Theorie und Anwendung dissipativer Systeme bei der Stabilisierung nichtlinearer Kontrollsysteme

Bachelorarbeit

von

Christian Fiedler

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 20. Februar 2015

Betreuung:
Prof. Dr. L. Grüne

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie und Anwendung dissipativer dynamischer Systeme bei der Stabilisierung nichtlinearer Kontrollsysteme. Auf Grund des notwendigerweise beschränkten Umfangs wird dabei zumeist nur der Spezialfall sogenannter passiver Systeme betrachtet. Die vorgestellten Resultate sind alle in der Literatur bereits bekannt, an einigen Stellen wurden jedoch die Voraussetzungen teilweise abgeschwächt, außerdem werden einige Beweise wesentlich ausführlicher dargestellt als in der entsprechenden Literatur.
Diese Bachelorarbeit basiert zu einem Teil (entsprechende Abschnitte sind mit Fußnoten versehen) auf einer vom Autor erstellten Seminararbeit über dissipative Systeme in der Kontrolltheorie [8], die im Rahmen des Bachelorhauptseminars "Numerik und Kontrolltheorie" im Sommersemester 2014 entstanden ist.
An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Lars Grüne bedanken für die Betreuung dieser Arbeit und die Einarbeitung in das Gebiet der mathematischen Kontrolltheorie durch seine hervorragende Vorlesung "Mathematische Kontrolltheorie I" und das daran anschließende Seminar. Außerdem möchte ich Dr. Robert Baier für die Einrichtung eines Rechnerzugangs und Dipl.-Math. Philipp Braun für die Betreuung der Seminararbeit, hilfreiche Diskussionen in diesem Zusammenhang und der Bereitstellung des LaTeX-Templates (zusammen mit Prof. Dr. Jürgen Pannek) danken.

Christian Fiedler, Bayreuth 20. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einleitung

Für lineare Systeme gibt es eine umfangreiche Theorie zur Stabilisierung ebendieser Systeme. Der nichtlineare Fall erlaubt bisher jedoch keine vollständige, geschlossene Theorie, vielmehr müssen Spezialfälle betrachtet werden und eine Vielzahl von verschiedenen Werkzeugen entwickelt werden (siehe hierzu zum Beispiel [5, Section 1.1], [26, Chapter 14]).
In dieser Arbeit wird der Begriff der dissipativen Systeme eingeführt, der bei der Analyse und Kontrolle nichtlinearer Systeme eingesetzt werden kann. Diese Arbeit bezieht sich auf die mathematische Formulierung durch Jan C. Willems [9], welche in der mathematischen Kontrolltheorie zumeist verwendet wird. Da diese Arbeit nur einen einführenden Charakter haben kann, beschränken wir uns bei der konkreten Anwendung des Dissipativitätskonzepts auf den wichtigen Spezialfall der passiven Systeme, für den eine mathematische ausgereifte Theorie existiert; in der hier dargestellten Form wurde das zentrale Resultat entwickelt von Christopher I. Byrnes, Alberto Isidori und Jan C. Willems (siehe [27]).
Zunächst werden vorbereitende Definitionen gegeben und die verwendete Notation erklärt. Im folgenden Kapitel werden die nötigen Grundlagen aus Kontroll- und Systemtheorie eingeführt, insbesondere wird der Begriff des Kontrollsystems beziehungsweise dynamischen Systems geklärt. Beachte, dass beide Begriffe in dieser Arbeit synonym verwendet werden, außerdem wird um technischen Aufwand zu vermeiden auf Details zur Lösungstheorie der in diesem Zusammenhang verwendeten gewöhnlichen Differentialgleichungen verzichtet. Im nächsten Kapitel wird der Begriff des dissipativen dynamischen Systems eingeführt. Die neuen Begriffe werden mit einem einfachen physikalischen Beispiel erklärt und eine mögliche Interpretation vorgestellt. Im Folgenden wird der wichtige Begriff der Storage- oder Speicherfunktion eingehend untersucht. Spezielle Funktionen dieser Art sowie die Menge aller Speicherfunktionen werden kurz betrachtet und abschließend werden einige Resultate hinsichtlich der Regularität dieser Funktionen angegeben. Zum Schluss des Kapitels werden Spezialfälle beziehungsweise Beispiele dissipativer Systeme vorgestellt: Etwas ausführlicher werden passive Systeme besprochen, die eine große Rolle in der Elektrotechnik spielen und

auf die sich die späteren Kapitel konzentrieren. Neben der Definition und einfachen Beispielen werden auch einige grundlegende Resultate hierzu angegeben. Daneben wird auch kurz auf die Input-to-State-Stabilität hingewiesen, die auch als eine Form der Dissipativät interpretiert werden kann. Bei Stabilisierungsfragen beschränken wir uns auf die Lyapunov-Stabilitätstheorie, die im nächsten Abschnitt betrachtet wird. Verwendet werden an die Erfordernisse der späteren Kapitel angepasste Definitionen und Resultate, insbesondere werden teilweise etwas schwächere Regularitätsannahmen als üblich verwendet. Später werden auch einige Ergebnisse der geometrischen Theorie nichtlinearer Systeme benötigt, welche in diesem Kapitel ebenfalls dargestellt werden. Im Gegensatz zur Literatur werden zumeist ausführliche und detaillierte Beweise gegeben, auch wenn diese teilweise etwas technisch sind. Zuletzt wird eine grundlegende Aufgabenstellung der Kontrolltheorie betrachtet, die Stabilisierung eines nichtlinearen Systems mittels Feedbacks. Nach der Klärung des Feedbackbegriffs wird zunächst die Situation für lineare Systeme betrachtet und zwei Linearisierungsmethoden vorgestellt. Diese funktionieren allerdings nicht immer, was die Motivation zur Entwicklung weitergehender, "inhärent nichtlinearer" Methoden bereitstellt. In dieser Arbeit werden dazu Stabilisierungstechniken unter Verwendung von Dissipativitätseigenschaften vorgestellt. Im nächsten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Stabilität und Dissipativität untersucht, wobei wir uns hierbei auf die Lyapunov-Stabilität, also Zustandsstabilität beschränken. Dazu werden einige allgemeine Resultate angegeben und der Spezialfall passiver Systeme wird genauer betrachtet. Im Folgenden werden darauf aufbauend Stabilisierungsverfahren für passive Systeme besprochen und auf Beispiele angewendet. Im nächsten Kapitel wird die Frage untersucht, wann sich Systeme mittels eines Feedbacks "passivieren" lassen, wobei im ersten Abschnitt die benötigten Begriffe geklärt werden. Es existieren (bei hinreichender Regulärität) notwendige und ausreichende Bedingungen für die "Passivierbarkeit". Die folgenden Abschnitte geben als zentrales Resultat die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für Feedback-Passivierbarkeit (sofern das System hinreichend regulär ist) an. Abschließend werden die vorgestellten Resultate zusammengefasst und einige Anwendungen angegeben.

1.2 Notation

Zunächst müssen einige technische Begriffe und die Notation dieser Arbeit geklärt werden. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die natürlichen Zahlen (mit 0), mit $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen und für ein Ordnungssymbol α und eine reelle Zahl r wird definiert

$$\mathbb{R}_{\alpha r} := \{s \in \mathbb{R} \mid s \alpha r\}.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

die übliche (induzierte) Norm. Vektoren werden als Spaltenvektoren dargestellt, also $x \in \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sind die Einträge des Vektors. Zur Vereinfachung wird auch die Notation $(v)_i$ für das i-te Element des Vektors v (möglicherweise ein komplizierter Ausdruck) verwendet. Für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird mit A^T die Transponierte bezeichnet und mit $A_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}^T$ die j-te Spalte beziehungsweise mit $A_{i \cdot} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}^T$ die i-te Zeile. Ableitungen werden wie üblich als Frechet-Ableitungen aufgefasst und lassen sich wegen der Beschränkung dieser Arbeit auf endlichdimensionale reelle euklidische Räume durch die üblichen Partialableitungen darstellen. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen wird mit Df die totale (Frechet-)Ableitung von f bezeichnet sofern diese existiert, mit $\frac{\partial}{\partial x_i} f_l$ die i-te partielle Ableitung der l-ten Komponente, damit ergibt sich als Darstellung für die totale Ableitung durch die Jakobi-Matrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Für eine differenzierbare Funktion $f : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^m$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^p$, bezeichnet $D_l f$ die Ableitung nach den l-ten Komponente, $l = 1, 2$, wobei die Komponenten als Vektoren aufgefasst werden (siehe [3, Chapter VII]). $C(D, \mathbb{R}^m) = C^0(D, \mathbb{R}^m)$, $C(D) := C^0(D) := C^0(D, \mathbb{R})$ bezeichnet den Raum der stetigen, $C^r(D, \mathbb{R}^m)$, $C^r(D) := C^r(D, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Räume der r-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, für Details sei auf [3, Chapter VII] verwiesen. Alle im Folgenden vorkommenden Integrale werden als Lebesgue-Integrale aufgefasst, wobei wir mit λ das Lebesgue-Maß auf der Lebesgue-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ bezeichnen (beachte, dass die Lebesguesche σ-Algebra die Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra ist, insbesondere enthält sie diese). Zur kürzeren Darstellung bezeichnen wir Lebesgue-messbare Mengen und Funktionen einfach als messbar, Lebesgue-integrierbare Funktion häufig als integrierbar, außerdem verwenden wir für eine messbare Menge Ω und eine messbare, reellwertige Funktion f auf Ω für das Lebesgue-Integral die übliche Schreibweise

$$\int f(x) \mathrm{d}x := \int_\Omega f(x) \mathrm{d}x$$

statt der präziseren Notation

$$\int_\Omega f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}\lambda^1(x).$$

Wir setzen für eine messbare Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine beliebige Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{L}_0(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ messbar}\},$$

der Raum der messbaren Funktionen,

$$\mathcal{L}^1(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}_0(X,Y) \mid \int |f(x)| \mathrm{d}x < \infty\},$$

der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen und

$$\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}_0(X,Y) \mid \forall K \subseteq X \text{ kompakt}: \ f \in \mathcal{L}^1(K,Y)\},$$

der Raum der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen (beachte, dass jede kompakte Menge Lebesgue-messbar ist). Außerdem werden die $\mathcal{L}^p$-Räume für $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$\mathcal{L}^p(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}_0(X,Y) \mid \int |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}$$

mit der Seminorm

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

und analog $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(X,Y)$. Der Raum $\mathcal{L}^\infty(X,Y)$ ist definiert als

$$\mathcal{L}^\infty(X,Y) := \{f \in \mathcal{L}_0(X,Y) \mid \|f\|_\infty \text{ endlich}\},$$

wobei mit $\|\cdot\|_\infty$ das essentielle Supremum bezeichnet wird:

$$\|f\|_\infty := \text{ess-sup}\,|f| := \inf\{r \geq 0 \mid f(x) < r \text{ für fast alle } x \in X\}.$$

Mittels der Identifikation fast überall übereinstimmender Funktionen werden aus den bereits gegebenen Räumen $L_0(X,Y)$, $L^p(X,Y)$, $L^p_{\text{loc}}(X,Y)$ definiert, wobei (für $Y = \mathbb{R}^m$) $L^p(X,Y)$ mit $\|\cdot\|_{L^p}$ (welche sich auf offensichtliche Weise aus der $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$-Seminorm ergibt) für $1 \leq p \leq \infty$ ein normierter Vektorraum ist. Sind keine Missverständisse zu erwarten, wird auch $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}^1$ etc. verwendet. Für Details und Eigenschaften dieser Räume verweisen wir auf [2, Paragraph X.4] und [1, Section 4.2, 4.3].
Insbesondere im Hinblick auf spätere Stabilitätsresultate werden sogenannte Vergleichsfunktionen benötigt ([18, Definition 9.1]).

Definition 1.1. Wir definieren folgende Funktionenräume:

$$\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f(0) = 0, f \text{ stetig, streng monoton wachsend}\} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{K}_\infty = \{f \in \mathcal{K} \mid f(x) \to \infty \text{ falls } x \to \infty\} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L} = \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ stetig, streng monoton fallend, } f(x) \to 0 \text{ falls } x \to \infty\} \tag{1.3}$$

$$\mathcal{KL} = \{\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq} \mid \forall t \geq 0 : \beta(\cdot,t) \in \mathcal{K}_\infty,\ \forall s > 0 : \beta(\cdot,s) \in \mathcal{L}\} \tag{1.4}$$

Der Großteil der Literatur zu dissipativen Systemen ist nur auf Englisch verfügbar, falls die deutschen Entsprechungen der Fachtermini unüblich sind, werden gegebenenfalls die englischen Begriffe verwendet.

1.3 Dynamische Systeme und Grundlagen der Kontrolltheorie

In diesem Abschnitt werden die benötigten Grundlagen aus Kontroll- und Systemtheorie besprochen, wir beschränken uns aber auf eine kurze Einführung. Das zentrale Konzept ist dabei das eines dynamischen Systems beziehungsweise eines Kontrollsystems.

Definition 1.2. Seien $n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, U)$. Für $f : X \times U \to \mathbb{R}^n$, $(x, u) \mapsto f(x, u)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x gleichmäßig in u, $u \in \mathcal{U}$ und $h : X \times U \to \mathbb{R}^p$ messbar definiert

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{1.5}$$

ein *dynamisches System* beziehungsweise *Kontrollsystem* Σ. X wird *Zustandsraum* oder *Phasenraum* genannt, U Menge der Eingangswerte, $\mathcal{U}$ Menge der Eingangs- oder Kontrollfunktionen, $u \in \mathcal{U}$ *Eingang*, *Eingangsfunktion* oder *Kontrollfunktion* und y *Ausgang* oder *Output* genannt.
Für ein $x_0 \in X$ und $u \in \mathcal{U}$ bezeichnet

$$x(t, x_0, u) \tag{1.6}$$

die (sofern existente) Lösung der zum Kontrollsystem Σ gehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, u)$$

für ein festes $u \in \mathcal{U}$ und Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ mit $t \in \mathbb{R}$ aus dem maximalen offenen Existenzintervall

$$(t^-(x_0, u), t^+(x_0, u))$$

der Lösung. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, setzen wir auch einfach $x(t) := x(t, x_0, u)$ und $y(t) = h(x(t, x_0, u), u)$.

Definition 1.3. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Mengen. Für $f : X \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)$ lokal Lipschitz-stetig in x definiert

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.7}$$

ein *dynamisches System ohne Ein- und Ausgang* Σ, auch *klassisches dynamisches System* genannt. X heißt *Zustandsraum* oder *Phasenraum*. Für ein $x_0 \in X$ bezeichnet

$$x(t, x_0) \tag{1.8}$$

die (sofern existente) Lösung der zum System Σ gehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

bezüglich des Anfangswertproblems $x(0) = x_0$ mit $t \in \mathbb{R}$ aus dem maximalen Existenzintervall der Lösung. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, setzen wir auch einfach $x(t) := x(t, x_0)$.

Beachte, dass in der vorliegenden Arbeit die Begriffe dynamisches System und Kontrollsystem synonym verwendet werden. In der Literatur werden Systeme ohne Ein- und Ausgang häufig als "klassisches" dynamisches System bezeichnet oder als "autonomes" System. Dieser Begriff wird aber vermieden, mit autonomen Systemen werden hier nur zeitinvariante Systeme bezeichnet (siehe [6]).

Bemerkung 1.4. 1. Die Regularitätsannahmen in Definition 1.2 und 1.3 reichen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen (im absolutstetigen Sinne) aus, denn diese erfüllen die Caratheodory-Bedingungen, cf. [18, Satz 8.1] und [6, Theorem 54]. Um die Darstellung der betrachteten Konzepte nicht durch technische Details zu erschweren, verzichten wir aber (wie in der Literatur üblich) auf weitergehende Details und verweisen auf [6, Section C.3].

2. Zur Vermeidung übermäßigen technisches Aufwandes nehmen wir an (sofern nichts anderes angegeben wird), dass $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{U} = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, U)$.

3. Da wir nur autonome Differentialgleichungen betrachten, können und werden wir als Anfangszeit $t_0 = 0$ setzen. Insbesondere gehen wir davon aus, dass $t = 0$ im maximalen Existenzintervall der Lösung enthalten ist.

4. Das Konzept eines dynamischen Systems beziehungsweise Kontrollsystems kann erheblich allgemeiner definiert werden, tatsächlich wurde der Begriff der Dissipativität eines dynamischen Systems in einem sehr allgemeinen Rahmen eingeführt, vergleiche hierzu [9, Definition 1]. Für allgemeinere Definitionen eines dynamischen Systems verweisen wir auf [7, Section 2.1] und [6, Chapter 2] sowie die dort genannte Literatur.

5. Speziell in der Kontrolltheorie werden Systeme mit $m = p = 1$ *SISO* (Single-Input-Single-Output) genannt, wenn m und p größer als 1 sind, dann häufig *MIMO* (Multiple-Input-Multiple-Output). Die entsprechenden Begriffe MISO für $m > 1$, $p = 1$ und SIMO $m = 1$, $p > 1$ werden hier nicht benötigt, diese werden im Folgenden ebenfalls als MIMO bezeichnet.

In der nichtlinearen Kontrolltheorie wird häufig eine etwas speziellere Definition eines Kontrollsystems verwendet, welche jedoch für viele Anwendungen ausreicht (vergleiche [5, Section 1.2]):

Definition 1.5. Ein dynamisches System beziehungsweise Kontrollsystem Σ der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{1.9}$$

(mit f und $g_1, \ldots, g_m$ lokal Lipschitz-stetig) wird *kontroll-affin* genannt.

Bemerkung 1.6.

Ein Kontrollsystem der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.10}$$

wird auch ein System ohne *Feedthrough* oder *Durchgriff* bezeichnet. Die Ausgangsfunktion hängt also nicht direkt vom Eingang ab. Kontrollaffine Systeme ohne Feedthrough haben demnach die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

also ohne *Feedthroughterm* im Output. Um Probleme hinsichtlich der Existenz von Lösungen bei späteren Anwendungen zu vermeiden (vergleiche hierzu zum Beispiel [13, Chapters 1, 2]), beschränken wir uns im Folgenden zumeist auf Kontrollsysteme ohne Feedthrough.

In einem kontroll-affinen Kontrollsystem wird $f(x)$ auch *Drift* genannt, falls $f \equiv 0$, so nennt man ein solches System auch *System ohne Drift*, siehe dazu [6, Section 4.3].

Im Zusammenhang mit Kontrollsystemen werden häufig die folgenden Begriffe benötigt:

Definition 1.7. Sei Σ ein dynamisches System, $x^* \in X$.

1. $x \in X$ heißt *erreichbar von x^**, wenn ein $u \in \mathcal{U}$ und ein $t \geq 0$ existiert, so dass $x = x(t, x^*, u)$.

2. $x \in X$ heißt *erreichbar zur Zeit $t_1 \geq 0$ von x^**, wenn ein $u \in \mathcal{U}$ existiert, so dass $x = x(t_1, x^*, u)$ gilt.

3. Die Menge X (oder auch das System Σ) heißt *erreichbar von x^**, wenn jedes $x \in X$ von x^* erreichbar ist.

4. Das System heißt *kontrollierbar*, wenn das System von jedem x aus erreichbar ist.

In der Kontrolltheorie werden häufig Systeme betrachtet, die aus kleineren Teilsystemen aufgebaut sind, zwei wichtige Möglichkeiten sind dabei die Parallelschaltung und die Feedbackverbindung. Bei der Parallelschaltung zweier dynamischer Systeme Σ_i $i = 1, 2$ jeweils mit Eingang u_i und Ausgang y_i wird der gleiche Input u des neuen Gesamtsystems für beide Teilsysteme verwendet, $u = u_1 = u_2$ und der neue Ausgang y des Gesamtsystems ist die Summe der Ausgänge der Teilsysteme, $y = y_1 + y_2$. Bei der Feedbackschaltung wird die Differenz des neuen Eingangs u zusammen mit dem Ausgang des zweiten Teilsystems y_2 als Eingang für das erste Teilsystem verwendet, $u_1 = u - y_2$, der Ausgang des ersten Teilsystems wird als Eingang des zweiten Teilsystems $u_2 = y_1$ und als Ausgang des Gesamtsystems,

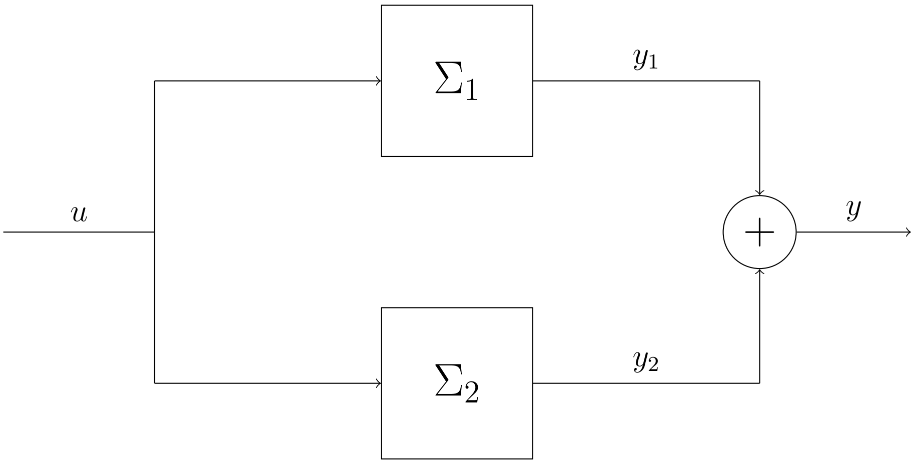


Abbildung 1.1: Parallelschaltung zweier dynamischer Systeme

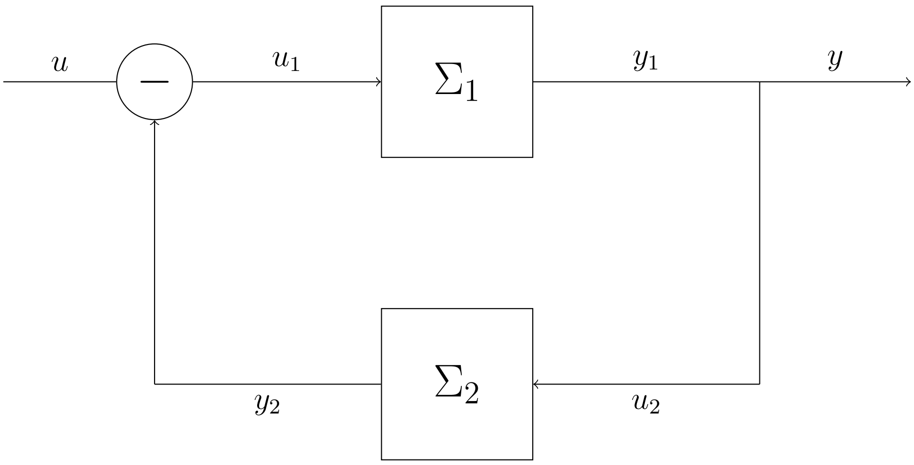


Abbildung 1.2: Feedbackschaltung zweier dynamischer Systeme

$y = y_1$ verwendet. Beachte, dass die sich ergebenden Systeme wieder von der Form (1.5) sind (für weitere Erläuterungen hierzu siehe [17, Section 2.2.1], [13, Chapter 3]).

Die Feedbackschaltung ist dabei insbesondere in Anwendungen von großer Bedeutung, denn damit kann ein System auf Änderungen des Zustands eingehen, man nennt die Kontrolle eines Systems mit einer Feedbackschaltung auch *Regelung*. Im Gegensatz dazu wird bei der *Steuerung* lediglich ein (vorher berechneter) Eingang verwendet, insbesondere kann damit das System nicht auf etwaige Abweichungen wie äußere Störungen reagieren.

Mit einem Feedback bezeichnen wir eine gewisse "Zuordnung" (für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen hinreichend regulär) , die aus "Zustandsmessungen" Kontrollwerte "berechnet", bei der Feedbackschaltung erfolgt diese "Zuordnung" dabei durch ein eigenes dynamisches System. Beachte, dass dieses dynamische System auch degeneriert sein kann, also lediglich eine Funktion ist, die aus Zustandsmessungen, das heißt dem Ausgang eines

anderen Systems, neue Eingangswerte berechnet. Im einfachsten Fall ist also ein Feedback (genauer ein *statisches Zustandsfeedback*) eine Funktion $u : X \to U$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass u lokal Lipschitz-stetig ist. Statisch deshalb, weil die Funktion statisch nur von den aktuellen Werten aus X abhängt, Zustandsfeedback, weil die Funktion direkt vom Zustand des Systems abhängt. Alternativ gibt es auch *dynamische Zustandsfeedbacks*, hierbei hat das Feedback die Form $u : X \to U$ mit $u(x) := \tilde{u}(x, z)$, wobei $z \in Z \subseteq \mathbb{R}^q$ für ein $q \in \mathbb{N}$ durch ein eigenes Differentialgleichungssystem $\dot{z} = d(x, z)$ beschrieben wird, wobei $d : X \times Z \to Z$, $\tilde{u} : X \times Z \to U$ hinreichend regulär sind. In dieser Arbeit werden jedoch nur statische Feedbacks betrachtet.
Wichtig sind im Gegensatz zu Zustandsfeedbacks auch sogenannte *Ausgangsfeedbacks* (wobei es sowohl statische als auch dynamische gibt), also Feedbacks, die nur vom Ausgang y eines System und *nicht* vom Zustand abhängen.
Häufig werden Feedbacks eingesetzt, um aus einem sogenannten *Open Loop-System* (auch *offener Regelkreis* genannt), also ein dynamisches System Σ nach Definition 1.2 ein *Closed*

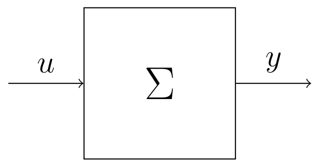


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung eines Open Loop-Systems

Loop-System (auch *geschlossener Regelkreis* genannt) zu konstruieren, also ein “klassisches” dynamisches System ohne Eingang.

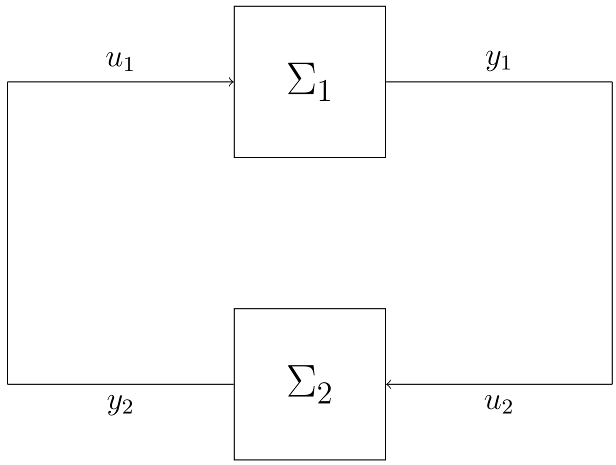


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung eines Closed Loop-Systems

Kann ein System mittels eines Feedbacks mit neuem Eingang in ein anderes umgewandelt werden, so nennt man die Systeme *Feedback-äquivalent*. Für eine ausführliche Diskussion von verschiedenen Feedback-Typen wird auf [12, Chapter 5.2] verwiesen.

Kapitel 2

Dissipative Systeme

In diesem Kapitel[1] wird die Definition eines dissipativen Systems gegeben und einige grundlegende Beispiele und Eigenschaften betrachtet. In den ersten beiden Abschnitten wird die der vorliegenden Arbeit zugrundeliegende Definition der Dissipativität eines dynamischen System angegeben und neben einer physikalischen Interpretation ein erstes einfaches Beispiel besprochen. Danach werden zwei spezielle Formen von Dissipativität betrachtet, nämlich Passivität und Input to State-Stabilität. Im folgenden Abschnitt wird der wichtige Begriff der Speicher- oder Storage-Funktion genauer betrachtet, alternative Charakterisierungen von Dissipativität und einige Regularitätsresultate angegeben.

2.1 Definition Dissipativer Systeme

Um dissipative Systeme definieren zu können, wird zunächst eine einfache Erweiterung dynamischer Systeme benötigt.

Definition 2.1. Ein Kontrollsystem Σ mit *supply-rate* s ist ein Kontrollsystem zusammen mit einer messbaren Funktion $s : U \times Y \to \mathbb{R}$, so dass

$$\int_a^b |s(u(t), y(t))| \mathrm{d}t < \infty \tag{2.1}$$

für alle Eingänge $u \in \mathcal{U}$, Anfangswerte $x_0 \in X$ und $0 \leq a \leq b$ mit $(a, b) \subseteq (t^-(x_0, u), t^+(x_0, u))$, wobei abkürzend $y(t) = h(x(t, x_0, u), u)$ gesetzt wurde.

[1]Dieses Kapitel basiert teilweise auf einer Seminararbeit des Autors [8], die im Rahmen des Bachelor-Hauptseminars "Numerik und mathematische Kontrolltheorie" an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2014 entstanden ist. Abschnitte 2.1, 2.2 und 2.4 außer 2.4.3 wurden bis auf geringfügige Änderungen vollständig übernommen, 2.3.1 zum Großteil, 2.4.3 wurde um Resultate zur Unterhalbstetigkeit erweitert, Abschnitt 2.3.2 ist komplett neu hinzugefügt.

Definition 2.2. Ein *dissipatives System* ist ein System mit supply-rate s, für das eine *Storage-Funktion* (auch *Speicherfunktion*) $S : X \to \mathbb{R}_0^+$ existiert und die *Dissipationsungleichung*

$$S(x_1) \leq \int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t + S(x_0) \tag{2.2}$$

für alle $x_0 \in X$, $u \in \mathcal{U}$, alle zulässigen $t_1 \geq 0$ und $x_1 = x(t_1, x_0, u) \in X$ erfüllt ist.

Man beachte, dass zu einem dissipativen System immer eine supply-rate gehört und dass die Storage-Funktion (auch zu derselben supply-rate) nicht eindeutig sein muss. Die hier gegebene Definition stammt von Jan C. Willems, [9, Definition 2], und scheint die erste gewesen zu sein (siehe hierzu [1, Section 4.4.1]). Die Theorie dieser Systeme wurde in den 1970er- und 1980er-Jahren primär von Willems und Hill und Moylan in einer Reihe von Arbeiten entwickelt (unter anderem [9], [10], [11], [1]), wobei allerdings eine recht große Ansammlung von verschiedenen Definitionen entstanden ist, die teilweise *nicht* äquivalent zueinander sind, sowie einige Erweiterung, die spezielle Formen von Dissipativität bezeichnen. Für einen umfassenden Überblick und Resultate hinsichtlich des Zusammenhangs der unterschiedlichen Definition wird auf [1, Section 4.4.1] verwiesen.
Erfüllt die Speicherfunktion eines dissipativen Systems eine gewisse Regularitätsvoraussetzung, erhält man eine einfache, äquivalente Charakterisierung.

Lemma 2.3. Sei Σ ein dissipatives System und sei die zugehörige Storage-Funktion S differenzierbar. Dann ist die Dissipationsungleichung (2.2) äquivalent zu

$$\dot{S}(x(t)) \leq s(u(t), y(t)) \tag{2.3}$$

für alle zulässigen t.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus (2.2). □

Lemma 2.3 lässt sich verallgemeinern: Für hinreichend reguläre, aber nicht differenzierbare Storage-Funktionen lässt sich Dissipativität mittels partieller Differentialungleichungen formulieren, hierzu werden Viskositätslösungen verwendet. Aus Platzgründen wird hierauf nicht näher eingegangen, für eine Einführung in dieses Themengebiet verweisen wir auf [1, Section 4.6].

Definition 2.4. Sei Σ ein dissipatives System. Falls in (2.2) Gleichheit gilt für alle $x_0 \in X$, $u \in \mathcal{U}$, zulässige $t \geq 0$ und entsprechende $x_1 = x(t, x_0, u)$, dann heißt das System *lossless* oder *verlustfrei*.

2.2 Interpretation und Beispiele

Die grundlegende Interpretation dissipativer Systeme ist die folgende: Ein dissipatives System interagiert mit der “Außenwelt”, wodurch ein Energieaustausch stattfinden kann, wobei die momentane Energiezufuhr durch die supply-rate angegeben wird (beziehungsweise die Menge an Energie, die das System verlässt). Dabei gibt es einen internen Energiespeicher, der in jedem beliebigen Zustand des Systems die aktuelle enthaltene Energie angibt, dies wird durch die Speicherfunktionen geleistet. Die Dissipationsungleichung bedeutet nun, dass bei Übergang von einem Startzustand x_0 in einen Ausgangszustand x_1 zum Zeitpunkt $t_1 \geq 0$, wobei als Eingang $u \in \mathcal{U}$ verwendet wird, also $x_1 = x(t_1, x_0, u)$, nur Energie verloren gehen kann, also informell

$$\underbrace{S(x_1)}_{\text{Energie nach dem Übergang}} \leq \underbrace{\int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t}_{\text{Extern gelieferte Energie}} + \underbrace{S(x_0)}_{\text{Energie am Anfang}}$$

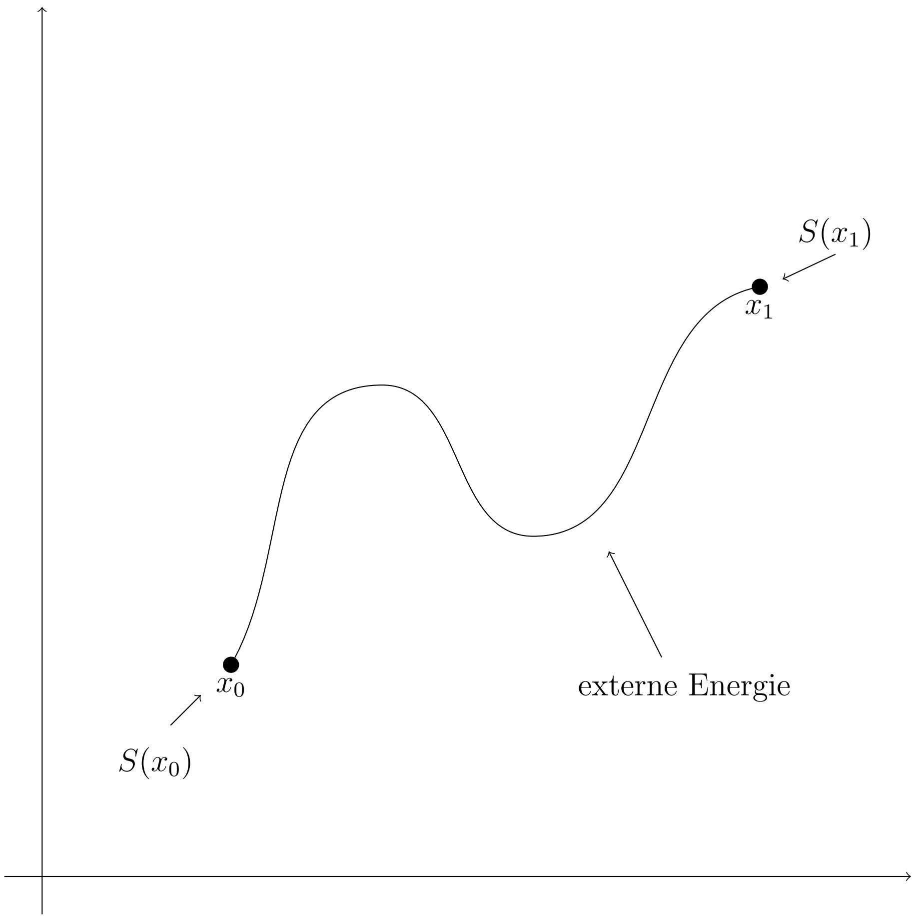


Abbildung 2.1: Schematischer Übergang von x_0 zu $x(t, x_0, u)$

Man beachte, dass dies nur eine Interpretation ist, die eine gewisse Motivation für die Definition solcher Systeme liefert.

Im Folgenden wird ein einfaches Beispiel für ein dissipatives System, das [1, Example 1.1] entnommen wurde, betrachtet, an dem das Konzept aus einer konkreten Perspektive erläutert wird.

Beispiel 2.5. Wir betrachten ein Federpendel, bestehend aus einer Feder mit fester Federkonstante $K > 0$, die an einem festen Bezugspunkt aufgehängt ist und ein Gewicht der Masse m trägt, außerdem wird das System mit Konstante $D \geq 0$ gedämpft (Luftreibung, Wärmeentwicklung durch Verformung der Feder etc) und eine Kraft F, die auf das Gewicht einwirkt.

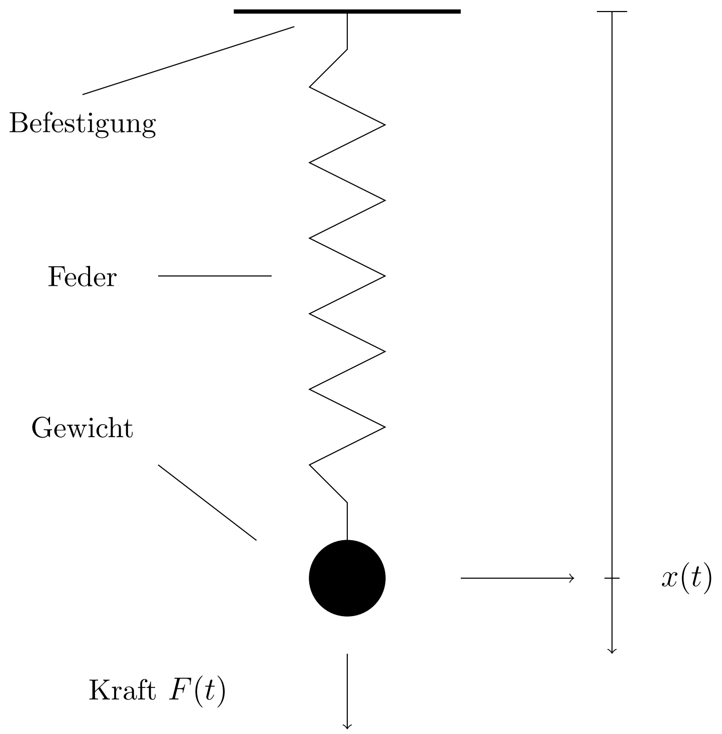


Abbildung 2.2: Federpendel

Wir modellieren die Situation mit einer skalaren, gewöhnlichen, reellen, autonomen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei x_1 die Auslenkung der Feder relativ zum Befestigungspunkt und x_2 die aktuelle Geschwindigkeit angibt. Auf physikalischen Überlegungen basierend kann dann das Federpendel beschrieben werden durch

$$m\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \tag{2.4}$$

mit Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = x_2 \tag{2.5}$$

Die im System enthaltene Gesamtenergie kann dann berechnet werden durch

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{2.6}$$

Ableiten von (2.6) nach der Zeit resultiert in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t), \dot{x}(t)) = m\ddot{x}(t)\dot{x} + Kx(t)\dot{x}(t) \tag{2.7}$$

Einsetzen von (2.4) in (2.7) liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t), \dot{x}(t)) = F(t)\dot{x}(t) - D\dot{x}^2 \tag{2.8}$$

Mit Integration von (2.8) von 0 bis t_1 gelangt man zu

$$V(x(t_1), \dot{x}(t_1)) = V(x(0), \dot{x}(0)) + \int_0^{t_1} F(t)\dot{x}\mathrm{d}t - \int_0^{t_1} D\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Energie zu einem Zeitpunkt $t_1 \geq 0$ gleich der Energie zum Startzeitpunkt zusammen mit der durch die externe Kraft geleisteten Arbeit und abzüglich der Dämpfungsarbeit ist:

$$\underbrace{V(x(t_1), \dot{x}(t_1))}_{\text{Energie zum Zeitpunkt } t_1} = \underbrace{V(x(0), \dot{x}(0))}_{\text{Energie zum Startzeitpunkt}} + \underbrace{\int_0^{t_1} F(t)\dot{x}\mathrm{d}t}_{\text{Externe Energie durch Kraft}} - \underbrace{\int_0^{t_1} D\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t}_{\text{Dämpfung}}$$

Wir setzen nun $s(u, y) := uy$, interpretieren die wirkende Kraft als Eingang, also $u(t) = F(t)$ und als Ausgang die Geschwindigkeit des Systems, d.h. $y(t) = \dot{x}(t)$. (Man beachte an dieser Stelle, dass wir eigentlich einen zweidimensionalen Zustandraum bräuchten, damit die Benennung formal mit Definition 1.2 konsistent bleibt, aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir jedoch darauf, dies explizit formal in der Notation zu vermerken.) Mit $S(x, \dot{x}) = V(x, \dot{x})$ erhalten wir aus (2.9)

$$S(x_1) \leq \int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t + S(x_0),$$

d.h. das System ist dissipativ und V ist eine Speicherfunktion. Hier ist die Interpretation der Energiespeicherung deutlich zu erkennen, denn S ist tatsächlich eine Funktion, die jedem Zustand die aktuell enthaltene Energie (in einem sinnvollen physikalischen Sinne) zuweist und s gibt die von außen zugeführte Energie an. Man beachte, dass im Fall $D = 0$ Gleichheit in (2.9) gilt, damit ist das System (siehe Definition 2.4) verlustfrei.

2.3 Spezialfälle dissipativer Systeme

Der Begriff der Dissipativität eines Systems hängt also von der verwendeten supply-rate ab. In diesem Abschnitt werden zwei spezielle Varianten betrachtet, die sich aus entsprechend gewählten supply-rates ergeben. Wir beschränken uns dabei auf Passivität (dieser Begriff wird in späteren Kapiteln eine zentrale Rolle bei der Stabilisierung einnehmen) und Input to State-Stabilität. Es sei angemerkt, dass sich diese Eigenschaften zwar durch Dissipationsungleichungen charakterisieren lassen, es aber unabhängig davon eine sehr große Theorie zu jedem dieser Begriffe gibt, auf die wir hier aber nicht eingehen können. Entsprechende Referenzen werden im Verlauf der Arbeit aber angegeben.

2.3.1 Passivität

Ein wichtiger Spezialfall dissipativer Systeme ergibt sich, wenn ein Skalarprodukt zwischen Eingang und Ausgang definiert werden kann, der Einfachheit halber betrachten wir hierzu nur den Fall, dass $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p$, für allgemeinere Untersuchungen sei auf [13, Section 2.2] verwiesen.

Definition 2.6. Sei Σ ein dissipatives System. Falls $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y(t) \in \mathbb{R}^m$ gilt und die supply-rate gegeben ist durch

$$s(u, y) = \langle u, y \rangle, \tag{2.10}$$

dann nennt man Σ passiv. s heißt in diesem Fall auch *Passivitäts-supply-rate.*

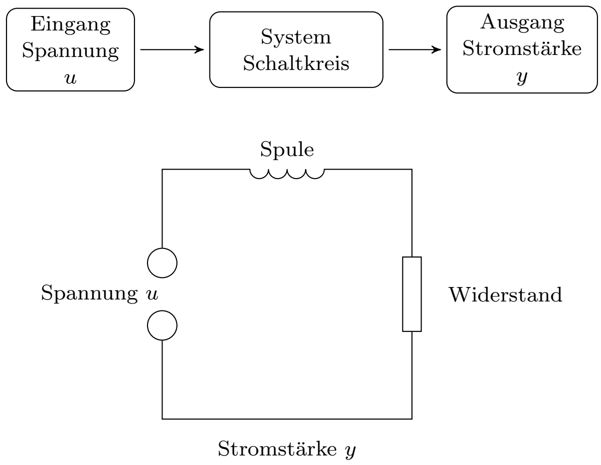
Beispiel 2.7. Im bereits behandelten Beispiel 2.5 wurde die Passivitäts-supply-rate verwendet, zusammen mit der Funktion V mit $V(0) = 0$, das heißt, für $D \geq 0$ ist das System passiv.

Beispiel 2.8. Passive Systeme spielen in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle, denn solche Systeme ergeben sich zum Beispiel aus RLC-Schaltkreisen (Widerstand, Spule, Kondensator). Zur Veranschaulichung geben wir eine Interpretation aus Sicht von Schaltkreisen: Der Eingang u wird als Spannung interpretiert, der Ausgang y als resultierende Stromstärke, das System selbst ist ein Schaltkreis, der durch den Zustandsraum X beschrieben wird (zum Beispiel Ladung von Kondensatoren, Stärke des Magnetfeldes in Spulen, etc). Dann gibt $s(u(t), y(t)) = u^T(t)y(t)$ die aktuelle Leistung zum Zeitpunkt t an ("Spannung $\cdot$ Strom = Leistung"). Für ein Beispiel siehe Abbildung 2.8.

Eine wichtige Eigenschaft von Passivität ist, dass die Verbindung zweier passiver Systeme wieder passiv ist.

Theorem 2.9. ([17, Theorem 2.10])
Betrachte zwei nichtlineare, passive Systeme

$$\Sigma_i \qquad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, u_i) \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned}$$



Eingang Spannung u, Ausgang resultierender Stromfluss y, Leistung $s(u, y) = u \cdot y$

Abbildung 2.3: Beispiel für einen einfachen passiven Schaltkreis

mit $X_i = Y_i = U_i$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$, $i = 1, 2$. Dann sind auch die Parallelschaltung Σ_p

$$\Sigma_p \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, u) \\ y &= y_1 + y_2 = h_1(x_1) + h_2(x_2) \end{aligned}$$

und die Feedbackschaltung Σ_f

$$\Sigma_f \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, y_1) \\ u_1 &= u - y_2 \\ y_1 &= h_1(x_1) \\ y_2 &= h_2(x_2) \\ y &= y_2 \end{aligned}$$

von Σ_1, Σ_2 passiv mit Speicherfunktion $S(x_1, x_2) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$, wobei S_i, $i = 1, 2$, die Speicherfunktion von System i ist.

Beweis. Seien $x_0^{(i)} \in X_i$, $u \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$ beliebig, die Lösung der Systemgleichungen werden jeweils mit $x_i(s, x_0^{(i)}, u)$ bezeichnet, $i = 1, 2$. Es gilt für die Parallelschaltung

$$\begin{aligned} S(x_1(t, x_0^{(1)}, u), x_2(t, x_0^{(2)}, u)) &= S_1(x_1(t, x_0^{(1)}, u)) + S_2(x_2(t, x_0^{(2)}, u)) \\ &\leq \int_0^t \langle u(s), y_1(s)\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \langle u(s), y_2(s)\rangle \mathrm{d}s + S_1(x_0^{(1)} + S_2(x_0^{(2)}) \\ &= \int_0^t \langle u(s), y_1(s) + y_2(s)\rangle \mathrm{d}s + S(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \end{aligned}$$

womit die Passivität gezeigt ist.
Für die Feedbackschaltung gilt

$$\begin{aligned} S(x_1(t, x_0^{(1)}, u), x_2(t, x_0^{(2)}, u)) &= S_1(x_1(t, x_0^{(1)}, u - y_2)) + S_2(x_2(t, x_0^{(2)}, y_1)) \\ &\leq \int_0^t \langle u(s) - y_2(s), y_1(s)\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \langle y_1(s), y_2(s)\rangle \mathrm{d}s + S_1(x_0^{(1)} + S_2(x_0^{(2)}) \\ &= \int_0^t \langle u(s), y_1(s)\rangle \mathrm{d}s + S(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \end{aligned}$$

was erneut die Passivität zeigt. □

Bemerkung 2.10. Beachte, dass die Dissipativität der Parallel- und Feedbackschaltung analog für jede supply-rate $s(u, y)$ folgt, die additiv bezüglich u ist, der Beweis geht genau wie bei Theorem 2.9.

2.3.2 Input to State-Stabilität

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist die sogenannte Input to State-Stabilität. Dieses in der nichtlinearen Kontrolltheorie wichtige Konzept wurde von Eduardo D. Sontag in [21] eingeführt und von Sontag und einigen weiteren Autoren ausführlich untersucht, für einen Überblick verweisen wir auf [24]. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass für das System Σ in diesem Abschnitt gilt, dass $f(0, 0) = 0$.

Definition 2.11. Sei Σ ein dissipatives System. Hat die zugehörige supply-rate s die Form

$$s(u, y) = -\alpha(|y|) + \gamma(|u|) \tag{2.11}$$

für $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$, gilt $y = x$ für alle $t \geq 0$, also $h(x, u) = x$, und existiert eine Speicherfunktion S mit

$$\alpha_1(x) \leq S(x) \leq \alpha_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, dann heißt Σ *input to state-stabil*.

Bemerkung 2.12. 1. Es gibt inzwischen einige Erweiterungen der Input to State-Stabilität: Eine schwächere Form ist die integral Input to State-Stabilität, welche ebenfalls mittels Dissipativität (allerdings wieder mit Einschränkungen hinsichtlich der Form der Speicherfunktion) charakterisiert werden kann, [25, Def II.2].

2. Beachte, dass Definition 2.11 nicht der ursprünglichen Definition von Input to State-Stabilität (in [21]) entspricht, sondern sich aus der Charakterisierung der ISS-Stabilität mittels ISS-Lyapunov-Funktionen ergibt (siehe [23]).

2.4 Speicher-Funktionen

Von zentraler Bedeutung bei der Definition dissipativer Systeme ist der Begriff der Storage- oder Speicherfunktion. Allerdings stellen sich bezüglich Definition 1.2 einige Fragen:

- Wie findet man eine Storage-Funktion für ein dissipatives System?
- Kann man dissipative Systeme auch anders charakterisieren als in Definition 2.2?
- Wie sieht die Menge aller Storage-Funktionen aus?
- Wie stehen Storage-Funktionen zueinander in Beziehung?

2.4.1 Spezielle Speicherfunktionen

Wir werden im Folgenden zwei spezielle Funktionen, die "Available-Storage-Funktion" S_a und die "Required-Supply- Funktion" S_r definieren, mit deren Hilfe alternative Charakterisierungen von Dissipativität möglich sind, außerdem sind diese Funktionen unter gewissen Voraussetzungen selbst Storage-Funktionen.
Dieser Abschnitt orientiert sich dabei an [9, Abschnitt 2].

Definition 2.13. Sei Σ ein System mit supply-rate s. Dann heißt

$$S_a(x_0) = \sup_{u \in \mathcal{U}, t_1 \geq 0} - \int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

available Storage S_a.

Diese Definition kann folgendermaßen interpretiert werden (man vergleiche hierzu die Diskussion in [9]): $S_a(x_0)$ gibt die maximale Energie an, die dem System entzogen werden kann, wenn

- man in x_0 startet
- eine beliebige Eingangsfunktion $u \in \mathcal{U}$ verwenden darf
- man eine beliebige Zeitspanne das System laufen lassen darf

Theorem 2.14. ([9, Theorem 1])
Sei Σ ein System mit supply-rate s und sei S_a die available Storage-Funktion. Dann gilt: Σ dissipativ $\Leftrightarrow \forall x \in X : S_a(x) < \infty$.
In diesem Fall ist $S_a(x)$ eine Storage-Funktion und für alle anderen Storage-Funktionen S gilt $0 \leq S_a(x) \leq S(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei zunächst $S_a(x) < \infty$ für alle $x \in X$. Wir zeigen, dass S_a eine Storage-Funktion für Σ ist, daraus folgt auch sofort die Dissipativität. Zunächst gilt $S_a(x) \geq 0$, was sofort ersichtlich wird, wenn im Integral in (2.12) $t_1 = 0$ gesetzt wird. Sei nun $x_0 \in X$, $u \in \mathcal{U}$ beliebig und $t_1 \geq 0$, $x_1 = x(t_1, x_0, u)$. Wir betrachten zwei Möglichkeiten zum Entziehen von Energie: Im einen Fall wird mit u zunächst von x_0 nach x_1 (zur Zeit $t_1 \geq 0$) gesteuert und dann $S_a(x_1)$ betrachtet, im anderen Fall wird $S_a(x_0)$ berechnet. Damit gilt dann aber mit der Definition von S_a

$$-\int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t + S_a(x_1) \leq S_a(x_0)$$

weil rechts das Supremum über alle Inputs $u \in \mathcal{U}$ betrachtet wird, links jedoch eine eingeschränkte Menge. Somit folgt die gesuchte Ungleichung

$$S_a(x_1) \leq \int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t + S_a(x_0).$$

"$\Rightarrow$": Sei nun Σ dissipativ. Sei $x_0 \in X$ beliebig, wir müssen zeigen, dass $S_a(x_0) < \infty$.
Sei S eine beliebige Storage-Funktion (diese existiert, weil Σ dissipativ ist). Für *alle* $u \in \mathcal{U}$, $t_1 \geq 0$ gilt dann

$$0 \leq S(x(t_1, x_0, u)) \leq \int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t + S(x_0) < \infty$$

Umstellen liefert

$$S(x_0) \geq -\int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x_0, u), u(t)))\mathrm{d}t$$

Daraus folgt dann

$$S(x_0) \geq \sup_{t_2 \geq 0, u \in \mathcal{U}} -\int_0^{t_2} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t = S_a(x_0)$$

Somit gilt $S_a(x_0) \leq S(x_0) < \infty$
Weil S eine beliebige Storage-Funktion war, gilt außerdem damit: Für *jede* Storage-Funktion S und jedes $x \in X$ ist $0 \leq S_a(x) \leq S(x)$. □

Das Theorem liefert also eine alternative Möglichkeit, Dissipativität festzustellen. Außerdem ergibt sich eine etwas abgewandelte Interpretation von Definition 1.2: Ein System ist genau dann dissipativ, wenn nur begrenzt viel Energie entzogen werden kann.
Für ein dissipatives System stellt S_a also ein minimales Element in der Menge aller Storage-Funktionen dar. Es stellt sich die Frage, ob es auch ein maximales Element gibt? Unter gewissen Zusatzbedingungen ist dies möglich, dazu wird folgende Funktion betrachtet.

Definition 2.15. Sei Σ ein System mit supply-rate s. Sei $x^* \in X$. Dann heißt

$$S_r(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(x,t_1), t_1 \geq 0} \int_0^{t_1} s(u(t), h(x(t, x^*, u), u(t)))\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

required Supply (bezüglich x^*), wobei $\mathcal{U}(x, t_1) := \{u \in \mathcal{U} \mid x(t_1, x^*, u) = x\}$.

Theorem 2.16. Sei Σ ein System mit supply-rate s, sei $x^* \in X$, Σ sei erreichbar von x^* und S_r die required-supply-Funktion (bezüglich x^*). Dann gilt: Σ dissipativ $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ so dass $\forall x \in X$ gilt $S_r(x) \geq -K$. In diesem Fall ist

$$S_a(x^*) + S_r(x) \tag{2.14}$$

eine mögliche Speicherfunktion und für eine beliebige Storage Funktion S mit $S(x^*) = 0$ gilt: $0 \leq S(x) \leq S_r(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Analog zu Theorem 2.14, siehe [9, Theorem 2]. □

Bemerkung 2.17. Die beiden Kriterien in Theorem 2.14 und 2.16 können auch zur Definition von Dissipativität verwendet werden.

2.4.2 Die Menge aller Speicherfunktionen

Wie aus Definition 1.2 hervorgeht, kommt den Storage-Funktionen eine große Bedeutung bei dissipativen Systemen zu. Bezüglich Bemerkung 1.4 stellt sich die Frage, wie Storage-Funktionen aussehen. Gibt es bei einem dissipativen System mehrere solcher Funktionen? Wie hängen diese Funktionen zusammen? In diesem Abschnitt werden einige dieser Aspekte besprochen. Zunächst wird eine Aussage über die Menge aller Storage-Funktionen eines dissipativen Systems angegeben.

Theorem 2.18. ([9, Theorem 3])
Sei Σ ein dissipatives System. Dann ist die Menge aller Storage-Funktionen konvex.

Beweis. Seien S_1, S_2 beliebige Storage-Funktionen, sei $\lambda \in [0,1]$. Zu zeigen: $S := \lambda S_1 + (1-\lambda)S_2$ ist Storage-Funktion. Seien dazu $x_0 \in X$, $t \geq 0$ und $u \in \mathcal{U}$ beliebig. Definiere $x_1 = x(t_1, x_0, u)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S(x_1) &:= \lambda S_1(x_1) + (1-\lambda)S_2(x_1) \\
&\leq \lambda \left(\int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t + S_1(x_0) \right) + \\
&\quad (1-\lambda) \left(\int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t + S_2(x_0) \right) \\
&= \lambda \int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t + (1-\lambda) \int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t \\
&\quad + \underbrace{\lambda S_1(x_0) + (1-\lambda)S_2(x_0)}_{=S(x_0)} \\
&= \int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t + S(x_0)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.19. Sei Σ ein dissipatives System mit Speicherfunktion S, $x^* \in X$ mit $S(x^*) = 0$, X erreichbar von x^* und S_r die required-supply-Funktion bezüglich x^*. Dann gilt

1. S_r ist eine Speicherfunktion.

2. Für jedes $\lambda \in (0, 1)$ ist $\lambda S_a + (1 - \lambda)S_r$ eine Speicherfunktion.

Beweis. 1. Siehe [9, Theorem 2]

2. Folgt sofort aus Theorem 2.18 und der 1. Aussage.

□

Es gibt also meistens eine große Menge an Storage-Funktionen, aus den beiden speziellen Funktionen S_a und S_r (man beachte, dass im Allgemeinen S_r keine Storage-Funktion ist) kann unter gewissen Voraussetzungen eine große Bandbreite von Speicherfunktionen gewonnen werden.

2.4.3 Regularität von Speicherfunktionen

Als nächstes wird kurz die Frage der Regularität von Speicherfunktionen betrachtet, wir beschränken uns dabei auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Leider sind im Allgemeinen wenige beziehungsweise gar keine Aussagen hinsichtlich der Regularität von Storage-Funktionen möglich, wenn man nicht mehr Eigenschaften für die supply-rate beziehungsweise das System selbst fordert.

Es folgt ein Resultat, das für hinreichend reguläre supply-rates und Kontrollfunktionen gilt.

Definition 2.20. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist unterhalbstetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x$ für ein $x \in D$ gilt, dass

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

Proposition 2.21. ([31, Proposition 2.3])
Sei $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^p$ und $s : U \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $K > 0$ gilt, dass für alle $y \in Y$, $u \in U$

$$|s(u, y)| \leq K(1 + |y|^q + |u|^q). \tag{2.15}$$

Sei $\mathcal{U} = \mathcal{L}^q_{loc}(\mathbb{R}_{\geq 0}, U)$. Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

mit f stetig und lokal Lipschitz-stetig gleichmäßig in u, h stetig und supply-rate s. Wenn das System dissipativ ist, dann ist für jede Speicherfunktion S die neue Funktion S' definiert durch

$$S'(x) = \liminf_{z \to x} S(z)$$

eine unterhalbstetige Speicherfunktion.

Beweis. Die Funktion S' ist nach Konstruktion unterhalbstetig.
Es wird gezeigt, dass S' auch eine Speicherfunktion ist, also die Dissipationsungleichung (2.2) für das System erfüllt. Seien dazu $x_0 \in X$, $u \in \mathcal{U}$ und $t \geq 0$ gegeben, zur Vereinfachung der Notation wird $x(t) := x(t, x_0, u)$, $x_n(t) := x(t, x_n, u)$ und $y(t) := h(x(t))$ definiert. Nach Definition von S' existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X so, dass $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$ und $S'(x_0) = \lim_{n \to \infty} S(x_n)$ gelten. Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S(x_n) &\geq S(x(t, x_n, u)) - \int_0^t s(u(r), h(x(r, x_n, u)))\mathrm{d}r && (2.16) \\ &\geq S'(x(t, x_n, u)) - \int_0^t s(u(r), h(x(r, x_n, u)))\mathrm{d}r, && (2.17) \end{aligned}$$

wobei für (2.16) die nach Voraussetzung für S geltende Dissipationsungleichung (2.2) und für (2.17) $S \geq S'$ verwendet wurde. Nach Konstruktion gilt nun

$$\lim_{n \to \infty} S(x_n) = S'(x_0).$$

Wegen eines Stetigkeitsresultats über Anfangswertprobleme ([16, Theorem 8.3], beziehungsweise in der hier benötigten Allgemeinheit [6, Theorem 55]) gilt

$$\lim_{n \to \infty} x(t, x_n, u) = x(t, x_0, u)$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} S'(x(t, x_n, u)) \geq \liminf_{n \to \infty} S'(x(t, x_n, u)) \geq S'(x(t, x_0, u)).$$

Wegen $x_n \to x_0$ existert eine kompakte Menge $N \subseteq X$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in N$ und $x_0 \in N$. Außerdem ist die Menge $N \times [0, t]$ kompakt. Weil $x \mapsto h(x)$ und $(x_n, t) \mapsto x(t, x_n, u)$ stetig sind, existiert ein $M > 0$ mit

$$|h(x(r, x_n, u))| \leq M, \forall n \in N, r \in [0, t]. \tag{2.18}$$

Damit ergibt sich aus der Dreiecksungleichung, (2.15) und $u \in \mathcal{L}^q_{loc}$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t s(h(x(r,x_n,u)),u(r))\mathrm{d}r\right| &\leq \int_0^t |s(h(x(r,x_n,u)),u(r))|\mathrm{d}r \\ &\leq \int_0^t K(1+|h(x(r,x_n,u),u(r))|^q + |u(r)|^q)\mathrm{d}r \\ &\leq Kt + K\int_0^t |h(x(r,x_n,u))|^q \mathrm{d}r + K\underbrace{\int_0^t |u(r)|^q\mathrm{d}r}_{=:M_u} \\ &\leq K(t+tM+M_u) < \infty\end{aligned}$$

(Man beachte, dass M_u endlich ist). Mit dem Satz von Lebesgue gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^t s(h(x(r,x_n,u)),u(r))\mathrm{d}r &\leq \int_0^t \lim_{n\to\infty} s(h(x(r,x_n,u)),u(r))\mathrm{d}r \\ &= \int_0^t s(h(x(r,x_0,u)),u(r))\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Grenzübergang auf beiden Seiten von (2.19) liefert insgesamt

$$S'(x_0) \geq S'(x(t)) - \int_0^t s(u(r),y(r))\mathrm{d}r$$

Damit gilt die Dissipationsungleichung auch für S', das heißt diese Funktion ist ebenfalls eine Speicherfunktion. □

Korollar 2.22. Sei $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U} = \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R},U)$. Betrachte ein passives System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

mit f stetig und Lipschitz-stetig in x gleichmäßig in u und h stetig. Dann existiert eine unterhalbstetige Speicherfunktion.

Beweis. Für beliebige $y \in Y$, $u \in U$ gilt

$$\langle u,y\rangle \leq |u||y| \leq |u|^2 + 2|u||y| + |y|^2 \leq 3(1+|u|^2+|y|^2),$$

woraus mit Proposition 2.21 die Behauptung folgt. □

Proposition 2.23. Sei $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{U} = \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R},U)$. Betrachte ein passives System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

mit f stetig und Lipschitz-stetig in x gleichmäßig in u und h stetig. Dann existiert eine unterhalbstetige Speicherfunktion.

Beweis. Sei S eine beliebige Speicherfunktion, definiere wie in Proposition 2.21

$$S'(x) = \liminf_{z \to x} S(z)$$

Die Funktion S' ist nach Konstruktion unterhalbstetig. Es wird gezeigt, dass S' auch eine Speicherfunktion ist, also die Dissipationsungleichung (2.2) für das System erfüllt. Seien dazu $x_0 \in X$, $u \in \mathcal{U}$ und $t \geq 0$ gegeben, zur Vereinfachung der Notation wird $x(t) := x(t, x_0, u)$, $x_n(t) := x(t, x_n, u)$ und $y(t) := h(x(t))$ definiert. Nach Definition von S' existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so dass $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $S'(x_0) = \lim_{n\to\infty} S(x_n)$ gelten. Weiterhin ist $S \geq S'$ und S erfüllt nach Voraussetzung die Disspationsungleichung (2.2), damit ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S(x_n) &\geq S(x(t, x_n, u)) - \int_0^t s(u(r), h(x(r, x_n, u)))\mathrm{d}r && (2.19)\\ &\geq S'(x(t, x_n, u)) - \int_0^t s(u(r), h(x(r, x_n, u)))\mathrm{d}r && (2.20)\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = S'(x_0).$$

Wegen eines Stetigkeitsresultats über Anfangswertprobleme ([16, Theorem 8.3], [6, Theorem 55]) gilt

$$\lim_{n\to\infty} x(t, x_n, u) = x(t, x_0, u)$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} S'(x(t, x_n, u)) \geq \liminf_{n\to\infty} S'(x(t, x_n, u)) \geq S'(x(t, x_0, u)).$$

Wegen $x_n \to x_0$ existiert eine kompakte Menge $N \subseteq X$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in N$ und $x_0 \in N$. Außerdem ist die Menge $N \times [0, t]$ kompakt. Weil $x \mapsto h(x)$ und $(x_n, t) \mapsto x(t, x_n, u)$ stetig sind, existiert ein $M > 0$

$$|h(x(r, x_n, u))| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, r \in [0, t]. \tag{2.21}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^t |\langle h(x(r, x_n, u)), u(r)\rangle| \mathrm{d}r &\leq \int_0^t |h(x(r, x_n, u))||u(r)|\mathrm{d}r && (2.22)\\ &\leq \int_0^t M|u(r)|\mathrm{d}r && (2.23)\\ &\leq MM_u < \infty && (2.24)\end{aligned}$$

(beachte, dass M_u endlich ist). Mit dem Satz von Lebesgue gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^t s(h(x(r, x_n, u)), u(r))\mathrm{d}r &\leq \int_0^t \lim_{n\to\infty} s(h(x(r, x_n, u)), u(r))\mathrm{d}r\\ &= \int_0^t s(h(x(r, x_0, u)), u(r))\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Grenzübergang auf beiden Seiten von (2.19) liefert insgesamt

$$S'(x_0) \geq S'(x(t)) - \int_0^t s(u(r), y(r))\mathrm{d}r$$

Damit gilt die Dissipationsungleichung auch für S', das heißt diese Funktion ist ebenfalls eine Speicherfunktion. □

Wir werden im Folgenden zwei Resultate hinsichtlich der Stetigkeit formulieren, wozu allerdings folgende Definition benötigt wird.

Definition 2.24. Sei Σ ein System mit supply-rate s.

1. Sei $x_0 \in X$. Das System heißt *lokal s-gleichmäßig erreichbar in x_0*, wenn eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x_0 existiert und eine $\mathcal{K}$-Funktion ρ, so dass für alle $x \in W$ ein $t_1 \geq 0$ existiert und ein $u \in \mathcal{U}$ mit $x = x(t_1, x_0, u)$ und

$$\left| \int_0^{t_1} s(u(t), y(t))\mathrm{d}t \right| \leq \rho(|x - x_0|)$$

2. Das System heißt *lokal s-gleichmäßig in X erreichbar*, wenn 1. für jedes $x_0 \in X$ gilt.

Theorem 2.25. Sei Σ ein dissipatives System mit stetiger supply-rate s und Speicherfunktion S mit $S(0) = 0$.

1. Das System sei lokal s-gleichmäßig erreichbar in X. Dann ist jede mögliche Storage-Funktion stetig.

2. Das System sei lokal s-gleichmäßig erreichbar in $x_0 \in X$, f in (1.5) stetig differenzierbar. Dann ist $x \mapsto S_r(x) + S(x(0))$ eine stetige Storage-Funktion für das auf $\mathcal{R}(x_0)$ eingeschränkte System.

Beweis. 1. Zu finden in [11], Theorem 4 und Lemma 6.

2. Siehe [20] Theorem 2.

□

Für die Input to State-Stabilität gibt es folgendes starke Regularitätsresultat.

Theorem 2.26. Sei Σ ein Input to State-stabiles System, dann existiert für dieses System eine beliebig oft differenzierbare Speicherfunktion S.

Beweis. Siehe [23, Remark 2.4, Theorem 1]. □

Kapitel 3

Nichtlineare Systeme und Stabilität

In diesem Kapitel werden einige benötigte Grundlagen bezüglich nichtlinearer Systeme vorgestellt. Im ersten Abschnitt werden die Grundzüge der Lyapunov-Stabilitätstheorie betrachtet, wobei die Resultate und Definitionen auf die vorliegende Arbeit angepasst wurden. Für spätere Zwecke werden auch einige Konzepte und Resultate aus Differentialgeometrie und geometrischer Theorie nichtlinearer Systeme benötigt, diese werden im nächsten Abschnitt angegeben und besprochen. Anschließend wird kurz eines der zentralen Anliegen der Kontrolltheorie betrachtet, die Stabilisierung eines Systems um ein Equilibrium. Dabei wird die Situation bei linearen System kurz erläutert und es werden Methoden zur Linearisierung vorgestellt. Diese funktionieren jedoch nicht immer, was die Suche nach alternativen Techniken für nichtlineare Systeme motiviert; in dieser Arbeit werden in den folgenden Kapiteln Stabilisierungsmöglichkeiten mit Dissipativität im Zentrum stehen.

3.1 Einführung in die Lyapunov-Stabilitätstheorie

Wesentliches Merkmal der Lyapunov-Stabilitätstheorie ist die Bezugnahme auf den Zustand eines unkontrollierten dynamischen Systems, in gewisser Weise ist diese Stabilität eine reine "Zustandsstabilität". Für die hier betrachteten Kontrollsysteme ergibt sich damit das Problem, dass auf Konzepte wie Kontrolle und Ausgang zunächst nicht Bezug genommen werden kann. Aus diesem Grund stellen wir zunächst die "klassische" Theorie vor, welche sich auf unkontrollierte Systeme bezieht und stellen danach den Zusammenhang zu den in dieser Arbeit wichtigen Kontrollsystemen her. Die Lyapunov-Stabilitätstheorie lässt sich dabei auch für wesentlich allgemeinere Systeme als die hier betrachteten (1.5) entwickeln, so zum Beispiel für Systeme zeitvarianter gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel [7, Chapter 3]), aus Platzgründen verzichten wir jedoch auf die Darstellung dieser allgemeineren Konzepte und Resultate.
Im Folgenden[1] betrachten wir ein dynamisches System Σ ohne Ein- und Ausgang wie in

[1]Dieser Abschnitt wurde bis auf geringfügige Änderungen und Ergänzungen aus einer vom Autor ver-

Definition 1.3 beschrieben. Sofern nichts anderes gesagt wird, gehen wir davon aus, dass $X = \mathbb{R}^n$ gilt. Da dieses Kapitel nur eine kurze Einführung in die Stabilitätstheorie geben soll, beschränken sich die folgenden Definitionen und Resultate auf Fixpunktlösungen von (1.7). Dabei ist $x^* \in X$ ein *Gleichgewicht*, *Equilibrium* (oder auch *Fixpunkt*), wenn $f(x^*) = 0$. Die dazugehörige Lösung $x(t, x^*) = x^*$ ist dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und wird (etwas unpräzise) auch als x^* bezeichnet.

Definition 3.1. Sei x^* ein Gleichgewicht der unkontrollierten Differentialgleichung (1.7), das heißt $x^* \equiv x(t, x^*)$. x^* heißt

1. *stabil*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_0 \in X$ mit $|x^* - x_0| < \delta$ alle $t \geq 0$ zulässig sind und $|x^* - x(t, x_0)| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$.

2. *lokal asymptotisch stabil*, wenn x^* stabil ist und eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x_0 existiert, so dass für alle $x \in W$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = x^*$.

3. *global asymptotisch stabil*, wenn 2. für $W = X$ gilt.

Für die Stabilitätsuntersuchungen können häufig folgende spezielle Funktionen eingesetzt werden.

Definition 3.2. Sei x^* ein Gleichgewicht der unkontrollierten Differentialgleichung (1.7), $D \subseteq X$ eine offene Menge, die x^* enthält und $V : D \to \mathbb{R}_0^+$ eine stetig differenzierbare Funktion, für die gilt, dass

1. $V(x^*) = 0$ und $V(x) > 0$ für alle $x \in X$ mit $x \neq x^*$

2. $\dot{V}(x) := DV(x)f(x) \leq 0$ für alle $x \in D$

Dann heißt V *Lyapunov-Funktion für* x^*.

Bemerkung 3.3. Lyapunov-Funktionen können auf verschiedene Art und Weise definiert werden, die hier gegebene Darstellung orientiert sich an [13], [26]. Insbesondere können auch nicht stetig differenzierbare Funktionen betrachtet werden (siehe zum Beispiel [4]) und Lyapunov-Funktionen für nicht autonome Differentialgleichungen (siehe [15, Chapter 4]). Zudem gibt es Erweiterungen speziell für Kontrollsysteme ([6, Section 5.7]).

In der qualitativen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichung sind Stabilitätsresultate, welche keine explizite Lösung der Differentialgleichung benötigen, von großer Bedeutung. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die sogenannte direkte Methode von Lyapunov (direkt, weil sie keine explizite Lösung benötigt, also direkt mit der Differentialgleichung arbeitet).

---

fassten Seminararbeit [8] übernommen. Neu hinzugekommen ist Lemma 3.4 und der Beweis zu LaSalle's Invarianzprinzip.

Lemma 3.4. ([33, Theorem 3.1])
Sei x^* ein Equilibrium der Differentialgleichung (1.7), $D \subseteq X$ eine offene Menge und $V : D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine unterhalbstetige Funktion mit $V(x^*) = 0$, $V(x) > 0$ für $x \neq x^*$, die in x^* stetig ist und die entlang jeder Lösung nichtwachsend ist. Dann ist x^* stabil.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle ein $r \in (0, \epsilon)$, so dass $\overline{B}_r(x^*) \subseteq D$ (möglich, weil D nach Voraussetzung offen ist). Weil $\partial\overline{B}_r(x^*)$ kompakt und V unterhalbstetig ist, existiert das Minimum von V auf dem Rand von $\overline{B}_r(x^*)$, also $\alpha = \min_{x \in \partial\overline{B}_r(x^*)} V(x)$. Weil $r > 0$ und $V(x) > 0$ für alle $x \neq x^*$ gilt $\alpha > 0$. Wegen der Stetigkeit von V in x^* existert ein $\delta > 0$, ohne Einschränkung $\delta < \alpha$, so dass für alle $x \in B_\delta(x^*)$ $V(x) < \alpha$ gilt. Sei $x_0 \in B_\delta(x^*)$ beliebig, dann gilt für alle $t \geq 0$ dass $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0)$, also auch $V(x(t, x_0)) < \alpha$. Wegen $V(x) \geq \alpha$ für alle $x \in \partial\overline{B}_r(x^*)$ folgt $x(t, x_0) \notin \partial\overline{B}_r(x^*)$, wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \|x(t, x_0) - x^*\|$ folgt dann $x(t, x_0) \in B_\delta(x^*)$. Insbesondere existiert $x(t, x_0)$ für alle $t \geq 0$, weil $\overline{B}_r(x^*)$ kompakt ist (siehe [16, Korollar 10.13]). Weil aber x_0 in $B_\delta(x^*)$ beliebig war, folgt die Stabilität von x^*. □

Theorem 3.5. Sei x^* ein Equilibrium mit Lyapunov-Funktion V.

1. Dann ist x^* stabil.
2. Falls zusätzlich $DV(x)f(x) < 0$ für alle $x \in X$, $x \neq x^*$, dann ist x^* lokal asymptotisch stabil.

Beweis. Beweis zu Theorem 4.1 in [26]. □

Eine andere häufig nützliche Methode bei Stabilitätsuntersuchungen ist daneben auch LaSalle's Invarianzprinzip, für das folgende Begriffe definiert werden (siehe zum Beispiel [16, Paragraph 17, 16]):

Definition 3.6. Sei M ein metrischer Raum, $N \subseteq M$ eine Menge und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, also $x_n \in M$ für alle n. Dann konvergiert (x_n) gegen N, auch mit $x_n \to N$ bezeichnet, wenn für jede Umgebung W von N, also für jede offene Menge $W \subseteq M$, die N enthält, ein gewisses n_0 existiert, so dass $x_n \in W$ für alle $n \geq n_0$. Dementsprechend konvergiert eine Funktion $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \supseteq T \to M$ gegen N, wenn für jede offene Umgebung W von N ein $t_0 \geq 0$ existiert mit $\mathbb{R}_{\geq t_0} \subseteq T$ und $x(t) \in W$ für alle $t \geq t_0$.

Definition 3.7. Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form (1.7). Eine Menge $M \subseteq X$ heißt *positiv invariant* für (1.7), wenn für alle $x_0 \in M$ gilt, dass $t^+(x_0) = \infty$ und $x(t, x_0) \in M$ für alle $t \geq 0$. Entsprechend heißt M *negativ invariant*, wenn für alle $x_0 \in M$ gilt, dass $t^-(x_0) = -\infty$ und $x(t, x_0) \in M$ für alle $t \leq 0$. Ist M positiv und negativ invariant, dann heißt M *invariant*.

Theorem 3.8 (LaSalle's Invarianzprinzip)**.** Sei $V : D \to \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist, $V \in C^1$ und

$$\dot{V}(x) = DV(x)f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

Es existiere eine kompakte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x(t, x_0) \in B$ für alle $t \geq 0$ und $x_0 \in B$. Dann konvergiert $x(t, x_0)$ für jedes $x_0 \in B$ zur größten positiv invarianten Teilmenge von $\{x \in X \mid \dot{V}(x) = 0\} \cap B$.

Für den Beweis werden einige Definitionen und Begriffe für Limes-Mengen benötigt.

Definition 3.9. Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form (1.7). Für einen Anfangswert x_0 wird die ω-Limesmenge definiert durch

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t>0} \overline{\{x(s, x_0) \mid s \geq t\}}. \tag{3.1}$$

Lemma 3.10. Betrachte eine Differentialgleichung (1.7).

1. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\omega(x) = \{y \in X \mid \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } t_n \to \infty \text{ und } x(t_n) \to y\}$$

2. Sei $\{x(t, x_0) \mid t \geq 0\}$ beschränkt für ein x_0. Dann ist $\omega(x_0)$ nicht leer, kompakt, zusammenhängend, invariant und $x(t, x_0) \to \omega(x_0)$.

Beweis. 1. [19, Proposition 7.8]

2. Siehe zum Beispiel [16, Theorem 17.2]

□

Beweis. (von Theorem 3.8)
Die hier angegebene Variante des LaSalle'schen Invarianzprinzips und der zugehörige Beweis finden sich in [26, Theorem 4.4]. Sei $x_0 \in B$ beliebig und M die größte positiv invariante Teilmenge von $\{x \in X \mid \dot{V}(x) = 0\} \cap B$. Nach Definition ist $\dot{V}(x) \leq 0$, das heißt, die Funktion $t \mapsto V(x(t, x_0))$ ist fallend. V nimmt als stetige Funktion auf B sein Minimum und Maximum an, aus der Monotonie von $t \mapsto V(x(t, x_0))$ folgt, dass $V(x(t)) \to \beta$, $\beta \geq 0$, gilt. Wegen der positiven Invarianz und Abgeschlossenheit von B und Lemma 3.10 1) folgt außerdem $\omega(x_0) \subseteq B$. Sei nun $z \in \omega(x_0)$ beliebig, dann existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ so, dass $x(t_n, x_0) \to z$. Aus der Stetigkeit von V folgt damit

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n, x_0)) = \beta,$$

weil z beliebig war, gilt also $V \equiv \beta$ auf $\omega(x_0)$. Nach Lemma 3.10 2) ist $\omega(x_0)$ invariant, also muss $\dot{V}(x) \equiv 0$ auf der Limesmenge sein und damit $\omega(x_0) \subseteq M$. Ebenfalls nach Lemma 3.10 2) konvergiert $x(t, x_0)$ gegen $\omega(x_0)$ und daher auch gegen M. □

Häufig wird LaSalles Invarianzprinzip in Form des folgenden Korollars eingesetzt.

Korollar 3.11. Sei x^* ein Equilibrium der Differentialgleichung (1.7) und $V : D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Lyapunovfunktion auf einer offenen Menge $D \subseteq X$ mit $x^* \in D$, also V ist stetig differenzierbar, $V(x^*) = 0$, $V(x) > 0$ für alle $x \neq x^*$ und $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in D$. Angenommen, keine Lösung der Differentialgleichung (1.7) außer $x(t) \equiv x^*$ kann in $\{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ bleiben, dann ist x^* (lokal) asymptotisch stabil.

Beweis. Siehe Beweis zu Corollary 4.1, [26]. □

3.2 Differentialgeometrische Grundlagen

Für spätere Anwendungen werden einige Konzepte und Resultate aus Differentialgeometrie und Theorie nichtlinearer (affiner) Kontrollsysteme vorgestellt, wir orientieren uns dabei an [5, Chapters 4, 5].

3.2.1 Einführung

Betrachtet wird ein nichtlineares, kontroll-affines System (1.11) der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Häufig wird bei der Untersuchung derartiger Systeme die sogenannte Lie-Ableitung verwendet, welche in einer für die vorliegenden Arbeit geeigneten Version eingeführt wird.

Definition 3.12. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld (nicht notwendigerweise stetig oder glatt) und $g : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt

$$L_f g : D \to \mathbb{R},\ L_f g(x) := Dg(x) f(x) \tag{3.2}$$

die *Lie-Ableitung* von g entlang von f.
Sei jetzt f hinreichend differenzierbar. Definiere für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv $L_f^k g(x)$ mittels

$$L_f^0 g(x) := g(x) \tag{3.3}$$

und (für $k > 0$)

$$L_f^k g(x) := L_f \left(L_f^{k-1} g \right)(x). \tag{3.4}$$

Beachte, dass Lie-Ableitungen in der Differentialgeometrie in umfassenderen Rahmen betrachtet werden können, siehe zum Beispiel [30]. Die Lie-Ableitung ist offensichtlich linear, das heißt, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und Vektorfelder f, g, h (vergleiche Definition 3.12) gilt

$$L_f(\alpha g + \beta h)(x) = \alpha L_f g(x) + \beta L_f h(x).$$

Um unnötigen Schreibaufwand zu vermeiden (zum Beispiel im Beweis von Proposition 5.9), wird in dieser Arbeit (auch wenn dies formal gesehen, insbesondere im Hinblick auf die Differentialgeometrie, etwas ungenau ist) für f in Definition 3.12 auch eine matrixwertige Funktion zugelassen, hierbei wird einfach jede Spalte der Matrix $f(x)$ als Vektorfeld betrachtet. Sei also in der Situation von Definition 3.12 jetzt $f : D \to \mathbb{R}^{n\times m}$, dann wird die Lie-Ableitung definiert durch

$$L_f g(x) := \begin{pmatrix} L_{(f_{\cdot 1})} g(x) \\ \vdots \\ L_{(f_{\cdot m})} g(x) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Als eine Anwendung der Lie-Ableitung formulieren wir eine neue Charakterisierung passiver Systeme, sofern diese kontroll-affin sind. In der Theorie passiver linearer Systeme spielt das sogenannte Kalman-Yakubovich-Popov-Lemma (KYP-Lemma) eine wichtige Rolle (siehe zum Beispiel [1, Chapter 3]), zu diesem Resultat existieren gewisse Verallgemeinerungen für nichtlineare-Systeme (zum Beispiel [1, Chapter 4.5]). Bei der späteren Untersuchung von Feedbackpassivierbarkeit wird eine einfache Version eines nichtlinearen KYP-ähnlichen Lemmas benötigt, wobei eine für die vorliegende Arbeit passende Form angegeben wird (siehe [27, Definition 2.11, Proposition 2.12]).

Definition 3.13. Ein Kontrollsystem Σ hat die *Kalman-Yakubovich-Popov-Eigenschaft* (KYP-Eigenschaft), wenn eine Funktion $S \in C^1(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ existiert mit

$$L_f S(x) \leq 0 \tag{3.6}$$

$$L_{g_q} S(x) = h_q(x), \qquad q = 1, \dots, m \tag{3.7}$$

für alle $x \in X$.

Proposition 3.14. Ein Kontrollsystem Σ (aus Definition 1.2), das die KYP-Eigenschaft besitzt, ist passiv und hat S aus Definition 3.13 als Speicherfunktion. Hat umgekehrt ein passives Kontrollsystem Σ eine stetig differenzierbare Speicherfunktion S, dann hat es auch die KYP-Eigenschaft.

Beweis. Siehe [17, Theorem 2.39] oder [27, Proposition 2.12]. □

Bemerkung 3.15. Die hier angegebene Version eines nichtlinearen KYP-Lemmas lässt sich auch für etwas allgemeinere supply-rates anpassen, siehe hierzu [17, Theorem 2.39].

Außerdem werden im Folgenden für einige technische Resultate Lie-Klammern benötigt, beachte dabei, dass diese in der Differentialgeometrie in erheblich allgemeinerem, insbesondere koordinatenfreien Rahmen definiert werden können, der Einfachheit halber beschränken wir uns aber auf eine Darstellung in Koordinaten.

Definition 3.16. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ mindestens differenzierbare Vektorfelder. Dann wird mit

$$[f, g] := Df(x)g(x) - Dg(x)f(x)$$

die *Lie-Klammer* von f und g definiert.

Zur vereinfachten Darstellung geschachtelter Lie-Klammern wird zudem definiert:

Definition 3.17. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ k-mal differenzierbar, $k \in \mathbb{N}$. Dann wird

$$ad_f^k g(x)$$

rekursiv definiert durch

$$ad_f^0 g(x) := g(x)$$

und für $k \geq 1$

$$ad_f^k g(x) := [f, ad_f^{k-1} g](x).$$

Benötigt werden auch Koordinatentransformationen.

Definition 3.18. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine (lokale) Koordinatentransformation ist eine mindestens stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$, die bijektiv (bezüglich $f(D)$) ist und deren Umkehrabbildung f^{-1} stetig differenzierbar ist.

Beachte, dass teilweise Koordinatentransformationen mit höheren Ableitungen benötigt werden, es wird falls notwendig darauf hingewiesen.

3.2.2 Relativer Grad

Nichtlineare kontroll-affine Systeme können (lokal oder global, betrachtet wird hier nur der lokale Fall) die wichtige Eigenschaft eines sogenannten relativen Grades besitzen, basierend hierauf können derartige System mittels nichtlinearer Koordinatentransformationen auf eine Normalform gebracht werden. Zur besseren Übersichtlichkeit werden zunächst nur SISO-Systeme betrachtet, anschließend werden die Ergebnisse auf MIMO-Systeme verallgemeinert. Betrachte ein kontroll-affines SISO-System (ohne Feedthrough)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei angenommen wird, dass f, g, h hinreichend regulär für die folgende Definition und auf der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert sind.

Definition 3.19. Ein kontroll-affines SISO-System (3.8) hat in $x_0 \in X$ einen *relativen Grad* r, $r \in \mathbb{N}$, wenn eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x_0 existiert mit

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in W, 0 \leq k \leq r-2 \tag{3.9}$$

und

$$L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0. \tag{3.10}$$

An dieser Stelle wird erneut darauf hingewiesen, dass obige Definition hinreichende Regularität der verwendeten Funktionen voraussetzt. In der Literatur zu nichtlinearen kontrollaffinen Systemen wird daher zumeist zur Vereinfachung der Notation von glatten, das heißt beliebig oft differenzierbaren Funktionen ausgegangen.

Lemma 3.20. Betrachte das System (3.8) mit relativem Grad $r > 0$ in $x_0 \in X$, wobei mit $x(t)$ die eindeutig bestimmte, auf einem offenen maximalen Existenzintervall definierte Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$ (bezüglich des Systems (3.8) für ein festes $u \in \mathcal{U}$) bezeichnet wird. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < \epsilon$ gilt:

$$y^{(k)}(t) = L_f^k h(x(t)) \qquad \forall 0 \leq k \leq r-1 \tag{3.11}$$

$$y^{(r)}(t_0) = L_f^r h(x_0) + L_g L_f^{r-1} h(x_0) u(t_0) \tag{3.12}$$

Beweis. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ die offene Umgebung aus Definition 3.19. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto x(t)$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $x(t) \in W$ für alle $|t - t_0| < \epsilon$ gilt. Per Induktion über k wird gezeigt, dass (3.11) gilt. Sei also $k = 0$, dann gilt

$$y^0(t) = L_f^0 h(x(t))$$

nach Definition von y. Sei also die Induktionsaussage für ein $0 \leq k < r - 1$ richtig. Dann folgt

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y^k(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_f^k h(x(t)) \\ &= D L_f^k h(x)|_{x=x(t)} (f(x(t)) + g(x(t)) u(t)) \\ &= L_f^{k+1} h(x(t)) + L_g L_f^k h(x(t)) u(t), \end{aligned}$$

woraus sich wegen $k < r - 1$ und der Definition des relativen Grades die Aussage ergibt. Die Gleichung (3.12) ergibt sich sofort aus (3.11),

$$\begin{aligned} y^{(r)}(t) &\overset{(3.11)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(L_f^{r-1} h(x(t)) \right) \\ &= D L_f^{r-1} h(x(t)) (f(x(t)) + g(x(t)) u(t)) \\ &= L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.21. 1. Beachte, dass ein System (3.8) in einem Punkt $x_0 \in X$ nicht notwendigerweise einen relativen Grad besitzt, siehe zum Beispiel [5, Example 4.1.1].

2. Die zunächst etwas technische Definition des relativen Grades kann motiviert werden (siehe hierzu [5, Section 4.1]). Mit Lemma 3.20 lässt sich der relative Grad folgendermaßen interpretieren: Hat ein System in x_0 einen relativen Grad r, dann muss der Ausgang des Systems genau r-mal differenziert werden, bis die Eingangsfunktion explizit in einer Ableitung des Ausgangs auftritt.

3. Existiert eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x_0 mit

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in W, k \in \mathbb{N},$$

kann kein relativer Grad in x_0 definiert werden, dafür kann jedoch in t_0 mit $x(t_0) = x_0$ die Ausgangsfunktion $y = h(x)$ als Taylorreihe entwickelt werden:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x_0) \frac{(t - t_0)}{k!}.$$

Beachte, dass dies insbesondere bedeutet, dass der Ausgang nur vom Anfangszustand x_0 und *nicht* vom Eingang u abhängt.

Nun wird der MIMO-Fall untersucht, hierzu wird ein kontroll-affines System der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{3.13}$$

betrachtet, wobei f, h und g_i, $i = 1, \ldots, m$ auf der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert sind und h in den $\mathbb{R}^p$ abbildet, $n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir beschränken uns auf den Fall $p \leq m$. Die einzelnen Komponentenfunktionen von h werden mit $h_1, \ldots, h_p$ bezeichnet, außerdem werden bei Bedarf die Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ zu einer matrixwertigen Funktion $g = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{pmatrix}$ zusammengefasst. Ähnlich wie im SISO-Fall wird davon ausgegangen, dass f, g, h hinreichend oft differenzierbar sind für die folgende Definition.

Definition 3.22. Ein System (3.13) hat in $x_0 \in X$ einen *relativen Grad* $(r_1, \ldots, r_p)$ (auch *relativer Vektorgrad* genannt), $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$, wenn eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x_0 existiert mit

$$L_{g_i} L_f^k h_l(x) = 0 \quad \forall x \in W, 1 \leq i \leq m, 1 \leq l \leq p, 0 \leq k \leq r_l - 2 \tag{3.14}$$

und die Matrix

$$\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p(x_0) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

vollen Rang hat.

Bemerkung 3.23. ([5, Section 5.1])

1. Obige Definition des relativen Grades für MIMO-Systeme ist zu der für SISO-Systeme kompatibel, wenn man den relativen Grad r eines SISO-System mit dem (Vektor-)Grad (r) für das System gleichsetzt. Die Äquivalenz der Bedingungen (3.14) und (3.9) ist sofort klar wegen $m = p = 1$, voller Rang der Matrix (3.15) bedeutet $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$.

2. Zwischen der Definition des relativen Grades für MIMO und SISO-Systeme besteht ein gewisser Zusammenhang ([5, Remark 5.1.1]). Betrachte ein System (3.13) mit relativem Grad $(r_1, \ldots, r_p)$ in x_0 und sei $i \in \{1, \ldots, p\}$ beliebig. Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass das SISO-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_j(x)u_j(x) \\ y &= h_i(x) \end{aligned}$$

relativen Grad r_i hat und für jedes andere $j \in \{1, \ldots, m\}$ das entsprechende SISO-System relativen Grad mindestens r_i hat, denn: Nach Definition ist $L_{g_i} L_f^k h_j(x) = 0$ für alle x in einer festen Umgebung von x_0 und alle $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq r_i - 2$. Weil die Matrix (3.15) vollen Rang hat, ist der Vektor

$$\left(L_{g_1} L_f^{r_i - 1} h_i(x_0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{r_i - 1} h_i(x_0) \right)$$

nicht null, also gibt es ein j so dass $L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x_0) \neq 0$, somit hat das aus (3.13) entstehende System relativen Grad r_i. Dass das System für ein anderes j mindestens ebenso großen relativen Grad hat, ist klar.

3. Beachte, dass im Fall quadratischer Systeme, das heißt $p = m$, voller Rang von (3.15) die Invertierbarkeit der Matrix bedeutet.

3.2.3 Normalform

Besitzt ein kontroll-affines System einen relativen Grad, dann kann es mittels Koordinatentransformation in eine Normalform gebracht werden. Diese ist für viele Aufgaben nützlich (Stabilisieren, Tracking, Output Decoupling, siehe [5, Chapter 4]) und wird in dieser Arbeit zur Definition der Nulldynamiken im nächsten Abschnitt und für Resultate zur sogenannten Feedbackpassivierbarkeit verwendet. Zunächst wird folgendes Resultat benötigt.

Proposition 3.24. Betrachte ein MIMO-System (3.13), wobei $x_0 \in X$ relativen Grad $(r_1, \ldots, r_p)$ hat. Dann sind die Vektoren

$$Dh_l(x_0), DL_f h_l(x_0), \ldots, DL_f^{r_l - 1} h_l(x_0)$$

mit $l \in \{1, \ldots, p\}$ linear unabhängig.

Für den Beweis wird folgendes technische Lemma verwendet.

Lemma 3.25. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h : D \to \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ hinreichend oft differenzierbar. Dann gilt für alle $s, k, r \in \mathbb{N}$

$$D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} L_f^{r-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right)$$

für alle $x \in D$.

Beweis. Induktion über r. Für $r = 0$ folgt die Aussage sofort aus der Definition der Lie-Ableitung, der Abkürzung $ad_f^k g(x)$ und des Binomialkoeffizienten. Für $r \to r+1$ wird folgendes Zwischenergebnis benötigt,

$$D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r+1} g(x) = L_f\left(D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x)\right) - D\left(L_f^{s+1} h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) \quad (3.16)$$

was sich durch einfaches Ausrechnen ergibt.

$$\begin{aligned}
D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r+1} g(x) &= D\left(L_f^s h(x)\right)\left[f, ad_f^{k+r} g\right](x) && (3.17)\\
&= D\left(L_f^s h\right)(x)\left(D\left(ad_f^{k+r} g\right)(x) f(x) - D(f(x))\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)\right) && (3.18)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_l} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_l\right) f_m(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_l} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_m} f_l(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_m && (3.19)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\left(ad_f^{k+r} g\right)_m\right) f_l(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_l} f_m(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_l && (3.20)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_m\right) f_l(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_m\right) f_l(x)\\
&\qquad - \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_l\right) f_m(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_l} f_m(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_l && (3.21)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_m\right) f_l(x)\\
&\qquad - \left[\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right) f_m(x)\right)\right]\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_l && (3.22)\\
&= D\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right)\left(ad_f^{k+r} g(x)\right)_m\right) f(x) - D\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} L_f^s h(x)\right) f_m(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) && (3.23)\\
&= D\left(D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x)\right) f(x) - D\left(D\left(L_f^s h(x)\right) f(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) && (3.24)\\
&= L_f\left(\left(D L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x)\right) - D\left(L_f^{s+1} h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) && (3.25)
\end{aligned}$$

Für (3.18) wurde die Definition der Lie-Klammer verwendet, für (3.19) die Definition des euklidischen Skalarprodukts, (3.20) verwendet nur eine Umordnung der Indizes, (3.21), (3.22) sind einfache algebraische Umformungen zusammen mit dem Lemma von Schwartz (cf. [3, Corollary VII.5.5]) und der Produktregel, für (3.23) wurde wieder die Definition des Skalarproduktes verwendet (cf. [5, Lemma 4.1.2]). Damit gilt dann

$$D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r+1} g(x) = L_f\left(D\left(L_f^s h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x)\right) - D\left(L_f^{s+1} h(x)\right) ad_f^{k+r} g(x) \quad (3.26)$$

$$
\begin{aligned}
&= L_f \left(\sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} L_f^{r-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) \right) \\
&\quad - \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} L_f^{r-m} \left(D\left(L_f^{s+m+1} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) && (3.27) \\
&= \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} L_f^{r+1-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{r+1} (-1)^m \binom{r}{m-1} L_f^{r+1-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) && (3.28) \\
&= \sum_{m=1}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} \left(1 + \frac{m}{r+1-m} \right) L_f^{r+1-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) \\
&\quad + (-1)^0 \binom{r}{0} L_f^{r+1} \left(D\left(L_f^{s} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) \\
&\quad + (-1)^{r+1} \binom{r+1}{r+1} L_f^{0} \left(D\left(L_f^{r+1+s} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) && (3.29) \\
&= \sum_{m=0}^{r+1} (-1)^m \binom{r+1}{m} L_f^{r+1-m} \left(D\left(L_f^{s+m} h(x)\right) ad_f^k g(x) \right) && (3.30)
\end{aligned}
$$

Für (3.26) wurde (3.16) verwendet, für (3.27) die Induktionsvoraussetzung, für (3.28) die Linearität der Lie-Ableitung und eine Indexverschiebung in der zweiten Summe, (3.29) ist lediglich eine Umformung unter Verwendung der Definition des Binomialkoeffizienten. □

Beweis. (von Proposition 3.24, cf. [5, Lemma 4.1.1, Lemma 5.1.1])

Schritt 1 Wir zeigen: Es existiert eine Umgebung W von x_0, so dass für alle $x \in W$, $1 \le l \le p$, $1 \le k \le m$ und natürlichen i, j mit $i + j \le r_l - 2$ gilt, dass

$$D\left(L_f^i h_l(x)\right) ad_f^j g_k(x) = 0 \tag{3.31}$$

Als W wird die offene Umgebung aus Definition 3.22 gewählt. Der Beweis erfolgt für jedes feste Paar k, l durch Induktion über j, wobei i und r_l fest sind. Seien also $1 \le k \le m$ und $1 \le l \le p$ beliebig, aber fest. Seien $j = 0$ und i so, dass $i \le r_l - 2$, und $x \in W$ beliebig. Dann ist

$$D\left(L_f^i h_l(x)\right) ad_f^0 g_k(x) = D\left(L_f^i h_l(x)\right) g_k(x) = L_{g_k} L_f^i h_l(x) = 0$$

also gilt die Behauptung für $j = 0$. Sei die Behauptung für ein j richtig, zu zeigen ist (3.31) für $j + 1$. Sei also i so, dass $i + j + 1 \le r_l - 2$. Anwenden von Lemma 3.25 und der Induktionsvoraussetzung liefert

$$D\left(L_f^i h_l(x)\right) ad_f^{j+1} g_k(x) = \underbrace{L_f \underbrace{\left(D\left(L_f^i h_l(x)\right) ad_f^j g_k(x)\right)}_{\equiv 0 \text{ wegen } (3.31)}}_{=0} - \underbrace{D\left(L_f^{i+1} h_l(x)\right) ad_f^j g_k(x)}_{=0 \text{ wegen } (3.31)} = 0$$

für alle $x \in W$.

Schritt 2 Wir zeigen: Für alle $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq p$ und alle natürlichen i, j mit $i+j = r_l-1$ gilt

$$D\left(L_f^i h_l(x_0)\right) ad_f^j g_k(x_0) = (-1)^{r_l-1-i} L_{g_k} L_f^{r_l-1} h_l(x_0) \tag{3.32}$$

Verwendet wird Induktion über j, wobei wieder r_l fest ist und $i+j = r_l - 1$. Sei $j = 0$, dann ist $i = r_l - 1$ und es gilt

$$D\left(L_f^{r_l-1} h_l(x_0)\right) ad_f^0 g_k(x_0) = (-1)^{r_l-1-(r_l-1)} L_{g_k} L_f^{r_l-1} h_l(x_0)$$

Sei nun die Induktionsvoraussetzung für ein j bewiesen, betrachtet wird $j+1$.

$$D\left(L_f^i h_l(x_0)\right) ad_f^{j+1} g_k(x_0) = \underbrace{L_f^1 \underbrace{\left(D\left(L_f^i h_l(x)\right) ad_f^j g_k(x)\right)}_{\equiv 0 \text{ in Umgebung von } x_0}(x_0)}_{=0} - D\left(L_f^{i+1} h_l(x_0)\right) ad_f^j g_k(x_0) \tag{3.33}$$

$$= (-1)^{r_l-1-(i+1)} L_{g_k} L_f^{r_l-1} h_l(x_0) \tag{3.34}$$

Für (3.33) wurde Lemma 3.25 und (3.31) angewendet, für (3.34) wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet.

Schritt 3 Sei $1 \leq q \leq p$ so gewählt, dass $r_i \leq r_q$ für alle $i = 1, \ldots, p$ gilt, ohne Einschränkung $r_q \geq 1$. Definiere die Matrizen

$$Q_i(x) := \begin{pmatrix} Dh_i(x) \\ DL_f h_i(x) \\ \vdots \\ DL_f^{r_i-1} h_i(x) \end{pmatrix}, \qquad P_j(x) := \begin{pmatrix} ad_f^{j-1} g_1(x) & \cdots & ad_f^{j-1} g_m(x) \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, r_q$ (man beachte, dass $Q_i(x) \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$ und $P_j(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$), außerdem

$$Q(x) := \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_p(x) \end{pmatrix}, \qquad P(x) := \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_{r_q} \end{pmatrix},$$

das heißt $Q(x) \in \mathbb{R}^{(r_1+\ldots+r_p) \times n}$ und $P(x) \in \mathbb{R}^{n \times m r_q}$.

Schritt 4 Für $1 \leq i \leq p$, $1 \leq l \leq r_q$ gilt wegen Schritt 1 und Schritt 2, dass

$$
\begin{aligned}
Q_i(x_0)P_l(x_0) &= \left(DL_f^{\alpha-1}h_i(x_0)ad_f^{l-1}g_\beta(x_0)\right)_{\alpha=1,\ldots,r_i,\beta=1,\ldots,m} \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
L_{g_1}L_f^{r_i-1}h_i(x_0) & L_{g_2}L_f^{r_i-1}h_i(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_i-1}h_i(x_0) \\
* & \cdots & & * \\
\vdots & & & \vdots \\
* & \cdots & & *
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schritt 5 Betrachte nun das Matrixprodukt $Q(x_0)P(x_0)$ mit der Form

$$
Q(x_0)P(x_0) = \begin{pmatrix}
Q_1(x_0)P_1(x_0) & \cdots & Q_1(x_0)P_{r_q}(x_0) \\
\vdots & & \vdots \\
Q_p(x_0)P_1(x_0) & \cdots & Q_p(x_0)P_{r_q}(x_0)
\end{pmatrix}
$$

Umordnen der Zeilen und Multiplikation von Zeilen mit -1 (sofern erforderlich) ergibt eine obere Dreiecksblockmatrix (beispielhaft ist $r_1 = 2$ und $r_2 \geq 3$)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 & L_{g_1}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & \cdots & \multicolumn{3}{c}{*} \\
\hline
 & & & L_{g_1}L_f^{r_2-1}h_2(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_2-1}h_2(x_0) & & & & \\
\multicolumn{3}{c|}{0} & \vdots & & \vdots & * & \multicolumn{3}{c}{*} \\
 & & & L_{g_1}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) & & & & \\
\hline
L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_1-1}h_1(x_0) & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \multicolumn{3}{c|}{*} & * & \multicolumn{3}{c}{*} \\
L_{g_1}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_q-1}h_q(x_0) & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

wobei die Diagonalblöcke Untermatrizen von (3.15) sind. Auf Grund der Dreieckstruktur, weil die Matrix (3.15) vollen (Zeilen-)Rang hat, Multiplikation von Zeilen mit Skalaren ungleich 0 und Vertauschen von Zeilen den Rang einer Matrix nicht ändern, folgt, dass auch die Matrix $Q(x_0)P(x_0)$ vollen Rang hat. Weil der Rang eines Produktes von Matrizen so groß wie das Minimum der Ränge der Faktoren sein muss, sind die Zeilen von $Q(x_0)$ linear unabhängig (beachte, dass nach Voraussetzung $p \leq m$ gilt und $r_q \geq 1$) und damit ist die Behauptung gezeigt.

□

Zentrales Resultat ist das folgende Theorem.

Theorem 3.26. Betrachte ein kontroll-affines System (3.13), das in $x_0 \in X$ relativen Grad $(r_1, \ldots, r_p)$ hat.

1. Es gilt $r = r_1 + \ldots + r_p \leq n$.

2. Setze für $1 \leq l \leq p$

$$\phi_k^l(x) = L_f^{k-1} h_l(x)$$

mit $k = 1, \ldots, r_l$ und

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1^1(x) & \cdots & \phi_{r_1}^1(x) & \phi_1^2(x) & \cdots & \phi_{r_2}^2(x) & \cdots & \phi_1^p(x) & \cdots & \phi_{r_p}^p(x) & \phi_{r+1}(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{pmatrix}^T$$

wobei nach 1. $r = r_1 + \ldots + r_p \leq n$. Falls $r = n$ ist die Funktion Φ eine lokale Koordinatentransformation in einer Umgebung von x_0. Im Fall $r < n$ können $n - r$ (hinreichend reguläre) Funktionen ϕ_{r+1}, …, ϕ_n gefunden werden, deren Werte zumindest bei x_0 beliebig gewählt werden können, so dass Φ wieder eine lokale Koordinatentransformation in einer Umgebung von x_0 ist.

3. Anwenden der obigen Koordinatentransformation Φ liefert das System (3.13) in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^l &= \xi_2^l \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_l-1}^l &= \xi_{r_l}^l \\ \dot{\xi}_{r_l}^l &= b_l(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{m} a_{li}(\xi,\eta) u_i \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) + s(\xi,\eta) u \\ y_i &= \xi_1^i, \qquad i = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{3.35}$$

mit $l = 1, \ldots, p$, wobei

$$\xi^l = \begin{pmatrix} \phi_1^l(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_l}^l(x) \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$a = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) & \ldots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) & \ldots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$b = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} h_p(\Phi^{-1}(\xi,\eta)) \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

gesetzt wurde und q, s geeignete Funktionen sind.

Definition 3.27. Man bezeichnet ein System (3.35) als ein System in *Normalform.*

Beweis. (von Theorem 3.26, siehe [5, Sections 4.1, 5.1])

1. Folgt sofort aus Proposition 3.24, denn die $r = r_1 + \ldots + r_p$ Vektoren $Dh_l(x_0), \ldots, DL_f^{r_l-1}h_l(x_0)$, $l = 1, \ldots, p$ können nur dann linear unabhängig sein, wenn $r \leq n$.

2. Falls $r = n$ folgt die Aussage sofort aus dem Satz über die Umkehrabbildung (siehe zum Beispiel [3, Theorem VII.7.3]). Falls $r < n$ folgt die Aussage analog, man beachte die Bijektivität von Translationen.

3. Einfaches Ausrechnen: Sei W die offene Umgebung von x_0, auf der die Koordinatentransformation Φ definiert ist, dabei kann W ohne Einschränkung so gewählt werden, dass für $s = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, p$

$$L_{g_s} L_f^k h_l(x) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq r_l - 2, x \in W$$

gilt. Sei $l \in \{1, \ldots, p\}$, dann folgt ähnlich wie in Lemma 3.20

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1^l &= D\phi_1^l \dot{x} = L_f h_l(x) = \xi_2^l \\
\dot{\xi}_2^l &= D\phi_2^l \dot{x} = L_f^2 h_l(x) = \xi_3^l \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r_l-1}^l &= D\phi_{r_l-1}^l \dot{x} = L_f^{r_l-1} h_l(x) = \xi_{r_l}^l \\
\dot{\xi}_{r_l}^l &= L_f^{r_l} h_l(x) + \sum_{q=1}^{m} L_{g_q} L_f^{r_l-1} h_l(x) u_q
\end{aligned}$$

Setze

$$a_{ij} := L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(\eta, \xi))$$

für $1 \leq i \leq p$,$1 \leq j \leq m$ sowie

$$b_i(\eta, \xi) := L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta))$$

für $1 \leq i \leq p$. Wegen $y_l = h_l(x) = \xi_1^l$ für $l = 1, \ldots, p$ und

$$\dot{\eta}_l = D\phi_{l+r}(x) \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \right)$$

ergibt sich mit

$$q(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} (D\phi_{r+1}(\Phi^{-1}(\xi, \eta)))\, f(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ \vdots \\ (D\phi_n(\Phi^{-1}(\xi, \eta)))\, f(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \end{pmatrix}$$

und

$$s(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} (D\phi_{r+1}(\Phi^{-1}(\xi, \eta))\, g_1(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) & \cdots & (D\phi_{r+1}(\Phi^{-1}(\xi, \eta))\, g_m(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ \vdots & & \vdots \\ (D\phi_n(\Phi^{-1}(\xi, \eta))\, g_1(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) & \cdots & (D\phi_n(\Phi^{-1}(\xi, \eta))\, g_m(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \end{pmatrix}$$

die Behauptung.

□

Bemerkung 3.28. Unter gewissen Bedingungen (Involutivität von Distributionen) kann die Darstellung der Normalform vereinfacht werden, im SISO-Fall geht dies immer. Jedoch wird auf diese Resultate hier nicht eingegangen, siehe dazu [5, Sections 4.1, 5.1].

3.2.4 Nulldynamik und Minimalphasensysteme

Wir betrachten ab jetzt nur noch quadratische MIMO-Systeme, das heißt Systeme mit gleich vielen Eingängen und Ausgängen, also $p = m$. Diese Annahme stellt für die spätere Untersuchung der Feedback-Passivierbarkeit kontroll-affiner Systeme keine Einschränkung dar, denn der Passivitätsbegriff kann nur für quadratische Systeme formuliert werden.
In diesem Abschnitt wird untersucht, wie in gewisser Weise sich der "nicht-sichtbare" Teil eines Systems verhält. Betrachte ein MIMO-System der Form (3.13). Die mit der Bedingung $y \equiv 0$ verträgliche Dynamik des Systems nennt man Nulldynamik, formal kann man dies mittels sogenannter invarianter Mannigfaltigkeiten definieren (siehe zum Beispiel [5, Sections 4.3, 5.1]). Hat ein Punkt einen relativen Grad, so kann man die Nulldynamik zumindest in der Nähe dieses Punktes mittels der Normalform darstellen. Da in dieser Arbeit nur solche Nulldynamiken betrachtet werden, verzichten wir auf die allgemeine Definition dieses Begriffes mittels invarianter Mannigfaltigkeiten und verwenden stattdessen die Darstellung durch die Normalform.

Proposition 3.29. Betrachte ein quadratisches MIMO-System mit konstantem relativen Grad $(r_1, \dots, r_m)$ für ein x_0, das in Normalform (3.35) vorliegt. Gilt $y \equiv 0$ für das System, dann ist notwendigerweise $\xi^1, \dots, \xi^p \equiv 0$. Durch Vorgabe eines η_0 ist außerdem die Dynamik von η eindeutig bestimmt und wird beschrieben durch

$$\dot{\eta} = q_0(\eta) \tag{3.39}$$

und

$$q_0(\eta) = q(0, \eta) - s(0, \eta) a(0, \eta)^{-1} b(0, \eta)$$

Beweis. Wegen $y_l = \xi_1^l$ und $\dot{\xi}_1^l = \xi_2^l, \dots, \dot{\xi}_{r_l-1}^l = \xi_{r_l}^l$, $l = 1, \dots, p$ folgt die erste Aussage. Die zweite ergibt sich sofort aus der Regularität des Systems und der Invertierbarkeit der Matrix a. □

Definition 3.30. In der Situation von Proposition 3.29 nennt man die Dynamik (3.39) die *Nulldynamik* des Systems.

Die folgenden Definitionen werden für den nächsten Abschnitt von zentraler Bedeutung sein.

Definition 3.31. Betrachte ein quadratisches MIMO-System Σ, für das die Nulldynamik existiert.

1. Das System ist ein *Minimalphasensystem*, wenn $\eta = 0$ ein asymptotisch stabiles Equilibrium der Nulldynamik (beschrieben durch (3.39)) des Systems ist.

2. Das System ist ein *schwaches Minimalphasensystem*, wenn eine mindestens zweifach stetig differenzierbare, positiv definite Funktion V existiert, so dass in einer Umgebung von $\eta = 0$

$$DV(\eta)f(\eta) \leq 0$$

gilt.

3.3 Stabilisierung nichtlinearer Systeme

3.3.1 Stabilität und Feedbacks

In diesem Abschnitt wird eines der wichtigsten Probleme der Kontrolltheorie vorgestellt, die Stabilisierung eines Gleichgewichtes eines dynamischen Systems (1.5) mittels eines Feedbacks.

Definition 3.32. Betrachte ein Kontrollsystem (1.5) mit Equilibrium $x^* \in X$. Dann heißt x^*

1. *(lokal) (Zustandsfeedback-)stabilisierbar*, wenn eine Funktion $u : X \to U$ existiert, so dass das Closed Loop-System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(x)) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.40}$$
wohldefiniert ist (zu jedem Anfangswert existiert genau eine Lösung), x^* auch für dieses System ein Gleichgewichtspunkt ist und lokal asymptotisch stabil ist. x^* heißt global (Zustandsfeedback-)stabilisierbar, wenn x^* für das Closed Loop-System global asymptotisch stabil ist.

2. *(lokal) (Ausgangsfeedback-)stabilisierbar*, wenn eine messbare Funktion $u : Y \to U$ existiert, so dass das Closed Loop-System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(y)) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.41}$$
wohldefiniert ist (zu jedem Anfangswert existiert genau eine Lösung), x^* auch für dieses System ein Gleichgewicht ist und lokal asymptotisch stabil ist. x^* heißt global (Zustandsfeedback-)stabilisierbar, wenn x^* für das Closed Loop-System global asymptotisch stabil ist.

Häufig betrachtet man nur $x^* = 0$, in späteren Abschnitten, insbesondere bei konkreten Stabilisierungsmethoden, werden wir uns auf diesen Fall einschränken. Im Folgenden wird mit einem Feedback, sofern nicht anders angegeben, immer ein statisches Ausgangsfeedback bezeichnet und mit stabilisierbar entsprechend statisch ausgangsfeedback-stabilisierbar (für ein System ohne Ausgang wird natürlich $Y = X$ und $h(x) = x$ gesetzt).

3.3.2 Situation bei linearen Systemen

Es gibt eine sehr reichhaltige Theorie zu linearen Systemen (siehe zum Beispiel [18], [6]), wir beschränken uns hier lediglich auf autonome, endlichdimensionale Systeme der folgenden Form.

Definition 3.33. Ein Kontrollsystem Σ (siehe Definition 1.2) heißt linear, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ existieren, so dass das System beschrieben wird durch

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.42}$$

$$y = Cx \tag{3.43}$$

Beachte, dass ein derartiges System häufig auch als "System mit Ausgang" bezeichnet wird (siehe zum Beispiel [18]), zur Vereinfachung wird jedoch der Zusatz weggelassen. Ein System ohne Ausgang wird einfach als ein lineares System mit $C = I$ interpretiert. Im Hinblick auf Kontrollprobleme ist folgende Definition wichtig.

Definition 3.34. Seien $A \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^m$. Das Paar (A, B) heißt *kontrollierbar*, wenn gilt

$$rank \begin{pmatrix} A & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n \tag{3.44}$$

Die Bedingung (3.44) wird auch als Kalman-Kontrollierbarkeitsbedingung, die beteiligte Matrix als (Kalman-)Kontrollierbarkeitsmatrix bezeichnet. Die Benennung erklärt sich durch folgendes Theorem, auf dessen Beweis an dieser Stelle verzichtet wird (cf. [18, Satz 2.12]).

Theorem 3.35. Betrachte ein lineares Kontrollsystem

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{3.45}$$

Das System ist genau dann kontrollierbar, wenn (A, B) kontrollierbar ist.

Bemerkung 3.36. Man beachte, dass für lineare Systeme der Form (3.45) noch wesentlich stärkere Aussagen gelten (zum Beispiel dass jeder Zustand eines kontrollierbaren Systems in beliebig kurzer Zeit erreicht werden kann), dazu wird auf [18, Kapitel 2] verwiesen.

Intuitiv ist klar, dass Kontrollierbarkeit eines (linearen) Systems wesentlich stärker als bloße Stabilisierung ist. Rigoros lässt sich dies so formulieren, cf. [18, Definition 3.15, Satz 3.26, 3.25].

Theorem 3.37. Betrachte ein lineares Kontrollsystem Σ der Form (3.45). Dann ist das Equilibrium $x^* = 0$ des Systems genau dann stabilisierbar mit einem statischen Zustandsfeedback der Form $u(x) = Fx$ mit einer Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wenn sich F so wählen lässt, dass das Spektrum der Matrix $A + BF$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil umfasst. Insbesondere ist $x^* = 0$ stabilisierbar, wenn (A, B) kontrollierbar ist.

3.3.3 Linearisierungen

Wie im vorhergehenden Abschnitt kurz skizziert, erlauben lineare Kontrollsysteme eine reichhaltige und leistungsfähige Theorie, speziell im Hinblick auf Stabilisierungsprobleme. Wünschenswert wäre eine Übertragbarkeit dieser Möglichkeiten auf nichtlineare Systeme. Eine Herangehensweise besteht dabei in der Linearisierung eines nichtlinearen Systems um einen Fixpunkt, man ersetzt dabei das nichtlineare Vektorfeld durch die bestmögliche (affin-)lineare Approximation. Es ergibt sich dadurch ein lineares System, auf das die lineare Theorie angewendet werden kann, zum Beispiel kann ein lineares Feedback $u(x) = Fx$ berechnet werden. Unter bestimmten Bedingungen funktioniert dabei das für die Linearisierung entwickelte Feedback auch für das eigentliche System.

Theorem 3.38. ([18, Satz 11.7]) Betrachte ein nichtlineares Kontrollsystem Σ der Form

$$\dot{x} = f(x, u),$$

wobei $f(0, 0) = 0$ gilt und f in 0 stetig differenzierbar ist. Die Linearisierung ist dabei das lineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = (D_x f(0, 0))\, x(t) + (D_u f(0, 0))\, u(t).$$

Ein lineares Feedback $u(x) = Fx$ mit $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ stabilisiert $x^* = 0$ lokal asymptotisch, wenn das Feedback die Linearisierung global asymptotisch stabilisiert.

Beispiel 3.39. Ein sehr bekanntes und häufig verwendetes Beispiel ist das invertierte Pendel auf einem Wagen. Dieses wird zumeist nichtlinear modelliert, kann aber linearisiert werden, wobei lineare Kontrolle sogar recht gut funktioniert (siehe zum Beispiel [18]).

Allerdings funktioniert dieser Ansatz natürlich nicht immer: Bei Linearisierung geht eine möglicherweise große Menge relevanter Information über das System verloren.

Beispiel 3.40. Das folgende Beispiel ([12, Example 3.5]) ist extrem in dieser Hinsicht, die Linearisierung erlaubt keine Stabilisierung, das System ist aber sogar kontrollierbar. Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin(x_3)u_1\\ \dot{x}_2 &= \cos(x_3)u_1\\ \dot{x}_3 &= u_2.\end{aligned}$$

Mit $u \equiv 0$ ist 0 ein Fixpunkt, die Linearisierung in diesem Punkt ist

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0\\ \dot{x}_2 &= u_1\\ \dot{x}_3 &= 0,\end{aligned}$$

und offensichtlich nicht kontrollierbar und auch nicht stabilisierbar. Man kann aber zeigen, dass das nichtlineare System kontrollierbar ist (cf. [12, Section 3.1]).

Wir betrachten eine weitere Herangehensweise, die das betrachtete System auf ein lineares führt. Statt einer (approximativen) Linearisierung ist bei gewissen Systemen eine *exakte* Linearisierung mittels Feedback und Koordinatentransformation möglich, das heißt, zum betrachteten System existiert ein feedback-äquivalentes lineares kontrollierbares System. Zur Verdeutlichung wird ein einfaches Beispiel vorgestellt.

Beispiel 3.41. Wir verwenden ein Beispiel aus Abschnitt 2.11 in [24]. Betrachte das System

$$\dot{x} = x + (x^2 + 1)u. \tag{3.46}$$

Für dieses System ist mit $u \equiv 0$ der Ursprung $x^* = 0$ ein offensichtlich instabiles Equilibrium. Verwendet man nun das Feedback

$$u(x, v) = \frac{v}{x^2 + 1}, \tag{3.47}$$

so ergibt sich als neues (Open Loop) System

$$\dot{x} = x + v \tag{3.48}$$

Dieses ist offensichtlich kontrollierbar und damit insbesondere stabilisierbar.

Es stellt sich die Frage, wann ein System exakt linearisiert werden kann, also feedbackäquivalent zu einem kontrollierbaren System ist. Hierfür gibt es hinreichende und notwendige Bedingungen, wir stellen kurz ein entsprechendes Resultat für hinreichend reguläre kontroll-affine SISO-Systeme vor.

Theorem 3.42. ([5, Lemma 4.2.1, Theorem 4.2.3])
Ein kontroll-affines SISO-System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

bei dem f und g mindestens C^n sind, kann genau dann in der Nähe von x_0 durch ein statisches Feedback und eine Koordinatentransformation in ein lineares und kontrollierbares System exakt linearisiert werden, wenn eine Funktion $\lambda : X \to Y$ existiert, so dass das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= \lambda(x) \end{aligned}$$

in x_0 relativen Grad n hat. Eine notwendige Bedingungen dafür ist, dass

$$\begin{pmatrix} g(x_0) & ad_f^g(x_0) & \cdots & ad_f^{n-1}g(x_0) \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat.

Es gibt auch Bedingungen für MIMO-Systeme ([5, Section 5.2], [12, Section 6.1]) und nicht kontroll-affine Systeme ([12, Chapter 6]). Ein Nachteil der Linearisierungen ist aber, dass es Systeme gibt, die zwar damit stabilisiert werden können, allerdings nicht “robust” sind.

Beispiel 3.43. (Fortsetzung von Beispiel 3.41, aus [24])
Betrachte das System (3.46) aus Beispiel 3.41. Unter Verwendung des Feedbacks (3.47) ergibt sich das kontrollierbare lineare System (3.48), das zum Beispiel mit dem neuen Feedback $v(x) = -2x$ stabilisiert werden kann. Insgesamt wird also das Feedback

$$k(x) = \frac{-2x}{x^2+1} \tag{3.49}$$

verwendet, was das System

$$\dot{x} = -x, \tag{3.50}$$

ergibt, das offensichtlich global asymptotisch stabil ist. Dieses System reagiert aber auf auch nur sehr kleine Störungen sehr empfindlich. Verwende als Feedback

$$k(x) + d = \frac{-2x}{x^2+1} + d, \tag{3.51}$$

wobei $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die externe Störung bezeichnet, dann ergibt sich durch Einsetzen von (3.51) in (3.46)

$$\dot{x} = -x + (x^2+1)d. \tag{3.52}$$

Dann gibt es selbst für gegen 0 konvergierende Funktionen d Lösungen von (3.52), die unbeschränkt wachsen, das heißt, das mittels exakter Linearisierung und linearem Feedback gewonnene System (3.50) ist zwar global asymptotisch stabil, sobald aber auch nur sehr kleine äußere Störungen auf das System einwirken, ist keine Stabilität mehr gewährleistet.

Außerdem gibt es Systeme, die nicht linearisierbar und nicht exakt linearisierbar sind, aber trotzdem stabilisierbar sein können.

Beispiel 3.44. Betrachte das System ([26, Exercise 14.6], dort als Beispiel zu Sliding Mode Control)

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 \tag{3.53}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u \tag{3.54}$$

Für $u \equiv 0$ ist 0 ein Equilibrium. Die Linearisierung ist

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u,\end{aligned}$$

dieses System ist offensichtlich nicht kontrollierbar und nicht stabilisierbar, denn auf das stabile, aber nicht asymptotisch stabile Teilsystem $\dot{x}_1 = 0$ kann kein Einfluss genommen werden.

Zudem kann dieses Beispiel nicht exakt linearisiert werden. Dies folgt mit

$$f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad ad_f g(x_{1,x}2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Theorem 3.42, denn die Matrix

$$\begin{pmatrix} g(0,0) & ad_f g(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nicht vollen Rang.
Trotzdem kann das System mit $u(x) = -x_1 - x_1^2 - x_2$ global asymptotisch stabilisiert werden. Es ergibt sich das Closed Loop-System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2 \end{aligned}$$

Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, sei

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

Die Funktion ist positiv definit und die Ableitung entlang der Lösungen ist negativ semidefinit,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_1, x_2) = x_1(x_1 x_2) + x_2(-x_1^2 - x_2) = -x_2^2 \leq 0,$$

damit ist das Closed Loop-System wegen Theorem 3.5 und 3.8 asymptotisch stabil. Das verwendete Feedback wurde dabei mit in den folgenden Kapiteln entwickelten Dissipativitätstechniken “berechnet”, siehe Beispiel 3.44.

Wir halten fest: Linearisierungstechniken sind sehr leistungsfähig, es gibt aber Systeme, bei denen diese nicht anwendbar sind. Dies motiviert die Entwicklung weitergehender Methoden für nichtlineare Systeme, wovon es inzwischen eine große Anzahl und Vielfalt gibt (für einen Überblick siehe zum Beispiel [26, Chapter 14], [12], [15]). Die hier betrachteten dissipativen Systeme weisen im Hinblick auf Stabilität hilfreiche Eigenschaften auf und werden im Folgenden zur Stabilisierung nichtlinearer Systeme genutzt.

Kapitel 4

Dissipative Systeme und Stabilität

Zwischen der Dissipativität eines Systems und seiner "Stabilität" besteht ein Zusammenhang, jedoch hängt die Stabilität von der verwendeten supply-rate ab. Wird die Lyapunov-Stabilität betrachtet, so kann häufig für ein dissipatives System die Speicherfunktion als Lyapunovfunktion verwendet werden. In diesem Kapitel[1] wird der Zusammenhang zwischen Dissipativität und speziell Passivität und Lyapunov-Stabilität untersucht. Zunächst wird geklärt, unter welchen hinreichenden Bedingungen aus Dissipativität auf Stabilität geschlossen werden kann. Danach werden einige Möglichkeiten zur Stabilisierung von passiven Systemen betrachtet.

4.1 Dissipativität und Lyapunov-Stabilität

Die Lyapunov-Stabilitätstheorie wurde zunächst nur für unkontrollierte Systeme der Form (1.7) definiert. Um Kontrollsysteme der Form (1.5) untersuchen zu können, wird im Folgenden $u \equiv 0$ gesetzt und das resultierende System

$$\dot{x} = f(x, 0) \tag{4.1}$$

betrachtet, mit $\tilde{f}(x) = f(x, 0)$ kann dann die oben eingeführte Stabilitätstheorie angewandt werden.
Das Konzept dissipativer Systeme und die Lyapunov-Stabilität weisen eine gewisse Ähnlichkeit auf, insbesondere zwischen Speicherfunktionen und Lyapunov-Funktionen, tatsächlich wird oft eine Speicherfunktion als Lyapunovfunktion verwendet. Allerdings ist der Zusammenhang dieser Begriffe zunächst nicht ganz klar, wie das folgende von David Hill stammende (und in [1, Example 5.59] notierte) Beispiel zeigt.

[1]Dieses Kapitel basiert teilweise auf einer vom Autor verfassten Seminararbeit [8], das Beispiel 4.1, eine Version von Theorem 4.2 mit Beweis und Korollar 4.4 sowie Teile von Beispiel 4.14 wurden bereits dort vorgestellt.

Beispiel 4.1. Sei $\alpha > 0$,

$$\dot{x} = x + u, \qquad x(0) = x_0,$$

und

$$y(t) = -\frac{\alpha x(t)}{1 + x^4(t)}$$

Das System habe die Passivitäts-supply-rate, dann ist wegen

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} u(t)y(t)\mathrm{d}t &= -\int_0^{t_1} (\dot{x}(t) - x(t))\frac{\alpha x(t)}{1 + x^4(t)}\mathrm{d}t \\ &\geq -\frac{\alpha}{2}(\arctan(x^2(t_1)) - \arctan(x^2(t_0)))\end{aligned}$$

das System dissipativ mit Storage-Funktion $S(x) = \frac{\alpha}{2}(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2))$. Man kann aber zeigen, dass der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ für $u \equiv 0$ instabil ist: Mit $u \equiv 0$ ergibt sich das System $\dot{x} = x$ mit dem Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$. Dieser ist aber offensichtlich instabil.

Das folgende Resultat ([13, Lemma 3.2.4]) stellt eine erste Verbindung zwischen Dissipativität und Stabilität her.

Theorem 4.2. Sei Σ ein dissipatives System mit supply-rate s und unterhalbstetiger, in x_0 stetiger Speicherfunktion S. Für alle $y \in Y$ gelte $s(0, y) \leq 0$ und $x^* \in X$ sei ein striktes lokales Minimum von S. Dann ist x^* ein stabiles Gleichgewichts für die unkontrollierte Differentialgleichung (von Σ).

Beweis. Aus $s(0, y(x)) \leq 0$ und der Dissipativität folgt

$$S(x(t, x^*)) - S(x^*) \leq \int_0^t s(0, y(x(r, x^*)))\mathrm{d}r \leq 0,$$

das heißt, entlang der Lösungskurve $x(\cdot, x^*)$ fällt S. Weil $x(0, x^*) = x^*$ und S in x^* ein striktes lokales Minimum hat, muss $x(t, x^*) = x^*$ für alle $t \geq 0$ gelten, also ist x^* ein Equilibrium. Die Stabilität von x^* folgt dann aus Lemma 3.4. □

Korollar 4.3. Ist in Theorem 4.2 die Speicherfunktion S in C^1, dann ist $V : D \to \mathbb{R}, V(x) := S(x) - S(x^*)$ eine Lyapunov-Funktion für x^* mit (falls x^* ein lokales striktes Minimum ist) $D = B_\epsilon(x^*)$ mit $\epsilon > 0$ so, dass $S(x^*) < S(x)$ für alle $x \neq x^*$, $|x - x^*| < \epsilon$ beziehungsweise $D = X$.

Das Theorem 4.2 lässt sich etwas verstärken (siehe [13, Theorem 3.2.3]).

Korollar 4.4. Seien die Voraussetzungen von 4.2 erfüllt und S stetig differenzierbar. Außerdem sei $x(t) \equiv x^*$ die einzige Lösung, die für alle $t \geq 0$ in $\{x \in X \mid s(0, y(x, 0)) = 0\}$ bleibt. Dann ist x^* asymptotisch stabil.

Beweis. Die Stabilität folgt aus Theorem 4.2. Für die lokale asymptotische Stabilität wird LaSalle's Invarianzprinzip verwendet: Es existiert ein $\epsilon > 0$ und eine kompakte Menge $B \subseteq X$, so dass für jedes $x_0 \in X$ mit $|x_0 - x^*|$ gilt, dass $x(t, x_0, 0) \in B$ für alle $t \geq 0$. Nach dem Beweis von Theorem 4.2 ist $\{x \in X \mid DS(x)f(x,0) = 0\} \subseteq \{x \in X \mid s(0, y(x,0)) = 0\}$, wobei $x(t) \equiv x^*$ nach Voraussetzung als einzige Lösung in der zweiten Menge bleibt, damit ist aber die größte in $\{x \in X \mid DS(x)f(x,0) = 0\} \cap B$ enthaltene invariante Menge gleich $\{x^*\}$, nach LaSalle's Invarianzprinzip gilt dann $x(t, x_0, 0) \to x^*$, womit die lokale asymptotische Stabilität folgt. □

Im restlichen Abschnitt beschränken wir uns auf das Equilibrium $x^* = 0$. Problematisch bei den bisherigen Ergebnissen ist, dass die Speicherfunktion ein striktes lokales Minimum im Gleichgewicht benötigt. Da nur $x^* = 0$ betrachtet wird, bedeutet dies, dass die Speicherfunktion *positiv definit* sein muss, das heißt $S(0) = 0$, $S(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Häufig lässt sich jedoch nur *positive Semidefinitheit* zeigen, $S(0) = 0$, $S(x) \geq 0$ für alle x. Auf die Annahme der positiven Definitheit kann aber nicht verzichtet werden, wie folgendes Beispiel zeigt (zu finden in [17, Section 2.3.3]).

Beispiel 4.5. Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Mit $s(u,y) := uy$ und $S(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ ergibt sich wegen

$$\int_0^t u(s)y(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} x_2(s)x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}x_2^2$$

die Passivität des Systems. Mit $u \equiv 0$ und Weglassen des Outputs ergibt sich aber das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

dessen Gleichgewicht $(0,0)$ offensichtlich instabil ist. Das Problem ist hierbei, dass $S(x_1, x_2) \equiv 0$ gilt und somit keine positive Definitheit vorliegt.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ist die positive Definitheit von Speicherfunktionen passiver Systeme garantiert.

Definition 4.6. Ein Kontrollsystem Σ heißt nullbeobachtbar, wenn aus $u(t) = 0$, $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ folgt, dass $x(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Lemma 4.7. ([27, Proposition 3.3])
Sei Σ ein passives, nullbeobachtbares Kontrollsystem mit Speicherfunktion S mit einem (nicht notwendigerweise strikten) Minimum bei $x = 0$. Dann existiert eine positiv definite Speicherfunktion.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $S(0) = 0$ (sonst betrachte die neue Speicherfunktion $S(x) - S(0)$). Nach Theorem 2.14 ist S_a (available storage) endlich und es gilt außerdem nach Definition

$$\begin{aligned} S_a(x) &= \sup_{u \in \mathcal{U}, t \geq 0} \int_0^t \langle u(s), h(x(s, x_0, u)) \rangle \mathrm{d}s \\ &\geq \sup_{u \in \mathcal{U}, t \geq 0} \int_0^t \langle h(x(s, x_0, u)), h(x(s, x_0, u)) \rangle \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sei nun $S_a(x_0) = 0$ für ein x_0, dann folgt aus (4.2), dass für $u_0 \equiv 0$ $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, wegen der Nullbeobachtbarkeit des Systems also $x_0 = 0$. Damit ist aber S_a positiv definit. Weil nach Theorem 2.14 $S(x) \geq S_a(x)$, muss S positiv definit sein. □

Im Fall positiv semidefiniter Speicherfunktionen lassen sich trotzdem noch Aussagen hinsichtlich Stabilität treffen, wenn gewisse Zusatzannahmen gelten ([13, Theorem 3.2.10], [17, Theorem 2.28]). Wir verzichten jedoch auf die Darstellung dieser Ergebnisse. Im Folgenden wird noch kurz der Zusammenhang zwischen Input to State-Stabilität und Lyapunov-Stabilität betrachtet, wobei aber keine Beweise angegeben werden.

Proposition 4.8. ([22, Theorem 2])
Betrachte ein System Σ

$$\dot{x} = f(x, u)$$

mit Equilibrium $f(0, 0) = 0$. Σ ist genau dann Input to State-stabil, wenn das Equilibrium 0 des Systems

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

global asymptotisch stabil ist und eine Funktion $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ existiert, so dass

$$\limsup_{t \to \infty} |x(t, x_0, u)| \leq \gamma(\|u\|_\infty)$$

für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt.

Bemerkung 4.9. Input to State-Stabilität ist insbesondere bei Verbindung von Teilsystemen wichtig, siehe hierzu zum Beispiel Section 4, [22].

4.2 Stabilisieren mit Dissipativität

Zunächst wird das Konzept der Null-Detektierbarkeit eingeführt, welches eine direkte Verallgemeinerung des entsprechenden Begriffes der linearen Kontrolltheorie ist.

Definition 4.10. Sei Σ ein nichtlineares Kontrollsystem und $x^* = 0$ ein Equilibrium. Das System heißt *lokal (null-)detektierbar*, wenn eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von 0 existiert, so dass gilt:

$$\forall x_0 \in W, t \geq 0 : h(x(t, x_0, 0)) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t, x_0, 0) = 0.$$

Kann $W = X$ gewählt werden, dann heißt das System *(global) (null-)detektierbar.*

Damit können nun die zentralen Stabilisierungsresultate angegeben werden, wobei nur Passivität betrachtet wird.

Theorem 4.11. ([27, Theorem 3.2], [26, Theorem 14.4])
Sei Σ ein System der Form (1.5) mit dem Equilibrium $x^* = 0$ und $h(0) = 0$. Weiter sei Σ passiv mit einer positiv definiten, stetigen Speicherfunktion S und das System sei lokal (null-)detektierbar. Sei $\phi : Y \to U$ eine beliebige, Lipschitz-stetige Funktion mit $\phi(0) = 0$ und

$$\langle y, \phi(y)\rangle > 0 \text{ für alle } y \neq 0 \tag{4.3}$$

Sei $u(y) = -\phi(y)$ und betrachte das Closed-Loop-System

$$\Sigma' \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(y)) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Dann gilt: Das Feedback u stabilisiert Σ lokal asymptotisch, das heißt, das Equilibrium $x^* = 0$ des Closed-Loop-Systems Σ' ist lokal asymptotisch stabil.

Beweis. Es wird gezeigt, dass das Equilibrium $x^* = 0$ für das Closed-Loop-System Σ' (beachte, dass x^* wegen $h(0) = 0$ und $\phi(0) = 0$ auch für das Closed-Loop-System ein Equilibrium ist) stabil ist und alle Lösungen, die hinreichend nahe bei x^* starten, gegen $x^* = 0$ konvergieren. Für ein $x_0 \in X$ bezeichnet dabei $x(t, x_0)$ die eindeutig bestimmte Lösung für das Closed Loop-System

$$\dot{x} = f(x, u(h(x))).$$

Nach Voraussetzung ist das System passiv, also gilt für alle $x_0 \in X$ wegen (4.4)

$$S(x(t, x_0)) - S(x(0, x_0)) \leq -\int_0^t \langle \phi(y(s)), y(s)\rangle \mathrm{d}s \leq 0,$$

die Funktion $t \mapsto S(x(t, x_0))$ ist also für jedes x_0 fallend, das heißt nichtwachsend. Nach Lemma 3.4 ist dann aber x^* stabil. Sei nun $x_0 \in X$ so nahe an x^*, dass die zugehörige Trajektorie beschränkt ist (geht, weil x^* stabil ist). Nach Lemma 3.10 ist dann die ω-Limesmenge von x_0 nicht leer, kompakt und (positiv) invariant. Weil $t \mapsto S(x(t, x_0))$ fällt und nach unten durch 0 beschränkt ist, gilt $\lim_{t\to\infty} S(x(t, x_0)) = \alpha$ für ein reelles $\alpha \geq 0$. Sei nun $x_1 \in \omega(x_0)$ beliebig, dann (siehe Lemma 3.10 1)) existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t \to \infty$ mit $x(t_n, x_0) \to x_1$, (beachte, dass $\lim_{t\to\infty} S(x(t, x_0))$ eindeutig ist) also $S(x(t_n, x_0)) \to \alpha$. Weil x_1 beliebig war und S stetig ist, ist also S konstant auf $\omega(x_0)$. Wegen der Invarianz gilt dann auch (für jedes $x_1 \in \omega(x_0)$), dass $V(x(t,x_1)) = \alpha$ für alle $t \geq 0$ und daraus folgt wegen

$$0 \leq S(x(t,x_1)) - S(x_1) \leq -\int_0^t \langle \phi(y(s)), y(s) \rangle \mathrm{d}s \leq 0,$$

(man beachte, dass $\langle \phi(y(s)), y(s) \rangle \geq 0$ und stetig ist) dass $y(t) = h(x(t,x_1)) = 0$ für alle $t \geq 0$. Nach Definition des Feedbacks ist aber dann (betrachte das Open-Loop-System für den Anfangswert x_1) $u(t) = -\phi(y(t)) = 0$, was zusammen mit der Nulldetektierbarkeit $\lim_{t\to\infty} x(t,x_1) = 0$ impliziert. Die Stetigkeit von S in 0 und $S(0) = 0$ liefert dann $\alpha = 0$, woraus wegen der positiven Definitheit von S folgt, dass für $t \to \infty$ $x(t,x_0) \to 0$. □

Man beachte, dass es hinreichende geometrische Bedingungen für nulldetektierbar und nullbeobachtbar gibt, wir verzichten jedoch auf die Darstellung dieser Resultate und verweisen auf [27, Proposition 3.4].

Korollar 4.12. (Corollary 3.3.1 in [13])
Sei Σ ein passives Kontrollsystem (1.2) mit Equilibrium $x^* = 0$ und positiv definiter, stetiger Speicherfunktion S. Zusätzlich sei das System nulldetektierbar. Dann wird x^* lokal asymptotisch stabilisiert durch das Feedback $u(x) = -kh(x)$ für alle $k > 0$.

Beweis. Die Funktion $\phi(y) = y$ erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 4.11, damit ergibt sich sofort die Behauptung. □

Bemerkung 4.13. Die Voraussetzungen von Theorem 4.11 und Korollar 4.12 an die Speicherfunktion könnten auch auf unterhalbstetig und stetig in 0 abgeschwächt werden, allerdings werden dann erheblich technischere Resultate im Beweis benötigt (siehe [33]).

Beispiel 4.14. ([26, Example 14.15])
Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

mit Equilibrium $x_1 = 0, x_2 = 0$. Dieses System ist passiv mit positiv definiter, stetig differenzierbarer Speicherfunktion $S(x_1,x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$, denn

$$\dot{S}(x_1,x_2) = x_1^3 x_2 - x_1^3 x_2 + x_2 u = x_2 u.$$

Aus $y = x_2 \equiv 0$ folgt $x_1 \equiv 0$, also ist das System auch nulldetektierbar (sogar nullbeobachtbar). Anwenden von Korollar 4.12 liefert das Feedback

$$u(y) = -y = -x_2,$$

Einsetzen ergibt das Closed Loop-System

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_1,$$

dessen Equilibrium $x_1 = 0, x_2 = 0$ global asymptotisch stabil mit Lyapunovfunktion $V(x_1, x_2) = S(x_1, x_2)$ ist,

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - x_1^3 x_2 - x_2^2,$$

deren Ableitung entlang der Lösungen negativ semidefinit ist, asymptotische Stabilität folgt dann mit Theorem 3.8.

Mit folgendem Resultat kann auf jegliche Regularitätsvoraussetzung an die Speicherfunktion des passiven Systems verzichtet werden, es reicht zu wissen, dass eine Speicherfunktion mit einem Minimum bei 0 existiert (was äquivalent zur Existenz eines Minimums der available storage bei 0 ist). Beachte, dass man bei einem kontroll-affinen System fast alle Voraussetzungen direkt am System überprüfen kann (Passivität mit Proposition 3.14, lokal schwach erreichbar zum Beispiel mit der sogenannten "Accessbility rank condition" (siehe [20]), nullbeobachtbar zum Beispiel mit [27, Proposition 3.4]).

Korollar 4.15. Sei Σ ein passives Kontrollsystem (1.2) mit Equilibrium $x^* = 0$, $\mathcal{U} = \mathcal{L}^1_{loc}$ und einer Speicherfunktion mit einem Minimum bei $x^* = 0$, das lokal schwach erreichbar von x^* aus ist (siehe Definition 2.24) und nullbeobachtbar. Sei $\phi : Y \to X$ eine beliebige lokal Lipschitz-stetige Funktion mit $\phi(0) = 0$ und

$$\langle y, \phi(y) \rangle > 0 \text{ für alle } y \neq 0 \tag{4.4}$$

$u(y) = -\phi(y)$. Dann stabilisiert das Feedback u das System lokal asymptotisch.

Beweis. Nach Theorem 2.25 existiert eine in einer Umgebung von 0 stetige Speicherfunktion S, diese ist also insbesondere in einer Umgebung von 0 unterhalbstetig. Zudem (siehe [27, Proposition 3.3]) ist S positiv definit nach Lemma 4.7. Damit kann aber Theorem 4.11 angewendet werden. $\square$

Kapitel 5

Feedback-Passivität

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass dissipative Systeme im Spezialfall der Passivität gute Eigenschaft hinsichtlich Stabilisierung aufweisen, allerdings wurde dafür vorausgesetzt, dass die Systeme bereits passiv sind. In diesem Kapitel wird geklärt, wann ein Kontrollsystem mittels Feedback "passiviert" werden kann, wobei das Hauptresultat eine Charakterisierung ebendieser Eigenschaft ist. Zunächst wird der Begriff der Feedback-Passivität geklärt. Anschließend wird das zentrale Resultat von Byrnes, Isidori und Willems [27] besprochen, welches das Problem der Feedback-Passivierung unter geeigneten Regularitätsannahmen vollständig löst. Hierfür werden einige Konzepte und Resultate aus der Differentialgeometrie beziehungsweise der Theorie nichtlinearer Kontrollsysteme benötigt, die bereits weiter oben eingeführt wurden. Die Darstellung orientiert sich dabei an [17, Chapter 2] und [27].

5.1 Passivität und Feedbacks

In Übereinstimmung mit der Literatur werden nur kontroll-affine Systeme (1.11) betrachtet, mit $m = p$, also Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen. Weiterhin beschränken wir uns auf zur affinen Form passende Feedbacks

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{5.1}$$

wobei $\alpha : X \to U$, $\beta : X \to \mathbb{R}^{m\times m}$ und $v \in \mathcal{U}$ hinreichend glatt sind, außerdem soll $\beta(x)$ für alle x invertierbar sein. Abkürzend wird ein Feedback der Form (5.1) *reguläres Feedback* genannt.

Definition 5.1. Ein System (1.11) heißt dann *Feedback-passiv* oder *Feedback-passivierbar*, wenn ein Feedback der Form (5.1) existiert, so dass das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u(x) = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v\\ y &= h(x)\end{aligned}$$

passiv ist.

Beispiel 5.2. ([17, Example 2.48])
Betrachte das SISO-System

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 \tag{5.2}$$
$$\dot{x}_2 = u \tag{5.3}$$
$$y = x_2 \tag{5.4}$$

Mit $u(x_1, x_2) = -x_1^3 + v$ wird daraus

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + v \\ y &= x_2, \end{aligned}$$

wobei dieses System passiv mit Speicherfunktion $S(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ist,

$$\dot{S}(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 x_2) + x_2(-x_1^3 + v) = x_2 v.$$

Im Folgenden wird untersucht, wann ein quadratisches, kontroll-affines System Feedback-passivierbar ist. Unter geeigneten, relativen schwachen Regularitätsvoraussetzungen lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen formulieren, die in der hier dargestellten Form aus [27] stammen, wir orientieren uns außerdem an [17, Section 2.4].

5.2 Notwendige Bedingungen für Feedbackpassivierbarkeit

Proposition 5.3. Betrachte ein kontroll-affines System der Form (3.13), wobei Dh vollen Rang bei $x = 0$ hat. Wenn das System passiv ist und eine zweimal stetig differenzierbare Speicherfunktion S mit $S(0) = 0$ besitzt, dann hat es relativen Grad $(1, \ldots, 1)$ bei $x = 0$.

Beweis. Der Beweis in der Originalveröffentlichung ([27]) verwendet ein Widerspruchsargument mit einer Taylor-Entwicklung und einem Argument aus der Differentialgeometrie, wir geben stattdessen einen direkten, elementareren Beweis aus [17], Beweis zu Proposition 2.44. Um die Aussage zu zeigen, muss nachgewiesen werden, dass die Matrix $L_g h(0)$ invertierbar ist, also vollen Rang hat.
Nach Voraussetzung kann Proposition 3.14 verwendet werden, das heißt für alle $x \in X$ gilt

$$L_{g_q} S(x) = h_q(x), \qquad q = 1, \ldots, m.$$

oder kompakt

$$DS(x)g(x) = h(x) \tag{5.5}$$

Differenzieren liefert

$$D^2 S(x) g_q(x) + DS(x) Dg_q(x) = Dh_q(x), \qquad q = 1, \ldots, m,$$

also

$$D\left[DS(x)g(x)\right] = D^2S(x)g(x) + DS(x)Dg(x) = Dh(x) \tag{5.6}$$

und Multiplikation von links mit $g^T(x)$

$$g^T(x)D\left(DS(x)g(x)\right) = g^T(x)D^2S(x)g(x) + g^T(x)DS(x)Dg(x) = g^T(x)Dh(x). \tag{5.7}$$

Zu beachten ist, dass $g(x)$ eine $n \times m$-Matrix und $DS(x)$ eine $1 \times n$-Matrix ist, für den Ausdruck $DS(x)Dg(x)$ wären eigentlich Konzepte der Tensorrechnung notwendig, dieser Term wird aber in der weiteren Rechnung zu 0, daher wird auf eine genauere Besprechung verzichtet.
Nach Definition hat S in $x = 0$ ein Minimum, da $S \geq 0$ und $S(0) = 0$, also $DS(0) = 0$ und $D^2S(x)$ ist positiv semidefinit bei $x = 0$. Einsetzen von $DS(0) = 0$ in (5.7) für $x = 0$ führt auf

$$g^T(0)D^2S(0)g(0) = g^T(x)Dh(x) \tag{5.8}$$

und in (5.6) (ebenfalls mit $x = 0$) auf

$$D^2S(0)g(0) = Dh(0). \tag{5.9}$$

Sei $D^2S(0) = R^TR$ die Cholesky-Zerlegung der Hesseschen Matrix $D^2S(0)$, dann liefert Einsetzen in (5.9)

$$Dh(0) = R^TRg(0). \tag{5.10}$$

Nach Voraussetzung hat $Dh(0)$ vollen Rang, damit auch (Rang einer Matrix ändert sich unter Transposition nicht) $R^TRg(0)$ und $Rg(0)$, denn der Rang eines Matrizenprodukts AB ist so groß wie das Minimum der Ränge von A und B. Es folgt, dass $g^T(0)R^TRg(0)$ vollen Rang besitzt und Einsetzen in (5.8)

$$g^T(0)R^TRg(0) = Dh(0)g(0)$$

zeigt damit, dass

$$Dh(0)g(0) = \begin{pmatrix} L_{g_1}h_1(0) & \cdots & L_{g_m}h_1(0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1}h_m(0) & \cdots & L_{g_m}h_m(0) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und damit hat Σ in $x = 0$ relativen Grad $(1, \dots, 1)$. □

Bemerkung 5.4. Auf die Voraussetzung, dass $Dh(0)$ vollen Rang besitzt, kann nicht verzichtet werden: Betrachte das in [17, Section 2.4.3] notierte Beispiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xu \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

welches kontroll-affin ist mit $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, wobei $f(x) = 0$, $g(x) = x$ und $y = h(x) = x^2$. Dieses System ist passiv mit einer möglichen zweimal differenzierbaren, positiv definiten Speicherfunktion $S(x) = \frac{1}{2}x^2$, denn

$$\dot{S}(x) = DS(x)xu = x^2u = yu$$

Das System ist also sogar lossless. Wegen

$$L_g h(x) = 2x^2$$

und weil diese Funktion eine isolierte Nullstelle bei $x = 0$ hat, kann jedoch kein relativer Grad in $x = 0$ existieren, insbesondere hat das System auch nicht relativen Grad 1.

Proposition 5.5. Wenn ein kontroll-affines System (3.13) passiv ist und eine positiv definite, zweimal stetig differenzierbare Speicherfunktion besitzt, dann ist es ein schwaches Minimalphasensystem.

Beweis. Aus Proposition 5.3 folgt, dass die Nulldynamik existiert. Nach Definition eines schwachen Minimalphasensystems sind nur die Trajektorien zu betrachten, für die $y = h(x) \equiv 0$ gilt. Mit Proposition 3.14 folgt, dass

$$L_g S(x) = 0$$

für die Nulldynamik gilt. Außerdem kann Lemma 2.3 angewendet werden, also gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(x) \leq \langle u, y \rangle = 0.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(x) = L_f S(x) + L_g S(x)u = L_f S(x) \leq 0.$$

S ist also eine positiv definite C^2 Funktion, die entlang der betrachteten Trajektorien abnimmt, damit kann Theorem 3.5 angewendet werden und die Behauptung ist gezeigt. □

Proposition 5.6. Betrachte ein kontrollaffines System mit $m = p$ Ein- und Ausgängen

$$\Sigma \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

mit relativem Grad $(r_1, \ldots, r_m)$ in $x_0 \in X$.

a) Dann ist der relative Grad invariant unter Transformation mit einem regulären Feedback

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

das heißt, das neue System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + \beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.11}$$

mit neuem Eingang v hat in x_0 auch relativen Grad $(r_1, \ldots, r_m)$.

b) Der relative Grad ist unter Koordinatentransformationen invariant, das heißt, gegeben eine Koordinatentransformation

$$z = \Phi(x)$$

hat das transformierte System

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u \\ y &= \bar{h}(z)\end{aligned} \tag{5.12}$$

mit

$$\bar{f}(z) = D\Phi|_{x=\Phi^{-1}(z)} f(\Phi^{-1}(z)), \qquad \bar{g}(z) = D\Phi|_{x=\Phi^{-1}(z)} g(\Phi^{-1}(z)), \qquad \bar{h}(z) = h(\Phi^{-1}(z))$$

in $z_0 = \Phi(x_0)$ relativen Grad $(r_1, \ldots, r_m)$.

Beweis. Wir verwenden den Beweis zu Lemmata 4.2.1 und 5.2.1 in [5].

a) Sei $1 \leq i, j \leq m$ beliebig, $W \subseteq X$ die offene Umgebung von x_0 aus Definition 3.22. Zunächst wird mittels Induktion über k, $0 \leq k \leq r_i - 1$ gezeigt, dass für alle $x \in U$

$$L^k_{f+g\alpha} h_i(x) = L^k_f h_i(x) \tag{5.13}$$

gilt. Für $k = 0$ folgt dies sofort

$$L^0_{f+g\alpha} h_i(x) = h_i(x)$$

Sei die Induktionsvoraussetzung für ein k, $k < r_i - 1$ richtig, dann gilt

$$\begin{aligned}L^{k+1}_{f+g\alpha} h_i(x) &= D\left(L^k_{f+g\alpha} h_i(x)\right)(f(x) + g(x)\alpha(x)) && (5.14)\\ &= D\left(L^k_f h_i(x)\right)(f(x) + g(x)\alpha(x)) && (5.15)\\ &= L^{k+1}_f h_i(x) + L_g L^k_f h_i(x) = L^{k+1}_f h_i(x) && (5.16)\end{aligned}$$

Verwendet wurde dabei bei (5.14) die Definition der Lie-Ableitung, bei (5.15) die Induktionsvoraussetzung und bei (5.16) die Tatsache, dass $x \in U$ liegt und (3.31). Damit ist die Aussage gezeigt.

Für $1 \leq i, j \leq m$, $0 \leq k \leq r_i - 2$ und $x \in W$ folgt dann sofort

$$\begin{aligned}L_{(g\beta)_{\cdot j}} L^k_{f+g\alpha} h_i(x) &= D\left(L^k_f h_i(x)\right)(g(x)\beta(x))_{\cdot j} && (5.17)\\ &= D\left(L^k_f h_i(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{m} g_l(x)\beta_{lj}(x)\right) && (5.18)\\ &= \sum_{l=1}^{m} \underbrace{L_{g_l} L^k_f h_i(x)}_{=0} \beta_{lj}(x) = 0, && (5.19)\end{aligned}$$

wobei für (5.17) das Zwischenergebnis (5.13) verwendet wurde, bei (5.18) die Definition der Matrixmultiplikation und bei (5.19) die Definition des relativen Grades. Für $1 \leq i, j \leq m$ gilt zudem wegen (5.13)

$$L_{(g\beta)_{\cdot i}} L_{f+g\alpha}^{r_j-1} h_j(x_0) = \left(L_{g_1} L_f^{r_j-1} h_j(x_0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{r_j-j} h_j(x_0) \right) \beta_{\cdot i}(x_0),$$

daraus folgt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_{(g\beta)_{\cdot 1}} L_{f+g\alpha}^{r_1-1} h_1(x_0) & \cdots & L_{(g\beta)_{\cdot m}} L_{f+g\alpha}^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{(g\beta)_{\cdot 1}} L_{f+g\alpha}^{r_m-1} h_m(x_0) & \cdots & L_{(g\beta)_{\cdot m}} L_{f+g\alpha}^{r_m-1} h_m(x_0) \end{pmatrix}}_{=:P} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) \end{pmatrix}}_{=:Q} \beta(x_0)$$

Nach Voraussetzung haben die Matrizen Q und $\beta(x_0)$ vollen Rang, also hat auch P vollen Rang. Insgesamt ergibt sich, dass auch das transformierte System (5.11) in x_0 relativen Grad $(r_1, \ldots, r_m)$ hat.

b) Betrachte

$$L_{\bar{g}_i} L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z), \qquad 1 \leq j, i \leq m,\ 0 \leq k \leq r_j - 2$$

Sei $W_1 \subseteq X$ die offene Umgebung von x_0 aus Definition 3.22, $W_2 := \Phi(W_1)$ ist dann auch eine offene Umgebung von $z_0 := \Phi(x_0)$. Wir zeigen zunächst per Induktion über k, dass

$$L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z) = L_f^k h_j(\Phi^{-1}(z)) \tag{5.20}$$

für alle $z \in W_2$ und $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq r_j - 1$ gilt. Sei also $z \in W_2$ beliebig. Für $k = 0$ ist die Aussage klar, denn

$$L_{\bar{f}}^0 \bar{h}_j(z) = h_j(\Phi^{-1}(z))$$

Sei die Aussage (5.20) für ein k richtig, dann

$$\begin{align} L_{\bar{f}}^{k+1} \bar{h}_j(z) &= D\left(L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z)\right) \bar{f}(z) \tag{5.21} \\ &= D\left(L_f^k h_j(\Phi^{-1}(z))\right) \bar{f}(z) \tag{5.22} \\ &= D\left(L_f^k h_j(x)\right)|_{x=\Phi^{-1}(z)} \left(D\Phi^{-1}(z)\right) D\Phi(z) f(\Phi^{-1}(z)) \tag{5.23} \\ &= D\left(L_f^k h_j(x)\right)|_{x=\Phi^{-1}(z)} f(\Phi^{-1}(z)) \tag{5.24} \\ &= L_f^{k+1} h_j(\Phi^{-1}(z)) \tag{5.25} \end{align}$$

Für (5.21) wurde dabei die Definition der Lie-Ableitung verwendet, für den nächsten Schritt die Induktionsvoraussetzung, für (5.23) die Kettenregel, für das Folgende der Satz über die Umkehrabbildung (siehe zum Beispiel [3, Theorem VII.7.3]) und für (5.25) erneut die Definition der Lie-Ableitung.

Damit ergibt sich dann für alle $1 \leq i, j \leq m$ und $0 \leq k \leq r_j - 1$, dass

$$\begin{aligned} L_{\bar{g}_i} L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z) &= D\left(L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z)\right) D\Phi(z) g_i(\Phi^{-1}(z)) &\quad (5.26)\\ &= D\left(L_f^k h_j(x)\right)|_{x=\Phi^{-1}(z)} g_i(\Phi^{-1}(z)) &\quad (5.27)\\ &= L_{g_i} L_f^k h_j(\Phi^{-1}(z)), &\quad (5.28) \end{aligned}$$

wobei für (5.26) wieder die Definition der Lie-Ableitung verwendet wurde und für den nächsten Schritt (5.20) und erneut der Satz über die Umkehrabbildung.

Für jedes $z \in W_2$ gilt dann für alle $1 \leq i, j \leq m$, $0 \leq k \leq r_j - 2$ dass

$$L_{\bar{g}_i} L_{\bar{f}}^k \bar{h}_j(z) = L_{g_i} L_f^k h_j(\Phi^{-1}(z)) = 0,$$

denn $\Phi^{-1}(z) \in W_1$. Außerdem hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}}^{r_1-1} \bar{h}_1(z_0) & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_{\bar{f}}^{r_1-1} \bar{h}_1(z_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}}^{r_m-1} \bar{h}_m(z_0) & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_{\bar{f}}^{r_m-1} \bar{h}_m(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) \end{pmatrix}$$

vollen Rang. Damit hat auch das transformierte System (5.12) in z_0 relativen Grad $(r_1, \ldots, r_m)$.

□

Korollar 5.7. Betrachte ein kontroll-affines System (3.13). Ist das System Feedback-passivierbar, sodass es eine positiv definite, zweimal stetig differenzierbare Speicherfunktion besitzt, dann hat es relativen Grad $(1, \ldots, 1)$ bei $x = 0$ und ist ein schwaches Minimalphasensystem.

Beweis. Die Invarianz der schwachen Minimalphase unter Feedback ist klar, die Aussage folgt dann sofort aus Proposition 5.3, 5.5, 5.6. □

Beispiel 5.8. (Fortsetzung von Beispiel 5.2)
Das System (5.2) ist offensichtlich bereits in Normalform mit relativem Grad 1 in 0. Aus $y = x_2 \equiv 0$ folgt $\dot{x}_1 = 0$, daher gilt auch schwache Minimalphase mit $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$,

$$\dot{V}(x_1) = 0$$

5.3 Hinreichende Bedingungen für Feedbackpassivierbarkeit

Proposition 5.9. Betrachte ein kontroll-affines System (3.13). Wenn

$$\operatorname{rank} Dh(0) = m, \qquad \operatorname{rank} g(0) = m,$$

das System relativen Grad $(1, \ldots, 1)$ in 0 hat und ein schwaches Minimalphasensystem ist, dann ist es feedbackpassivierbar mit einer C^2, positiv definiten Speicherfunktion.

Beweis. Der Beweis ist konstruktiv: Das System wird zunächst in Normalform gebracht (welche lokal existiert nach Voraussetzung) und es wird ein Feedback angegeben und gezeigt, dass das resultierende Closed-Loop-System passiv ist. Betrachte das System (3.13) in Normalform

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= b(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) + s(\xi,\eta)u \\ y &= \xi\end{aligned}$$

Wir bearbeiten nur den Fall, dass $s \equiv 0$ (siehe [17, Theorem 2.47]), der allgemeine Fall geht ähnlich, ist aber erheblich aufwändiger (siehe [27, Theorem 4.7]). Betrachte also ein System

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= b(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \\ y &= \xi\end{aligned}$$

Dann lässt sich $\dot{\eta} = q(\xi,\eta)$ darstellen durch

$$\dot{\eta} = q(0,\eta) + p(\xi,\eta)\xi$$

für eine passende matrixwertige, hinreichend differenzierbare Funktion p, denn $q(\xi,\eta) = q(0,\eta) + (q(\xi,\eta) - q(0,\eta))$ und aus dem Mittelwertsatz für Banachraumwertige Funktionen (siehe zum Beispiel [3, Section VII.3, VII.3.10]) folgt die Existenz von p. Sei V die nach Voraussetzung existierende Funktion aus Definition 3.31. Man beachte, dass $\dot{\eta} = q(0,\eta)$ genau die Nulldynamik beschreibt. Definiere

$$u(\xi,\eta) := a(\xi,\eta)^{-1}(-b(\xi,\eta) - (L_{p(\xi,\eta)}V)^T + v), \tag{5.29}$$

v ein neuer Eingang, und

$$S(\xi,\eta) = V(\eta) + \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle.$$

Dann ist S eine Speicherfunktion für das durch Einsetzen des Feedbacks u resultierende System mit Eingang v und Output y, denn

$$\begin{aligned}\dot{S}(\xi,\eta) &= DV(\eta)q(0,\eta) + DV(\eta)p(\xi,\eta)\xi + \xi^T(b(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u(\xi,\eta)) \\ &= \underbrace{L_{q(0,\eta)}V(\eta)}_{\leq 0} + L_{p(\xi,\eta)}V(\eta)\xi - \xi^T(L_{p(\xi,\eta)}V(\eta))^T + \xi^T v \\ &\leq \langle y, v \rangle\end{aligned}$$

Zudem ist S positiv definit, da V und das Skalarprodukt positiv definit sind. □

Beispiel 5.10. (Fortsetzung von Beispiel 5.2)
Einsetzen in Formel (5.29) ergibt

$$u(x_1, x_2) = -x_1^3 + v,$$

genau das in Beispiel 5.2 verwendete Feedback.

5.4 Zusammenfassung

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Theorem 5.11. Betrachte ein kontroll-affines System (3.13). Wenn

$$\operatorname{rank} Dh(0) = m, \qquad \operatorname{rank} g(0) = m,$$

dann gilt: Das System ist genau dann feedbackpassivierbar mit einer zweimal stetig differenzierbaren positiv definiten Speicherfunktion, wenn es relativen Grad $(1, \dots, 1)$ in 0 hat und ein schwaches Minimalphasensystem ist.

Beweis. Die notwendigen Bedingungen folgen aus Korollar 5.7, die hinreichenden aus Proposition 5.9. □

Die hier entwickelte Technik kann dabei auch verwendet werden, wenn ein System gar keinen Ausgang besitzt.

Beispiel 5.12. (Fortsetzung von Beispiel 3.44)
Betrachte das System ohne Output

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u,\end{aligned}$$

dieses System ist kontroll-affin mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die bisher entwickelten Resultate anwenden zu können, muss das System mit einem "künstlichen" Output versehen werden.

Schritt 1: Relativer Grad 1 Eine Bedingung für die Feedbackpassivierbarkeit ist relativer Grad 1, das bedeutet in diesem SISO Fall (siehe Lemma 3.20 und Bemerkung 2), dass bereits in der ersten Ableitung des Outputs die Eingangsfunktion u auftreten muss, das heißt, die Funktion y muss direkt von x_2 abhängen (denn in der ersten Ableitung dieser Komponente tritt u auf). Wir setzen daher

$$y(t) = h(x_1, x_2) = x_2(t) - \alpha(x_1(t)), \tag{5.30}$$

wobei die (hinreichend reguläre) Funktion α noch gewählt werden muss.

Schritt 2: Schwache Minimalphase Die zweite Bedingung für Feedbackpassivierbarkeit ist die schwache Minimalphase, das heißt in diesem Fall, der Nullpunkt der Nulldynamik muss stabil sein und eine passende Funktion V existieren (siehe Definition 3.31). Aus $y \equiv 0$ folgt dann $x_2 = \alpha(x_1)$, damit muss mit α der Nullpunkt bezüglich

$$\dot{x}_1 = x_1 \alpha(x_1)$$

stabil sein. Eine einfache Möglichkeit wäre tatsächlich $\alpha(x_1) = 0$, damit ergibt sich

$$\dot{x_1} = 0. \tag{5.31}$$

Diese Gleichung ist stabil, für das weitere Vorgehen wird jedoch noch eine entsprechende Lyapunovfunktion benötigt. Eine häufig sinnvolle Wahl (cf. [34, Chapter 2]) ist

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

diese Funktion ist positiv definit und mit

$$\dot{V}(x_1) = 0$$

tatsächlich eine Lyapunovfunktion (wenn auch etwas degeneriert).

Schritt 3: Neue Darstellung Wir verwenden (5.30) um das erweiterte System darzustellen als

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_1 x_2\\ \dot{x_2} &= x_1 + u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

Dieses System ist bereits in Normalform.

Schritt 4: Passivierendes Feedback Einfaches Einsetzen in Formel (5.29) ergibt

$$u(x_1, y) = -x_1 - x_1^2 + v \tag{5.32}$$

Schritt 5: Passivieren Das Feedback (5.32) wird nun in das System eingesetzt, es ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + v\\ y &= x_2\end{aligned}$$

Dieses System ist passiv mit Speicherfunktion $S(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, denn

$$\dot{S}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2(-x_1^2) + x_2 v = x_2 v$$

(also sogar verlustfrei), außerdem offensichtlich nulldetektierbar (sogar nullbeobachtbar).

Schritt 6: Stabilisieren Da alle Voraussetzungen von Korollar 4.12 erfüllt sein, wird $v(y) = -y$ definiert, somit ergibt sich als Closed Loop-System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2 \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist für dieses System global asymptotisch stabil. Für den Nachweis betrachte die Lyapunov-Funktion S,

$$\dot{S}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_1^2 x_2 - x_2^2 = -x_2^2 \leq 0$$

(Ableitung ist negativ semidefinit) und beachte, dass aus $x_2 \equiv 0$ folgt, dass $x_1 \equiv 0$.

Bemerkung 5.13. Das in Beispiel 5.12 angewandte Vorgehen kann auch systematisiert werden. Bei der sogenannten *Backstepping-Methode* werden dabei die Schritte aus obigem Beispiel rekursiv angewandt, insbesondere kann damit die notwendige Bedingung der schwachen Minimalphase bei gewissen Systemen vermieden werden (cf. [17, Section 6.1]). Mit der ähnlichen *Forwarding-Methode* kann außerdem die notwendige Bedingung des relativen Grades 1 für bestimmte Systeme umgangen werden (cf. [17, Section 6.2]), die beiden Methoden können auch kombiniert werden (siehe [17, Section 6.3]). Backstepping kann auch unabhängig von Passivitätskonzepten zur Stabilisierung verwendet werden (siehe [26, Chapter 4], [34]).

Beachte, dass die hier dargestellten Resultate auf Systeme mit Feedthrough verallgemeinert werden können, wir verzichten aber auf Details (siehe [28]). Außerdem wurde für SISO-Systeme eine alternative Herangehensweise untersucht ([29]).

Kapitel 6

Abschließende Bemerkungen

Diese Arbeit beschäftigte sich mit dissipativen Systemen und die Einsatzmöglichkeiten des Dissipativitätskonzepts bei der Stabilisierung von Equilibria nichtlinearer Kontrollsysteme. Zur Definition dissipativer Systeme wurde die Originaldefinition von Jan C. Willems verwendet (siehe Abschnitt 2.1), wobei dieses Konzept in einem allgemeinen Rahmen genauer betrachtet wurde. Insbesondere wurde die Menge aller sogenannter Speicherfunktionen und die Regularität dieser Funktionen näher untersucht. Man beachte aber, dass die Theorie dissipativer Systeme inzwischen weit entwickelt ist und wir nur einen sehr kleinen Einblick geben konnten (siehe [1, Chapter 4]). Vorgestellt wurde neben der Input to State-Stabilität besonders die Passivität als Spezialfall der Dissipativität und der Zusammenhang zwischen Passivität und Lyapunov-Stabilitätstheorie wurde aufgezeigt. Mit Hilfe der geometrischen Theorie nichtlinearer Systeme wurde die Klasse von Systemen, welche sich mittels eines Feedbacks passivieren lassen, bestimmt. Die Erkenntnisse wurden außerdem an einfachen Beispielen angewendet.

Die Dissipativitätstheorie spielte in den letzten 20 Jahren eine immer größere Rolle bei der Betrachtung nichtlinearer Kontrollsysteme, zudem sind bereits zahlreiche praktische Anwendungen entstanden. Ab den 1990er Jahren wurde das Passivitätskonzept vielfach erfolgreich angewendet, zum Beispiel bei der Steuerung von elektromechanischen Systemen (Kontrolle von Elektromotoren und Transformatoren) [32] oder in der Robotersteuerung [1, Chapters 6,7,8].

Ein wichtiges Forschungsgebiet der modernen Kontrolltheorie sind nichtlineare Systeme. Für Kontrollaufgaben steht inzwischen eine reichhaltige Theorie zur Verfügung (siehe [12], [5]) und viele Techniken für verschiedenste Aufgaben (Stabilisierung, Tracking, Input-Output-Decoupling, Disturbance-Rejection / Attenuation, siehe zum Beispiel [5], [15]). In dieser Arbeit nicht betrachtet wurden Probleme der adaptiven Kontrolle (siehe hierzu zum Beispiel [34], [15], [17, Chapter 6]) oder robusten Kontrolle (siehe zum Beispiel [15]). Außerdem wurden nur endlichdimensionale kontinuierliche Systeme betrachtet (siehe [6, Chapter 2], [7, Chapter 2] für einen Überblick über andere mögliche Systemtypen), das Dissipativitätskonzept wurde inzwischen auch für diskrete Systeme entwickelt und für viele Probleme

angewendet.
Nicht detailliert betrachtet wurde außerdem die Frage, wie sich Systeme bei Zusammenschalten verhalten, ein einfaches Ergebnis in dieser Hinsicht war Theorem 2.9 für Passivität. Jedoch stehen sehr viele Resultate zu dieser Problemstellung zur Verfügung, zum Beispiel zum Stabilitätsverhalten und dem Design von Speicher- und Lyapunovfunktionen ([17, Chapters 4, 5]). Eine wichtige Rolle in dieser Hinsicht nimmt auch die Input to State-Stabilität ein (siehe [22, Chapter 4]), die nur kurz betrachtet wurde. Außerdem wurden Techniken zur konkreten Anwendung der vorgestellten Theorie nicht näher dargestellt, so lassen sich auch Systeme, die nicht die hinreichenden und notwendigen Bedingungen aus Kapitel 5 erfüllen, möglicherweise mit Backstepping und Forwarding (cf. [17, Chapter 6]) passivieren.
Man beachte, dass Dissipativität nur eines von vielen Konzepten ist, das bei der Betrachtung von nichtlinearen Systemen verwendet werden kann. Es stehen viele verschiedene Techniken zur Verfügung, neben den klassischen Linearisierungstechniken (siehe Abschnitt 3.3.3) auch spezielle nichtlineare Techniken wie Backstepping ([34], [26, Chapter 14]), Sliding Mode Control ([15], [26, Chapter 14]) oder Gain Scheduling ([26]).
Wir weisen zum Schluss darauf hin, dass dissipative Systeme, speziell die Theorie und Anwendung von Passivität und ISS, aktive und wichtige Forschungsgebiete der modernen nichtlinearen Kontrolltheorie sind.

Literaturverzeichnis

[1] Bernard Brogliato, Rogelio Lozano, Bernhard Maschke, Olav Egeland, *Dissipative Systems Analysis and Control*, 2nd Edition, Springer Verlag, London, 2007

[2] Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis 3*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009

[3] Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis 2*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009

[4] N. P. Bhatia, G.P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1970

[5] Alberto Isidori, *Nonlinear control systems*, 3rd Edition, Springer Verlag, London, 2001

[6] Eduardo D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, 2nd Edition, Springer Verlag, 1998

[7] Diederich Hinrichsen, Anthony J. Pritchard, *Mathematical Systems Theory*, Springer Verlag, 2005

[8] Christian Fiedler, *Dissipative Systeme*, Seminararbeit, Universität Bayreuth, Sommersemester 2014

[9] Jan C. Willems, *Dissipative Dynamical Systems: Part I*, Archive for rational mechanics and analysis, 45.5, p. 321-351, 1972

[10] Jan C. Willems, *Dissipative Dynamical Systems: Part II*, Archive for rational mechanics and analysis, 45.5, p. 352-393, 1972

[11] David J. Hill, Peter J. Moylan, *Dissipative Dynamical Systems: Basic Input-Output and State Properties*, Journal of the Franklin Institute, 309.5, p. 327-357, 1980

[12] Henrik Nijmeijer, Arjen van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, 2nd edition, Springer, 1991

[13] Arjen van der Schaft, *L_2-gain and Passivity-techniques in nonlinear control*, 2nd edition, Springer, 2000

[14] A. Iggidr, B. Kalitine, R. Outbib, *Semi-definite Lyapunov functions, stability and stabilization*, Mathematics of Control, Signals and Systems, 9:95-106, 1996

[15] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991

[16] Herbert Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Zweite Auflage, Walter de Gryter, Berlin, 1995

[17] R. Sepulchre, M Jankovic, P.V. Kokotovic, *Nonlinear Constructive Control*, Springer, London, 1997

[18] Lars Grüne, *Mathematische Kontrolltheorie*, Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2014

[19] Lars Grüne, Oliver Junge, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 2009

[20] I.G. Polushin, H.J. Marquez, *On the existence of a continuous storage function for dissipative systems*, Systems and Control Letters 46, p. 85-90, 2002

[21] Eduardo D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Automat. Control, 34(4):435-443, 1989

[22] Eduardo D. Sontag, *On the input-to-state stability property*, European Journal of Control, 1.1, p. 24-36, 1995

[23] Eduardo D. Sontag, Yuan Wang, *On Characterizations of the Input-to-State Stability Property*, Systems and Control Letters, Volume 24, Issue 5, 10 April 1995, Pages 351–359

[24] Eduardo D. Sontag, *Input to State stability: Basic concepts and results*, in Paolo Nistri, Gianna Stefani (Ed.), *Nonlinear and Optimal Control Theory*, Springer, 2008

[25] David Angeli, Eduardo D. Sontag, Yuan Wang, *A Characterization of integral input-to-state stability*, IEEE Transactions on Automatic Control, 45.6, p. 1082-1097, 2000

[26] Hassan K. Khalil, *Nonlinear System*, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002

[27] Christopher I. Byrnes, Alberto Isidori, Jan C. Willems, *Passivity, Feedback Equivalence and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 11, November 1991, 1228-1240

[28] G.L. Santosuosso, *Passivity of nonlinear systems with input-output feedthrough*, Automatica, Vol 33, Issue 4, April 1997, Pages 693–697

[29] Sira-Ramirez *A general canonical form for feedback passivity*, International Journal of Control, Special Issue: Recent Adv Control Nonlinear Syst 1998; 71(5): 891-905

[30] John M. Lee, *Smooth Manifolds*, Springer Verlag, 2013

[31] Matthew R. James, *A partial differential inequality for dissipative nonlinear systems*, Systems and Control Letters 21 (1993) 315-320

[32] Ortega, R., Loría Perez, J.A., Nicklasson, P.J., Sira-Ramirez, H., *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer, 1998

[33] VS Chellaboina, A Leonessa, WM Haddad, *Generalized Lyapunov and invariant set theorems for nonlinear dynamical systems*, Systems and Control Letters 38 (1999) 289–295

[34] Miroslav Krstic, Ioannis Kanellakopoulos, Petar V. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control*, Wiley, 1995

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen und Arbeiten erstellt habe. Die Bachelorarbeit habe ich bisher noch nicht zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.

Christian Fiedler, Bayreuth, 20. Februar 2015