta_l(|x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1)|_{x_E}).$$

Da für $P(N)$ Ungleichung [\(5.2\)](#) erfüllt ist, folgt

$$J_d(x_E, \tilde{u}_2(\cdot)) \leq d \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \beta_l(\varepsilon).$$

Dies lässt sich schlussfolgern, weil β_l eine \mathcal{K}_∞ -Funktion und damit streng monoton wachsend ist.

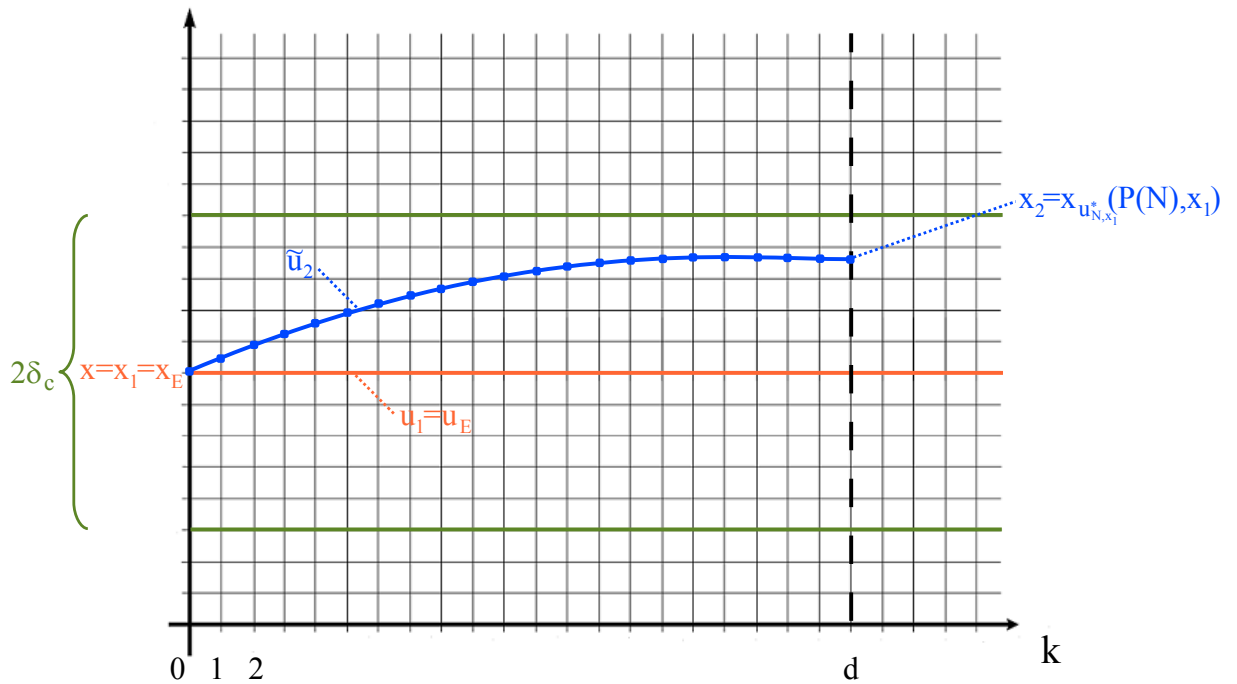


Abb. 5.3: Annahme 5.1 mit $x = x_E = x_1$, $x_2 = x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1)$ und $u_1 = u_E$ für $k = 0, \dots, d$.

Nachfolgend definieren wir aus den bisher im Beweis verwendeten Kontrollfolgen eine zusammengesetzte Kontrollfolge $\tilde{u}(\cdot)$ als

$$\tilde{u}(k) = \begin{cases} u_2(k) & \text{für } k = 0, \dots, d - 1 \\ u_E & \text{für } k = d, \dots, P(N) - d - 1 \\ \tilde{u}_2(k) & \text{für } k = P(N) - d, \dots, P(N) - 1 \\ u_{N,x_1}^*(k) & \text{für } k = P(N), \dots, N - 1 \end{cases} .$$

Das Prinzip der Zusammensetzung von $\tilde{u}(\cdot)$ lässt sich aus Abbildung 5.4 entnehmen.

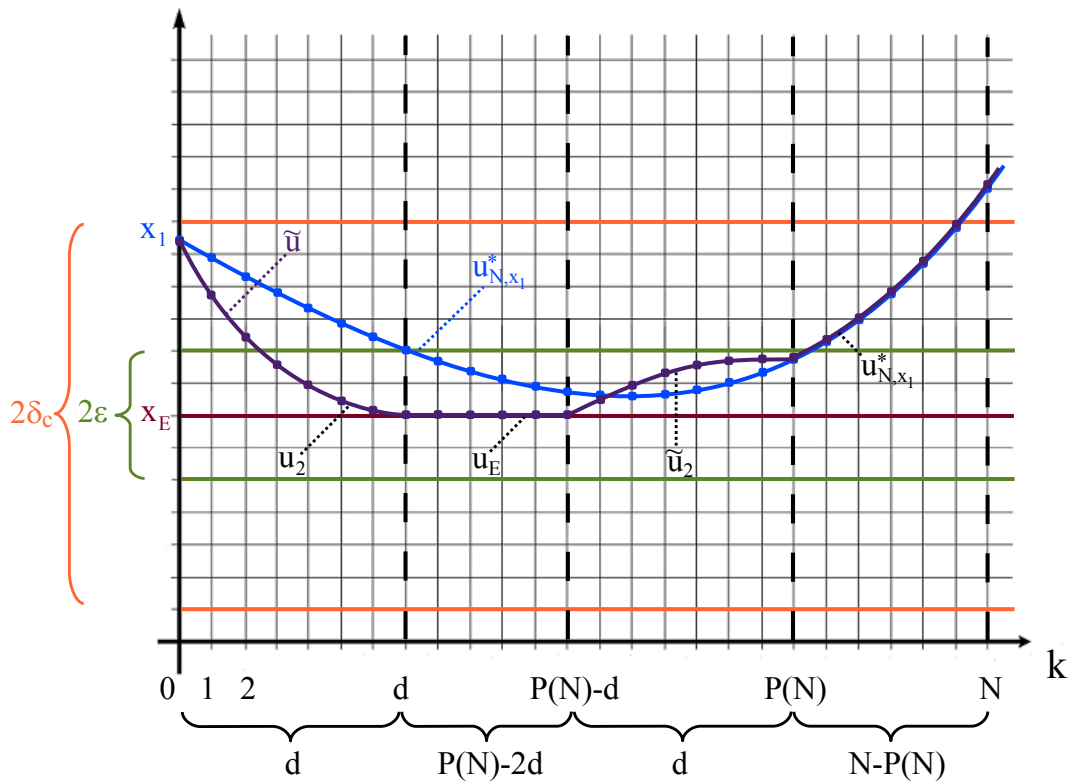


Abb. 5.4: Kontrollfolge $\tilde{u}(\cdot)$, welche aus $u_2(\cdot)$, u_E , $\tilde{u}_2(\cdot)$ und $u_{N,x_1}^*(\cdot)$ zusammengesetzt ist.

Wir erhalten damit

$$V_N(x_1) = J_N(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) \leq J_N(x_1, \tilde{u}(\cdot)).$$

Das Prinzip der dynamischen Programmierung aus Abschnitt 2.1.3 hilft uns daraus die folgende äquivalente Ungleichung zu erlangen:

$$J_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) + J_{N-P(N)}(x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1), u_{N,x_1}^*(\cdot + P(N))) \leq J_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) + J_{N-P(N)}(x_{\tilde{u}}(P(N), x_1), \tilde{u}(\cdot + P(N)))$$

Da auf beiden Seiten bei den beiden hinteren Zielfunktionen mit Horizont $N - P(N)$ sowohl die Anfangszustände

$$x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1) = x_{\tilde{u}}(P(N), x_1),$$

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

als auch die Kontrollfolgen

$$u_{N,x_1}^*(\cdot + P(N)) = \tilde{u}(\cdot + P(N))$$

für $k = 0, \dots, N - P(N) - 1$ übereinstimmen, können wir diese beiden Terme kürzen und erzielen die Ungleichung

$$J_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) \leq J_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)). \quad (5.3)$$

Bereits im Beweis von [Satz 4.3](#) haben wir für die modifizierte Zielfunktion \tilde{J}_N von Problemstellung [\(4.2\)](#) berechnet, dass gilt

$$\tilde{J}_N(x, u(\cdot)) = J_N(x, u(\cdot)) + \lambda(x) - \lambda(x_u(N, x)).$$

Dies wenden wir nun auf beide Zielfunktionen aus [\(5.3\)](#) an und bekommen

$$\tilde{J}_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) = J_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) + \lambda(x_1) - \lambda(x_{u_{N,x_1}^*}(P(N), x_1))$$

und

$$\tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) = J_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) + \lambda(x_1) - \lambda(x_{\tilde{u}}(P(N), x_1)).$$

Für diese beiden Gleichungen gilt, dass die hinteren Ausdrücke mit der Speicherfunktion λ sich entsprechen und mithilfe von [\(5.3\)](#) schließen wir somit auf

$$\tilde{J}_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) \leq \tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)). \quad (5.4)$$

Im Folgenden wollen wir zuerst die rechte Seite von [\(5.4\)](#) abschätzen. Dies erreichen wir durch Zuhilfenahme von [Annahme 5.1](#). Für $\tilde{u}(\cdot)$ gelten demnach die folgenden Abschätzungen:

- a) $|x_{\tilde{u}}(k, x_1)|_{x_E} \leq \beta_x(|x_1|_{x_E})$ für $k = 0, \dots, d - 1$
- b) $|\tilde{u}(k)|_{u_E} \leq \beta_u(|x_1|_{x_E})$ für $k = 0, \dots, d - 1$
- c) $|x_{\tilde{u}}(k, x_1)|_{x_E} \leq \beta_x(|x_{\tilde{u}}(P(N), x_1)|_{x_E}) \stackrel{(5.2)}{\leq} \beta_x(\varepsilon)$
für $k = P(N) - d + 1, \dots, P(N)$
- d) $|\tilde{u}(k)|_{u_E} \leq \beta_u(|x_{\tilde{u}}(P(N), x_1)|_{x_E}) \stackrel{(5.2)}{\leq} \beta_u(\varepsilon)$
für $k = P(N) - d + 1, \dots, P(N)$

Für $k = d, \dots, P(N) - d$ sind die Abstände $|x_{\tilde{u}}(k, x_1)|_{x_E}$ und $|\tilde{u}(k)|_{u_E}$ gleich Null, zumal $x_{\tilde{u}}(k, x_1) = x_E$ sowie $\tilde{u}(k) = u_E$ gilt.

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Anschließend wenden wir [Annahme 5.2](#) auf $\tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot))$ an und schätzen das Ganze mit a), b), c) und d) ab. Wir bekommen auf diese Weise

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{d-1} L(x_{\tilde{u}}(k), \tilde{u}(k)) + \sum_{k=d}^{P(N)-d} L(x_{\tilde{u}}(k), \tilde{u}(k)) \\ &\quad + \sum_{k=P(N)-d+1}^{P(N)} L(x_{\tilde{u}}(k), \tilde{u}(k)) \\ &\stackrel{a),b),c),d)}{\leq} P(N) \cdot l(x_E, u_E) + d \cdot \rho_u(\beta_x(|x_1|_{x_E}) + \beta_u(|x_1|_{x_E})) \\ &\quad + P(N) \cdot \rho_u(0 + 0) + d \cdot \rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon)) \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) &\leq P(N)l(x_E, u_E) + d\rho_u(\beta_x(|x_1|_{x_E}) + \beta_u(|x_1|_{x_E})) \\ &\quad + d\rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nachfolgend leiten wir darüber hinaus noch eine Abschätzung für die linke Seite von (5.4) her. Um dies zu bewerkstelligen, wollen wir Ungleichung (3.14) verwenden. Dafür definieren wir zuerst noch

$$\Delta := \max_{k=0, \dots, P(N)-1} |x_{u_{N,x_1}^*}(k, x_1)|_{x_E}.$$

Dann liefert uns Ungleichung (3.14), dass gilt

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{P(N)-1} L(x_{u_{N,x_1}^*}(k), u(k)) \\ &\geq P(N) \cdot L(x_E, u_E) + \sum_{k=0}^{P(N)-1} \rho(|x_{u_{N,x_1}^*}(k)|_{x_E}) \\ &= P(N) \cdot (l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E))) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{P(N)-1} \rho(|x_{u_{N,x_1}^*}(k)|_{x_E}) \\ &\geq P(N) \cdot l(x_E, u_E) + \rho(\Delta). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Wenn wir schließlich (5.4), (5.5) und (5.6) zusammensetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(N)l(x_E, u_E) + \rho(\Delta) &\leq \tilde{J}_{P(N)}(x_1, u_{N,x_1}^*(\cdot)) \\ &\leq \tilde{J}_{P(N)}(x_1, \tilde{u}(\cdot)) \\ &\leq P(N)l(x_E, u_E) + d\rho_u(\beta_x(|x_1|_{x_E}) + \beta_u(|x_1|_{x_E})) \\ &\quad + d\rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon)), \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\rho(\Delta) \leq d\rho_u(\beta_x(|x_1|_{x_E}) + \beta_u(|x_1|_{x_E})) + d\rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon)).$$

Demzufolge muss Δ die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\Delta \leq \rho^{-1}\left(d\rho_u(\beta_x(|x_1|_{x_E}) + \beta_u(|x_1|_{x_E})) + d\rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon))\right)$$

Um den Beweis zum Abschluss zu bringen, wählen wir ε in Abhängigkeit von N als

$$\varepsilon := \rho^{-1}\left(\frac{2 \cdot (\delta + C)}{N - 2}\right).$$

Mit dieser Wahl von ε ist gewährleistet, dass

$$\begin{aligned} P(N) &\geq Q_\varepsilon - 1 \\ &\geq N - (\delta + C) / \left(\frac{2 \cdot (\delta + C)}{N - 2}\right) - 1 \\ &= N - \frac{N}{2} + 1 - 1 \\ &= \frac{N}{2} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Mit der obigen Definition von ε können wir anschließend η definieren als

$$\eta(N, r) := \rho^{-1}\left(d\rho_u(\beta_x(r) + \beta_u(r)) + d\rho_u(\beta_x(\varepsilon) + \beta_u(\varepsilon))\right),$$

wodurch für $k = 0, \dots, P(N) - 1$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |x_{u_{N,x_1}^*}(k, x_1)|_{x_E} &\leq \Delta \\ &\leq \eta(N, |x_1|_{x_E}) \end{aligned}$$

sichergestellt wäre. Außerdem gilt $\varepsilon \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$, da die Inverse einer \mathcal{K}_∞ -Funktion ebenfalls eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist. Damit garantiert diese Wahl

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

von ε und η nun auch, dass $\eta(N, r) \rightarrow 0$ für $(N \rightarrow \infty \wedge r \rightarrow 0)$ gilt. Schlussendlich müssen wir nur noch N_1 geschickt wählen, um die im Beweis verwendete Ungleichung $P(N) \geq 2d$ zu gewährleisten. Dies erfolgt mit der Wahl

$$N_1 = 4d,$$

da dadurch für alle $N \geq N_1$ gilt

$$\begin{aligned} P(N) &\geq \frac{4d}{2} \\ &= 2d. \end{aligned}$$

□

5.2 Sätze zur Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Zu guter Letzt können wir die in der Einleitung dieses Kapitels angekündigten Sätze in diesem Abschnitt aufstellen und beweisen.

Im ersten Unterabschnitt folgt der Satz für die Problemstellung auf endlichem Horizont (2.4) und im zweiten Unterabschnitt der analoge Satz für die Problemstellung auf unendlichem Horizont (2.5).

5.2.1 Abschätzung für endlichen Horizont ohne Endbeschränkungen

An dieser Stelle sind wir schließlich im Besitz aller nötigen Hilfsmittel, um den Hauptsatz dieses Kapitels, dessen Idee schon am Anfang vorgestellt wurde, zu formulieren. Wir betrachten in diesem Unterabschnitt also Problemstellung (2.4) für endlichen Horizont und halten sogleich den folgenden Satz fest, der eine Abschätzung für die Werte zweier optimaler Wertefunktionen mit gleichem Horizont aber verschiedenen Anfangswerten liefert.

Dieser Satz ist eine etwas abgewandelte Form von Theorem 4.2 (b), welches in [5] zu finden ist. Für den Beweis werden wir auf Lemma 5.3 aus dem vorherigen Abschnitt zurückgreifen.

Satz 5.4:

Es seien die Annahmen 5.1 und 5.2 erfüllt. Sei außerdem das System (2.1) strikt dissipativ nach Definition 2.24 (ii) bezüglich der Versorgungsrate (2.10). Dann gilt:

Es existieren $N_0 \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{\delta} > 0$ und $\beta_V \in \mathcal{K}_\infty$, sodass die Ungleichung

$$|V_N(x) - V_N(y)| \leq \beta_V(2\delta)$$

für alle $\delta \in (0, \tilde{\delta}]$, alle $N \geq N_0$ und alle $x, y \in \mathcal{B}_\delta(x_E)$ erfüllt ist.

Beweis:

Als erstes wählen wir $N_0 \geq N_1$ (aus Lemma 5.3) und $\tilde{\delta} > 0$ so, dass sowohl

$$\tilde{\delta} \leq \delta_c \text{ (aus Annahme 5.1)}$$

als auch

$$\eta(N, r) \leq \delta_c$$

für alle $N \geq N_0$ und alle $r \in (0, \tilde{\delta}]$ erfüllt ist. Des Weiteren verwenden wir [Lemma 5.3](#) und berechnen für die optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises, dass gilt

$$\begin{aligned} |x_{u_{N,x}}^*(k, x)|_{x_E} &\leq \eta(N, |x|_{x_E}) \\ &\leq \eta(N, \tilde{\delta}) \\ &\leq \delta_c \end{aligned}$$

für $k = 0, \dots, P(N)$, also insbesondere auch für $k = 0, \dots, d$, da bekanntlich $P(N) \geq 2d \geq d$ erfüllt ist (vgl. Beweis von [Lemma 5.3](#)). Anders ausgedrückt erfüllen die Trajektorien des offenen Regelkreises (2.1) für $k = 0, \dots, d$ demzufolge

$$x_{u_{N,x}}^*(k, x) \in \mathcal{B}_{\delta_c}(x_E).$$

Dadurch lässt sich erneut [Annahme 5.1](#) anwenden, diesmal mit $x, x_1 = y, u_1(\cdot) \equiv u_{N,x}^*(\cdot), x_2 = x_{u_{N,x}}^*(d, x)$. Auch für diesen Fall verdeutlichen wir den Gebrauch von [Annahme 5.1](#) in einer graphische Darstellung auf der folgenden Seite. Mit Teil (iii) aus [Annahme 5.1](#) erhalten wir für die Kosten

$$\begin{aligned} l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) - l(x_{u_{N,x}}^*(k, x), u_{N,x}^*(k)) &\leq |l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) \\ &\quad - l(x_{u_{N,x}}^*(k, x), u_{N,x}^*(k))| \\ &\leq \beta_l(|x|_y) \end{aligned} \tag{5.7}$$

für $k = 0, \dots, d - 1$.

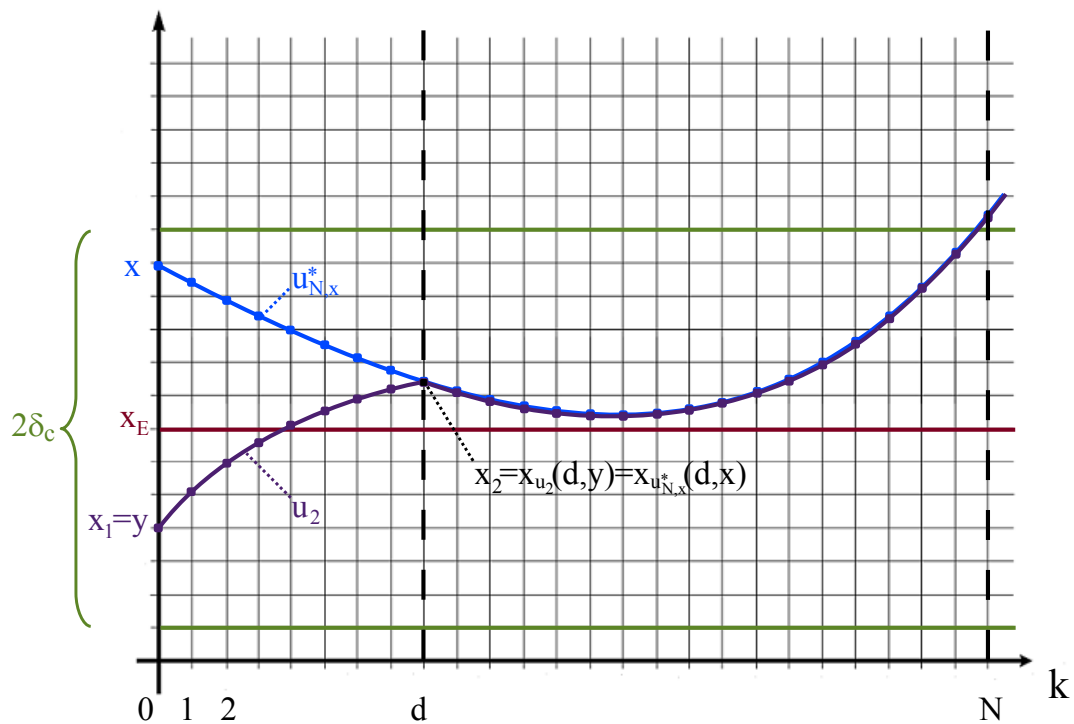


Abb. 5.5: Verwendung von [Annahme 5.1](#) mit $x, x_1 = y, u_1(\cdot) \equiv u_{N,x}^*(\cdot)$ und $x_2 = x_{u_{N,x}^*}(d, x)$.

Wir verlängern $u_2(\cdot)$ auf Horizont N , indem wir

$$u_2(k) = u_{N,x}^*(k)$$

für $k = d, \dots, N - 1$ setzen und berechnen

$$\begin{aligned} V_N(y) &\leq J_N(y, u_2(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) + \sum_{k=d}^{N-1} l(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) \\ &\stackrel{(5.7)}{\leq} \sum_{k=0}^{d-1} (l(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) + \beta_l(|x|_y)) \\ &\quad + \sum_{k=d}^{N-1} l(x_{u_{N,x}^*}(k, x), u_{N,x}^*(k)) \\ &= J_N(x, u_{N,x}^*(\cdot)) + d \cdot \beta_l(|x|_y) \\ &= V_N(x) + d \cdot \beta_l(|x|_y) \\ &\leq V_N(x) + d \cdot \beta_l(2\delta). \end{aligned}$$

Abschließend definieren wir $\beta_V(r) := d \cdot \beta_l(r)$ und bekommen insgesamt

$$V_N(y) \leq V_N(x) + \beta_V(2\delta).$$

Es ist leicht nachvollziehbar, dass durch Austauschen von x und y wir durch eine analoge Vorgehensweise und Berechnung auf die umgekehrte Ungleichung

$$V_N(x) \leq V_N(y) + \beta_V(2\delta),$$

stoßen. Beides kombiniert ergibt gerade

$$|V_N(x) - V_N(y)| \leq \beta_V(2\delta).$$

Damit ist der Beweis von [Satz 5.4](#) abgeschlossen.

□

5.2.2 Abschätzung für unendlichen Horizont

Wir beenden das Kapitel mit einer zweiten Version des so eben behandelten Satzes. Hierbei betrachten wir die optimalen Wertefunktionen für die Problemstellung auf unendlichem Horizont (2.5).

Es sei angemerkt, dass wir diesmal nur die strikte Dissipativitätsannahme und [Annahme 5.1](#) im Satz verlangen. [Annahme 5.2](#), welche wir für den Beweis von [Lemma 5.3](#) verwendet haben, sowie das [Hilfslemma 5.3](#) selbst, werden hier nicht mehr gebraucht. Jedoch benötigen wir zusätzlich alle Voraussetzungen, um die asymptotische Stabilität des Regelgesetzes μ_∞ zu garantieren. Dazu beziehen wir uns auf den [Stabilitätssatz 3.19](#) und setzen alle Annahmen dieses Satzes voraus.

Satz 5.5:

Es seien die strikte Dissipativität des Systems (2.1) nach [Definition 2.24 \(ii\)](#) bezüglich der Versorgungsrate (2.10) und [Annahme 5.1](#) erfüllt. Seien zusätzlich alle Annahmen des [Stabilitätssatzes 3.19](#) erfüllt. Dann gilt:

Es existieren ein $\tilde{\delta} > 0$ und eine Funktion $\beta_V \in \mathcal{K}_\infty$, sodass die Ungleichung

$$|V_\infty(x) - V_\infty(y)| \leq \beta_V(2\delta)$$

für alle $\delta \in (0, \tilde{\delta}]$ und alle $x, y \in \mathcal{B}_\delta(x_E)$ erfüllt ist.

Beweis:

Aus [Satz 3.19](#) wissen wir, dass μ_∞ den geschlossenen Regelkreis (2.3) asymptotisch stabilisiert. Demnach existiert nach [Definition 3.2](#) ein $\beta \in \mathcal{KL}$, sodass für alle $x \in \mathbb{X}_\infty$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$|x_{\mu_\infty}(k, x)|_{x_E} \leq \beta(|x|_{x_E}, k)$$

erfüllt ist. Wir wählen nun $\tilde{\delta}$ so, dass $\tilde{\delta} \leq \delta_c$ und

$$\begin{aligned} |x_{\mu_\infty}(k, x)|_{x_E} &\leq \beta(|x|_{x_E}, k) \\ &\leq \beta(|x|_{x_E}, 0) \\ &\leq \delta_c \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{B}_\delta(x_E)$ gilt.

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Anders ausgedrückt gilt

$$x_{\mu_\infty}(k, x) \in \mathcal{B}_{\delta_c}(x_E)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und insbesondere für $k = 0, \dots, d$. Damit sind die Voraussetzungen von [Annahme 5.1](#) erfüllt und wir setzen diese sogleich ein mit x , $x_1 = y$, $u_1(\cdot) \equiv \mu_\infty(\cdot)$, $x_2 = x_{\mu_\infty}(d, x)$. Die Anwendung der Annahme ist abermals in [Abbildung 5.6](#) dargestellt. Infolgedessen können wir für die Kosten berechnen, dass

$$\begin{aligned} & l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) \\ -l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) & \leq |l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) \\ & \quad - l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x)))| \\ & \leq \beta_l(|x|_y) \end{aligned} \tag{5.8}$$

für $k = 0, \dots, d - 1$ gilt.

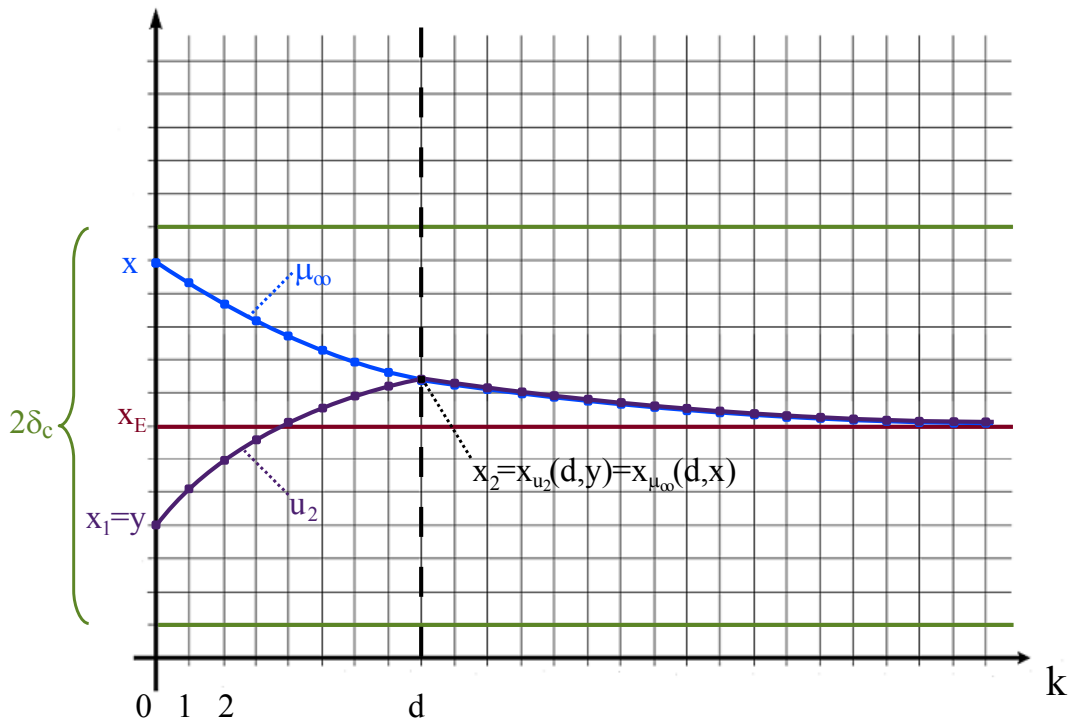


Abb. 5.6: Verwendung von [Annahme 5.1](#) mit x , $x_1 = y$, $u_1(\cdot) \equiv \mu_\infty(\cdot)$ und $x_2 = x_{\mu_\infty}(d, x)$.

Kapitel 5 Abschätzung der optimalen Wertefunktion

Wir verlängern $u_2(\cdot)$ auf den unendlichen Horizont mittels

$$u_2(k) := \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))$$

für $k \geq d$ und berechnen

$$\begin{aligned} V_\infty(y) &\leq J_\infty(y, u_2(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} l(x_{u_2}(k, y), u_2(k)) + \sum_{k=d}^{\infty} l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \\ &\stackrel{(5.8)}{\leq} \sum_{k=0}^{d-1} (l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) + \beta_l(|x|_y)) \\ &\quad + \sum_{k=d}^{\infty} l(x_{\mu_\infty}(k, x), \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))) \\ &= J_\infty(x, \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(\cdot, x))) + d \cdot \beta_l(|x|_y) \\ &= V_\infty(x) + d \cdot \beta_l(|x|_y) \\ &\leq V_\infty(x) + d \cdot \beta_l(2\delta). \end{aligned}$$

Wir setzen wie gehabt $\beta_V(r) := d \cdot \beta_l(r)$ und erhalten folglich

$$V_\infty(y) \leq V_\infty(x) + \beta_V(2\delta).$$

Durch Austauschen von x und y erhalten wir auch hier durch analoge Vorgehensweise die umgekehrte Ungleichung

$$V_\infty(x) \leq V_\infty(y) + \beta_V(2\delta).$$

□

Kapitel 6

Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

In diesem Kapitel befassen wir uns schließlich mit dem Kern dieser Arbeit. Wir besitzen nun alle erforderlichen Hilfsmittel und sind somit im Stande die Suboptimalitätsschranken für die Problemstellungen (2.6) und (2.7) herzuleiten. Wie schon in Kapitel 2 erklärt wurde, wollen wir die Differenz

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) - J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) = J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) - V_\infty(x)$$

mithilfe von Vergleichsfunktionen nach oben abschätzen. Diese Differenz stellt dabei die Abweichung der Kosten auf unendlichem Horizont des von uns betrachteten Regelgesetzes μ_N der Problemstellungen (2.6) bzw. (2.7) zu den Kosten auf unendlichem Horizont des optimalen Regelgesetzes μ_∞ der Problemstellung (2.5) dar, wodurch Aussagen zur Regelgüte von μ_N ermöglicht werden. Wir werden, wie in Abschnitt 2.2 schon erwähnt wurde, jedoch nicht exakt die obige Differenz untersuchen, sondern Auswertungen für die Differenz der optimalen Wertefunktionen für endlichen und unendlichen Horizont vornehmen, also

$$V_N(x) - V_\infty(x).$$

Dazu verhilft uns wiederum die Abschätzung

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x). \tag{6.1}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir also beginnend mit dem Nachweis der Ungleichung (6.1) die Herleitung der Suboptimalitätsschranken thematisieren, die sich auf Ergebnisse aus vorherigen Kapiteln stützen wird.

6.1 Suboptimalitätssatz für die Gleichgewichtsendpunktbedingung

Wir beginnen mit Problemstellung (2.6) und betrachten demnach das Optimierungsproblem mit Gleichgewichtsendpunktbedingung.

Als ersten Schritt wollen wir Ungleichung (6.1) herleiten. Da wir dafür auf Ergebnisse aus dem Stabilitätskapitel 3 angewiesen sind, setzen wir die Annahmen aus Satz 3.7 voraus. Wir stellen den folgenden Satz auf:

Satz 6.1: (Abschätzung der Kosten auf unendlichem Horizont)
Betrachte Problemstellung (2.6). Es seien alle Annahmen aus dem Stabilitätssatz 3.7 erfüllt. Dann gilt für die Kosten auf unendlichem Horizont aus Definition 2.21 angewendet auf das Feedbackgesetz μ_N , dass die Ungleichung

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ erfüllt ist.

Beweis:

Mit den Annahmen aus Stabilitätssatz 3.7, können wir nun auf Lemma 3.6 und Satz 3.7 zurückgreifen. Dazu setzen wir mit der Ungleichung aus Lemma 3.6 an und erhalten

$$V_N(x_{\mu_N}(k+1, x)) - V_N(x_{\mu_N}(k, x)) \leq l(x_E, u_E) - l(x_{\mu_N}(k, x), \mu_N(x_{\mu_N}(k, x)))$$

für $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Aus Annahme 2.17 bekommen wir außerdem

$$l(x_E, u_E) = 0.$$

Ferner summieren wir über $k = 0, \dots, K-1$ auf, womit obige Ungleichung zu

$$\sum_{k=0}^{K-1} (V_N(x_{\mu_N}(k+1, x)) - V_N(x_{\mu_N}(k, x))) \leq - \sum_{k=0}^{K-1} l(x_{\mu_N}(k, x), \mu_N(x_{\mu_N}(k, x)))$$

wird. Dies ist nun aber äquivalent zu

$$V_N(x_{\mu_N}(K, x)) - V_N(x_{\mu_N}(0, x)) \leq -J_K(x, \mu_N(\cdot)). \quad (6.2)$$

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Als nächstes wollen wir den Grenzwert von Ungleichung (6.2) für $K \rightarrow \infty$ bilden. Dazu überlegen wir uns erst, wie sich der erste Summand auf der linken Seite für $K \rightarrow \infty$ verhält. Aus Satz 3.7 wissen wir, dass μ_N den geschlossenen Regelkreis (2.3) bezüglich x_E asymptotisch stabilisiert. Daraus folgt sogleich der Limes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\mu_N}(k, x) = x_E$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$. Mithilfe der optimalen Wertefunktion \tilde{V}_N aus Hilfsproblem (3.12) lässt sich V_N als

$$V_N(x) = \tilde{V}_N(x) + \lambda(x_E) - \lambda(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ angeben. Da die Kosten (2.2) stetig laut Annahme 2.2 sind und daher auch die optimale Wertefunktion V_N von Problemstellung (2.6) als Summe stetiger Funktionen stetig ist, können wir damit schließlich berechnen, dass gilt

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} V_N(x_{\mu_N}(K, x)) &= V_N\left(\lim_{K \rightarrow \infty} x_{\mu_N}(K, x)\right) \\ &= V_N(x_E) \\ &= \tilde{V}_N(x_E) + \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \\ &= N \cdot L(x_E, u_E) \\ &= N \cdot (l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E))) \\ &= N \cdot l(x_E, u_E) \\ &\stackrel{l(x_E, u_E)=0}{=} 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir für den Grenzwert von Ungleichung (6.2)

$$0 - V_N(x_{\mu_N}(0, x)) \leq - \lim_{K \rightarrow \infty} J_K(x, \mu_N(\cdot)),$$

was äquivalent ist zu

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x).$$

□

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Bemerkung 6.2:

Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, dass man die Aussage aus [Satz 6.1](#) mit einem etwas angepassten Beweisverfahren auch verallgemeinern kann und zwar insofern, dass die Ungleichung aus [Satz 6.1](#) näherungsweise auch für $J_K(x, \mu_N(\cdot))$ mit $K \in \mathbb{N}$ groß genug gilt. Dazu setzt man lediglich mit [\(6.2\)](#) an

$$J_K(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x) - V_N(x_{\mu_N}(K, x))$$

und folgert, dass es für jeden Horizont $N \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion σ_N gibt, sodass die Abschätzung

$$J_K(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x) + \sigma_N(K)$$

für alle $K \in \mathbb{N}$ gilt. Man kann nachrechnen, dass solch eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion beispielsweise durch

$$\sigma_N(K) := \sup_{s \in [K, \infty)} | -V_N(x_{\mu_N}(s, x)) |$$

gegeben ist. Im Rahmen dieser Arbeit reicht uns allerdings die speziellere Version in [Satz 6.1](#) völlig aus.

□

Wir stellen den nächsten Satz auf, dessen Ergebnis wir im Beweis des Suboptimalitätssatzes verwenden werden. Hierbei zeigen wir, dass die optimale Wertefunktion V_N von Problemstellung [\(2.6\)](#) unter denselben Voraussetzungen wie in [Satz 6.1](#) nach oben durch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion beschränkt ist.

Satz 6.3: (Abschätzung der optimalen Wertefunktion)

Betrachte Problemstellung [\(2.6\)](#). Es seien alle Annahmen aus dem [Stabilitätssatz 3.7](#) erfüllt. Dann existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_3 , sodass für die optimale Wertefunktion die Ungleichung

$$V_N(x) \leq \alpha_3(|x|_{x_E})$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Beweis:

Im Beweis von [Satz 3.7](#) wird ausgeführt, dass die optimale Wertefunktion \tilde{V}_N des Hilfsoptimierungsproblems [\(3.12\)](#) eine Lyapunov-Funktion auf $\mathbb{X}_{N,b}$ ist.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Das bedeutet, es existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_2 , sodass

$$\tilde{V}_N(x) \leq \alpha_2(|x|_{x_E})$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ gilt. Außerdem geht aus dem Beweis von [Satz 3.7](#) hervor, dass sich V_N als

$$V_N(x) = \tilde{V}_N(x) + \lambda(x_E) - \lambda(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ angeben lässt. Im Folgenden setzen wir o.B.d.A. $\lambda(x_E) = 0$ (vgl. [Bemerkung 2.25 \(ii\)](#)). Dann ergibt sich

$$V_N(x) = \tilde{V}_N(x) - \lambda(x) \leq \alpha_2(|x|_{x_E}) - \lambda(x). \quad (6.3)$$

Dementsprechend müssen wir nur noch zeigen, dass die rechte Seite von (6.3) durch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion abgeschätzt werden kann. Um das zu erreichen, werden wir $-\lambda(x)$ durch eine abgeschwächte Form der \mathcal{K} -Funktion abschätzen, welche nur monoton und nicht strikt monoton wachsend ist. Dann können wir darauf verweisen, dass die Summe einer \mathcal{K}_∞ - mit einer \mathcal{K} -Funktion wiederum eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ergibt, wobei es ausreichend ist, wenn die strikte Monotonie von nur einer dieser beiden Funktionen eingehalten wird. Die Funktion mit der wir $-\lambda(x)$ ersetzen wollen, wählen wir diesbezüglich als

$$\tilde{\lambda}(r) := \sup_{s \in \mathcal{B}_r(0)} -\lambda(s + x_E)$$

mit $r \geq 0$. Wie $\tilde{\lambda}$ aus $-\lambda$ hervorgeht, ist in [Abbildung 6.1](#) auf der kommenden Seite beispielhaft für den eindimensionalen Fall skizziert. Hierbei vereinfacht sich die Kugel $\mathcal{B}_r(0)$ zum Intervall $[-r, r]$.

Als erstes beweisen wir die \mathcal{K} -Eigenschaften dieser Funktion, beginnend mit

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(0) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_0(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &= -\lambda(0 + x_E) \\ &\stackrel{\lambda(x_E)=0}{=} 0. \end{aligned}$$

Nachfolgend zeigen wir die Monotonie. Sei dazu $r_1 > r_2 \geq 0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(r_1) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_{r_1}(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &\geq \sup_{s \in \mathcal{B}_{r_2}(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &= \tilde{\lambda}(r_2), \end{aligned}$$

da $\mathcal{B}_{r_2}(0) \subset \mathcal{B}_{r_1}(0)$. Folglich ist $\tilde{\lambda}$ monoton wachsend.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Zusätzlich ist $\tilde{\lambda}(r)$ nichtnegativ für alle $r \geq 0$, da

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(r) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_r(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &\geq \sup_{s \in \mathcal{B}_0(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &= -\lambda(0 + x_E) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Des Weiteren folgt die Stetigkeit von $\tilde{\lambda}$ sofort daraus, dass λ stetig nach Definition ist (vgl. Annahmen von Satz 3.7). Demzufolge erfüllt $\tilde{\lambda}$ nun alle Eigenschaften einer abgeschwächten \mathcal{K} -Funktion.

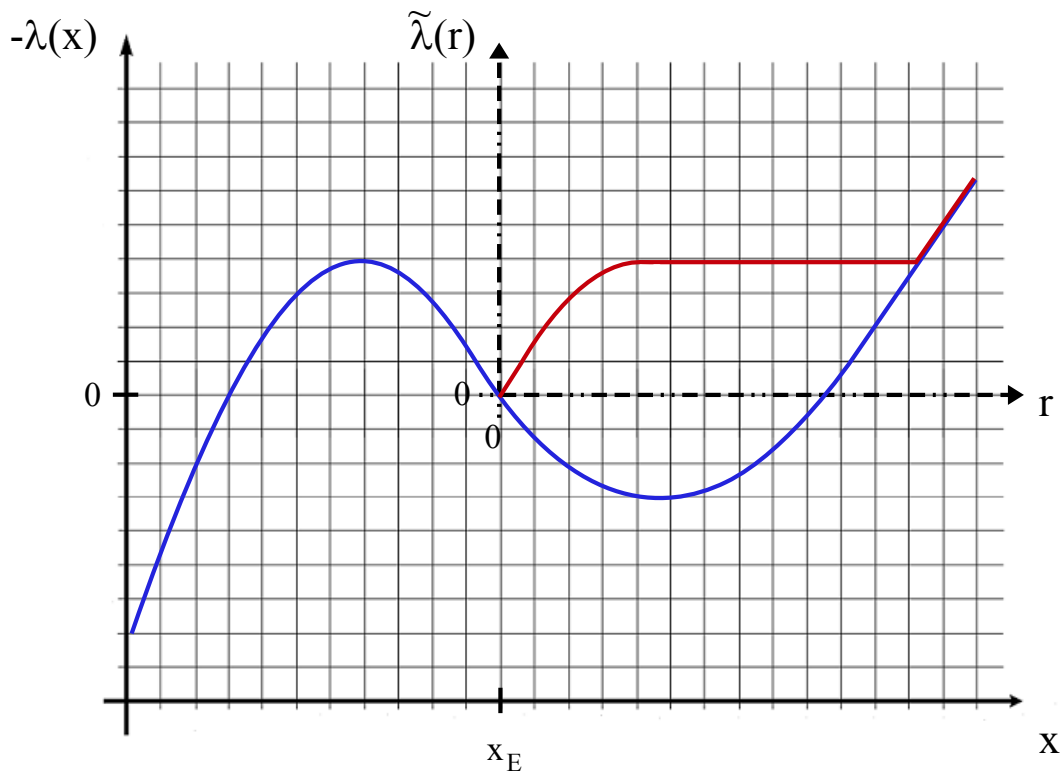


Abb. 6.1: Darstellung der Funktionen $-\lambda(x)$ im durchgängigen Koordinatensystem (blau) und $\tilde{\lambda}(r)$ im gestrichelten Koordinatensystem (rot).

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Es bleibt zu zeigen, dass für $r := |x|_{x_E}$ die Ungleichung

$$\tilde{\lambda}(|x|_{x_E}) \geq -\lambda(x) \quad (6.4)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b}$ erfüllt ist. Hierzu berechnen wir, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(|x|_{x_E}) &= \sup_{s \in \mathcal{B}_{|x|_{x_E}}(0)} -\lambda(s + x_E) \\ &\geq \sup_{s=x-x_E} -\lambda(s + x_E) \\ &= -\lambda(x - x_E + x_E) \\ &= -\lambda(x) \end{aligned}$$

gilt, da $x - x_E \in \mathcal{B}_{|x|_{x_E}}(0)$ erfüllt ist. Abschließend schätzen wir (6.3) mit (6.4) ab und erlangen die Ungleichung

$$V_N(x) \leq \alpha_2(|x|_{x_E}) + \tilde{\lambda}(|x|_{x_E}).$$

Mit der Wahl von $\alpha_3(r) := \alpha_2(r) + \tilde{\lambda}(r)$ folgt die gewünschte Schranke aus Satz 6.3.

□

Es folgt schließlich der erste Suboptimalitätssatz dieser Arbeit für die Problemstellung mit Gleichgewichtsendpunktbedingung (2.6).

Voraussetzen werden wir dabei die Annahmen aus den Hauptsätzen der vorhergehenden Kapitel 3 - 5.

Letztendlich sagt der folgende Satz aus, dass die Differenz zwischen der optimalen Wertefunktion $V_N(x)$ von (2.6) und der optimalen Wertefunktion $V_\infty(x)$ des unendlichen Horizonts für alle $x \in \mathbb{X}_{N,b} \cap \mathbb{X}_\infty$ mithilfe einer \mathcal{L}_N -Funktion abgeschätzt werden kann. Demnach wird die Differenz

$$V_N(x) - V_\infty(x)$$

beliebig klein wenn $N \in \mathbb{N}$ groß genug ist und geht gegen Null für $N \rightarrow \infty$. Mit anderen Worten ausgedrückt, konvergiert V_N demzufolge gleichmäßig gegen V_∞ .

Satz 6.4: (Suboptimalitätssatz für die Gleichgewichtsendpunktbedingung)

Wir betrachten Problemstellung (2.6) mit $N \geq 2$. Seien alle Annahmen aus den Sätzen 3.7, 3.19, 4.7, 5.4 und 5.5 erfüllt. Es gelte zudem **Annahme 3.14**. Seien außerdem alle Folgenglieder der optimalen Trajektorie $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ von Problem (2.4) für alle $x \in \mathbb{X}_N$ zulässige Anfangswerte von Problem (2.6). Dann existiert eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion δ , sodass für die optimale Wertefunktion von (2.6) und die optimale Wertefunktion von (2.5) die Ungleichung

$$V_N(x) - V_\infty(x) \leq \delta(N)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1 := \mathbb{X}_{N,b} \cap \mathbb{X}_\infty$ erfüllt ist.

Beweis:

Da wir im Beweis sowohl auf das Optimierungsproblem mit Endbeschränkung (2.6) als auch auf das Optimierungsproblem ohne Endbeschränkungen (2.4) zurückgreifen werden, wollen wir die Zielfunktionen und optimalen Wertefunktionen dieser beiden Problemstellungen mit hochgestellten Indizes versehen, um diese besser voneinander zu unterscheiden. Diesbezüglich bezeichnen wir im gesamten Beweis mit

$$J_N^o \text{ bzw. } V_N^o$$

die Ziel- und Wertefunktionen von (2.4) ohne Endbeschränkungen und mit

$$J_N^b \text{ bzw. } V_N^b$$

die Ziel- und Wertefunktionen von (2.6) mit der Gleichgewichtsendpunktbedingung. Des Weiteren bezeichne im Folgenden \mathbb{X}_1 die Schnittmenge der zulässigen Anfangswerte von (2.6) und (2.5), also $\mathbb{X}_1 := \mathbb{X}_{N,b} \cap \mathbb{X}_\infty$.

Als ersten Schritt wollen wir eine zusammengesetzte Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ für einen Anfangswert $x \in \mathbb{X}_1$ konstruieren. Dafür benötigen wir die optimale Kontrollfolge für Problemstellung (2.4), die wir mit $u_{N,x}^{*,o}(\cdot)$ bezeichnen. Folglich gilt

$$V_N^o(x) = J_N^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)).$$

Da nun die Voraussetzungen von **Satz 4.7** erfüllt sind, existiert für das Problem ohne Beschränkungen (2.4) für jedes $N_0 \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion σ_{N_0} , sodass für alle $N > N_0$ die Ungleichung

$$|x_{u_{N,x}^{*,o}}(k, x)|_{x_E} \leq \sigma_{N_0}(N) \tag{6.5}$$

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

für alle $k \in Q \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ mit $|Q| \geq N_0$ erfüllt ist. Da $N_0 \in \mathbb{N}$ beliebig ist, wählen wir N_0 in Abhängigkeit von N als $N_0 := \lfloor N/2 \rfloor$. Dies ist möglich, da dann sofort $N > N_0 = \lfloor N/2 \rfloor$ gegeben ist. Weiterhin bezeichnen wir mit \tilde{k} das größte der $k \in Q$, für das die Ungleichung (6.5) erfüllt ist. Für dieses \tilde{k} gilt demgemäß

$$\begin{aligned} \tilde{k} &\geq |Q| - 1 \\ &\geq N_0 - 1 \\ &= \lfloor N/2 \rfloor - 1. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Außerdem erfüllt \tilde{k} weiterhin Ungleichung (6.5), d.h. es gilt

$$\begin{aligned} |x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)|_{x_E} &\leq \sigma_{N_0}(N) \\ &= \sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wir definieren nun die oben erwähnte Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ als

$$\tilde{u}_{N,x}(k) = \begin{cases} u_{N,x}^{*,o}(k) & \text{für } k = 0, \dots, \tilde{k} - 1 \\ u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(k - \tilde{k}) & \text{für } k = \tilde{k}, \dots, N - 1 \end{cases},$$

wobei $u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(\cdot)$ die optimale Lösung für Problemstellung (2.6) mit Zielfunktion $J_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}, u(\cdot))$ und Anfangswert

$$\tilde{x} := x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)$$

ist. Man beachte, dass \tilde{x} laut Voraussetzungen von [Satz 6.4](#) ein zulässiger Anfangswert für Problemstellung (2.6) ist. Die Trajektorien der zusammengesetzten Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ werden in [Abbildung 6.2](#) nochmals wiedergegeben. In dieser [Abbildung](#) ist erkennbar, dass sich $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\cdot, x)$ gemäß der Turnpike Eigenschaft verhält und dass

$$x_{\tilde{u}_{N,x}}(N, x) = x_{u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}}(N - \tilde{k}, \tilde{x}) = x_E$$

aufgrund der Gleichgewichtsendpunktbedingung erfüllt ist.

Schließlich berechnen wir, dass gilt

$$\begin{aligned} V_N^b(x) &\leq J_N^b(x, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{\tilde{k}-1} l(x_{\tilde{u}_{N,x}}(k, x), \tilde{u}_{N,x}(k)) + \sum_{k=\tilde{k}}^{N-1} l(x_{\tilde{u}_{N,x}}(k, x), \tilde{u}_{N,x}(k)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + J_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}, u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{6.8}$$

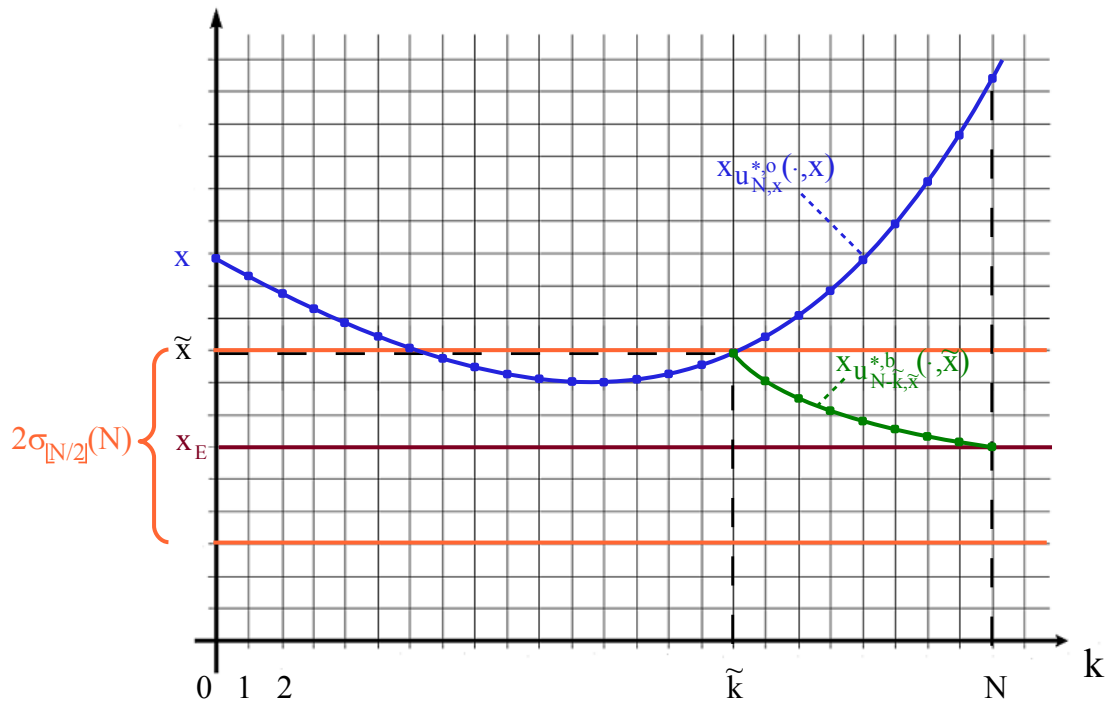


Abb. 6.2: Darstellung der Trajektorien $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\cdot, x)$ (blau) und $x_{u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}}(\cdot, \tilde{x})$ (grün) mit $\tilde{x} := x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)$.

Als nächsten Schritt werden wir eine Abschätzung für den ersten Term der rechten Seite von (6.8) treffen, indem wir

$$J_{\tilde{k}}^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot))$$

mit

$$J_{\tilde{k}}^o(x, \mu_{\infty}(\cdot))$$

vergleichen. Die Zustandstrajektorien dieser beiden Zielfunktionen werden abermals in der nächsten Abbildung 6.3 verdeutlicht.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

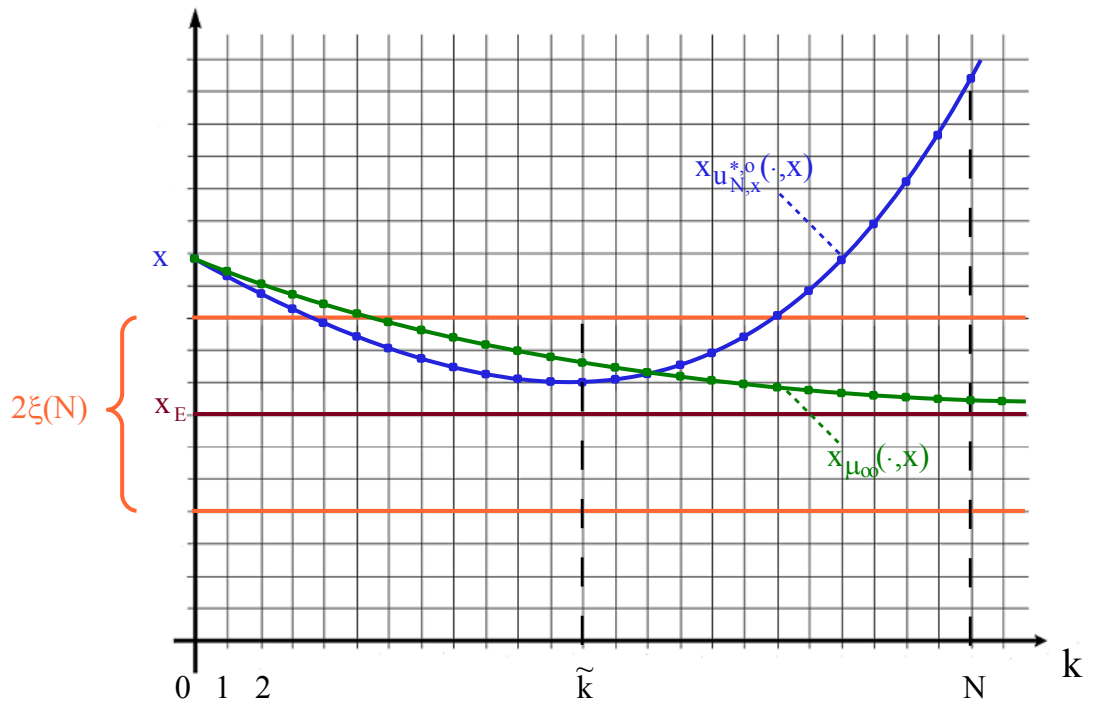


Abb. 6.3: Darstellung der Trajektorien $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\cdot, x)$ (blau) und $x_{\mu_\infty}(\cdot, x)$ (grün).

Aus [Satz 3.19](#) geht hervor, dass $\mu_\infty(\cdot)$ ein asymptotisch stabilisierendes Feedbackgesetz ist, d.h. es gilt

$$|x_{\mu_\infty}(k, x)|_{x_E} \leq \beta(|x|_{x_E}, k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in \mathbb{X}_\infty \subseteq \mathbb{X}_1$, also insbesondere auch

$$|x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)|_{x_E} \leq \beta(|x|_{x_E}, \tilde{k}).$$

Aus [Ungleichung \(6.6\)](#) folgt somit

$$\begin{aligned} |x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)|_{x_E} &\leq \beta(|x|_{x_E}, \tilde{k}) \\ &\leq \beta(|x|_{x_E}, \lfloor N/2 \rfloor - 1). \end{aligned}$$

Für einen festen Anfangswert $x \in \mathbb{X}_1$ definieren wir anschließend

$$\xi(N) := \max \{ \sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N), \beta(|x|_{x_E}, \lfloor N/2 \rfloor - 1) \},$$

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

woraus sofort die Ungleichungen

$$|x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)|_{x_E} \leq \xi(N) \quad (6.9)$$

und (mithilfe von (6.7))

$$|x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)|_{x_E} \leq \xi(N) \quad (6.10)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$ folgen. Zu der Wahl von ξ ist anzumerken, dass

$$\beta(|x|_{x_E}, \lfloor N/2 \rfloor - 1)$$

für feste $x \in \mathbb{X}_1$ eine \mathcal{L} -Funktion und für diskrete $N \geq 2$ damit eine $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion darstellt. Man beachte zudem, dass jedoch für zwei aufeinanderfolgende N der Wert $\lfloor N/2 \rfloor - 1$ durchaus gleich sein kann und folglich die Striktheit der Monotonie-Eigenschaft in der Regel hier verloren geht. Auch die Funktionenfolge $\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}$ erfüllt alle Eigenschaften einer $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion. Dies schlussfolgern wir, da $\sigma_{N_0}(N)$ für ein festes $N_0 \in \mathbb{N}$ nach Definition eine $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion ist und wir zudem aus der Definition von σ_{N_0} im Beweis von Satz 4.7 ableiten können, dass durchaus auch bei der von N anhängenden Funktionenfolge $\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}$ die $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Eigenschaften bestehen bleiben. Um dies zu zeigen, wiederholen wir nochmals die Definition aus dem Beweis von Satz 4.7, nämlich

$$\sigma_{N_0}(N) = \begin{cases} 0 & \text{für } N \leq N_0 \\ \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{N - N_0}\right) & \text{für } N > N_0 \end{cases}$$

mit $\delta \geq 0$, $C \geq 0$, $\rho^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$, und wenden diese Definition auf die Funktionenfolge $\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}$ an. Wir erhalten

$$\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N) = \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{\lfloor N/2 \rfloor}\right).$$

Nun gilt aber für alle $N_1 > N_2 \geq 2$, dass

$$\begin{aligned} \sigma_{\lfloor N_1/2 \rfloor}(N_1) &= \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{\lfloor N_1/2 \rfloor}\right) \\ &\leq \rho^{-1}\left(\frac{\delta + C}{\lfloor N_2/2 \rfloor}\right) \\ &= \sigma_{\lfloor N_2/2 \rfloor}(N_2). \end{aligned}$$

Dementsprechend bleibt die Monotonie-Eigenschaft einer $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion (auch hier wieder bis auf die Striktheit) bewahrt. Mit all diesen Überlegungen gilt schlussendlich, dass auch $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ erfüllt ist.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Wir fahren nun fort, indem wir die Kontrollfolgen $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}^\infty$ und $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}^N$ definieren als

$$u_1(k) = \begin{cases} u_{N,x}^{*,o}(k) & \text{für } k = 0, \dots, \tilde{k} - 1 \\ \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k - \tilde{k}, x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x))) & \text{für } k = \tilde{k}, \tilde{k} + 1, \dots \end{cases}$$

und

$$u_2(k) = \begin{cases} \mu_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x)) & \text{für } k = 0, \dots, \tilde{k} - 1 \\ u_{N-\tilde{k}, x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)}^{*,o}(k - \tilde{k}) & \text{für } k = \tilde{k}, \dots, N - 1 \end{cases}.$$

In den folgenden Rechnungen zu diesen beiden Kontrollfolgen $u_1(\cdot)$ und $u_2(\cdot)$ greifen wir erneut auf das Prinzip der dynamischen Programmierung aus Abschnitt 2.1.3 zurück. Mit den bisherigen Definitionen und Notationen können wir demnach schließen, dass zum einen

$$\begin{aligned} J_\infty(x, u_1(\cdot)) &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + J_\infty(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x), \mu_\infty(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_\infty(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)) \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &= J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + J_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x), \mu_\infty(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$ gilt. Aus $V_\infty(x) \leq J_\infty(x, u_1(\cdot))$ ergibt sich anschließend

$$J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \leq J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_\infty(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)).$$

Da sowohl $x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x) \in \mathcal{B}_{\xi(N)}(x_E)$ als auch $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x) \in \mathcal{B}_{\xi(N)}(x_E)$ laut (6.9) und (6.10) gilt, können wir Satz 5.5 anwenden und berechnen dazu

$$\begin{aligned} J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) &\leq J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_\infty(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)) - V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \\ &\stackrel{\text{Satz 5.5}}{\leq} J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Für die andere Kontrollfolge $u_2(\cdot)$ führen wir eine ähnliche Rechnung durch. Zum einen gilt hier

$$\begin{aligned} J_N^o(x, u_2(\cdot)) &= J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + J_{N-\tilde{k}}^o(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x), u_{N-\tilde{k}, x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)}^{*,o}(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^o(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \end{aligned}$$

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

und zum anderen

$$\begin{aligned} V_N^o(x) &= J_N^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + J_{N-\tilde{k}}^o(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x), u_{N,x}^{*,o}(\cdot + \tilde{k})) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^o(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$. Aus $V_N^o(x) \leq J_N^o(x, u_2(\cdot))$ erlangen wir hier ebenfalls die Ungleichung

$$J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^o(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)) \leq J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^o(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)).$$

Es gilt immernoch $x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x) \in \mathcal{B}_{\xi(N)}(x_E)$ und $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x) \in \mathcal{B}_{\xi(N)}(x_E)$, womit wir hier Gebrauch von [Satz 5.4](#) machen können. Hierzu berechnen wir

$$\begin{aligned} J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) &\leq J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^o(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) - V_{N-\tilde{k}}^o(x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)) \\ &\stackrel{\text{Satz 5.4}}{\leq} J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Ungleichungen [\(6.11\)](#) und [\(6.12\)](#) ergeben zusammengenommen

$$|J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) - J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot))| \leq \beta_V(2 \cdot \xi(N)) \quad (6.13)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$. Die Anwendung einer \mathcal{K}_∞ -Funktion auf eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion ergibt wiederum eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion, weshalb $\beta_V \circ (2\xi) \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$ gilt. Letztendlich sind wir in der Lage [Ungleichung \(6.8\)](#) abzuschätzen und nehmen dafür zusätzlich [Satz 6.3](#) zur Hilfe. Wir erhalten

$$\begin{aligned} V_N^b(x) &\leq J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}) \\ &\leq J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(|\tilde{x}|_{x_E}) \\ &\stackrel{(6.7)}{\leq} J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Wir folgern aus den selben Argumentationsgründen, dass $\alpha_3 \circ \sigma_{\lfloor N/2 \rfloor} \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$ gilt. Um den Beweis abzuschließen zu können, müssen wir lediglich noch $J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot))$ gegen $V_\infty(x)$ abschätzen. Einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Ausdrücken haben wir jedoch bereits berechnet, denn es gilt

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &= J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \\ \Leftrightarrow J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) &= V_\infty(x) - V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$. Wir werden diesbezüglich zeigen, dass $-V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x))$ für alle $x \in \mathbb{X}_1$ durch eine abgeschwächte, nicht strikte Form der $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion abgeschätzt werden kann.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Besagte $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ -Funktion definieren wir dabei als

$$\tilde{\sigma}(k) := \sup_{s \in [k, \infty)} | -V_{\infty}(x_{\mu_{\infty}}(s, x)) |$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wie $\tilde{\sigma}(\cdot)$ aus $-V_{\infty}(x_{\mu_{\infty}}(\cdot, x))$ entsteht, ist in der folgenden Abbildung 6.4 dargestellt.

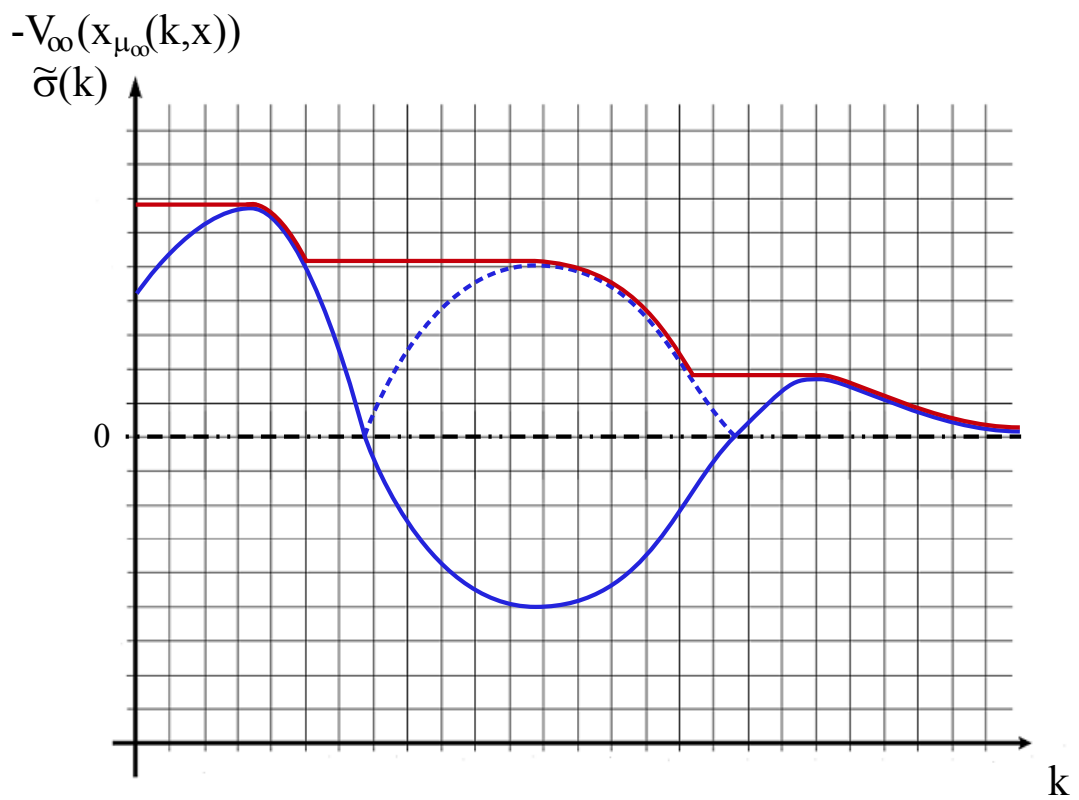


Abb. 6.4: Darstellung der Funktionen $-V_{\infty}(x_{\mu_{\infty}}(\cdot, x))$ (blau), $| -V_{\infty}(x_{\mu_{\infty}}(\cdot, x)) |$ (blau-gestrichelt) und $\tilde{\sigma}(\cdot)$ (rot).

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Zuerst weisen wir die Monotonieeigenschaft dieser Funktion nach. Sei dazu $k_1 > k_2 \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(k_1) &= \sup_{s \in [k_1, \infty)} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &\leq \sup_{s \in [k_2, \infty)} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &= \tilde{\sigma}(k_2),\end{aligned}$$

da $[k_1, \infty) \subset [k_2, \infty)$ erfüllt ist. Die Stetigkeit von $\tilde{\sigma}$ resultiert aus der Stetigkeit von V_∞ und somit bleibt nur noch das Grenzverhalten einer $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion für $\tilde{\sigma}$ aufzuzeigen. Wir ermitteln diesbezüglich, dass

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{s \in [k, \infty)} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &\stackrel{V_\infty \text{ stetig}}{=} \left| -V_\infty\left(\lim_{s \rightarrow \infty} x_{\mu_\infty}(s, x)\right) \right| \\ &= 0\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1$ gilt, da aus [Satz 3.19](#) der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x_{\mu_\infty}(s, x) = x_E$$

und darüber hinaus mit [Annahme 2.17](#) die Gleichung

$$\begin{aligned}V_\infty(x_E) &= \tilde{V}_\infty(x_E) + \lambda(x_E) - \lambda(x_E) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} L(x_E, u_E) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (l(x_E, u_E) + \lambda(x_E) - \lambda(f(x_E, u_E))) \\ &= 0\end{aligned}$$

folgen. Demzufolge erfüllt $\tilde{\sigma}$ eine nicht strikte Form der $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion. Trivialerweise gilt $\tilde{\sigma}(\cdot) \geq 0$ und es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\tilde{\sigma}(k)$ größer gleich $-V_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(k) &= \sup_{s \in [k, \infty)} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &\geq \sup_{s=k} \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) \right| \\ &= \left| -V_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x)) \right| \\ &\geq -V_\infty(x_{\mu_\infty}(k, x))\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und insbesondere auch für $k = \tilde{k}$.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Mittels (6.6) treffen wir indes die folgende Abschätzung, welche den Horizont N mit ins Spiel bringt:

$$\begin{aligned} -V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) &\leq \tilde{\sigma}(\tilde{k}) \\ &\leq \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) \end{aligned}$$

Zum Schluss schätzen wir (6.14) ab durch

$$\begin{aligned} V_N^b(x) &\leq J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)) \\ &= V_\infty(x) - V_\infty(x_{\mu_\infty}(\tilde{k}, x)) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)) \\ &\leq V_\infty(x) + \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)). \end{aligned}$$

Mit der Wahl von $\delta_1(N) := \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N))$ folgt die gewünschte Ungleichung aus Satz 6.4 für alle $N \geq 2$, da Summen von $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktionen wiederum in $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ liegen. Wir weisen erneut darauf hin, dass die einzelnen Summanden jedoch nur monoton und nicht strikt monoton fallend sind. Zu jeder monoton fallenden $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion δ_1 existiert allerdings immer eine strikt monotone $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion δ mit

$$\delta(k) \geq \delta_1(k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Diese lässt sich beispielsweise dadurch gewinnen, indem man alle konstanten Teilstücke von δ_1 durch beliebige strikt monotone Teilstücke gleicher Länge ersetzt und die Segmente danach so zusammensetzt, dass sowohl die Stetigkeit der Funktion als auch obige Ungleichung erfüllt bleiben.

□

6.2 Suboptimalitätssatz für Endkosten und Endregion

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Problem mit den alternativen, allgemeineren Endbeschränkungen in Form von Endkosten und Endregion (2.7). Dieser Abschnitt ist dabei analog zum vorherigen Abschnitt aufgebaut und verfolgt die selben Beweisschritte. Aus diesem Grund werden wir uns kürzer fassen und auf bereits bewiesene Ergebnisse aus Kapitel 6.1 verweisen.

Zu Beginn formulieren wir das Analogon zu [Satz 6.1](#), um Ungleichung (6.1) sicherzustellen. Auch für diesen Fall stützen wir uns im Beweis auf Ergebnisse aus dem Stabilitätsabschnitt 3.2.2. Zudem deuten wir darauf hin, dass die Aussage aus [Bemerkung 6.2](#) selbstverständlich auch für den folgenden Satz zutrifft.

Satz 6.5: (Abschätzung der Kosten auf unendlichem Horizont)

Betrachte Problemstellung (2.7). Es seien alle Annahmen aus dem [Stabilitätssatz 3.10](#) erfüllt. Dann gilt für die Kosten auf unendlichem Horizont aus [Definition 2.21](#) angewendet auf das Feedbackgesetz μ_N , dass die Ungleichung

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,F}$ erfüllt ist.

Beweis:

Der Beweis erfolgt analog zu [Satz 6.1](#) mithilfe der aufsummierten Ungleichung aus [Lemma 3.9](#) und Aussagen über deren Grenzverhalten, die mithilfe von [Satz 3.10](#) getroffen werden.

⊠

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Im nächsten Satz zeigen wir auch hier, dass die optimale Wertefunktion von (2.7) nach oben durch ein $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ beschränkt ist.

Satz 6.6: (Abschätzung der optimalen Wertefunktion)

Betrachte Problemstellung (2.7). Es seien alle Annahmen aus dem [Stabilitätssatz 3.10](#) erfüllt. Dann existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_3 , sodass für die optimale Wertefunktion die Ungleichung

$$V_N(x) \leq \alpha_3(|x|_{x_E})$$

für alle $x \in \mathbb{X}_{N,F}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Beweis:

Der Beweis ist identisch zum Beweis von [Satz 6.3](#).

⊠

Schließlich stellen wir den zweiten Suboptimalitätssatz für das Optimierungsproblem (2.7) auf, der die Aussage von [Satz 6.4](#) auf die Problemstellung (2.7) überträgt.

Satz 6.7: (Suboptimalitätssatz für Endkosten und Endregion)

Wir betrachten das Problem (2.7) mit $N \geq 2$. Seien alle Annahmen aus den Sätzen [3.10](#), [3.19](#), [4.7](#), [5.4](#) und [5.5](#) erfüllt. Es gelte zudem [Annahme 3.14](#). Seien außerdem alle Folgeglieder der optimalen Trajektorie $x_{u_{N,x}^*}(\cdot, x)$ von Problem (2.4) für alle $x \in \mathbb{X}_N$ zulässige Anfangswerte von Problem (2.7). Dann existiert eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion δ , sodass für die optimale Wertefunktion von (2.7) und die optimale Wertefunktion von (2.5) die Ungleichung

$$V_N(x) - V_\infty(x) \leq \delta(N)$$

für alle $x \in \mathbb{X}_1 := \mathbb{X}_{N,F} \cap \mathbb{X}_\infty$ erfüllt ist.

Beweis:

Wir beginnen wieder damit, die Notationen in diesem Beweis zu erklären. Es bezeichne

$$J_N^o \text{ bzw. } V_N^o$$

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

die Zielfunktion und optimale Wertefunktion von dem Optimierungsproblem ohne Endbeschränkungen (2.4) und

$$J_N^b \text{ bzw. } V_N^b$$

die Ziel- und Wertefunktion von dem Optimierungsproblem mit Endbeschränkungen (2.7). Für die Problemstellung ohne Endbeschränkungen (2.4) schließen wir auch hier mithilfe von Satz 4.7 auf die Abschätzung

$$|x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)|_{x_E} \leq \sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N), \quad (6.15)$$

indem wir N_0 aus Satz 4.7 als $N_0 := \lfloor N/2 \rfloor$ und \tilde{k} als das größte Element der Menge $Q \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ wählen. Als nächstes konstruieren wir erneut eine zusammengesetzte Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ durch

$$\tilde{u}_{N,x}(k) = \begin{cases} u_{N,x}^{*,o}(k) & \text{für } k = 0, \dots, \tilde{k} - 1 \\ u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(k - \tilde{k}) & \text{für } k = \tilde{k}, \dots, N - 1 \end{cases}.$$

Dabei ist $u_{N,x}^{*,o}(k)$ die optimale Kontrollfolge für (2.4) und $u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(\cdot)$ die optimale Kontrollfolge für das Problem (2.7) mit der Zielfunktion $J_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}, u(\cdot))$ und Anfangswert

$$\tilde{x} := x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x).$$

In der nächsten Abbildung 6.5 stellen wir das Verhalten der Zustandstrajektorien der zusammengesetzten Kontrollfolge $\tilde{u}_{N,x}(\cdot)$ dar, um einen Vergleich mit Abbildung 6.2 ziehen zu können. Man erkennt, dass sich $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\cdot, x)$ hier ebenfalls gemäß der Turnpike Eigenschaft verhält. Jedoch endet $x_{u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}}(\cdot, \tilde{x})$ nicht mehr im Gleichgewichtspunkt x_E , sondern nur in einer Endregion \mathbb{X}_0 , welche x_E enthält. Wir berechnen analog, dass gilt

$$\begin{aligned} V_N^b(x) &\leq J_N^b(x, \tilde{u}_{N,x}(\cdot)) \\ &= \sum_{k=0}^{\tilde{k}-1} l(x_{\tilde{u}_{N,x}}(k, x), \tilde{u}_{N,x}(k)) + \sum_{k=\tilde{k}}^{N-1} l(x_{\tilde{u}_{N,x}}(k, x), \tilde{u}_{N,x}(k)) \\ &\quad + F(x_{\tilde{u}_{N,x}}(N, x)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + J_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}, u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}(\cdot)) \\ &= J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) + V_{N-\tilde{k}}^b(\tilde{x}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

da $F(x_{\tilde{u}_{N,x}}(N, x)) = F(x_{u_{N-\tilde{k},\tilde{x}}^{*,b}}(N - \tilde{k}, \tilde{x}))$ erfüllt ist.

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Man beachte, dass dies die einzige Rechnung ist, in der die Ziel- und Wertefunktionen der Problemstellung mit Endkosten und Endregion (2.7) auftreten. Alle anderen Berechnungen in diesem Beweis beziehen sich ausschließlich auf die anderen beiden Problemstellungen ohne Endbeschränkungen (2.4) oder (2.5). Aus diesem Grund ist die obige Berechnung faktisch die einzige Stelle die im Vergleich zum Beweis von Satz 6.4 angepasst werden muss.

Wir fahren nun mit dem Beweis fort. Um $J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot))$ aus (6.16) abschätzen zu können, müssen wir die selben Schritte wie im Beweis von Satz 6.4 durchführen und erhalten dieselbe Abschätzung (6.13), nämlich

$$|J_k^o(x, u_{N,x}^{*,o}(\cdot)) - J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot))| \leq \beta_V(2 \cdot \xi(N)). \quad (6.17)$$

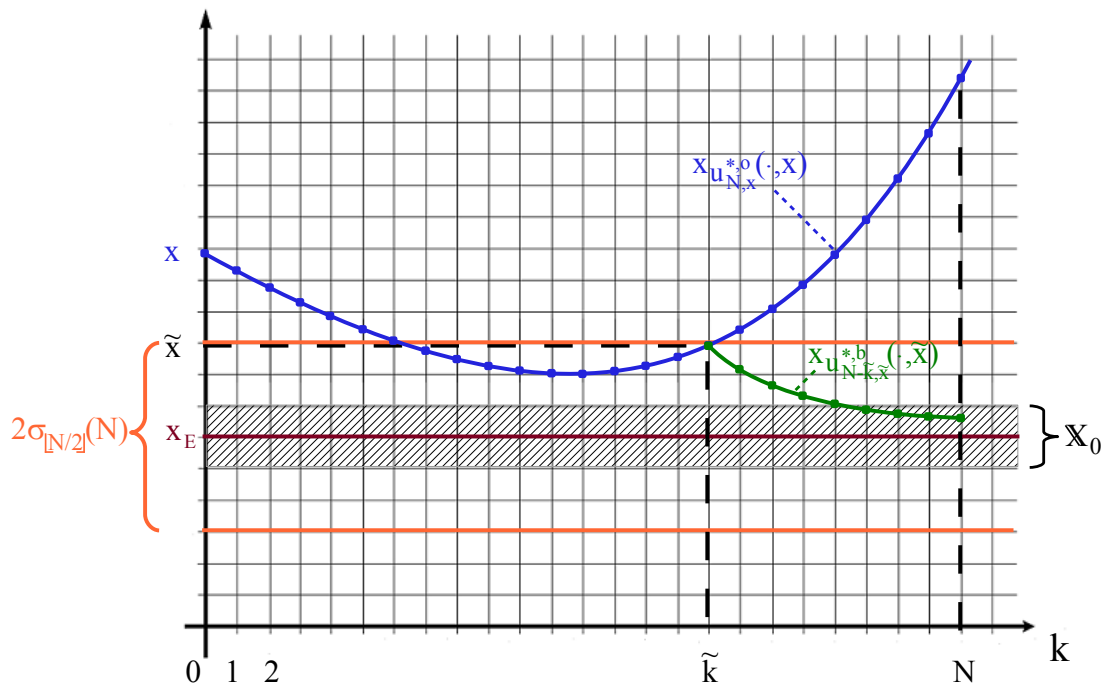


Abb. 6.5: Darstellung der Trajektorien $x_{u_{N,x}^{*,o}}(\cdot, x)$ (blau) und $x_{u_{N-k, \tilde{x}}^{*,b}}(\cdot, \tilde{x})$ (grün) mit $\tilde{x} := x_{u_{N,x}^{*,o}}(\tilde{k}, x)$ und Endregion \mathbb{X}_0 (gestrichelt).

Kapitel 6 Suboptimalität der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen

Des Weiteren erzielen wir mit den selben Überlegungen wie im Beweis von [Satz 6.4](#) die Ungleichung

$$J_k^o(x, \mu_\infty(\cdot)) \leq V_\infty(x) + \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) \quad (6.18)$$

mit der Definition

$$\tilde{\sigma}(k) := \sup_{s \in [k, \infty)} | -V_\infty(x_{\mu_\infty}(s, x)) |$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir schließen den Beweis ab, indem wir [\(6.16\)](#) mithilfe von [\(6.17\)](#), [\(6.18\)](#), [Satz 6.6](#) und [\(6.15\)](#) abschätzen und erhalten

$$V_N^b(x) \leq V_\infty(x) + \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)).$$

Hier wählen wir gleichermaßen

$$\delta_1(N) := \tilde{\sigma}(\lfloor N/2 \rfloor - 1) + \beta_V(2 \cdot \xi(N)) + \alpha_3(\sigma_{\lfloor N/2 \rfloor}(N)).$$

Ferner folgt, dass eine strikt monotone $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion δ existiert, mit der wir δ_1 nach oben abschätzen können. Diese Funktion δ ist dann die gewünschte $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion aus [Satz 6.7](#).

□

Kapitel 7

Fazit

Wir haben in dieser Arbeit Suboptimalitätsschranken für die Ökonomische Modellprädiktive Regelung der Form

$$V_N(x) - V_\infty(x) \leq \delta(N) \quad (7.1)$$

für alle zulässigen x unter bestimmten Voraussetzungen hergeleitet. Dabei bezeichnet δ eine $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion. Für $N \rightarrow \infty$ geht demgemäß die linke Seite gegen Null - und somit auch $V_N(x) \rightarrow V_\infty(x)$. Aus der strikten Monotonie einer $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ -Funktion folgt außerdem, dass der obige Fehler echt kleiner wird mit zunehmendem N .

Wir konnten obige Ungleichung dabei für zwei Problemstellungen mit Endbeschränkungen erzielen - für das Problem mit Gleichgewichtsendpunktbedingung in [Satz 6.4](#) und für das allgemeinere Problem mit Endkosten und Endregion in [Satz 6.7](#).

Zudem erlaubt uns Ungleichung (7.1) Aussagen über den Suboptimalitätsfehler des MPC-Feedbacks μ_N . Diesbezüglich konnten wir die folgende Abschätzung in den [Sätzen 6.1](#) und [6.5](#) sicherstellen:

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) \leq V_N(x) \quad (7.2)$$

Auch haben wir die Idee der Herleitung einer allgemeineren Form der Ungleichung (7.2) für $J_K(x, \mu_N(\cdot))$ mit $K \in \mathbb{N}$ angesprochen. Mithilfe von (7.2) können wir nun die Performance von μ_N mit der Performance des optimalen Feedbacks μ_∞ vergleichen. Performance messen wir in dieser Arbeit mit den Kosten auf unendlichem Horizont und erhalten die Abschätzung

$$J_\infty(x, \mu_N(\cdot)) - J_\infty(x, \mu_\infty(\cdot)) \leq \delta(N).$$

Um diese Ergebnisse zu erzielen, haben wir uns mit anderen Themengebieten aus der Ökonomischen MPC beschäftigt. Dazu gehörten die Stabilitätstheorie der Ökonomischen MPC sowie die Turnpike Eigenschaft in der Ökonomischen MPC.

In der Stabilitätstheorie konnten wir die asymptotische Stabilität der Regelgesetze von bestimmten MPC-Problemstellungen unter bestimmten Annahmen nachweisen.

Dazu gehörten auch die beiden Probleme mit Endbeschränkungen, für die wir die Suboptimalitätssätze aufgestellt haben. Die jeweiligen Stabilitätsergebnisse für die Ökonomische MPC mit Endbeschränkungen finden sich in den Sätzen 3.7 und 3.10. Diese Ergebnisse und deren Beweisideen gehen dabei auf [8] zurück.

Nicht untersucht haben wir dagegen den Fall ohne Endbeschränkungen, da dieser Fall für unsere Zwecke nicht von Bedeutung war. Der interessierte Leser sei diesbetreffend auf [4] verwiesen. Hier wird analysiert inwiefern Stabilitäts- und Konvergenzergebnisse erhalten bleiben, wenn die Endbeschränkungen entfernt werden.

Darüber hinaus konnten wir eigenständig einen Stabilitätssatz für den unendlichen Horizont aufstellen. Hierbei haben uns vor allem ein Theorem aus [7] und zwei Annahmen aus [6] weitergeholfen. Das Resultat in dieser Hinsicht bildet der [Stabilitätssatz 3.19](#).

Die Turnpike Eigenschaft betreffend stellt das Hauptergebnis [Satz 4.7](#) dar. Dieser Satz weist die Turnpike Eigenschaft für optimale Trajektorien der Problemstellung ohne Endbeschränkungen nach. Die Herleitung haben wir dabei aus [5] entnommen. Allerdings mussten wir diese zusätzlich an unsere Problemstellung anpassen, da in [5] nur die Durchschnittswerte der Ziel- und Wertefunktionen betrachtet wurden.

Ferner haben wir ein verbreitetes Beispiel zur Turnpike Eigenschaft übernommen und eingehend untersucht.

Ebenfalls auf [5] basieren unsere Abschätzungen der optimalen Wertefunktion für zwei Anfangswerte $x, y \in \mathcal{B}_\delta(x_E)$ auf die folgende Weise:

$$|V_N(x) - V_N(y)| \leq \beta_V(2\delta)$$

Dieses Resultat für den endlichen Horizont findet sich in [Satz 5.4](#). Die Herleitung stammt aus [5] und wurde auf unsere Problemstellung angepasst.

Darüber hinaus bieten wir in dieser Arbeit eine äquivalente Abschätzung für den unendlichen Horizont an, welche in [Satz 5.5](#) ausgedrückt wird. Im Vergleich zu [Satz 5.4](#) benötigen wir hier für den Beweis zusätzlich die Stabilität von μ_∞ , können jedoch dafür auf eine andere Annahme verzichten.

Ein grundlegendes Kernstück, um all die Ergebnisse dieser Arbeit überhaupt erzielen zu können, stellt die Dissipativitätseigenschaft dar. Diese Eigenschaft taucht vielfach in der MPC-Literatur auf und lässt Schlussfolgerungen auf den unterschiedlichsten Themengebieten der Ökonomischen

MPC zu.

Wir haben in der Einleitung dieser Arbeit die Dissipativität ausgiebig beleuchtet, wobei wir unsere [Definition 2.24](#) aus [8] beziehen. Des Weiteren bieten wir in dieser Arbeit eine mögliche Interpretation der Dissipativitätseigenschaft an.

Die Suboptimalitätstheorie betreffend wurden ähnliche Ergebnisse wie in unserer Arbeit für den Fall der Standard MPC bereits in [6] belegt. Dabei finden sich in [6] Suboptimalitätsabschätzungen sowohl für den Fall mit Endbeschränkungen als auch für den Fall ohne Endbeschränkungen. Für die Standard MPC ohne Endbeschränkungen wollen wir dabei gezielt auf die Theoreme 6.18 und 6.21 aus [6] aufmerksam machen.

In der Ökonomischen MPC hingegen finden sich Suboptimalitätsaussagen für die Problemstellung ohne Endbeschränkungen in [4]. Jedoch sind aktuellere Ergebnisse zurzeit noch in Arbeit.

Für den Fall der Ökonomischen MPC mit Endbeschränkungen, welcher in dieser Arbeit abgehandelt wurde, sind uns allerdings keine vergleichbaren Resultate zur Suboptimalitätstheorie bekannt.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Amrit, J. B. Rawlings, D. Angeli; "**Economic Optimization Using Model Predictive Control with a Terminal Cost**" in Annual Reviews in Control 35, 2011;
- [2] D. Angeli, R. Amrit, J. B. Rawlings; "**On Average Performance and Stability of Economic Model Predictive Control**" in IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, No. 7, pp. 1615-1626, July 2012;
- [3] T. Damm, L. Grüne, M. Stieler, K. Worthmann; "**An Exponential Turnpike Theorem for Dissipative Optimal Control Problems**"; Preprint, University of Bayreuth, 2012;
- [4] L. Grüne; "**Economic MPC without Terminal Constraints**" in Proceedings of the 20th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Paper No. 58, 2012;
- [5] L. Grüne; "**Economic Receding Horizon Control without Terminal Constraints**" in Automatica, Volume 49, Issue 3, March 2013;
- [6] L. Grüne, J. Pannek; "**Nonlinear Model Predictive Control - Theory and Algorithms**"; London, Springer, 2011;
- [7] M. A. Müller, D. Angeli, F. Allgöwer; "**On Convergence of Averagely Constrained Economic MPC and Necessity of Dissipativity for Optimal Steady-State Operation**" in Proceedings of the American Control Conference, pp. 3141-3146, 2013;
- [8] J. B. Rawlings, D. Angeli, C. N. Bates; "**Fundamentals of Economic Model Predictive Control**" in 51st IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3851-3861, 2012;
- [9] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne; "**Model Predictive Control - Theory and Design**"; Madison, Wisconsin, Nob Hill Publishing, 2009;
- [10] E. D. Sontag; "**Comments on Integral Variants of ISS**" in System and Control Letters 34, 1998;

- [11] J. C. Willems; "**Dissipative Dynamical Systems - Part I: General Theory**" in Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 45, No. 5, pp. 321-351, 1972;

Programmverzeichnis

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten Programme aufgelistet und kurz erläutert. Die MATLAB-Dateien befinden sich auf der beiliegenden CD. Das MPC-Optimierungsproblem wurde dabei mit der `fmincon`-Routine von MATLAB gelöst.

- **Turnpike.m**: Dieses Programm wurde zur Erstellung der Abbildungen 4.1, 4.2, 4.3 und 4.6 verwendet. Diese Abbildungen heben die Turnpike Eigenschaft der optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises hervor. Der Anfangswert und der Horizont müssen im Programm vom Benutzer allerdings manuell geändert werden.
- **Turnpike_Def.m**: Dieses Programm liefert die Abbildungen 4.7 und 4.8, die die [Definition 4.2](#) der Turnpike Eigenschaft beispielhaft verdeutlichen sollen. Zudem stellen sie eine mögliche \mathcal{L}_N -Funktion aus der Definition dar.
- **exp_Abstand.m**: Dieses Programm erzeugt Abbildung 4.4. Diese Abbildung soll die exponentielle Abnahme des minimalen Abstands der optimalen Trajektorien des offenen Regelkreises (2.1) zum Gleichgewichtspunkt aufzeigen.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem habe ich die Arbeit nicht bereits zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.

Ort, Datum

Unterschrift

