

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK
UND INFORMATIK

LEHRSTUHL FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Input-to-State Stabilität und Stability Margins

MASTERARBEIT

Autor:
Stefan Müller

Betreuer:
Prof. Dr. Lars Grüne

18. Februar 2015

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Herrn Prof. Grüne sei für die interessante Themenstellung und die hervorragende Betreuung in den vergangenen Monaten herzlich gedankt. Für meine Fragen hat er sich immer Zeit genommen und diese geduldig und ausführlich beantwortet.

Zudem möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich, nicht nur während der Anfertigung dieser Arbeit, sondern während meines gesamten Studiums großartig unterstützt hat. Gerade in stressigen Phasen des Studiums war das vermutlich alles andere als leicht.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Korrekturlesern bedanken, die mir viele hilfreiche Verbesserungsvorschläge gegeben haben. Verbliebene Fehler gehen natürlich vollständig auf mein Konto.

Inhaltsverzeichnis

1. Wiederholung wichtiger Grundbegriffe	9
1.1. Grundbegriffe für Differentialgleichungen	9
1.2. Einige Hilfsaussagen für Differentialgleichungen	17
1.3. Grundbegriffe für Kontrollsysteme	22
2. Input-to-State Stabilität	27
2.1. Definition und Herleitung	27
2.2. Charakterisierungen von Input-to-State Stabilität	31
2.3. Input-to-State Stabilität im linearen Fall	40
3. Verwandte Stabilitätsbegriffe	43
3.1. Lokale Input-to-State Stabilität	43
3.2. Integral Input-to-State Stabilität	46
3.3. Dynamische Input-to-State Stabilität	48
3.4. Stabilitätsbegriffe für Kontrollsysteme mit Ausgang	51
4. Anwendungen der Input-to-State Stabilität	55
4.1. Kaskadierungen	55
4.2. Feedback Redesign	60
5. Input-to-State Stabilität und spezielle Stability Margins	63
5.1. Spezielle Stability Margins für zweidimensionale Systeme mit vorgegebener Struktur	63
5.2. Beweis der Äquivalenz zu Input-to-State Stabilität	72
5.3. Verallgemeinerung auf n -dimensionale Systeme	78
5.4. Spezielle Stability Margins im linearen Fall	81
5.5. Notwendigkeit der Systemstruktur	83
5.6. Verallgemeinerung auf nicht-skalare Teilsysteme	86
6. Input-to-State Stabilität und verallgemeinerte Stability Margins	89
6.1. Verallgemeinerte Stability Margins für zweidimensionale Systeme mit vorgegebener Struktur	89
6.2. Beweis der Äquivalenz zu Input-to-State Stabilität	92
6.3. Abschwächen der Voraussetzungen	100
6.4. Verallgemeinerung auf n -dimensionale Systeme	103
6.5. Verallgemeinerte Stability Margins im linearen Fall	105
6.6. Notwendigkeit der Systemstruktur	106
6.7. Verallgemeinerung auf nicht-skalare Teilsysteme	109
7. Zusammenfassung und Ausblick	111

A. Anhang	113
Abbildungsverzeichnis	121
Literaturverzeichnis	122

Vorwort und Notation

In dieser Arbeit wird das aus Veröffentlichungen zur Input-to-State Stabilität (z.B. [26], [27] und [29]) bekannte Konzept der Stability Margins untersucht. Für Kontrollsysteme mit vorgegebener Struktur wird versucht, den Begriff der Stability Margins dahingehend anzupassen, dass sich in dieser die Struktur des Systems widerspiegelt. Untersucht wird dabei insbesondere die Frage, in welchem Verhältnis die Existenz einer angepassten Stability Margin zu Input-to-State Stabilität steht und ob die bestehende Äquivalenzaussage für „normale“ Stability Margins erhalten bleibt. Die Arbeit ist dabei wie folgt unterteilt: Kapitel 1 wiederholt zunächst wichtige Grundlagen zu Differentialgleichungen und Kontrollsystemen, bevor in den Kapiteln 2 bis 4 ausführlich die Input-to-State Stabilität behandelt wird. An die Definition und einige zentrale Aussagen über diesen Stabilitätsbegriff in Kapitel 2 schließt sich mit Kapitel 3 eine kurze Zusammenfassung verwandter Stabilitätsbegriffe an, bevor in Kapitel 4 wichtige Anwendungen der Input-to-State Stabilität untersucht werden. In den Abschnitten 5 und 6 wird dann das Hauptziel der Arbeit verfolgt und es werden zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt, wie man die Systemstruktur in die Stability Margins integrieren kann. Abschließend werden in Kapitel 7 die zu diesen Ansätzen bewiesenen Aussagen zusammengefasst.

Bevor wir mit der Wiederholung der wichtigsten Aussagen über Differentialgleichungen beginnen, wollen wir noch den Teil der in dieser Arbeit verwendeten Notation erklären, der eventuell unklar ist. Als Norm wird, sofern nicht explizit anders angegeben, die Maximumnorm verwendet. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist also

$$\|x\| := \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$$

und für eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei $\|A\|$ die durch obige Vektornorm induzierte Matrixnorm

$$\|A\| := \|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, die außerhalb von Nullmengen beschränkt ist, sei

$$\|f\| := \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|f(t)\|_\infty$$

das wesentliche Supremum dieser Funktion. Wird die Norm einer solchen Funktion nur auf einem bestimmten Intervall $[s_1, s_2]$ betrachtet, wird

$$\|f_{[s_1, s_2]}\| := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [s_1, s_2]} \|f(t)\|_\infty$$

geschrieben. Zudem wird für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Notation $x \leq y$ verwendet. Damit ist gemeint, dass die Ungleichung komponentenweise erfüllt ist. Es gilt also

$$x \leq y \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

In Kapitel 6 wird außerdem für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ die Notation $x_{1,\dots,k}$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ verwendet. Damit ist gemeint, dass die ersten k Einträge des Vektor betrachtet werden. Das heißt

$$x_{1,\dots,k} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist damit $x_{1,\dots,1} = x_1$ und $x_{1,\dots,n} = x$.

1. Wiederholung wichtiger Grundbegriffe

In der Kontrolltheorie beschäftigt man sich mit Differentialgleichungen, die zusätzlich von einem Parameter $u(t) \in \mathbb{R}^m$ abhängen. Diesen Parameter kann man entweder als bewusste Steuerung des Systems interpretieren oder als eine Störung, die von außen auf das System einwirkt. Im ersten Fall beschäftigt man sich vor allem mit der Frage, ob sich eine Kontrollfunktion $u(t)$ finden lässt, durch die ein bestimmter Zustand $x^* \in \mathbb{R}^n$ erreicht bzw. stabilisiert wird. Im zweiten Fall ist vor allem interessant, wie stark die Störung $u(t)$ sein darf, ohne ein stabiles System aus dem Gleichgewicht zu bringen. Um diesen Unterschied bereits in der Notation anzudeuten, wird dann häufig $u(t)$ durch $d(t)$ ersetzt. Doch bevor wir uns mit Kontrollsystemen beschäftigen, müssen wir einige wichtige Begriffe für Differentialgleichungen wiederholen.

1.1. Grundbegriffe für Differentialgleichungen

Differentialgleichungen erster Ordnung werden durch Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen ist. Die Abbildung f bezeichnet man auch als Vektorfeld. Für einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einen Anfangszeitpunkt t_0 bezeichnen wir mit $\varphi(t, t_0, x_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x_0) &= f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \\ \varphi(t_0, t_0, x_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Damit diese Notation und das Sprechen von „der Lösung“ des Anfangswertproblems überhaupt Sinn macht, benötigt man Mechanismen, die die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\varphi(t, t_0, x_0)$ garantieren. Eine Möglichkeit dafür ist der folgende Satz von Picard-Lindelöf (vgl. z.B. [4, Satz 2.3.7]).

Satz 1.1. Betrachte (1.1) mit stetigem Vektorfeld, das zudem Lipschitz-stetig im folgenden Sinne ist: Für jedes $K \subset D$ kompakt existiert eine Konstante $L > 0$, sodass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ mit $(t, x_1), (t, x_2) \in K$ die Bedingung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

erfüllt ist. Dann existiert für jede Anfangsbedingung (t_0, x_0) mit $x_0 \in D$ eine eindeutige Lösung $\varphi(t, t_0, x_0)$ des Anfangswertproblems (1.2) auf einem offenen maximalen Existenzintervall I_{t_0, x_0} mit $t_0 \in I_{t_0, x_0}$.

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt direkt, dass sich Trajektorien zu unterschiedlichen Anfangswerten nicht schneiden, was wir mehrmals verwenden werden. In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich Differentialgleichungen mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und benötigen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf $I_{t_0, x_0} = \mathbb{R}$. Diese würde der Satz von Picard-Lindelöf liefern, wenn die Lipschitzbedingung für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ erfüllt ist, was allerdings nur selten der Fall ist. Einen Ausweg bieten die nicht fortsetzbare Lösung und der Satz vom maximalen Existenzintervall. Etwas vereinfacht liefern diese beiden Hilfsmittel die Aussage, dass für eine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit stetigem, sowie in x lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung $\varphi(t, t_0, x_0)$, die auf einem Intervall $[a, b)$ stetig und auf (a, b) stetig differenzierbar ist, so fortgesetzt werden kann, dass sie die Differentialgleichung auf einem Intervall $[a, c)$ erfüllt. Dann können die folgenden 3 Fälle eintreten:

- (i) $c = \infty$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow c} \|\varphi(t, t_0, x_0)\| = \infty$
- (iii) Es existiert eine Folge $t_j \rightarrow c$, sodass $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, t_0, x_0) = \varphi^*$ existiert und $(c, \varphi^*) \in \partial G$ gilt, wobei ∂G der Rand von G ist.

In [1, Satz 7.6] wurden diese Aussagen zu einem globalen Existenz und Eindeutigkeitsatz zusammengefasst. Da wir $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ betrachten und damit $\partial D = \emptyset$ gilt, kann (iii) nicht gelten. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf ganz \mathbb{R} zu zeigen, muss man also nur noch Möglichkeit (ii) ausschließen. Im Folgenden werden wir in den allgemeinen Aussagen immer davon ausgehen, dass (ii) nicht eintritt und daher die Lösung eines Anfangswertproblems für alle $t \geq t_0$ definiert ist. In den betrachteten Beispielen müssen wir das natürlich noch zeigen, was wir exemplarisch in Beispiel 1.12 tun werden.

Zudem beschränken wir uns auf die Betrachtung von autonomen Differentialgleichungen, also Differentialgleichungen, die nicht explizit vom Zeitparameter t abhängen. Damit reduziert sich die Formel (1.1) zu

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.3}$$

mit $D \subset \mathbb{R}^n$. Ohne Einschränkung kann man dann $t_0 = 0$ annehmen. Schreiben wir nun für den Anfangswert x statt x_0 können wir die Lösung mit $\varphi(t, x)$ anstelle von $\varphi(t, t_0, x_0)$ bezeichnen. Der Spezialfall einer linearen autonomen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1.4}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

kann man die Lösung eines linearen Anfangswertproblems (1.4) durch

$$\varphi(t, x) = e^{At}x \tag{1.5}$$

explizit angeben.

Allgemein gilt für die Lösung eines Anfangswertproblems die häufig verwendete Kozykluseigenschaft

$$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)). \quad (1.6)$$

Die Interpretation dieser Eigenschaft ist, dass man den Anfangswert auf einer Trajektorie beliebig verschieben kann, ohne dass sich die Lösung verändert.

Wie bereits erwähnt ist die Analyse von Stabilitätseigenschaften einer Differentialgleichung ein wesentlicher Bestandteil der Kontrolltheorie. Insbesondere ist die Frage, ob ein Gleichgewichtszustand (asymptotisch) stabil ist, von großer Wichtigkeit. Dafür müssen wir zunächst definieren, was überhaupt mit einem Gleichgewicht gemeint ist.

Definition 1.2. Ein Zustand $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewicht der Differentialgleichung (1.3), falls $f(x^*) = 0$ ist. ■

Man sieht leicht, dass x^* genau dann ein Gleichgewicht ist, wenn $\varphi(t, x^*) = x^*$ für alle $t \geq 0$ ist. Üblicherweise untersucht man $x^* = 0$, was die Schreibweisen vereinfacht und auch keine Einschränkung ist. Denn für $x^* \neq 0$ kann man zum transformierten System $\tilde{f}(x) = f(x + x^*)$ übergehen. Dadurch verschiebt sich die Trajektorie nach oben oder unten, der Verlauf bleibt aber identisch. Bevor wir nun verschiedene Stabilitätsbegriffe für ein Gleichgewicht definieren können, benötigen wir einige Klassen von Funktionen.

Definition 1.3. Die Funktionenklassen \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ , \mathcal{L} und \mathcal{KL} sind gegeben durch:

$$\mathcal{K} := \{ \alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \alpha \text{ stetig, streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0 \}$$

$$\mathcal{K}_\infty := \{ \alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ unbeschränkt} \}$$

$$\mathcal{L} := \{ \gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma \text{ stetig, streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0 \}$$

$$\mathcal{KL} := \{ \beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K} \forall t \geq 0 \text{ und } \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L} \forall r > 0 \}$$
■

Bemerkung 1.4. Eine wichtige Eigenschaft von \mathcal{KL} -Funktionen ist, dass die Minimalfunktion (bzw. Maximalfunktion) von endlich vielen \mathcal{KL} -Funktionen wieder eine \mathcal{KL} -Funktion ist. Dazu betrachten wir $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{KL}$ und definieren

$$\beta(r, t) := \min_{i=1, \dots, n} \beta_i(r, t) \quad (\text{bzw. } \beta(r, t) := \max_{i=1, \dots, n} \beta_i(r, t)).$$

Da jedes β_i stetig ist, gilt das auch für β . Zudem ist für ein festes $t^* \geq 0$ jedes β_i streng monoton steigend und unbeschränkt in r , also auch die Minimalfunktion (bzw. Maximalfunktion). Zudem ist

$$\beta(0, t^*) = \min_{i=1, \dots, n} \beta_i(0, t^*) = \min_{i=1, \dots, n} 0 = 0.$$

Für ein festes $r > 0$ hingegen ist jedes β_i streng monoton fallend in t . Daher ist auch β streng monoton fallend und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = \min_{i=1, \dots, n} (\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_i(r, t)) = \min_{i=1, \dots, n} 0 = 0.$$

Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass die Minimalfunktion (bzw. Maximalfunktion) von endlich vielen \mathcal{K} - bzw. \mathcal{K}_∞ -Funktionen wieder \mathcal{K} - bzw. \mathcal{K}_∞ -Funktionen sind. ■

Nun können wir sehr anschaulich die folgenden Stabilitätsbegriffe definieren.

Definition 1.5. Sei $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ Gleichgewicht von (1.3).

(i) x^* heißt (lokal) stabil, falls es eine Umgebung N von x^* und ein $\alpha \in \mathcal{K}$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \alpha(\|x\|) \quad \forall x \in N, t \geq 0.$$

(ii) x^* heißt (lokal) asymptotisch stabil, falls es eine Umgebung N von x^* und ein $\beta \in \mathcal{KL}$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad \forall x \in N, t \geq 0.$$

(iii) x^* heißt (lokal) exponentiell stabil, falls (ii) mit $\beta(r, t) := Ce^{-\sigma t}r$ für Konstanten $C, \sigma > 0$ gilt.

(iv) x^* heißt global asymptotisch bzw. global exponentiell stabil, falls (ii) bzw. (iii) für $N = \mathbb{R}^n$ gilt. ■

Bevor wir eine weitere Möglichkeit angeben, wie man globale asymptotische Stabilität definieren kann, erinnern wir daran, dass im linearen Fall viele der Stabilitätsbegriffe äquivalent sind. Für eine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ genau dann global exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil besitzen, also

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \text{ für alle } \lambda_i \text{ Eigenwerte von } A \tag{1.7}$$

gilt. Diese Bedingung ist aber auch äquivalent zu lokaler exponentieller Stabilität und globaler sowie lokaler asymptotischer Stabilität, was insbesondere bedeutet, dass diese vier Stabilitätsbegriffe im linearen Fall äquivalent sind (vgl. [11, Bemerkung 3.3, Satz 3.5]). Mit Bedingung (1.5) ist also jeder der vier Stabilitätsbegriffe globale asymptotische, lokale asymptotische, globale exponentielle und lokale exponentielle Stabilität äquivalent zu der Bedingung

$$\|e^{At}x\| \leq Ce^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0 \tag{1.8}$$

für Konstanten $C, \sigma > 0$.

Bemerkung 1.6. Es bleibt festzuhalten, dass globale asymptotische Stabilität des Gleichgewichts $x^* = 0$ häufig über die beiden Bedingungen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } \|x\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (1.9)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0 \exists T > 0 \text{ mit } \|x\| < r \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T \quad (1.10)$$

definiert wird. Die Äquivalenz zur Definition mit den Vergleichsfunktionen ist leicht zu zeigen. Weil der Beweis in der Literatur aber nur selten durchgeführt wird, wollen wir dies im Folgenden tun.

(i) Angenommen die Bedingungen (1.9) und (1.10) sind erfüllt. Dann definieren wir

$$\beta(r, t) := \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\| + e^{-t}r.$$

Offensichtlich ist damit $\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \geq 0$. Es ist also nur noch zu zeigen, dass das so definierte β eine \mathcal{KL} -Funktion ist. Etwas umfangreich ist dabei der Beweis der Wohldefiniertheit und Stetigkeit von

$$\tilde{\beta}(r, t) := \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\|.$$

Um nicht vom Wesentlichen abzulenken, befindet sich dieser Beweis im Anhang (Lemma A.1). Aus der Stetigkeit von $\tilde{\beta}$ folgt die Stetigkeit von β als Verknüpfung stetiger Funktionen. Die übrigen Eigenschaften einer \mathcal{KL} -Funktion lassen sich leicht nachweisen. Für ein festes $t^* \geq 0$ ist $\beta(r, t^*)$ streng monoton wachsend in r , da der erste Summand monoton und der zweite Summand streng monoton wächst. Zudem ist $\beta(0, t^*) = 0$, da 0 ein Gleichgewicht ist. Für ein festes $r^* > 0$ ist der erste Summand monoton fallend und der zweite Summand streng monoton fallend, sodass $\beta(r^*, t)$ streng monoton fallend in t ist. Zudem gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r^*, t) = 0$. Um das zu beweisen, wählt man eine beliebige Folge ε_k mit $\varepsilon_k \downarrow 0$ und erhält mit (1.10) eine Folge T_k mit $\|\varphi(t, x)\| \leq \varepsilon_k$ für alle $t \geq T_k$ und damit für $t \rightarrow \infty$ den Grenzwert 0.

(ii) Umgekehrt sei eine \mathcal{KL} -Funktion β gegeben, sodass $\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \geq 0$ gilt.

zu (1.9): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\beta(0, 0) = 0$ ist und $\beta(r, 0)$ stetig in r ist, können wir ein r^* finden, sodass $\beta(r^*, 0) < \varepsilon$ und wir definieren $\delta = r^*$. Damit gilt für alle x mit $\|x\| < \delta$ und alle $t \geq 0$

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \leq \beta(r^*, t) \leq \beta(r^*, 0) < \varepsilon,$$

was genau Bedingung (1.9) entspricht.

zu (1.10): Seien $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ gegeben. Da $\beta(r, t)$ für ein festes $r > 0$ streng monoton fallend in t ist und gegen 0 konvergiert, können wir ein $T = T(r, \varepsilon)$ finden, sodass $\beta(r, t) < \varepsilon$ für alle $t \geq T$ ist. Damit gilt für alle x mit $\|x\| \leq r$ und alle $t \geq T$

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \leq \beta(r, t) < \varepsilon,$$

also Bedingung (1.10). ■

Die Bedingungen (1.9) und (1.10) findet man in der Literatur häufig unter den Namen „Stabilität“ und „Globale Attraktivität“. Die Charakterisierung der globalen asymptotischen Stabilität über Vergleichsfunktionen ist etwas handlicher und in vielen Beispielen leichter anzuwenden. Die Bedingungen Stabilität und globale Attraktivität haben zum Teil Vorteile in Beweisen, können aber auch hilfreich sein, wenn man die Lösung einer Differentialgleichung nicht analytisch berechnen kann (vgl. Beispiel 6.5).

Der nächste zentrale Begriff, den wir wiederholen wollen, ist der Begriff der Lyapunov-Funktion.

Definition 1.7. Sei $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ Gleichgewicht von (1.3) und \mathcal{O} eine offene Umgebung von 0. Eine glatte Funktion $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokale Lyapunov-Funktion, falls es Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ gibt, sodass die Ungleichungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (1.11)$$

$$DV(x)f(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (1.12)$$

für alle $x \in \mathcal{O}$ erfüllt sind. Falls $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ heißt V globale Lyapunov-Funktion. ■

Bemerkung 1.8. In der Literatur finden sich Definitionen der Lyapunov-Funktion, die sich leicht von obiger Definition unterscheiden. Bedingung (1.11) wird häufig durch die Voraussetzung ersetzt, dass V positiv definit und proper ist. Positiv definit heißt $V(0) = 0$ und $V(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und proper bedeutet $V^{-1}(C)$ ist kompakt für kompaktes $C \subset \mathbb{R}$. Für ein stetiges $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ bedeutet proper also

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

Man erkennt leicht, dass die Voraussetzung positiv definit und proper äquivalent zu (1.11) ist. In Bedingung (1.12) wird α_3 häufig nicht als \mathcal{K} -Funktion vorausgesetzt, sondern nur als eine stetige Funktion, die $\alpha_3(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ erfüllt. Ebenso wird dabei die Voraussetzung einer glatten Funktion V durch V stetig und stetig differenzierbar in $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ ersetzt. Bedingung (1.12) muss dann ebenfalls nur für alle $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ gelten. Durch ein entsprechendes Anpassen und Glätten von V sieht man auch hier, dass die verschiedenen Arten der Darstellung von Bedingung (1.12) äquivalent sind. ■

Der Vorteil, den unsere Definition der Lyapunov-Funktion hat, wird sich erst in Kapitel 2.2 zeigen. Man wird dann sehen, dass diese Darstellung bereits sehr nah an der Definition der ISS-Lyapunov-Funktion ist. Wir erinnern uns an das folgende zentrale Resultat, dessen Beweis sich beispielsweise in [11, Kapitel 3.3] findet.

Satz 1.9. Sei $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ Gleichgewicht von (1.3). Eine lokale (bzw. globale) Lyapunov-Funktion V existiert genau dann, wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch stabil ist.

Zusammengefasst haben wir einige Stabilitätsbegriffe für (im Allgemeinen nichtlineare) Differentialgleichungen kennengelernt und eine wichtige Charakterisierung asymptotischer Stabilität über Lyapunov-Funktionen. Bis jetzt haben wir allerdings noch nichts über die Qualität der einzelnen Stabilitätsbegriffe ausgesagt. Im Folgenden wollen wir etwas genauer darauf eingehen und uns dabei insbesondere mit Koordinatentransformationen auseinandersetzen. Eine wünschenswerte Eigenschaft wäre es, dass die jeweilige Stabilität unter einem Koordinatenwechsel erhalten bleibt. Anders formuliert sollte ein nichtlineares Stabilitätskonzept unter nichtlinearen Koordinatentransformationen invariant sein. Diese Aussage findet man häufig unter der Bezeichnung „Sontags Mantra“ und wird E. D. Sontag zugeschrieben, der seit den 90er Jahren die Entwicklung Input-to-State Stabilität maßgeblich geprägt hat. Für eine Untersuchung der Stabilitätsbegriffe aus Definition 1.5 im Hinblick auf diese Aussage müssen wir zuerst definieren, was ein Koordinatenwechsel ist.

Definition 1.10. Eine Koordinatentransformation ist definiert durch eine stetige Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $T(0) = 0$, deren Umkehrabbildung T^{-1} wohldefiniert und ebenfalls stetig ist. ■

Wichtig ist nun natürlich vor allem, wie sich eine Differentialgleichung unter einem Koordinatenwechsel verhält, was wir in der folgenden Bemerkung festhalten.

Bemerkung 1.11. Wendet man einen Koordinatenwechsel $y = T(x)$ auf eine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ an, erhält man die transformierte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(T(x(t))) = \left(\frac{d}{dx}T \right) (x(t)) \cdot \frac{d}{dt}(x(t)) = DT(x(t))f(x(t)) \\ &= DT(T^{-1}(y(t)))f(T^{-1}(y(t))) \\ &=: \tilde{f}(y(t)). \end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel zeigt sich, dass der Stabilitätsbegriff „exponentielle Stabilität“ unter einem nichtlinearen Koordinatenwechsel verloren gehen kann. ■

Beispiel 1.12. Betrachte die nach (1.7) exponentiell stabile Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

Wir definieren

$$T(x) := \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ -\ln(1-x), & x < 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $T(0) = 0$ erfüllt. Man kann leicht zeigen, dass T stetig und sogar differenzierbar ist und die folgende Umkehrabbildung besitzt:

$$T^{-1}(y) = \begin{cases} e^y - 1, & y \geq 0 \\ 1 - e^{-y}, & y < 0 \end{cases}$$

Somit ist T ein Koordinatenwechsel gemäß Definition 1.10. Die Ableitung von T ist gegeben durch

$$DT(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Wenden wir nun den Koordinatenwechsel auf $\dot{x}(t) = -x(t)$ an, erhalten wir nach Bemerkung 1.11 die transformierte Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} e^{-y(t)} - 1, & y(t) \geq 0 \\ 1 - e^{y(t)}, & y(t) < 0 \end{cases}$$

Die rechte Seite ist stetig partiell differenzierbar nach $y(t)$ und somit auch lokal Lipschitzstetig im zweiten Argument. Wir können also Satz 1.1 anwenden. Für den Anfangswert $y(0) = 0$ erhalten wir die Lösung $y \equiv 0$. Da sich Trajektorien nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht schneiden, wird die Nahtstelle nicht überschritten und für positive Anfangswerte bleibt man immer im oberen Ast (für negative Anfangswerte analog im unteren Ast). Die Definition der Differentialgleichung ist also äquivalent zu

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} e^{-y(t)} - 1, & y(0) \geq 0 \\ 1 - e^{y(t)}, & y(0) < 0. \end{cases}$$

Unter der Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$ erhalten wir die Lösung

$$y(t, y_0) = \ln(e^{-t}(e^{y_0} + e^t - 1)).$$

Man erkennt, dass die Lösung für alle Zeitpunkte $t \geq 0$ beschränkt ist. Folglich ist $y(t, y_0)$ eine globale Lösung, ist also für alle $t \geq 0$ definiert. Nun nehmen wir an, die transformierte Differentialgleichung wäre exponentiell stabil. Dann würde gelten: $\exists C, \sigma > 0$ mit

$$|y(t, y_0)| \leq C e^{-\sigma t} |y_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Daraus würde folgen: $\exists t^* > 0$, sodass

$$|y(t^*, y_0)| \leq \frac{1}{2} |y_0| \quad \forall y_0.$$

Es gilt aber

$$|y(t^*, y_0)| = \left| \ln(e^{y_0 - t^*} + \underbrace{1 - e^{-t^*}}_{\geq 0}) \right|.$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $t^* \geq 1$ (sonst können wir einfach $t^* = 1$ setzen) und wählen ein $y_0 > t^*$. Da $|\ln(\cdot)|$ auf $[1, \infty)$ streng monoton wächst, können wir obige Ungleichung abschätzen zu

$$|y(t^*, y_0)| \geq |\ln(e^{y_0 - t^*})| = |y_0 - t^*|.$$

Definieren wir nun $y_0 := 3t^*$ erhalten wir

$$|2t^*| \leq |y(t^*, y_0)|.$$

Gleichzeitig müsste aber gelten

$$|y(t^*, y_0)| \leq \frac{1}{2}|y_0| = \frac{3}{2}|t^*|,$$

was mit $t^* \geq 1$ den Widerspruch

$$|2t^*| \leq \frac{3}{2}|t^*|$$

liefert. Daraus folgt, dass die transformierte Differentialgleichung nicht exponentiell stabil sein kann. ■

Wir werden im Gegensatz dazu mit Satz 2.5 sehen, dass asymptotische Stabilität unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt. In den kommenden Beispielen werden wir darauf verzichten, die globale Existenz der Lösung nachzuweisen und davon ausgehen, dass diese gegeben ist, da der Beweis immer wie in Beispiel 1.12 abläuft.

1.2. Einige Hilfsaussagen für Differentialgleichungen

Nachdem wir nun die wichtigsten Grundlagen für Differentialgleichungen wiederholt haben, können wir einige Hilfsaussagen beweisen, die uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit von großem Nutzen sein werden. Das erste Lemma bietet uns die Möglichkeit die globale asymptotische Stabilität einer eindimensionalen Differentialgleichungen zu zeigen, ohne diese explizit zu lösen. Für komplizierte Differentialgleichungen kann das Lemma also ähnlich hilfreich sein wie die Charakterisierung über Lyapunov-Funktionen.

Lemma 1.13. Eine eindimensionale Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$, die die Bedingung

$$\dot{x}(t) \begin{cases} < 0, & x(t) > 0 \\ = 0, & x(t) = 0 \\ > 0, & x(t) < 0 \end{cases}$$

erfüllt, ist global asymptotisch stabil.

Beweis: Aus der Voraussetzung an $\dot{x}(t)$ folgt direkt, dass der Nullpunkt das einzige Gleichgewicht der Differentialgleichung ist und $\varphi(t, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$ gilt. Das heißt für den Anfangswert 0 ist die Lösung des Anfangswertproblems die konstante Nulllösung. Zudem gilt $|\varphi(t_1, x)| < |\varphi(t_2, x)|$ für beliebiges $x \neq 0$ und $t_1 > t_2 \geq 0$. Anders ausgedrückt ist die Lösung in der Norm streng monoton fallend, wenn der Anfangswert ungleich 0 ist. Mit diesen Beobachtungen werden wir nun die Bedingungen (1.9) und (1.10) zeigen.

Zu (1.9): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Es gilt $\varphi(0, x) = x$ und damit $|\varphi(0, x)| = |x|$. Für $\delta := \varepsilon$ folgt für x mit $|x| < \delta$ direkt

$$|\varphi(t, x)| \leq |\varphi(0, x)| = |x| < \delta = \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$.

Zu (1.10): Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir betrachten zuerst ein $x > 0$. Aus der Definition der Differentialgleichung folgt, dass $\varphi(t, x)$ in t streng monoton fällt. Zudem ist 0 eine untere Schranke für $\varphi(t, x)$, da $\varphi \equiv 0$ die Lösung zum Anfangswert 0 ist und sich Trajektorien (nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz) nicht schneiden. Damit wissen wir, dass $\varphi(t, x)$ konvergent ist. Wir verwenden nun das Lemma von Barbalat (vgl. [19, Lemma 4.2]), welches besagt, dass eine konvergierende Trajektorie nur gegen ein Gleichgewicht laufen kann. Da $x^* = 0$ aber das einzige Gleichgewicht der Differentialgleichung ist, erhalten wir für einen beliebigen Anfangswert $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = 0.$$

Da man für einen beliebigen Anfangswert $x < 0$ analog mit $\varphi(t, x)$ streng monoton steigend und 0 als oberer Schranke argumentieren kann, gilt diese Aussage sogar für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit lässt sich nun Bedingung (ii) leicht zeigen. Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Lösungen $\varphi(t, x_1)$ und $\varphi(t, x_2)$ zu den Anfangswerten $x_1 = r$ und $x_2 = -r$. Wir wissen, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_i) = 0$ für $i = 1, 2$ und damit, dass es Zeiten $T_1 > 0$ und $T_2 > 0$ gibt, sodass $|\varphi(t, x_i)| < \varepsilon$ für alle $t > T_i$ und ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ist. Wir definieren nun $T := \max\{T_1, T_2\}$ und erhalten damit für alle x mit $|x| < r$

$$|\varphi(t, x)| < \varepsilon \quad \forall t \geq T.$$

Diese Implikation gilt, weil sich Trajektorien nicht schneiden und damit die Trajektorien für beliebige Anfangswerte x mit $|x| < r$ durch $\varphi(t, x_1)$ nach oben und $\varphi(t, x_2)$ nach unten beschränkt sind. Damit haben wir gezeigt, dass die Bedingungen (1.9) und (1.10) erfüllt sind und somit globale asymptotische Stabilität bewiesen. □

Dieses Lemma gilt zwar nur für eindimensionale Differentialgleichungen, wird uns aber in Kombination mit einer Aussage über Kaskadierungen (vgl. Folgerung 4.2) in vielen Beispielen weiterhelfen. Das nächste Lemma gilt in beliebiger Dimension, wird jedoch für die Anwendung noch einige Hilfsresultate über Differentialungleichungen benötigen. Da wir dabei mehrere Anfangswertprobleme zeitgleich betrachten werden, schreiben wir die Lösung von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$ in diesem Abschnitt als $x(t, x_0)$. Ungleichungen von Vektoren sind dabei komponentenweise zu verstehen.

Lemma 1.14. Gegeben sei eine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit der Lösung $x(t, x_0)$. Es gelte $z(t, x_0) \leq x(t, x_0) \leq y(t, x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \geq 0$, wobei $z(t, x_0)$ und $y(t, x_0)$ die Lösungen der global asymptotisch stabilen Differentialgleichungen $\dot{z}(t) = g(z(t))$ bzw. $\dot{y}(t) = h(y(t))$ sind. Dann ist auch $\dot{x}(t)$ global asymptotisch stabil.

Beweis: Da \dot{y} und \dot{z} global asymptotisch stabil sind, existieren \mathcal{KL} -Funktionen β_y und β_z , sodass für alle $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|y(t, x_0)\| &\leq \beta_y(\|x_0\|, t) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \|z(t, x_0)\| &\leq \beta_z(\|x_0\|, t) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben bedeutet das

$$\begin{aligned} -\beta_y(\|x_0\|, t) &\leq y_i(t, x_0) \leq \beta_y(\|x_0\|, t) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \\ -\beta_z(\|x_0\|, t) &\leq z_i(t, x_0) \leq \beta_z(\|x_0\|, t) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Aus $y(t, x_0) \leq x(t, x_0) \leq z(t, x_0) \quad \forall t \geq 0$ folgt also

$$-\beta_y(\|x_0\|, t) \leq x_i(t, x_0) \leq \beta_z(\|x_0\|, t) \quad \forall t \geq 0.$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Definiert man nun $\beta(r, t) := \max\{\beta_y(r, t), \beta_z(r, t)\}$ erhält man

$$\|x(t, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0,$$

also globale asymptotische Stabilität von $\dot{x}(t)$. □

Wesentlich für dieses Lemma ist die Voraussetzung $z(t, x_0) \leq x(t, x_0) \leq y(t, x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \geq 0$. Mithilfe von Differentialungleichungen lässt sich diese durch Abschätzungen an die rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sicherstellen. Der folgende Satz liefert eine Aussage über eindimensionale, strikte Differentialungleichungen (vgl. [18, Satz 1.14]).

Satz 1.15. Betrachte eine eindimensionale Differentialgleichung $\dot{x}(t) < h(x(t))$. Es gelte $x(0) < y_0$ und $y(t, y_0)$ sei die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = h(y(t))$, $y(0) = y_0$. Dann gilt $x(t, x_0) < y(t, y_0)$ für alle $t \geq 0$.

Beweis: Aufgrund der Anfangsbedingungen ist $x(0, x_0) < y(0, y_0)$. Angenommen es existiert ein $t > 0$, sodass $x(t, x_0) \geq y(t, y_0)$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von $x(t, x_0)$ und $y(t, y_0)$ auch ein minimales $t^* \in (0, t]$ für das gilt

$$x(t^*, x_0) = y(t^*, y_0) \text{ und } x(t^* - h, x_0) < y(t^* - h, y_0) \text{ für ein beliebig kleines } h > 0.$$

Dann ist

$$\frac{x(t^*, x_0) - x(t^* - h, x_0)}{h} > \frac{y(t^*, y_0) - y(t^* - h, y_0)}{h}.$$

Für $h \downarrow 0$ wäre damit aber wegen der Differenzierbarkeit von $x(t, x_0)$ und $y(t, y_0)$

$$\dot{x}(t^*) \geq \dot{y}(t^*) = h(y(t^*)) = h(x(t^*)),$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung $\dot{x}(t) < h(x(t))$ für alle $t \geq 0$ ist. □

Bemerkung 1.16. (i) Durch einen Grenzübergang kann man Satz 1.15 auch analog mit \leq formulieren (vgl. [18, Lemma 4.2.1]). Betrachte dazu ein Anfangswertproblem $\dot{x}(t) \leq h(x(t)), x(0) \leq y_0$. Sei wieder $y(t, y_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = h(y(t)), y(0) = y_0$. Wir definieren uns

$$h_n(x) := h(x) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und betrachten die Folge von Anfangswertproblemen

$$\dot{y}_n(t) := h_n(y_n(t)), y_{0,n} = y_n(0) := y_0 + \frac{1}{n}.$$

Mit Satz 1.15 ist dann $x(t, x_0) < y_n(t, y_{0,n})$. Aufgrund der Stetigkeit der Lösung in den Daten folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ (vgl. z.B. [18, Satz 4.1.2, Korollar 4.1.4]), also gleichmäßige Konvergenz. Damit gilt für alle $t \geq 0$

$$x(t, x_0) \leq y(t, y_0).$$

(ii) Für $\dot{x}(t) > g(x(t))$ mit $x(0) > z_0$ (bzw. $\dot{x}(t) \geq g(x(t))$ mit $x(0) \geq z_0$) lassen sich vollkommen analog die Aussagen

$$x(t, x_0) > z(t, z_0) \quad (\text{bzw. } x(t, x_0) \geq z(t, z_0))$$

beweisen. ■

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Aussagen von Satz 1.15 und Bemerkung 1.16 ohne Zusatzvoraussetzung nur im eindimensionalen Fall gelten. Schon im Zweidimensionalen ist es möglich, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Beispiel 1.17. Betrachte die Anfangswertprobleme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) - x_2(t) \\ -x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -y_1(t) - y_2(t) \\ -y_2(t) + 1 \end{pmatrix}}_{=: h(y(t))}, \quad y_0 = y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt

$$\dot{x}(t) \leq h(x(t)) \quad \text{und} \quad x(0) \leq y_0,$$

was komponentenweise genau den Voraussetzungen aus Bemerkung 1.16(i) entspricht. Die Lösungen der Anfangswertprobleme sind aber gegeben durch

$$x(t, x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$y(t, y_0) = \begin{pmatrix} -1 + e^{-t}(t+1) \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also für $t^* = 1$

$$x(t^*, x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\prec \begin{pmatrix} -1 + 2e^{-1} \\ 1 - e^{-1} \end{pmatrix} = y(t^*, y_0).$$

■

Dieses Problem lässt sich in höheren Dimensionen lösen, wenn man Annahmen über die Quasimonotonie der rechten Seiten macht.

Definition 1.18. Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

heißt

- (i) quasimonoton wachsend, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Abbildung f_i monoton wachsend in x_j für alle $j = 1, \dots, n$ mit $j \neq i$ ist.
- (ii) quasimonoton fallend, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Abbildung f_i monoton fallend in x_j für alle $j = 1, \dots, n$ mit $j \neq i$ ist.

■

Satz 1.19. Betrachte eine Differentialungleichung $\dot{x}(t) < h(x(t))$ für eine quasimonoton wachsende Abbildung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für $x(0) < y_0$ gilt

$$x(t, x_0) < y(t, y_0),$$

wobei $y(t, y_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = h(y(t)), y(0) = y_0$ ist.

Für den Beweis des Satzes, der wie auch Satz 1.15 sogar für nicht-autonome Systeme gilt, vergleiche z.B. [35, Satz 12. V] oder [15, Theorem 1.5.1].

Bemerkung 1.20. (i) Mit einem Grenzübergang wie in Bemerkung 1.16(i) gilt die Aussage von Satz 1.19 auch wieder für \leq .

(ii) Die analoge Aussage aus Satz 1.19 gilt auch mit $>$ bzw. \geq , wenn g quasimonoton fallend ist.

■

In Beispiel 1.17 gilt diese Aussage nicht, da die Funktion h nicht quasimonoton wachsend ist. Die Resultate über Differentialungleichungen lassen sich nun mit Lemma 1.14 zu der folgenden Aussage zusammenfassen.

Lemma 1.21. Gegeben sei eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x(t))$. Für $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien die Differentialgleichungen $\dot{y}(t) = h(y(t))$ und $\dot{z}(t) = g(z(t))$ global asymptotisch stabil. Es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Falls $n \geq 2$ seien zudem g quasimonoton fallend und h quasimonoton wachsend. Dann ist $\dot{x}(t)$ global asymptotisch stabil.

Beweis: Im Fall $n = 1$ folgt aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ mit Satz 1.15 und Bemerkung 1.16

$$z(t, x_0) \leq x(t, x_0) \leq y(t, x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Falls $n \geq 2$ folgt selbiges aufgrund der Quasimonotonie von g und h mit Satz 1.19 und Bemerkung 1.20. Nun können wir Lemma 1.14 anwenden und erhalten die globale asymptotische Stabilität von $\dot{x}(t)$. □

Dieses Lemma werden wir in mehreren Beispielen anwenden. Dabei werden wir zunächst die rechte Seite einer gegebenen Differentialgleichung nach oben und unten abschätzen. Anschließend werden wir zeigen, dass die durch die Abschätzung entstehenden Anfangswertprobleme global asymptotisch stabil sind. Im Mehrdimensionalen müssen wir dabei natürlich die Quasimonotonie der entstehenden rechten Seiten zeigen.

1.3. Grundbegriffe für Kontrollsysteme

Nachdem wir die wichtigsten Begriffe für Differentialgleichungen wiederholt und einige Hilfsmittel erklärt haben, können wir uns nun dem eigentlichen Modell widmen, den Kontrollsystemen. Wie bereits erwähnt sind Kontrollsysteme wieder Differentialgleichungen, die zusätzlich von einem Parameter $u(t)$ abhängen. Genauer gesagt sind Kontrollsysteme von der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1.13}$$

wobei $f : D \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist. Als Raum \mathcal{U} der Kontrollfunktionen betrachten wir

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, U) := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ (Lebesgue-)messbar und essentiell beschränkt}\}.$$

Essentiell beschränkt bedeutet dabei, beschränkt außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge. Wie in Kapitel 1.1 gehen wir nun davon aus, dass das Kontrollsystem nicht explizit vom Zeitparameter t abhängt, wodurch sich Formel (1.13) reduziert zu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{1.14}$$

und betrachten $D = \mathbb{R}^n$. Auch hier wiederholen wir zunächst einen Satz (vgl. [11, Satz 8.2]), der uns für ein gegebenes $u \in \mathcal{U}$ die Existenz einer eindeutigen Lösung garantiert.

Satz 1.22 (Satz von Carathéodory). Betrachte ein Kontrollsystem der Form (1.14) mit stetigem Vektorfeld und $\mathcal{U} = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, U)$. Für jedes $R > 0$ existiere eine Konstante $L_R > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in \mathcal{U}$ mit $\|x_1\|, \|x_2\|, \|u\| \leq R$ erfüllt ist. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jeder Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ ein (maximales) offenes Intervall I mit $0 \in I$ und genau eine absolut stetige Funktion $x(t)$, die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

für alle $t \in I$ erfüllt.

Analog zum Fall ohne Kontrollfunktion schreiben wir diese Lösung für einen Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ als $\varphi(t, x, u)$. Wir gehen also ab jetzt wieder davon aus, dass die Voraussetzungen des Satzes für alle betrachteten Probleme erfüllt sind und die Lösung für alle $t \geq 0$ existiert.

Der Spezialfall eines linearen Kontrollsystems ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.15}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Wie im Spezialfall der linearen Differentialgleichung lässt sich für lineare Kontrollsysteme die Lösung explizit angeben

$$\varphi(t, x, u) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{1.16}$$

Interpretiert man u nun als gezielt steuerbare Funktion ist die Frage, ob man durch eine entsprechende Wahl der Kontrollfunktion einen bestimmten Zustand erreichen oder sogar stabilisieren kann, von zentralem Interesse. Dabei unterscheidet man zwischen einer zeitabhängigen Funktion $u(t)$ („open-loop“) und einem Zustandsfeedback $u(t) = F(x(t))$ für eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ („closed loop“). Die folgende Definition klärt die bisher ungenau verwendeten Begriffe „kontrollierbar“ und „stabilisierbar“. Ein x^* ist dabei analog zu Definition 1.2 Gleichgewicht eines Kontrollsystems, falls es ein $u^* \in U$ gibt, mit $f(x^*, u^*) = 0$. Wie bisher können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $x^* = 0$ untersucht wird. Mit der gleichen Argumentation können wir auch annehmen, dass $u^* = 0$ ist.

Definition 1.23. Sei $x^* = 0$ Gleichgewicht von (1.14) für ein $u^* \in U$.

- (i) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt (lokal) asymptotisch kontrollierbar, wenn es eine offene Umgebung N von x^* , eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ und ein stetig differenzierbares $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gibt, sodass zu jedem $x \in N$ eine Kontrollfunktion $u_x \in \mathcal{U}$ existiert mit $\|u_x\|_\infty \leq \gamma(\|x\|)$ und

$$\|\varphi(t, x, u_x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad \forall t \geq 0.$$

- (ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt (lokal) Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar, wenn eine offene Umgebung N von x^* , eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ und eine stetige und in x lokal Lipschitz-stetige Feedback-Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ existieren mit

$$\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad \forall x \in N, \forall t \geq 0.$$

- (iii) Die Kontrollierbarkeit bzw. Stabilisierbarkeit heißt global, falls $N = \mathbb{R}^n$ und exponentiell, falls $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$ für Konstanten $C, \sigma > 0$ gewählt werden kann. ■

Man kann sich leicht vorstellen, dass ein Zustandsfeedback gegenüber einer zeitabhängigen Kontrollfunktion in der Praxis einige Vorteile hat. Da hier der aktuelle Zustand des Systems eingeht, kann relativ flexibel auf auftretende Fehler, die z.B. durch Rundungsfehler oder exogene Störungen auftreten, reagiert werden. Wie man daher vielleicht schon vermutet, ist Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar die stärkere Aussage und impliziert asymptotisch kontrollierbar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.24. Betrachte ein Kontrollsystem (1.14), das gemäß Definition 1.23 (ii) Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist. Dann ist das Kontrollsystem auch asymptotisch kontrollierbar. Diese Aussage gilt in der lokalen/globalen sowie in der exponentiellen Variante.

Für den Beweis vergleiche z.B. [11, Satz 10.2]. Wir definieren nun den Begriff der Kontroll-Lyapunov-Funktion, der eine Verallgemeinerung der Lyapunov-Funktion aus Definition 1.7 ist. Bemerkenswert ist dabei, dass wir die Differenzierbarkeit der Funktion V nicht mehr voraussetzen. Wir führen zudem die Notation $U_C = \{u \in U \mid \|u\| \leq C\}$ und $\mathcal{U}_C = L_\infty(\mathbb{R}, U_C)$ ein.

Definition 1.25. Betrachte ein Kontrollsystem (1.14) mit $f(0, 0) = 0$. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0. Eine stetige Funktion $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokale Kontroll-Lyapunov-Funktion, falls Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ und ein stetiges $W : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, sodass die Ungleichungen

$$W(x) > 0$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \tau(x, u))} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \leq V(x) \right\}$$

erfüllt sind für alle $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ und ein $C > 0$. Dabei bezeichnet

$$\tau(x, u) := \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t, x, u) \notin \mathcal{O}\}$$

mit der Konvention, dass $\varphi(t, x, u) \notin \mathcal{O}$, falls die Lösung zur Zeit t nicht mehr existiert. Die Funktion V heißt globale Lyapunov-Funktion, falls V und W die Bedingungen für $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ erfüllen. ■

Analog zu Satz 1.9 gilt das folgende Resultat (vgl. [11, Kapitel 12] oder [24, ch. 5.7]):

Satz 1.26. Betrachte ein Kontrollsystem (1.14) mit $f(0,0) = 0$. Eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Lyapunov-Funktion existiert genau dann, wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar ist.

Unter gewissen Einschränkungen kann man nun mit Hilfe der universellen Formel von Sontag (vgl. [24, S. 246-250]) aus einer Kontroll-Lyapunov-Funktion ein Lipschitz-stetiges stabilisierendes Feedback konstruieren. Die Details dieser Konstruktion wollen wir hier jedoch nicht behandeln.

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass wir die Kontrollfunktion (unter gewissen Einschränkungen) beliebig wählen können. Häufig ist jedoch u keine gezielte Steuerung, sondern eine Störung, die man nicht beeinflussen kann. Um den Unterschied bereits in der Notation des Kontrollsystems anzudeuten, ersetzt man in diesem Fall $u(t)$ häufig durch $d(t)$. Eine naheliegende Frage ist dabei folgende: Gegeben sei ein Kontrollsystem der Form $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$, wobei das ungestörte System $\dot{x}(t) = f(x(t), 0)$ asymptotisch stabil ist. Was lässt sich über die Stabilität des gestörten Systems aussagen? Die Antwort auf diese Frage ist leider etwas enttäuschend, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.27. Betrachte das eindimensionale Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (x(t)^2 + 1) \cdot d(t).$$

Setzt man $d \equiv 0$ sieht man mit (1.7) sofort, dass das ungestörte System $\dot{x}(t) = -x(t)$ global asymptotisch stabil ist.

Im Gegensatz dazu erhält man für $d(t) = (2t + 2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{(x(t)^2 + 1)}{\sqrt{(2t + 2)}}.$$

Unter der Anfangsbedingung $x(0) = \sqrt{2}$ ergibt sich die unbeschränkte Lösung

$$x(t) = (2t + 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Man sieht also, dass Instabilität sogar für eine gegen 0 konvergierende Störfunktion auftreten kann. Hinzu kommt, dass man für $d \equiv 1$ das System $\dot{x}(t) = x(t)^2 - x(t) + 1$ und unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

erhält. Diese Lösung ist nicht nur instabil, sondern aufgrund der Eigenschaften des Tangens noch nicht einmal auf ganz \mathbb{R} definiert. ■

Wir haben also im Beispiel gesehen, dass selbst globale asymptotische Stabilität des ungestörten Systems keine „guten“ Stabilitätseigenschaften des gestörten Systems garantiert. Gemeinsam mit dem Problem der exponentiellen Stabilität unter nichtlinearen Koordinatentransformationen ergeben sich also bei den bisherigen Stabilitätsbegriffen zwei Probleme, die den Begriff der Input-to-State Stabilität motivieren. Dieser wurde von E. D. Sontag erstmals 1989 eingeführt (vgl. [20]) und ist seitdem ein zentrales Konzept bei der Betrachtung der Stabilität gestörter Systeme.

2. Input-to-State Stabilität

2.1. Definition und Herleitung

Als Ausgangspunkt für die Herleitung von Input-to-State Stabilität betrachten wir ein lineares Kontrollsystem (1.15), also ein System der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Zur Verdeutlichung bezeichnen wir während der Herleitung den Startwert mit x_0 (anstatt x) und die Lösung des Systems mit $x(t, x_0, u)$ (anstatt $\varphi(t, x, u)$). Wir nehmen zudem an, dass die Matrix A nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt. Wie in Kapitel 1 erwähnt, ist diese Bedingung äquivalent zur globalen asymptotischen Stabilität von $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Anders ausgedrückt setzen wir also globale asymptotische Stabilität des ungestörten Systems voraus. Wir greifen nun etwas vor und verwenden Formel (2.12), die wir ausführlich im Beweis von Satz 2.13 herleiten werden. Diese besagt, dass für global asymptotisch stabile lineare Systeme

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x_0\| + \frac{C \cdot \|B\|}{\sigma} \cdot \|u\|$$

für Konstanten $C, \sigma > 0$ gilt. Diese Ungleichung kann man (vergleiche dazu Bemerkung 2.14) sogar verschärfen zu (2.13)

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x_0\| + k \cdot \|u_{[0,t]}\|,$$

wobei $k := \frac{C \cdot \|B\|}{\sigma}$. Wir betrachten nun Koordinatenwechsel $x = T(y)$ des Zustands (insbesondere gilt also $x_0 = T(y_0)$) und $u = S(v)$ des Eingangssignals. Aus der obigen Ungleichung wird somit

$$\|T(y(t, y_0, v))\| \leq Ce^{-\sigma t} \|T(y_0)\| + k \cdot \|S(v)_{[0,t]}\|. \quad (2.1)$$

Wir setzen

$$\alpha_1(r) := \min_{\|z\| \geq r} \|T(z)\|, \quad \alpha_2(r) := \max_{\|z\| \leq r} \|T(z)\|$$

und

$$\tilde{\gamma}(r) := \max_{\|w\| \leq r} \|S(w)\|$$

und bemerken, dass $\alpha_1, \alpha_2, \tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_\infty$ gilt. Es folgt

$$\alpha_1(\|z\|) \leq \|T(z)\| \leq \alpha_2(\|z\|) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\|S(w)\| \leq \tilde{\gamma}(\|w\|) \quad \forall w \in \mathbb{R}^m.$$

Somit gelten insbesondere die Abschätzungen

- (i) $\|T(y(t, y_0, v))\| \geq \alpha_1(\|y(t, y_0, v)\|)$,
- (ii) $\|T(y_0)\| \leq \alpha_2(\|y_0\|)$ und
- (iii) $\|S(v(s))\| \leq \tilde{\gamma}(\|v(s)\|)$.

Setzt man die Abschätzungen (i)-(iii) in die Ungleichung (2.1) ein, erhält man

$$\alpha_1(\|y(t, y_0, v)\|) \leq Ce^{-\sigma t} \alpha_2(\|y_0\|) + k \cdot \tilde{\gamma}(\|v_{[0,t]}\|).$$

Definiert man nun $\beta(r, t) := Ce^{-\sigma t} \alpha_2(r)$ und $\gamma(r) := k\tilde{\gamma}(r)$ ist

$$\alpha_1(\|y(t, y_0, v)\|) \leq \beta(\|y_0\|, t) + \gamma(\|v_{[0,t]}\|), \quad (2.2)$$

für $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$. Diese Ungleichung werden wir nun als definierende Bedingung für Input-to-State Stabilität verwenden. Wir werden sehen, dass damit ein nichtlineares Stabilitätskonzept entsteht, das invariant unter nichtlinearen Koordinatentransformationen ist.

Definition 2.1. Ein Kontrollsystem heißt Input-to-State stabil (ISS), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\} \quad (2.3)$$

gilt. ■

Dass die Bedingung aus der Definition tatsächlich der Ungleichung (2.2) entspricht, zeigt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 2.2. (i) Äquivalent zur Bedingung (2.3) ist die Bedingung

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \tilde{\beta}(\|x\|, t) + \tilde{\gamma}(\|u\|_\infty) \quad (2.4)$$

mit $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ und $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_\infty$. Wenn Bedingung (2.3) erfüllt ist, dann ist trivialerweise auch (2.4) erfüllt, da beide Summanden nichtnegativ sind. Die Gegenrichtung erhält man, indem man $\beta = 2\tilde{\beta}$ und $\gamma = 2\tilde{\gamma}$ setzt.

(ii) $\varphi(t, x, u)$ ist nur von u auf dem Intervall $[0, t]$ abhängig. Deshalb lässt sich Bedingung (2.4) verschärfen zu

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \tilde{\beta}(\|x\|, t) + \tilde{\gamma}(\|u_{[0,t]}\|). \quad (2.5)$$

(iii) O.B.d.A. gilt: α_1 aus Bedingung (2.2) erfüllt $\alpha_1 \equiv id$, denn aus $\alpha(r) \leq \beta(r, t) + \gamma(t)$ folgt $r \leq \alpha^{-1}(\beta(r, t) + \gamma(t))$. Außerdem gilt $\alpha^{-1}(\beta(r, t) + \gamma(t)) \leq \alpha^{-1}(2\beta(r, t)) + \alpha^{-1}(2\gamma(t))$, wobei $\alpha^{-1}(2\beta(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{KL}$ und $\alpha^{-1}(2\gamma(\cdot)) \in \mathcal{K}_\infty$. Damit kann man immer $\alpha \equiv id$ annehmen, wenn man β und γ entsprechend anpasst. Ausgehend von Bedingung (2.3) ist man damit wieder bei Bedingung (2.2) angekommen. ■

Die Bedingung für Input-to-State Stabilität, bzw. Bedingung (2.4), lässt sich mit der folgenden Abbildung leicht nachvollziehen. Die Norm der Lösung muss durch die Summe aus dem β - und dem γ -Term beschränkt sein, darf sich aber auch für $t \rightarrow \infty$ zwischen 0 und $\gamma(\|u\|_\infty)$ aufhalten.

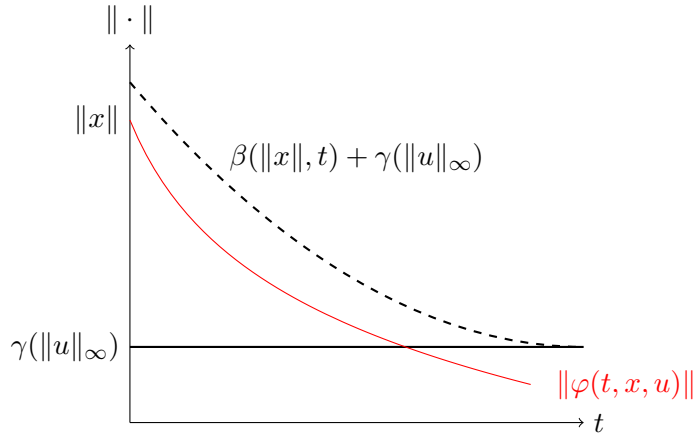


Abbildung 2.1: Grafische Veranschaulichung der Bedingung für Input-to-State Stabilität

Bemerkung 2.3. Eine nicht offensichtliche Eigenschaft der Input-to-State Stabilität ist, dass für Störfunktionen u mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| \rightarrow 0$ sogar $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, u)\| = 0$ gilt. An der Definition sieht man nur, dass $\|\varphi(t, x, u)\| \leq \gamma(\|u\|_\infty)$ sein muss und man könnte vermuten, dass für ein u , mit $\|u(0)\| =: C > 0$ und $\|u(t)\|$ streng monoton fallend in t die Norm der Lösung immer in $[0, C]$ liegen darf. Nutzt man allerdings die Kozykluseigenschaft (1.6) aus, sieht man, dass dies nicht möglich ist. Man betrachtet dazu die Lösung auf einem festen Intervall $[0, T]$. Input-to-State Stabilität liefert

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|u_{[0,t]}\|)$$

für alle $t \in [0, T]$. Betrachtet man nun die Lösung zur neuen Anfangszeit T und zum neuen Anfangswert $\tilde{x} = \varphi(T, x, u)$ auf dem Intervall $[T, 2T]$, erhält man mit Input-to-State Stabilität

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \beta(\|\tilde{x}\|, t) + \gamma(\|u_{[T,2T]}\|)$$

für alle $t \in [T, 2T]$. Wenn man diesen Trick iterativ anwendet, erhält man $\varphi(t, x, u) \rightarrow 0$, da $\gamma(\|u_{[iT, (i+1)T]}\|)$ gegen 0 geht (und $\beta(\cdot, t) \rightarrow 0$ gilt).

Die nächste Bemerkung zeigt, dass Input-to-State Stabilität das Konzept der Zustandsstabilität, das vor allem auf den russischen Mathematiker A. M. Lyapunov zurückgeht, mit dem Konzept der Operatorstabilität verknüpft. Das Input-Output-Operatorkonzept, wurde unter anderem vom polnischen Mathematiker G. Zames entwickelt (vgl. [36], [37]).

Bemerkung 2.4. Man kann Stabilitätsbegriffe auch als eine Abbildung $u \rightarrow \varphi$ interpretieren. Gemäß Formel (2.4) ist Input-to-State Stabilität dann ein „ $\mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ “-Stabilitätskonzept. Für eine Betrachtung „ $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ “ ergibt sich die Bedingung

$$\alpha(\|\varphi(t, x, u)\|) \leq \beta(\|x\|, t) + \int_0^t \gamma(\|u(s)\|) ds, \quad (2.6)$$

welche wir in Kapitel 3.2 als definierende Ungleichung für eine Abschwächung des ISS-Konzeptes, der Integral Input-to-State Stabilität, verwenden werden.

Aus „ $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ “ ergibt sich die Bedingung

$$\int_0^t \alpha(\|\varphi(s, x, u)\|) ds \leq \alpha_0(\|x\|) + \int_0^t \gamma(\|u(s)\|) ds. \quad (2.7)$$

In Kapitel 2.2 wird sich zeigen, dass diese Bedingung äquivalent zu ISS ist. ■

Betrachten wir nun, wie sich die Input-to-State Stabilität unter einer Koordinatentransformation verhält, zeigt sich, dass diese im Gegensatz zu exponentieller Stabilität (vergleiche Beispiel 1.12) erhalten bleibt.

Satz 2.5. Input-to-State Stabilität ist invariant unter Koordinatentransformationen.

Beweis: Analog zu Bemerkung 1.11 ergibt sich für ein System der Form (1.14) unter einem Koordinatenwechsel $y = T(x)$ ein transformiertes Kontrollsystem

$$\dot{y}(t) = DT(T^{-1}(y(t)))f(T^{-1}(y(t)), u(t))$$

mit der Lösung

$$\psi(t, y, u) = T(\varphi(t, T^{-1}(y), u)).$$

Hierbei ist φ die Lösung des untransformierten Systems, für die nach (2.3)

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}$$

gilt. Daraus folgt für ψ :

$$\|\psi(t, y, u)\| = \|T(\varphi(t, T^{-1}(y), u))\| \leq \max\{\rho_1(\beta(\rho_2(\|y\|), t)), \rho_1(\gamma(\|u\|_\infty))\}$$

mit

$$\rho_1(r) := \max_{\|x\|=r} \|T(x)\| \text{ und } \rho_2(r) := \max_{\|x\|=r} \|T^{-1}(x)\|.$$

Nutzt man $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ und die leicht nachweisbare Stetigkeit von ρ_1 und ρ_2 aus, kann man leicht zeigen, dass $\tilde{\beta}(r, t) := \rho_1(\beta(\rho_2(r), t))$ eine \mathcal{KL} -Funktion und $\tilde{\gamma}(r) := \rho_1(\gamma(r))$ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist. Es existiert also ein $\beta \in \mathcal{KL}$ und ein $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_\infty$, sodass

$$\|\psi(t, y, u)\| \leq \max\{\tilde{\beta}(\|y\|, t), \tilde{\gamma}(\|u\|_\infty)\}$$

gilt. Damit ist das transformierte Kontrollsystem ebenfalls Input-to-State stabil. Anders formuliert: ISS ist invariant unter Koordinatentransformation. □

Der Beweis wurde dabei größtenteils aus [8] übernommen. Wir bemerken, dass wir mit Satz 2.5 folgern können, dass globale asymptotische Stabilität von Differentialgleichungen invariant unter Koordinatentransformation ist. Interpretiert man eine Differentialgleichung der Form (1.3) als Spezialfall eines Kontrollsystems mit $u \equiv 0$, also $\dot{x}(t) = f(x(t), 0)$, folgt mit Satz 2.5 für die Lösung ψ des transformierten Problems

$$\|\psi(t, y, 0)\| \leq \max\{\tilde{\beta}(\|x\|, t), \tilde{\gamma}(\|0\|_\infty)\} = \tilde{\beta}(\|x\|, t)$$

mit $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$, was gerade der Bedingung für globale asymptotische Stabilität entspricht.

2.2. Charakterisierungen von Input-to-State Stabilität

Wir erinnern uns daran, dass es unser Ziel war, eine Verbindung zwischen dem Stabilitätsbegriff für das gestörte System $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ und der Stabilität des ungestörten Systems $\dot{x}(t) = f(x(t), 0)$ herzustellen (vergleiche dazu Beispiel 1.27). Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass dies mit Hilfe der Input-to-State Stabilität möglich ist. Zur Vereinfachung bezeichnen wir dazu das System als $0 - AS$, falls das ungestörte System lokal asymptotisch stabil und als $0 - GAS$, falls das ungestörte System global asymptotisch stabil im Sinne von Definition 1.5 ist.

Untersucht man Bedingung (2.3) genauer, lassen sich bei getrennter Betrachtung der β - und der γ -Komponente zwei Bedingungen ablesen:

$$\|\varphi(t, x, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t), \tag{2.8}$$

da $\gamma(\|0\|_\infty) = \gamma(0) = 0$ und

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, u)\| \leq \gamma(\|u\|_\infty), \tag{2.9}$$

da $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0 \ \forall r \geq 0$. Man erkennt sofort, dass (2.8) gerade der Bedingung $0 - GAS$ entspricht und dass (2.9) eine obere Schranke der Lösung (in der Norm) für großes t impliziert. Wir bezeichnen (2.9) ab jetzt mit AG (asymptotic gain). Der folgende Satz zeigt, dass diese beiden Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für Input-to-State Stabilität sind.

Satz 2.6. Ein Kontrollsystem (1.14) ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es die Bedingungen $0 - GAS$ und AG erfüllt.

Tatsächlich kann man im Satz sogar die Bedingung $0 - GAS$ durch 0 -stabil ersetzen. Mit 0 -stabil ist dabei gemeint, dass das ungestörte System stabil im Sinne von Definition 1.5 (i) ist. Der Beweis (vgl. [30, Theorem 1]) ist relativ technisch und zeigt zeitgleich noch einige weitere Charakterisierungen, die wir nicht verwenden wollen, weshalb auch der Beweis hier nicht wiederholt wird.

Analog zu Definition 1.7 wollen wir nun den Begriff der ISS-Lyapunov-Funktion definieren. Wir werden in Satz 2.10 zeigen, dass die Existenz einer solchen Funktion äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist.

Definition 2.7. Eine glatte Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ISS-Lyapunov-Funktion, falls es $\alpha_1, \alpha_2, \chi \in \mathcal{K}_\infty$ und $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ gibt, sodass die Bedingungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.10)$$

und

$$\|u\| \leq \chi(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (2.11)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in U$ gelten. ■

Bemerkung 2.8. Für Bedingung (2.11) gibt es mehrere äquivalente Charakterisierungen:

- (i) Implikationsform: $\|u\| \leq \chi(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|)$
- (ii) Supremumsform: $\sup_{\|u\| \leq \chi(\|x\|)} DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|)$
- (iii) Dissipative Form: $DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|u\|)$ mit $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$

Zu beachten ist, dass das V aus (iii) in der Regel nicht das gleiche V wie in (i) oder (ii) ist. ■

Im Folgenden werden wir, je nachdem welche Darstellung besser passt, vor allem die dissipative Form und die Implikationsform verwenden. Bevor wir nun die bereits angesprochene Äquivalenz zwischen Input-to-State Stabilität und der Existenz einer ISS-Lyapunov-Funktion zeigen, definieren wir einen weiteren Begriff, der uns eine zusätzliche Charakterisierung von Input-to-State Stabilität liefern wird.

Definition 2.9. Ein Kontrollsystem (1.14) heißt robust stabil, falls es ein $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ mit $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$ der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist. Das heißt, es existiert ein $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ sodass für die Lösungen $\varphi_k(t, x)$ des Regelkreises

$$\|\varphi_k(t, x)\| \leq \tilde{\beta}(\|x\|, t)$$

gilt. Die Funktion ρ bezeichnet man dann als Stability Margin. ■

Mit Hilfe der Lyapunov-Funktion und der robusten Stabilität erhalten wir zwei äquivalente Charakterisierungen der Input-to-State Stabilität.

Satz 2.10. Für ein Kontrollsystem (1.14) sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Das Kontrollsystem ist Input-to-State stabil.

2. Das Kontrollsystem ist robust stabil.
3. Es existiert eine ISS-Lyapunov-Funktion.

Beweis: Um den Satz zu beweisen, zeigen wir „(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)“ und orientieren uns dabei an den Beweisen aus [8] und [29].

(1) \Rightarrow (2) : Das Kontrollsystem $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ sei Input-to-State stabil. Schreibe $\varphi_k(t, x) = \varphi(t, x, u(t))$ mit $u(t) = k(t, \varphi_k(t, x))$. Betrachte Störungen mit $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$, für ein $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. Mit ISS erhalten wir für ein festes $T > 0$ und $t \in [0, T]$ nach Bemerkung 2.2 (ii)

$$\|\varphi_k(t, x)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \max_{t \in [0, T]} \gamma(\|k(t, \varphi_k(t, x))\|)\}.$$

Da γ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion und somit streng monoton wachsend ist, folgt

$$\|\varphi_k(t, x)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \max_{t \in [0, T]} \gamma(\rho(\|\varphi_k(t, x)\|))\}.$$

Wir können nun o.B.d.A. (vergleiche Abbildung 2.2) annehmen, dass ρ die Bedingung

$$\rho(r) \leq \gamma^{-1}(\beta(\|x\|, T)) \quad \forall r \in [\beta(\|x\|, T), \beta(\|x\|, 0)]$$

erfüllt. Damit ist

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(t, x)\| &\leq \max\{\beta(\|x\|, t), \max_{t \in [0, T]} \gamma(\gamma^{-1}(\beta(\|x\|, T)))\} \\ &= \max\{\beta(\|x\|, t), \beta(\|x\|, T)\} \\ &= \beta(\|x\|, t), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $t \leq T$ und β streng monoton fallend in t folgt. Man sieht, dass die Bedingung für robuste Stabilität auf einem Intervall $[0, T]$ für festes $T > 0$ erfüllt ist. Allerdings kann man nicht einfach mit $T \rightarrow \infty$ argumentieren, da in diesem Fall $\gamma^{-1}(\beta(\|x\|, T)) \rightarrow 0$ gilt. Dieses Problem lösen wir wie folgt: Wir setzen zuerst $\beta_0 := \beta$ und wählen T so groß, dass $\beta(\|x\|, T) \leq \frac{1}{2}\|x\|$. Nun betrachten wir $t \in]T, 2T]$ und erhalten, nachdem wir ρ wieder wie zuvor einschränken,

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(t, x)\| &\stackrel{(1.6)}{=} \|\varphi_k(t - T, \varphi_k(T, x))\| \leq \beta_0(\|\varphi_k(T, x)\|, t - T) \\ &\leq \beta_0(\beta_0(\|x\|, T), t - T) \leq \beta_0\left(\frac{1}{2}\|x\|, t - T\right) \\ &=: \beta_1(\|x\|, t - T) \end{aligned}$$

für ein $\beta_1 \in \mathcal{KL}$. Diesen Trick kann man sich wie folgt veranschaulichen: Man betrachtet $\beta_0(\frac{1}{2}\|x\|, t)$ auf dem Intervall $[0, t]$ und verschiebt diese Funktion um T nach rechts. Dieses Vorgehen wenden wir nun iterativ an und erhalten damit eine Folge $(\beta_0, \beta_1, \dots)$

für die die Abschätzung für robuste Stabilität gilt. Nun können wir ein β konstruieren (vergleiche dazu Abbildung 2.3), sodass die gewünschte Abschätzung für dieses spezielle β für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Konstruktion ist möglich, weil wir T hinreichend groß gewählt haben, dass $\beta_i(\|x\|, (i+1)T) \leq \frac{1}{2}\|x\|$ gilt. Zu beachten ist, dass wir weder β noch ρ explizit angeben können, was allerdings auch nicht nötig ist.

(2) \Rightarrow (3) : Das Kontrollsystem sei robust stabil. Sei $k(t, x) := \rho(\|x\|) \cdot d(t)$ für das ρ aus der Definition der robusten Stabilität und ein d mit $\|d(t)\| \leq 1$. Es gilt

$$\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|) \cdot \|d(t)\| \leq \rho(\|x\|) \cdot 1 = \rho(\|x\|).$$

Damit erfüllen die Lösungen $\varphi_\rho(t, x, d)$ von $\dot{x}(t) = f(x(t), \rho(\|x\|) \cdot d(t))$ die Bedingung

$$\|\varphi_\rho(t, x, d)\| \leq \tilde{\beta}(\|x\|, t),$$

wobei $\tilde{\beta}$ die \mathcal{KL} -Funktion aus Definition 2.9 ist. Das Lyapunov-Theorem für gestörte global asymptotisch stabile Systeme (vgl. [16, Theorem 1]) besagt: Es existiert eine glatte Lyapunov-Funktion V , sodass für ein $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ die Implikation

$$\|d\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad DV(x)f(x, \rho(\|x\|) \cdot d) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

gilt. Die Voraussetzung $\|d\| \leq 1$ ist dabei nötig, weil für das Theorem die Lösung $\varphi(t, x, d)$ für jede Störfunktion d auf ganz \mathbb{R}_0^+ definiert sein muss, was zum Beispiel durch einen kompakten Raum von Störfunktionen erreicht wird. Verwendet man nun wieder $u(t) = \rho(\|x\|) \cdot d(t)$, erhält man damit

$$\|u\| \leq \rho(\|x\|) \quad \Rightarrow \quad DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

da aus $\|u\| \leq \rho(\|x\|)$ folgt $\|d\| \leq \frac{\|u\|}{\rho(\|x\|)} \leq 1$. Also ist Bedingung (2.11) mit $\chi = \rho$ erfüllt. Die Bedingung

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ist schon durch das zitierte Theorem erfüllt. Damit ist V eine ISS-Lyapunov-Funktion.

(3) \Rightarrow (1) : Es existiere eine ISS-Lyapunov-Funktion, also eine glatte Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die die Bedingungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

und

$$\|u\| \leq \chi(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

für $\alpha_1, \alpha_2, \chi \in \mathcal{K}_\infty$ und $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ erfüllt. Wir definieren nun: $g = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ und $\kappa = \chi \circ \alpha_2^{-1}$. Damit lässt sich die zweite Bedingung schreiben als

$$\|u\| \leq \kappa(\alpha_2(\|x\|)) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -g(\alpha_2(\|x\|)).$$

Unter Verwendung der ersten Bedingung folgt daraus die schwächere Implikation

$$\|u\| \leq \kappa(V(x)) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -g(V(x)),$$

da κ und g als Verkettung streng monoton wachsender Funktionen ebenfalls streng monoton wachsend sind. Durch Integration dieser Bedingung erhält man

$$V(\varphi(x, t, u)) \leq \max\{\mu(V(x), t), \kappa^{-1}(\|u\|)\}.$$

Der zweite Term deckt den Fall ab, dass die Bedingung $\|u\| \leq \kappa(\alpha_2(\|x\|))$ nicht erfüllt ist. Dabei ist $\mu \in \mathcal{KL}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(r, t) = -g(\mu(r, t)), \quad \mu(r, 0) = r.$$

Nun verwendet man wieder die erste Bedingung der ISS-Lyapunov-Funktion und erhält

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(\varphi(t, x, u))) \\ &\leq \max\{\alpha_1^{-1}(\mu(V(x), t)), \alpha_1^{-1}(\kappa^{-1}(\|u\|))\} \\ &\leq \max\{\alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(\|x\|), t)), \alpha_1^{-1}(\kappa^{-1}(\|u\|))\}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass dies gerade die Bedingung für Input-to-State Stabilität mit $\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(r), t))$ und $\gamma(r) = \alpha_1^{-1}(\kappa^{-1}(r)) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\chi^{-1}(r)))$ ist, da $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$. \square

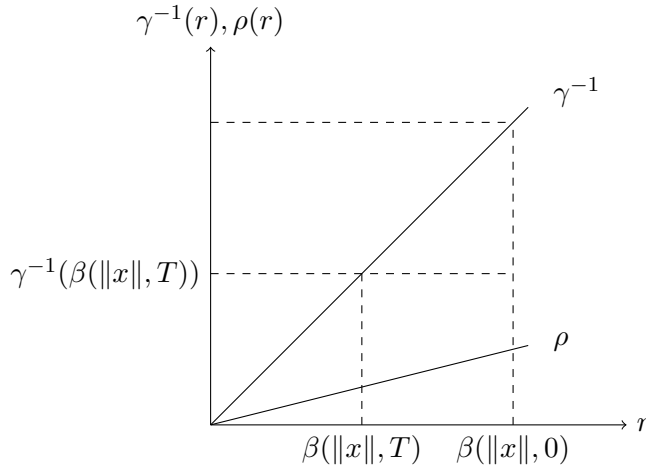


Abbildung 2.2: Wahl von $\rho(\cdot)$ in (1) \Rightarrow (2) im Beweis von Satz 2.10.

Mit dieser Abbildung erkennt man, dass man eine \mathcal{K}_∞ -Funktion immer so konstruieren kann, dass sie auf einem abgeschlossenen Intervall eine vorgegebene Schranke nicht überschreitet.

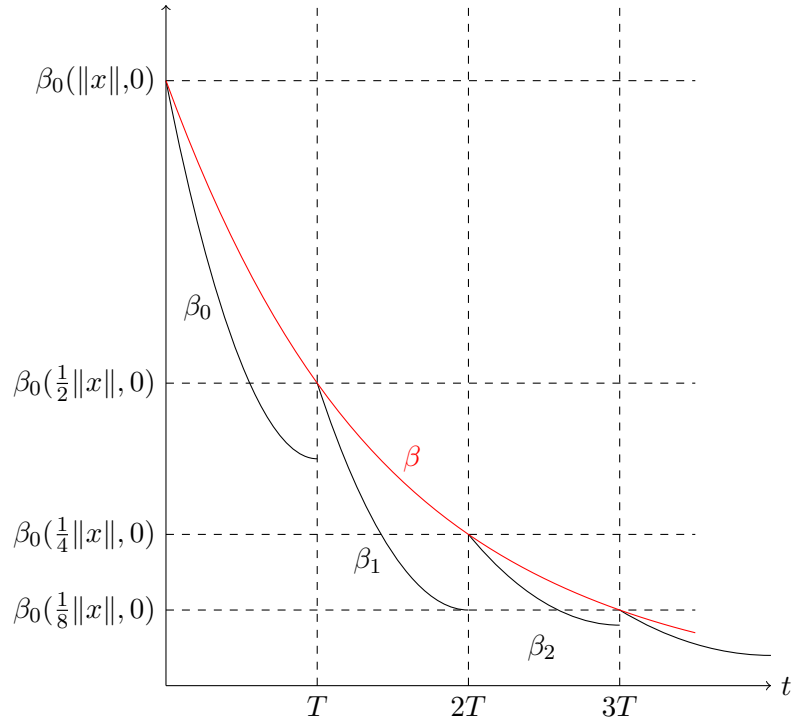


Abbildung 2.3: Konstruktion der β -Funktion in (1) \Rightarrow (2) im Beweis von Satz 2.10.

In Bemerkung 2.4 wurde bereits angedeutet, dass Bedingung (2.7) äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist. Diese Aussage formulieren wir nun als Satz.

Satz 2.11. Ein Kontrollsystem (1.14) ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es Funktionen $\alpha, \alpha_0, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle Störfunktionen u die Bedingung

$$\int_0^t \alpha(\|\varphi(s, x, u)\|) ds \leq \alpha_0(\|x\|) + \int_0^t \gamma(\|u(s)\|) ds \quad (2.7)$$

für alle $t \geq 0$ erfüllt ist.

Beweis: Sei (1.14) Input-to-State stabil. Dann existiert eine ISS-Lyapunov-Funktion in dissipativer Form, also eine glatte Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, für die es \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_i ($i = 1, \dots, 4$) gibt, sodass

$$DV(\varphi(s, x, u))f(\varphi(s, x, u), u) \leq -\alpha_3(\|\varphi(s, x, u)\|) + \alpha_4(\|u\|)$$

gilt. Durch einfaches Umformen erhält man

$$\alpha_3(\|\varphi(s, x, u)\|) \leq -DV(\varphi(s, x, u))f(\varphi(s, x, u), u) + \alpha_4(\|u\|).$$

Integriert man diese Bedingung erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^t \alpha_3(\|\varphi(s, x, u)\|) ds &\leq \int_0^t -DV(\varphi(s, x, u))f(\varphi(s, x, u), u) ds + \int_0^t \alpha_4(\|u\|) ds \\
&= -V(\varphi(t, x, u)) + V(\varphi(0, x, u)) + \int_0^t \alpha_4(\|u\|) ds \\
&\stackrel{V \geq 0}{\leq} V(\varphi(0, x, u)) + \int_0^t \alpha_4(\|u\|) ds \\
&= V(x) + \int_0^t \alpha_4(\|u\|) ds \\
&\leq \alpha_2(\|x\|) + \int_0^t \alpha_4(\|u\|) ds.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt hat man dabei $\varphi(0, x, u) = x$ verwendet, was gerade der Anfangsbedingung entspricht. Der letzte Schritt folgt durch Anwendung der ersten Lyapunov-Bedingung

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$. Dadurch hat man die Form (2.7) mit $\alpha := \alpha_3$, $\alpha_0 := \alpha_2$ und $\gamma := \alpha_4$.

Der Beweis der Rückrichtung ist deutlich komplizierter und verwendet eine Charakterisierung von Input-to-State Stabilität, die wir bisher noch nicht erwähnt haben. Daher wird hier nur kurz die Beweisidee erläutert. Aus Bedingung (2.7) folgt, dass das System 0-stabil ist und für ein $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ die Bedingung

$$\inf_{t \geq 0} \|\varphi(t, x, u)\| \leq \gamma(\|u\|)$$

für alle Startwerte x und alle Störfunktionen u erfüllt ist. Für diese Bedingung verwendet man die Bezeichnung *LIM*. Aus 0-stabil und *LIM* kann man folgern, dass das System 0 – *GAS* ist. Die Bedingungen *LIM* und 0 – *GAS* sind nach [30, Theorem 1] äquivalent zu Input-to-State Stabilität. Für Details der einzelnen Beweisschritte vergleiche [23, Theorem 1] und [30, Theorem 1].

□

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir ein Beispiel, in dem wir versuchen Input-to-State Stabilität mit Hilfe der unterschiedlichen Charakterisierungen nachzuweisen.

Beispiel 2.12. Betrachte das System

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - x(t)^3 + (x(t)^2 + 1)u(t).$$

Der direkte Weg, Input-to-State Stabilität zu zeigen, wäre Bedingung (2.3) aus der Definition von ISS nachzurechnen. Allerdings benötigt man hierfür die von der Störfunktion abhängige analytische Lösung $\varphi(t, x, u)$. Das System lässt sich aber nicht analytisch

lösen, weshalb dieser Weg ausscheidet. Ebenso ist es nicht möglich, die Charakterisierung aus den Sätzen 2.6 und 2.11 zu verwenden, weil hier ebenfalls $\varphi(t, x, u)$ benötigt wird. Es bleiben also die beiden Charakterisierungen aus Satz 2.10, die Existenz einer ISS-Lyapunov-Funktion und robuste Stabilität.

(i) Wir zeigen Input-to-State Stabilität zunächst, indem wir eine ISS-Lyapunov-Funktion angeben. Wir definieren dazu

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Es ist offensichtlich, dass V eine glatte Funktion ist und die erste Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion erfüllt ist, denn

$$\frac{1}{4}|x|^2 \leq V(x) \leq |x|^2.$$

und $\alpha_1(r) := \frac{1}{4}r^2$ sowie $\alpha_2(r) := r^2$ sind \mathcal{K}_∞ -Funktionen. Zudem gilt

$$DV(x)f(x, u) = -2x^2 - x^4 + (x^3 + x)u \leq -2x^2 - x^4 + |(x^3 + x)| \cdot |u|.$$

Wir definieren die Funktion $\chi(r) := r$, bemerken, dass $\chi \in \mathcal{K}_\infty$ gilt und erhalten damit für $|u| \leq \chi(|x|)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} DV(x)f(x, u) &\leq -2x^2 - x^4 + |(x^3 + x)| \cdot |x| \\ &\leq -2x^2 - x^4 + x^4 + x^2 \\ &= -x^2 = -|x|^2. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion ist also mit der \mathcal{K} -Funktion $\alpha_3(r) := r^2$ erfüllt und wir haben gezeigt, dass V eine ISS-Lyapunov-Funktion in der Implikationsform ist. Damit ist das System Input-to-State stabil.

(ii) Der Weg über robuste Stabilität ist etwas schwerer und verwendet die Hilfsaussage aus Lemma 1.21. Um robuste Stabilität zu zeigen, definieren wir zunächst als Stability Margin die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\rho(r) := \frac{1}{2} \cdot r$ und betrachten Feedback-Abbildungen $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$. Wenn wir für u nun die Feedback-Abbildung k einsetzen, gilt für die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - x(t)^3 + (x(t)^2 + 1) \cdot k(t, x) \\ &\leq -2x(t) - x(t)^3 + (x(t)^2 + 1) \cdot \|k(t, x)\| \\ &\leq -2x(t) - x(t)^3 + (x(t)^2 + 1) \cdot \rho(\|x\|) \\ &= -2x(t) - x(t)^3 + \frac{1}{2}x(t)^2 \cdot |x(t)| + \frac{1}{2}|x(t)| \end{aligned}$$

und damit nach Bemerkung 1.16 $x(t) \leq y(t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $y(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = -2y(t) - y(t)^3 + \frac{1}{2}y(t)^2 \cdot |y(t)| + \frac{1}{2}|y(t)|$$

mit $y(0) = x_0$ ist. Diese Differentialgleichung ist zwar nicht analytisch lösbar, doch es gilt

$$\dot{y}(t) \begin{cases} < 0, & y(t) > 0 \\ = 0, & y(t) = 0 \\ > 0, & y(t) < 0 \end{cases}$$

und somit ist die Differentialgleichung nach Lemma 1.13 global asymptotisch stabil. Analog kann man die Differentialgleichung durch $u(t) \geq -\|u\|$ abschätzen zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\geq -2x(t) - x(t)^3 - \frac{1}{2}(x(t)^2 + 1) \cdot |x(t)| \\ &= -2x(t) - x(t)^3 - \frac{1}{2}x(t)^2 \cdot |x(t)| - \frac{1}{2}|x(t)| \end{aligned}$$

und es gilt wieder nach Bemerkung 1.16 $x(t) \geq z(t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $z(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z}(t) = -2z(t) - z(t)^3 - \frac{1}{2}z(t)^2 \cdot |z(t)| - \frac{1}{2}|z(t)|$$

mit $z(0) = x_0$ ist. Wie bei $y(t)$ kann man argumentieren, dass diese Differentialgleichung global asymptotisch stabil ist. Damit hat man die Lösung $x(t)$ der ursprünglichen Differentialgleichung sowohl nach oben als auch nach unten durch die Lösung einer global asymptotisch stabilen Differentialgleichung beschränkt. Mit Lemma 1.21 folgt, dass auch $\dot{x}(t)$ global asymptotisch stabil ist. Damit hat man robuste Stabilität und auch Input-to-State Stabilität gezeigt.

Die folgende Abbildung veranschaulicht das Wirken der Stability Margin noch einmal grafisch. Dabei wird das Feedback $k(t, x) = \rho(\|x\|) \cdot d(t)$ eingesetzt, wobei $d(t)$ zufällige Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ annimmt. Damit gilt $\|d(t)\| \leq 1$ und $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$. Der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \rho(\|x\|) \cdot d(t)) = -2x(t) - x(t)^3 + \frac{1}{2}(x(t)^2 + 1) \cdot |x(t)| \cdot d(t)$$

ist also global asymptotisch stabil. Dargestellt wird hierbei die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten $x_0 \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ auf den Intervallen $[0, 2]$ und $[0, 4]$ in zwei $t-x$ -Diagrammen. Man sieht, dass die Lösungen gegen das Gleichgewicht 0 konvergieren, was ein deutlicher Hinweis auf asymptotische Stabilität ist, aber natürlich nicht den Beweis ersetzen kann, den wir eben geführt haben. (Der Matlab-Code befindet sich unter Programm 1 im Anhang).

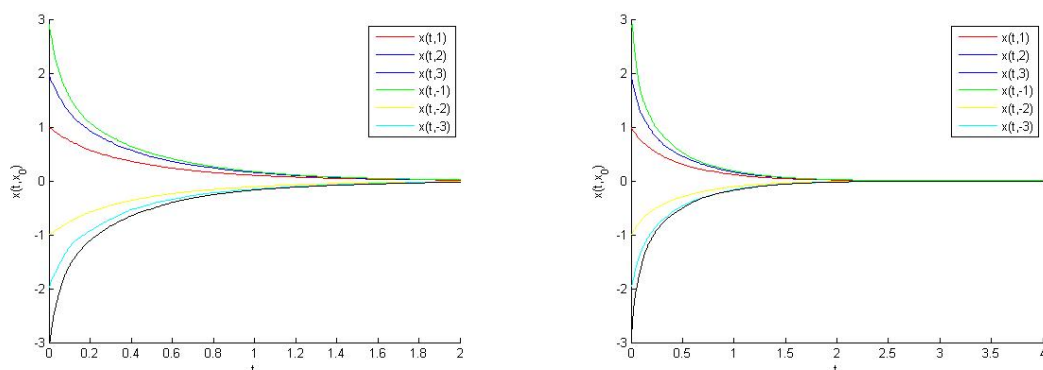


Abbildung 2.4: Grafische Darstellung der Stability Margin in Beispiel 2.12

2.3. Input-to-State Stabilität im linearen Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir den Spezialfall eines linearen Kontrollsystems (1.15). Dieses hat die Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Der folgende Satz zeigt, dass der Begriff der Input-to-State Stabilität im linearen Fall nichts Neues ist.

Satz 2.13. Ein lineares Kontrollsystem ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es 0-GAS ist.

Beweis: Wir wissen nach Satz 2.6, dass Input-to-State Stabilität die Bedingung 0-GAS sogar für allgemeine Differentialgleichungen impliziert, also insbesondere für lineare Differentialgleichungen. Für den Beweis der Rückrichtung verwenden wir die Lösungsformel für lineare Kontrollsysteme (1.16). Diese liefert

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &= \|e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds\| \leq \\ &\leq \|e^{At}x\| + \left\| \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right\| \leq \\ &\leq \|e^{At}\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|u\| \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| ds \\ &= \|e^{At}\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|u\| \int_0^t (-1) \cdot \|e^{A(t-s)}\| ds. \end{aligned}$$

Verwendet man die Formel für Integration durch Substitution

$$\int_z^t \varphi'(s)f(\varphi(s))ds = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(t)} f(s)ds$$

mit $\varphi : s \mapsto t - s$, $\varphi' : s \mapsto -1$ und $f : s \mapsto \|e^{As}\|$ erhält man

$$\int_0^t (-1) \cdot \|e^{A(t-s)}\| ds = \int_t^0 \|e^{As}\| ds.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &\leq \|e^{At}\| \cdot \|x\| - \|B\| \cdot \|u\| \int_t^0 \|e^{As}\| ds \\ &= \|e^{At}\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|u\| \int_0^t \|e^{As}\| ds \\ &\leq \|e^{At}\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|u\| \int_0^\infty \|e^{As}\| ds. \end{aligned}$$

Nach (1.8) ist asymptotische Stabilität im linearen Fall äquivalent zu

$$\|e^{At}\| \leq Ce^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0$$

für Konstanten $C, \sigma > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &\leq Ce^{-\sigma t} \|x\| + \|B\| \cdot \|u\| \int_0^\infty Ce^{-\sigma s} ds \\ &= Ce^{-\sigma t} \|x\| + \frac{C \cdot \|B\|}{\sigma} \cdot \|u\|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definiert man nun $\beta(\|x\|, t) := Ce^{-\sigma t} \|x\|$ und $\gamma(\|u\|) := \frac{C \cdot \|B\|}{\sigma} \cdot \|u\|$, erhält man

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|u\|).$$

Man kann leicht erkennen, dass $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ ist. Damit ist die Bedingung (2.4) erfüllt und das Kontrollsystem ist Input-to-State stabil. □

Bemerkung 2.14. Betrachtet man den Beweis von Satz 2.13 noch einmal genauer, sieht man, dass zum Teil relativ grob abgeschätzt wurde. Insbesondere die Abschätzung

$$\int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \leq \|B\| \cdot \|u\| \int_0^t e^{A(t-s)} ds$$

kann man durch die schwächere Abschätzung

$$\int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \leq \|B\| \cdot \|u_{[0,t]}\| \int_0^t e^{A(t-s)} ds$$

ersetzen. Das führt letztendlich zu

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x\| + \frac{C \cdot \|B\|}{\sigma} \cdot \|u_{[0,t]}\|. \tag{2.13}$$

Im Beweis ist diese Form eher hinderlich, doch für die Herleitung der Input-to-State Stabilität war sie, wie wir zu Beginn von Kapitel 2 gesehen haben, sehr hilfreich. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels halten wir fest, dass Satz 2.13 im Nichtlinearen nicht gelten muss. Das zeigt insbesondere, dass wir auf die Voraussetzung *AG* in Satz 2.6 nicht verzichten können.

Bemerkung 2.15. Für nichtlineare Systeme muss Satz 2.13 nicht gelten, wie wir bereits in Beispiel 1.27 gesehen haben. Das nichtlineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (x(t)^2 + 1) \cdot u(t).$$

erfüllt die Bedingung *0-GAS*, da $\dot{x}(t) = -x(t)$ nach (1.7) global asymptotisch stabil ist. Für $u(t) = (2t + 2)^{-\frac{1}{2}}$ und Anfangsbedingung $x(0) = \sqrt{2}$ ergibt sich die unbeschränkte Lösung

$$\varphi(t, x, u) = (2t + 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Für ISS müsste für alle $t \geq 0$

$$|(2t + 2)^{\frac{1}{2}}| \leq \beta(\sqrt{2}, t) + \gamma \left(\sup_{t \geq 0} |(2t + 2)^{-\frac{1}{2}}| \right)$$

für ein $\beta \in \mathcal{KL}$ und ein $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gelten. Da die rechte Seite dieser Ungleichung beschränkt und die linke Seite unbeschränkt in t ist, kann sie nicht gelten. Somit kann das Kontrollsystem nicht Input-to-State stabil sein. ■

3. Verwandte Stabilitätsbegriffe

In diesem Kapitel werden einige Stabilitätsbegriffe definiert und untersucht, die eng mit der Input-to-State Stabilität verknüpft sind. Dabei werden wir zunächst zwei Abschwächungen kennenlernen, die lokale Input-to-State Stabilität und die Integral Input-to-State Stabilität, die bereits in Bemerkung 2.4 erwähnt wurde. Anschließend betrachten wir eine dynamische Variante von ISS und definieren weitere Stabilitätsbegriffe, in denen der Ausgang des Systems eine zentralere Rolle spielt.

3.1. Lokale Input-to-State Stabilität

Betrachtet man Definition 2.3 noch einmal genau, stellt man fest, dass für den Anfangswert x und die Störfunktion u keine Einschränkungen gemacht wurden. Bei der Input-to-State Stabilität handelt es sich also um ein globales Stabilitätskonzept. Man kann Input-to-State Stabilität aber auch in einer abgeschwächten, lokalen Version definieren.

Definition 3.1. Ein Kontrollsystem heißt lokal Input-to-State stabil, falls es eine offene Umgebung $N \subset \mathbb{R}^n$ von 0, ein $R > 0$ und Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}$$

für alle Anfangswerte $x \in N$, alle Störfunktionen u mit $\|u\|_\infty \leq R$ und alle $t \geq 0$ gilt. ■

Neben der offensichtlichen Tatsache, dass lokale Input-to-State Stabilität aus (globaler) Input-to-State Stabilität folgt, ergibt sich der folgende Zusammenhang mit der asymptotischen Stabilität.

Satz 3.2. Ein Kontrollsystem ist genau dann lokal Input-to-State stabil, wenn es lokal 0 – AS ist (d.h. wenn das ungestörte System lokal asymptotisch stabil ist).

Beweis: Das Kontrollsystem $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ sei lokal ISS. Nach Definition 3.1 gilt dann die Bedingung

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}$$

für alle $t \geq 0$, alle $x \in N$ und alle u mit $\|u\|_\infty \leq R$ für Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$. Da aber $\gamma(\|0\|_\infty) = 0$ folgt für das ungestörte System

$$\|\varphi(t, x, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t),$$

was gerade der Bedingung für lokale asymptotische Stabilität nach Definition 1.5 (ii) entspricht.

Für den Beweis der Rückrichtung verwendet man die Aussage aus Satz 1.9, nämlich dass aus lokaler asymptotischer Stabilität die Existenz einer lokalen Lyapunov-Funktion V folgt. Diese erfüllt die Bedingungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

und

$$DV(x)f(x, 0) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

für alle $x \in N$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0. Nun wählt man ein $\chi \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$\max_{\|x\|=r, \|u\| \leq \chi(r)} \|DV(x)\| \cdot \|f(x, u) - f(x, 0)\| \leq \frac{\alpha_3(r)}{2}$$

für alle $r \in [0, R]$, $x \in N$. Dass dies möglich ist zeigt Abbildung 3.1. Für $\|u\| \leq \chi(\|x\|)$ gilt damit

$$DV(x)f(x, u) - DV(x)f(x, 0) \leq \max_{\|x\|=r, \|u\| \leq \chi(r)} \|DV(x)\| \cdot \|f(x, u) - f(x, 0)\| \leq \frac{\alpha_3(\|x\|)}{2}.$$

Addiert man auf beiden Seiten $DV(x)f(x, 0)$, erhält man

$$DV(x)f(x, u) \leq \frac{\alpha_3(\|x\|)}{2} + DV(x)f(x, 0) \leq -\frac{\alpha_3(\|x\|)}{2}.$$

Zusammengefasst gilt also

$$\|u\| \leq \chi(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leq -\frac{\alpha_3(\|x\|)}{2},$$

was gerade der zweiten Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion entspricht. Zu beachten ist hierbei jedoch, dass diese Bedingung, aufgrund der Einschränkungen für u und x , nur in einer lokalen Variante gilt. Man hat also eine Art lokale ISS-Lyapunov-Funktion konstruiert. Betrachtet man noch einmal den Beweis von Satz 2.10, erkennt man, dass die Beweisrichtung (3) \Rightarrow (1) auch im lokalen Fall funktioniert. Man kann also die Aussage „Existenz einer ISS-Lyapunov-Funktion impliziert Input-to-State Stabilität“ auch in der lokalen Variante treffen. Somit haben wir die lokale Input-to-State Stabilität bewiesen. \square

Die Quelle für diesen Beweis ist [8]. Es bleibt die Frage, warum dieser Satz im globalen Fall nicht gilt, was wir ja in Bemerkung 2.15 gesehen haben. Diese Frage lässt sich sehr schön anhand der folgenden Abbildung beantworten.

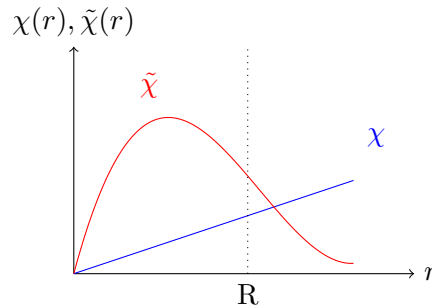


Abbildung 3.1: Konstruktion der Maximalfunktion im Beweis von Satz 3.1

Im Beweis wird, ohne es zu erwähnen, die Maximalfunktion $\tilde{\chi}$, die die Bedingung

$$\max_{\|x\|=r, \|u\|\leq\tilde{\chi}(r)} \|DV(x)\| \cdot \|f(x, u) - f(x, 0)\| \leq \frac{\alpha_3(r)}{2}$$

erfüllt, durch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion χ nach unten abgeschätzt. Man kann sich leicht vorstellen, dass dieser Trick auf einem Intervall $[0, R]$ mit $R \in \mathbb{R}$ immer möglich ist. Für das Intervall $[0, \infty[$ muss das jedoch nicht mehr der Fall sein. Aus diesem Grund lässt sich der Beweis auch nicht auf den globalen Fall verallgemeinern. Mit Hilfe von Satz 3.2 lassen sich leicht Beispiele von gestörten Systemen konstruieren, die nicht Input-to-State stabil aber lokal Input-to-State stabil sind.

Beispiel 3.3. Betrachte das System

$$\dot{x}(t) = x(t)^3 - x(t) + d(t)$$

und setze $d \equiv 0$. Man erhält

$$\dot{x}(t) = x(t)^3 - x(t)$$

und kann sich leicht vorstellen, dass der Term $x(t)^3$ dominiert, was bei betragsmäßig großen Startwerten x dazu führen wird, dass sich die Lösung vom Gleichgewicht $x^* = 0$ entfernt. Genauer gesagt gilt

$$|\varphi(t, x)| \begin{cases} \rightarrow \infty, & |x| > 1 \\ \equiv 1, & |x| = 1 \\ \rightarrow 0, & |x| < 1. \end{cases}$$

Den Widerspruch zu globaler asymptotischer Stabilität erhält man also beispielsweise mit dem Startwert $x = 2$. Für lokale asymptotische Stabilität definiert man die Umgebung

$$N := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}.$$

Für alle Startwerte $x \in N$ gilt

$$\dot{x}(t) \begin{cases} < 0, & x(t) > 0 \\ = 0, & x(t) = 0 \\ > 0, & x(t) < 0 \end{cases}$$

und damit nach Lemma 1.13 lokale asymptotische Stabilität. Geht man nun wieder zum gestörten System über, erkennt man, dass es nicht Input-to-State stabil sein kann, weil es die Bedingung $0 - GAS$ nicht erfüllt. Die Bedingung lokal $0 - AS$ hingegen ist erfüllt, womit das System nach Satz 3.2 auch lokal Input-to-State stabil ist. ■

3.2. Integral Input-to-State Stabilität

Neben der lokalen Variante der Input-to-State Stabilität gibt es noch eine zweite sehr wichtige Abschwächung des ISS-Begriffes, nämlich den der Integral Input to-State Stabilität. Im Operatoransatz entspricht das der Betrachtung „ $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ “.

Definition 3.4. Ein Kontrollsystem heißt Integral Input to-State stabil (iISS), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma_1 \left(\int_0^t \gamma_2(\|u(s)\|) ds \right) \quad (3.1)$$

für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ gilt. ■

An Bedingung (3.1) sieht man, dass die Störfunktion nicht mehr in \mathcal{L}^∞ liegen muss, sondern nur noch in \mathcal{L}^2 . Man erkennt also, dass es sich um eine Abschwächung des ISS-Begriffes handelt. Wir werden nun analog zu Definition 2.7 den Begriff der iISS-Lyapunov-Funktion definieren, bevor wir wiederum einen Satz formulieren, der die Äquivalenz zwischen iISS und der Existenz einer iISS-Lyapunov-Funktion aufzeigt.

Definition 3.5. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt iISS-Lyapunov-Funktion, falls es Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_4 \in \mathcal{K}$ und eine stetige, positiv definite Funktion α_3 gibt, sodass die Bedingungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

und

$$DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|u\|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ gelten. ■

Der wesentliche Unterschied zu einer ISS-Lyapunov-Funktion liegt dabei in der Funktion α_3 . Für eine ISS-Lyapunov-Funktion muss α_3 eine \mathcal{K}_∞ -Funktion sein, für eine iISS-Lyapunov-Funktion reicht es aus, dass α_3 stetig und positiv definit ist. Wir werden in Beispiel 3.8 sehen, dass dadurch der Begriff der Lyapunov-Funktion echt abgeschwächt wird. Zudem wird V nur noch als stetig differenzierbar und nicht mehr als glatt vorausgesetzt, was sich jedoch durch eine Glättung der Lyapunov-Funktion beseitigen lässt. Zuletzt wird $\alpha_4 \in \mathcal{K}$ und nicht mehr $\alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$ gefordert, was ebenfalls keine Einschränkung ist, da man V entsprechend anpassen kann. Wie im Satz 2.10 lässt sich mit Hilfe der iISS-Lyapunov-Funktion die folgende Äquivalenz charakterisieren.

Satz 3.6. Ein Kontrollsystem ist genau dann iISS, wenn eine glatte iISS-Lyapunov-Funktion existiert.

Für den Beweis und weitere Charakterisierungen von Integral Input-to-State Stabilität vergleiche [2, Theorem 1].

Bemerkung 3.7. Im Satz 3.6 könnte man auf die Bedingung „glatt“ auch verzichten, da die Existenz einer iISS-Lyapunov-Funktion gemäß Definition 3.5, also einer stetig differenzierbaren Funktion V , bereits eine hinreichende Bedingung für Integral Input-to-State Stabilität ist. ■

Die Beobachtungen nach den Definitionen 3.4 und 3.5 haben gezeigt, dass die Voraussetzungen im Vergleich zu den Definitionen im ISS-Fall abgeschwächt wurden. Dass sich dadurch eine echte Verallgemeinerung ergibt, zeigt das folgende Beispiel, in dem ein Kontrollsystem betrachtet wird, das zwar Integral Input-to-State stabil, allerdings nicht Input-to-State stabil ist.

Beispiel 3.8. Betrachte das eindimensionale Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t) \cdot u(t).$$

Setzt man $u \equiv 2$, erhält man $\dot{x}(t) = x(t)$ und unter der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ die Lösung

$$x(t) = e^t.$$

Diese ist unbeschränkt, was einen Widerspruch zu ISS liefert. Die Integral Input-to-State Stabilität erhält man durch Angabe einer iISS-Lyapunov-Funktion. Wir setzen dazu

$$V(x) := \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ 2 \log(|x|) + 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass V stetig differenzierbar ist und

$$DV(x) = \begin{cases} 2x, & |x| \leq 1 \\ 2/x, & |x| > 1 \end{cases}$$

gilt. Man erhält

$$DV(x)f(x, u) = \begin{cases} 2x(-x + xu), & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}(-x + xu), & |x| > 1. \end{cases}$$

Verwendet man im oberen Ast die Abschätzung $|x| \leq 1$ erhält man

$$DV(x)f(x, u) \leq \begin{cases} -2x^2 + 2u, & |x| \leq 1 \\ -2 + 2u, & |x| > 1. \end{cases}$$

Wir definieren

$$\alpha_3(r) := \begin{cases} 2r^2, & r \leq 1 \\ 2, & r > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha_4(r) := 2r$$

und erhalten damit

$$DV(x)f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|u\|),$$

wobei offensichtlich α_3 stetig und positiv definit und $\alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$ ist. Dadurch ist die zweite Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion erfüllt. Die erste Bedingung folgt leicht mit $V(x) = V(-x)$, wenn man beispielsweise

$$\alpha_1(r) := \frac{V(r)}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2(r) := 2V(r)$$

setzt, da V eingeschränkt auf \mathbb{R}_0^+ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist. Nach Bemerkung 3.7 ist damit Integral Input-to-State Stabilität gezeigt, weil ein stetig differenzierbares V bereits hinreichend für Integral Input-to-State Stabilität ist. Man sollte sich nun noch kurz überlegen, warum V nicht die Voraussetzungen einer ISS-Lyapunov-Funktion erfüllt. Der Grund hierfür liegt in der Definition von α_3 . Für eine ISS-Lyapunov-Funktion müsste $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ sein, also insbesondere streng monoton wachsend. Das gewählte α_3 ist aber auf dem Intervall $(1, \infty)$ konstant und kann somit nicht aus \mathcal{K}_∞ sein. ■

3.3. Dynamische Input-to-State Stabilität

Ein Problem bei der Input-to-State Stabilität ist die statische Abhängigkeit von $u(t)$, die gegeben ist, weil der Zeitparameter t in $\gamma(\|u\|_\infty)$ nicht berücksichtigt wird. Betrachtet man beispielsweise die Störfunktion

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

und $\gamma \equiv id$ gilt $\gamma(\|u\|_\infty) = 1$. Nach Bedingung (2.3) scheint sich für festes $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $\varphi(t, x, u)$ für alle $t \geq 0$ im n -dimensionalen Ball mit Radius 1 um den Ursprung aufhalten zu dürfen. Wir haben zwar in Bemerkung 2.3 gesehen, dass aus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$ auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, u)\| = 0$ folgt, doch ist das weder offensichtlich, noch lässt sich eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit machen. Zudem wäre es wünschenswert, dass sich eine direkte Verbindung zwischen der Lyapunov-Funktion V und den Funktionen β und γ aus (2.4) erkennen lässt, was bei Input-to-State Stabilität nicht der Fall ist. Ein Stabilitätsbegriff, der diese Probleme löst, ist die dynamische Input-to-State Stabilität (vgl. [7] und [9]), bei der man $\gamma(\|u\|_\infty)$ durch

$$\nu(u, t) := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, t]} \mu(\gamma(\|u(\tau)\|), t - \tau) \tag{3.2}$$

ersetzt. Dabei sei $\mu \in \mathcal{KLD}$, also eine Funktion $\mu : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, sodass die Einschränkung auf $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ eine \mathcal{KL} -Funktion ist und zudem

$$\mu(r, t + s) = \mu(\mu(r, t), s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Wichtig für die Herleitung ist ein Lemma von Sontag über \mathcal{KL} -Funktionen (vgl. [23, Proposition 7]), das besagt, dass für jedes $\beta \in \mathcal{KL}$ zwei \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_1 und α_2 existieren, sodass

$$\beta(r, t) \leq \alpha_1(\alpha_2(r)e^{-t})$$

gilt. Mit (3.2) kann man dynamische Input-to-State Stabilität wie folgt definieren.

Definition 3.9. Ein Kontrollsystem heißt dynamisch Input-to-State stabil (ISDS), falls es Funktionen $\mu \in \mathcal{KL}\mathcal{D}$ und $\sigma, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\mu(\sigma(\|x\|), t), \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, t]} \mu(\gamma(\|u(\tau)\|), t - \tau)\} \quad (3.3)$$

für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ gilt. ■

Man sieht direkt, dass der Zeitparameter t nun im u -Term eine Rolle spielt. Hat man nun zum Beispiel eine Störfunktion mit betragsmäßig großem $u(0)$, die schnell gegen 0 geht, dann ist $u(0)$ für große t nicht mehr so wichtig, da $\mu \in \mathcal{KL}\mathcal{D}$ und somit streng monoton fallend im zweiten Argument ist. Es gibt also ein $t > 0$, ab dem die starke Anfangsstörung vernachlässigt werden kann (vergleiche Abbildung 3.2).

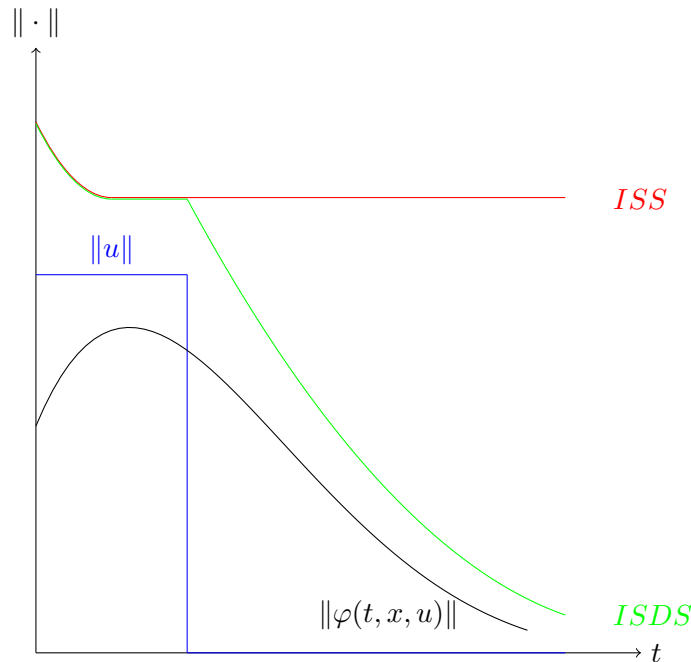


Abbildung 3.2: Grafische Veranschaulichung der Bedingung für dynamische Input-to-State Stabilität

Ein weiteren Vorteil von ISDS zeigt sich bei der Charakterisierung über ISDS-Lyapunov-Funktionen. In Anlehnung an [7] bezeichnen wir dabei die Funktion $\mu \in \mathcal{KL}\mathcal{D}$ als „rate“ und die Funktionen $\gamma, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ als „gains“.

Satz 3.10. Ein System ist genau dann dynamisch Input-to-State stabil mit rate $\mu \in \mathcal{KLD}$ und gains $\gamma, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$, wenn eine (evtl. unstetige) ISDS-Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ existiert, die die Bedingungen

$$\|x\| \leq V(x) \leq \sigma(\|x\|)$$

und

$$V(\varphi(t, x, u)) \leq \max\{\mu(V(x), t), \nu(u, t)\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ und alle $u \in \mathcal{U}$ erfüllt. Dabei ist ν definiert wie in (3.2).

In Anwendungen ist es häufig besser, wenn man mit glatten ISDS-Lyapunov-Funktionen arbeitet. Der folgende Satz zeigt, dass man ein V finden kann, das zumindest außerhalb der 0 glatt ist, mit dem man die rate und die gains bis auf ein ε bestimmen kann. Wir beschränken uns dabei auf glatte Funktionen μ, σ und γ und lokal Lipschitz stetiges g .

Satz 3.11. Ein System ist genau dann dynamisch Input-to-State stabil mit rate $\mu \in \mathcal{KLD}$ und gains $\gamma, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein stetiges V_ε existiert, das auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ glatt ist und das die Bedingungen

$$\frac{\|x\|}{1 + \varepsilon} \leq V_\varepsilon(x) \leq \sigma(\|x\|)$$

und

$$\gamma(\|u\|) \leq V_\varepsilon(x) \Rightarrow DV_\varepsilon(x)f(x, u) \leq -(1 - \varepsilon)g(V_\varepsilon(x))$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $u \in \mathcal{U}$ erfüllt.

Für die Beweise der Sätze 3.10 und 3.11 vergleiche [9, Theorem 3, Theorem 4]. Das folgende Beispiel zeigt, wie man nun mit Hilfe von Satz 3.11 und einer Lyapunov-Funktion für das unkontrollierte System die rate und die gains konstruieren kann.

Beispiel 3.12. Betrachte das eindimensionale System

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)^3.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ definieren wir $V_\varepsilon(x) = |x|$. Da V_ε unabhängig von ε ist, schreiben wir V statt V_ε und erhalten damit

$$\frac{\|x\|}{1 + \varepsilon} \leq |x| \leq V(x) \leq \sigma(|x|)$$

für $\sigma \equiv id$. Zudem gilt für alle $x \neq 0$

$$DV(x)f(x, 0) = -|x| \leq -V(x).$$

Nun wählen wir ein γ , sodass die Implikation

$$\gamma(|u|) \leq V(x) \Rightarrow DV(x)u^3 \leq \frac{V(x)}{2}$$

gilt, also zum Beispiel $\gamma(r) := 2r^3$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma(|u|) \leq V(x) \Rightarrow DV(x)f(x, u) &= DV(x)f(x, 0) + DV(x)u^3 \\ &\leq -V(x) + \frac{V(x)}{2} \\ &= -\frac{V(x)}{2} \\ &\leq -(1 - \varepsilon)\frac{V(x)}{2}. \end{aligned}$$

Also erfüllen V, γ und $g(z) = \frac{z}{2}$ die Voraussetzungen des Satzes und es gilt

$$\mu(r, t) = e^{-\frac{t}{2}r} \quad \text{und} \quad \gamma(r) = 2r^3.$$

Dabei ergibt sich μ als Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d}{dt}\mu(r, t) = -g(\mu(r, t))$, $\mu(r, 0) = r$. ■

Es bleibt noch zu klären, in welchem Verhältnis Input-to-State Stabilität und dynamische Input-to-State Stabilität stehen. Aufgrund der zusätzlichen Informationen, die die dynamische Input-to-State Stabilität liefert, könnte man vermuten, dass der ISS-Begriff echt stärker ist. Diese Vermutung erweist sich allerdings als falsch, denn man kann zeigen, dass beide Begriffe äquivalent sind.

Satz 3.13. Ein Kontrollsystem (1.14) ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es dynamisch Input-to-State stabil ist.

Es fällt auf, dass zumindest die Beweisrichtung „ISDS \Rightarrow ISS“ leicht zu zeigen ist, da $\mu(\sigma(r), t)$ eine \mathcal{KL} -Funktion und $\nu(u, t) \leq \gamma(\|u\|)$ ist. Für den vollständigen Beweis inklusive der Rückrichtung vergleiche [6, Proposition 3.4.4].

3.4. Stabilitätsbegriffe für Kontrollsysteme mit Ausgang

Bisher haben wir, ohne weiter darüber nachzudenken, Kontrollsysteme betrachtet, bei denen der gesamte Zustandsvektor $x(t)$ „ablesbar“ ist, was in der Praxis kaum der Fall ist. Allgemeiner (und auch realistischer) sind die sogenannten Kontrollsysteme mit Ausgang

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei wie bisher f ein stetiges Vektorfeld und u messbar und wesentlich beschränkt ist. Neu ist die stetige Abbildung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, die $h(0) = 0$ erfüllt.

Bemerkung 3.14. Alle bisher definierten Stabilitätsbegriffe wurden für Kontrollsysteme der Form (3.4) eingeführt. Da der Ausgang $y(t)$ in diesen Definitionen allerdings keine explizite Rolle spielt, wurden diese hier für Kontrollsysteme ohne Ausgang (1.14) erläutert. Man erkennt leicht, dass man die Definitionen von ISS, lokal ISS, iISS und dynamisch ISS auch für die allgemeinere Form (3.4) unverändert übernehmen kann. ■

Wir wollen jetzt kurz einige Stabilitätsbegriffe betrachten, bei denen der Ausgang $y(t)$ in den Definitionen auftritt, jedoch ohne dabei ausführlich auf äquivalente Charakterisierungen einzugehen.

Eine sehr leicht nachvollziehbare Verallgemeinerung des ISS-Begriffes ist die Input-to-Output Stabilität. Im Vergleich zur Input-to-State Stabilität steht anstelle des Zustandes nun der Ausgang.

Definition 3.15. Ein Kontrollsystem heißt Input-to-Output stabil (IOS), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|y(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}$$

für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ gilt. ■

Einen anderen Ansatz bietet die Output-to-State Stabilität, bei der im Vergleich zu ISS der Ausgang y den Eingang u ersetzt.

Definition 3.16. Ein Kontrollsystem heißt Output-to-State stabil (OSS), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma(\|y\|_\infty)\}$$

für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ gilt. ■

Zuletzt wollen wir noch den Begriff der Input-Output-to-State Stabilität definieren, der die Ansätze ISS und OSS kombiniert.

Definition 3.17. Ein Kontrollsystem heißt Input-Output-to-State stabil (IOSS), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \gamma_1(\|u\|_\infty), \gamma_2(\|y\|_\infty)\}$$

für alle Anfangswerte x , alle Störfunktionen u und alle Zeitpunkte $t \geq 0$ gilt. ■

Für die Begriffe IOS, OSS und IOSS gibt es vergleichbar zur Input-to-State Stabilität entsprechende IOS-, OSS- und IOSS-Lyapunov-Funktionen, deren Existenz wiederum äquivalent zum jeweiligen Stabilitätsbegriff ist (vgl. [31] und [33]).

Bemerkenswert ist, dass man die Begriffe ISS, IOS und IOSS als nichtlineare Verallgemeinerungen von interner Stabilität, externer Stabilität und asymptotischer Beobachtbarkeit interpretieren kann (vgl. [25]). Interne Stabilität bedeutet, dass für lineare Systeme die Implikation

$$u(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

erfüllt ist. Der Zustand ist also klein, wenn die Störung klein ist. Wir haben bereits in Bemerkung 2.3 gesehen, dass Input-to-State Stabilität (wenn auch nicht direkt ersichtlich) genau diese Eigenschaft besitzt. Externe Stabilität ist gegeben, wenn die Implikation

$$u(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0$$

gilt. Man kann mit der identischen Argumentation wie in Bemerkung 2.3 zeigen, dass diese Implikation durch Input-to-Output Stabilität erfüllt wird. Die Bedingung

$$u(t) \rightarrow 0 \text{ und } y(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

ist äquivalent zu asymptotischer Beobachtbarkeit. Wiederum mit der gleichen Argumentation wie in Bemerkung 2.3 folgt, dass diese Implikation bei Input-Output-to-State Stabilität erfüllt ist.

4. Anwendungen der Input-to-State Stabilität

In diesem Kapitel wollen wir zwei Anwendungsmöglichkeiten der Input-to-State Stabilität untersuchen. Einerseits betrachten wir, wie sich die Verknüpfung Input-to-State stabiler Systeme verhält und werden dabei einige Sätze angeben, die in der Literatur unter dem Begriff „small gain theorems“ zu finden sind. Andererseits wollen wir auch das Feedback-Redesign ansprechen. Dieses erlaubt es, ein Feedback, das ein ungestörtes System stabilisiert, so anzupassen, dass bei zusätzlichem Einwirken einer Störfunktion die Input-to-State Stabilität des Systems sichergestellt ist.

4.1. Kaskadierungen

Um in den einzelnen Sätzen und Bemerkungen nicht durch Angabe der Dimensionen der einzelnen Funktionen und Vektorfelder vom Wesentlichen abzulenken, nehmen wir für dieses Kapitel an, dass $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt. Die Störfunktionen u (bzw. u_1, \dots, u_l) seien Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^k (bzw. nach $\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_l}$). Damit sind dann auch die Dimensionen der Vektorfelder f und g festgelegt und wir können die Aussagen in diesem Kapitel sehr kompakt formulieren. Der erste Satz (vgl. [26, ch. 4]) zeigt, dass Input-to-State Stabilität in Kaskadierungen erhalten bleibt.

Satz 4.1. Betrachte ein System der Form

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= f(z(t), x(t)) \\ \dot{x}(t) &= g(x(t), u(t)),\end{aligned}\tag{4.1}$$

wobei das z -Teilsystem ISS mit Input x und das x -Teilsystem ISS mit Input u ist. Dann ist (4.1) Input-to-State stabil mit Input u .

Beweis: Da beide Teilsysteme Input-to-State stabil sind, gibt es nach Satz 2.6 ISS-Lyapunov-Funktionen V_1 und V_2 in dissipativer Form. Es existieren also \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_i, γ_i für $i = 1, \dots, 4$, sodass die Bedingungen

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|z\|) &\leq V_1(z) \leq \alpha_2(\|z\|) \\ \gamma_1(\|x\|) &\leq V_2(x) \leq \gamma_2(\|x\|)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}DV_1(z)f(z, x) &\leq -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|x\|) \\ DV_2(x)g(x, u) &\leq -\gamma_3(\|x\|) + \gamma_4(\|u\|)\end{aligned}$$

gelten. Zusätzlich nehmen wir noch an, dass $\gamma_3 \equiv 2\alpha_4$ gilt, was nach [28, Corollary] keine Einschränkung ist. Wir setzen nun

$$W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} := V_1(z) + V_2(x)$$

und erhalten damit eine ISS-Lyapunov-Funktion für das gekoppelte System, denn es gilt:

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &= V_1(z) + V_2(x) \geq \alpha_1(\|z\|) + \gamma_1(\|x\|) \geq \tilde{\theta}_1(\|z\|) + \tilde{\theta}_1(\|x\|) \\ W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &= V_1(z) + V_2(x) \leq \alpha_2(\|z\|) + \gamma_2(\|x\|) \leq \tilde{\theta}_2(\|z\|) + \tilde{\theta}_2(\|x\|) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} DW \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z, x) \\ g(x, u) \end{pmatrix} &= DV_1(z)f(z, x) + DV_2(x)g(x, u) \\ &\leq -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|x\|) - \gamma_3(\|x\|) + \gamma_4(\|u\|) \\ &= -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|x\|) - 2\alpha_4(\|x\|) + \gamma_4(\|u\|) \\ &= -\alpha_3(\|z\|) - \alpha_4(\|x\|) + \gamma_4(\|u\|) \\ &\leq -\tilde{\theta}_3(\|z\|) - \tilde{\theta}_3(\|x\|) + \tilde{\theta}_4(\|u\|) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\theta}_1(r) := \min\{\alpha_1(r), \gamma_1(r)\}$, $\tilde{\theta}_2(r) := \max\{\alpha_2(r), \gamma_2(r)\}$, $\tilde{\theta}_3(r) := \min\{\alpha_3(r), \alpha_4(r)\}$ und $\tilde{\theta}_4(r) := \gamma_4(r)$. Dass das Minimum bzw. das Maximum zweier \mathcal{K}_∞ -Funktionen ebenfalls eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, gilt nach Bemerkung 1.4. Für die Maximumsnorm gilt mit $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| &= \max\{|z_1|, \dots, |z_m|, |x_1|, \dots, |x_n|\} \\ &= \max\{\max\{|z_1|, \dots, |z_m|\}, \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}\} \\ &= \max\{\|z\|, \|x\|\}. \end{aligned}$$

Für eine beliebige \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ gilt also

$$\rho(\|z\|) + \rho(\|x\|) \geq \max\{\rho(\|z\|), \rho(\|x\|)\} = \rho(\max\{\|z\|, \|x\|\}) = \rho \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) \quad (4.2)$$

und

$$\rho(\|z\|) + \rho(\|x\|) \leq 2 \cdot \rho(\max\{\|z\|, \|x\|\}) = 2 \cdot \rho \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right). \quad (4.3)$$

Setzt man diese Abschätzungen oben ein, erhält man

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &\geq \tilde{\theta}_1(\|z\|) + \tilde{\theta}_1(\|x\|) \geq \tilde{\theta}_1 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) =: \theta_1 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) \\ W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &\leq \tilde{\theta}_2(\|z\|) + \tilde{\theta}_2(\|x\|) \leq 2 \cdot \tilde{\theta}_2 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) =: \theta_2 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 DW \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z, x) \\ g(x, u) \end{pmatrix} &\leq -\tilde{\theta}_3(\|z\|) - \tilde{\theta}_3(\|x\|) + \tilde{\theta}_4(\|u\|) \\
 &\leq -\tilde{\theta}_3 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) + \tilde{\theta}_4(\|u\|) \\
 &=: -\theta_3 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) + \theta_4(\|u\|).
 \end{aligned}$$

Da $\tilde{\theta}_i \in \mathcal{K}_\infty$ für $i = 1, \dots, 4$ gilt und wir bei der Definition von θ_i nur mit Konstanten multipliziert haben, gilt auch $\theta_i \in \mathcal{K}_\infty$ für $i = 1, \dots, 4$ und man hat eine ISS-Lyapunov-Funktion W für das System (4.1) gefunden. Damit ist (4.1) Input-to-State stabil. □

Folgerung 4.2. Aus diesem Satz folgt, dass Systeme der Form

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= f(z(t), x(t)) \\
 \dot{x}(t) &= g(x(t)),
 \end{aligned}$$

mit global asymptotisch stabilem x -Teilsystem und Input-to-State stabilem z -Teilsystem (mit Input x) insgesamt global asymptotisch stabil sind.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren können, müssen wir festhalten was mit Input-to-State Stabilität bei mehreren Eingangssignalen gemeint ist.

Bemerkung 4.3. (i) In Satz 4.4 werden wir annehmen, dass das x -Teilsystem Input-to-State stabil in den Inputs z und u_2 ist. Damit diese Formulierung Sinn ergibt, müssen wir die Definition von Input-to-State Stabilität auf Systeme mit mehreren Eingangssignalen verallgemeinern. Naheliegender ist, dass man für jedes Eingangssignal eine eigene Funktion $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ verwendet. Ein System mit l Eingangssignalen u_1, \dots, u_l heißt also Input-to-State stabil, wenn für die Lösung des Systems

$$\|\varphi(t, x, u_1, \dots, u_l)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \sum_{i=1}^l \gamma_i(\|u_i\|)$$

für eine \mathcal{KL} -Funktion β und \mathcal{K}_∞ -Funktionen γ_i ($i = 1, \dots, l$) gilt. Der Fall mit den Inputs z und u_2 aus dem Satz ist dann gegeben mit $l = 2$ und $u_1 = z$.

(ii) Damit ist auch klar, wie man die Begriffe ISS-Lyapunov-Funktion und Stability Margin für Systeme mit mehreren Inputs zu verstehen hat. Bei einer ISS-Lyapunov-Funktion wird aus (2.11) in der Implikationsform die Bedingung

$$\max\{\|u_1\|, \dots, \|u_l\|\} \leq \chi(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, u_1, \dots, u_l) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

und in der dissipativen Form die Bedingung

$$DV(x)f(x, u_1, \dots, u_l) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \gamma \left(\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix} \right\| \right).$$

Bei einer Stability Margin wird für jedes Eingangssignal ein eigenes Feedback eingesetzt. Das heißt der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x} = f(x, k_1(t, x), \dots, k_l(t, x))$$

muss für alle in x Lipschitz-stetigen Feedbacks $k_1(t, x), \dots, k_l(t, x)$ mit $\|k_i(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$ für $i = 1, \dots, l$ global asymptotisch stabil sein. ■

Der folgende Satz ist ein Spezialfall eines „small gain theorems“ von Jiang, Teel und Praly (vgl. [12, Corollary 2.2]) und wird im Kapitel 5 von zentraler Bedeutung sein.

Satz 4.4. Betrachte ein System der Form

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(z(t), u_1(t)) \\ \dot{x}(t) &= g(z(t), x(t), u_2(t)), \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei das z -Teilsystem Input-to-State stabil mit Input u_1 und das x -Teilsystem Input-to-State stabil in den Inputs z und u_2 ist. Dann ist (4.4) Input-to-State stabil mit Input $u = (u_1, u_2)^T$.

Beweis: Der Beweis ist nahezu analog zum Beweis von Satz 4.1. Man definiert wieder

$$W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} := V_1(z) + V_2(x),$$

wobei V_1 und V_2 die ISS-Lyapunov-Funktionen des z - bzw. des x -Teilsystems sind. Es existieren also \mathcal{K}_∞ -Funktionen α_i, γ_i für $i = 1, \dots, 4$, sodass die Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|z\|) &\leq V_1(z) \leq \alpha_2(\|z\|) \\ \gamma_1(\|x\|) &\leq V_2(x) \leq \gamma_2(\|x\|) \end{aligned}$$

und

$$DV_1(z)f(z, u_1) \leq -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|u_1\|)$$

$$DV_2(x)g(z, x, u_2) \leq -\gamma_3(\|x\|) + \gamma_4 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| \right)$$

gelten. Zusätzlich sei diesmal $\gamma_4 \equiv \frac{1}{2}\alpha_3$, was wiederum mit [28, Corollary] möglich ist. Mit identischen Abschätzungen wie im Beweis von Satz 4.1 folgt

$$W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \geq \theta_1 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right)$$

und

$$W \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \leq \theta_2 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right)$$

für die dort definierten \mathcal{K}_∞ -Funktionen θ_1 und θ_2 . Zudem ist

$$\begin{aligned} DW \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z, u_1) \\ g(z, x, u_2) \end{pmatrix} &= DV_1(z)f(z, u_1) + DV_2(x)g(z, x, u_2) \\ &\leq -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|u_1\|) - \gamma_3(\|x\|) + \gamma_4 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| \right) \\ &\stackrel{(4.2)}{\leq} -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|u_1\|) - \gamma_3(\|x\|) + \gamma_4(\|z\|) + \gamma_4(\|u_2\|) \\ &= -\frac{1}{2}\alpha_3(\|z\|) - \gamma_3(\|x\|) + \alpha_4(\|u_1\|) + \gamma_4(\|u_2\|) \\ &\leq -\tilde{\theta}_3(\|z\|) - \tilde{\theta}_3(\|x\|) + \tilde{\theta}_4(\|u_1\|) + \tilde{\theta}_4(\|u_2\|), \end{aligned}$$

wobei diesmal $\tilde{\theta}_3(r) := \min\{\frac{1}{2}\alpha_3(r), \gamma_3(r)\}$ und $\tilde{\theta}_4(r) := \max\{\alpha_4(r), \gamma_4(r)\}$ mit Bemerkung 1.4 wieder \mathcal{KL} -Funktionen sind. Mit den Abschätzungen (4.2) und (4.3) folgt damit

$$\begin{aligned} DW \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z, u_1) \\ g(z, x, u_2) \end{pmatrix} &\leq -\tilde{\theta}_3 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) + 2 \cdot \tilde{\theta}_4 \left(\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| \right) \\ &=: -\theta_3 \left(\left\| \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right\| \right) + \theta_4 \left(\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| \right) \end{aligned}$$

für \mathcal{K}_∞ -Funktionen θ_3 und θ_4 . Damit ist W eine ISS-Lyapunov-Funktion für das System (4.1), womit Input-to-State Stabilität gezeigt ist. □

Bemerkung 4.5. In der allgemeineren Version von Satz 4.4 nach Jiang, Teel und Praly darf das z -Teilsystem zusätzlich noch von $x(t)$ abhängen. Dann benötigt man jedoch die Voraussetzung

$$\gamma_z(\gamma_x(r)) < r,$$

wobei γ_z und γ_x die \mathcal{K}_∞ -Funktionen aus der definierenden Ungleichung für Input-to-State Stabilität (vgl. Bemerkung 4.3(i)) sind. Diese Zusatzvoraussetzung wird in Satz 4.4 nicht benötigt, da z unabhängig von x ist.

4.2. Feedback Redesign

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, ist ein wesentliches Ziel der Kontrolltheorie für ein System der Form (1.14) ein Zustandsfeedback $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ zu berechnen, sodass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

lokal bzw. global asymptotisch stabil ist. Wirkt jetzt zusätzlich zur Steuerung über das Feedback noch eine Störung auf das System, kann diese Eigenschaft unter Umständen verloren gehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.6. Betrachte das System

$$\dot{x}(t) = x(t) + (x(t)^2 + 1) \cdot u(t)$$

und das Feedback $u(t) = F(x(t)) = -\frac{2x(t)}{x(t)^2+1}$. Man erhält

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t))) = -x(t),$$

also ein global asymptotisch stabiles System. Nun lassen wir eine Störung $d(t)$ auf das System zu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)) + d(t))$$

und erhalten mit dem bisher stabilisierenden Feedback das System

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (x(t)^2 + 1) \cdot d(t).$$

Wir haben aber bereits in Beispiel 1.27 gesehen, dass dieses System sogar für eine gegen 0 konvergierende Störfunktion d instabil sein kann. Naheliegender ist es nun, das Feedback so anzupassen, dass das gestörte System Input-to-State stabil ist, denn dadurch hat man für $d \equiv 0$ wieder die globale asymptotische Stabilität und für $d \neq 0$ zumindest noch eine obere Schranke an die Norm der Lösung (vergleiche dazu Satz 2.6). Wir definieren das angepasste Feedback $\tilde{F}(x(t)) := -\frac{2x(t)}{x(t)^2+1} - x(t)$ und erhalten damit das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \tilde{F}(x(t)) + d(t)) = -2x(t) - x(t)^3 + (x(t)^2 + 1) \cdot d(t).$$

Dass dieses System Input-to-State stabil ist, haben wir in Beispiel 2.12 gesehen. ■

Durch ein geschicktes Anpassen des Feedbacks konnten wir Input-to-State Stabilität des gestörten Feedback-Systems erreichen. Der folgende Satz zeigt, dass dies unter Einschränkung auf kontrollaffine Systeme immer möglich ist. Ein kontrollaffines System ist von der Form

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) \quad (4.5)$$

mit $g_0(0) = 0$ und $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $i = 0, \dots, m$. Häufig schreibt man kontrollaffine Systeme auch in der Form

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t)) + G(x(t))u(t), \quad (4.6)$$

mit $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$.

Satz 4.7. Betrachte ein kontrollaffines System (4.6). Es existiere ein differenzierbares Feedback F , sodass

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil in $x^* = 0$ ist. Dann existiert ein Feedback \tilde{F} , sodass das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \tilde{F}(x(t)) + d(t))$$

Input-to-State stabil mit Input d ist.

Beweis: Da $\dot{x} = f(x, F(x))$ global asymptotisch stabil ist, existiert nach Satz 1.9 eine globale Lyapunov-Funktion V . Wir definieren

$$\tilde{F}(x) := F(x) - (DV(x)G(x))^T.$$

Wir werden im Folgenden beweisen, dass V eine ISS-Lyapunov-Funktion für das System

$$\dot{x} = f(x, \tilde{F}(x) + d) = g_0(x) + G(x)(F(x) - (DV(x)G(x))^T + d)$$

ist. Die Bedingung

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ folgt direkt aus Definition 1.7, da V eine Lyapunov-Funktion des ungestörten Systems ist. Es bleibt die Bedingung

$$DV(x)f(x, \tilde{F}(x) + d) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|d\|)$$

für $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$ zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} DV(x)f(x, \tilde{F}(x) + d) &= \\ &= DV(x)[g_0(x) + G(x)(F(x) - (DV(x)G(x))^T + d)] \\ &= DV(x)(g_0(x) + G(x)F(x)) - DV(x)G(x)(DV(x)G(x))^T - DV(x)G(x)d. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\|DV(x)G(x) + \frac{1}{2}d^T\|_2^2 = DV(x)G(x)(DV(x)G(x))^T + DV(x)G(x)d + \frac{1}{4}d^T d$$

und damit

$$-DV(x)G(x)(DV(x)G(x))^T - DV(x)G(x)d = -\|DV(x)G(x) + \frac{1}{2}d^T\|_2^2 + \frac{1}{4}\|d\|_2^2$$

Setzt man diese Abschätzung oben ein, erhält man

$$DV(x)f(x, \tilde{F}(x) + d) \leq \underbrace{DV(x)(g_0(x) + G(x)F(x))}_{\leq -\alpha_3(\|x\|)} - \underbrace{\|DV(x)G(x) + \frac{1}{2}d^T\|_2^2}_{\leq 0} + \frac{1}{4}\|d\|_2^2$$

Zuletzt wollen wir die Euklidische Norm noch durch die Maximumsnorm abschätzen, um die Verwendung unterschiedlicher Normen in der Ungleichung zu vermeiden. Für einen beliebigen Vektor $d \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\|d\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|d\|_\infty.$$

Man erhält

$$DV(x)f(x, \tilde{F}(x) + d) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \underbrace{\frac{m}{4} \cdot \|d\|_\infty^2}_{=:\alpha_4(\|d\|)}.$$

Da $\alpha_4(r) := \frac{m}{4}r^2$ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, entspricht das genau der zweiten Bedingung einer ISS-Lyapunov-Funktion. Wir haben also gezeigt, dass V die Bedingungen (2.10) und (2.11) erfüllt. Also ist V eine ISS-Lyapunov-Funktion und das System ist Input-to-State stabil. □

Dieser Beweis ist sehr ähnlich zum ursprünglichen Beweis dieses Satzes in [20], in dem allerdings ein etwas anderes Feedback \tilde{F} verwendet wird und zusätzlich noch einige weitere Aussagen bewiesen werden. Beispielsweise wird gezeigt, dass die Funktion α_3 aus der zweiten Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion ohne Einschränkung als \mathcal{K}_∞ -Funktion gewählt werden kann. Da in dieser Arbeit aber ISS-Lyapunov-Funktionen genau so definiert wurden, dass in Bedingung (2.11) $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ ist, ist diese Hilfsaussage bereits gegeben. Das in obigem Beweis verwendete Feedback \tilde{F} wurde zum Beispiel in [26] vorgeschlagen.

5. Input-to-State Stabilität und spezielle Stability Margins

In den nächsten Kapiteln wollen wir uns etwas ausführlicher mit dem eher theoretischen Konzept der Stability Margins beschäftigen. Insbesondere wollen wir uns der Frage widmen, ob sich der Begriff der Stability Margins dahingehend anpassen lässt, dass diese die Struktur des Systems widerspiegeln und die Existenz einer solchen angepassten Stability Margin dennoch äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist.

5.1. Spezielle Stability Margins für zweidimensionale Systeme mit vorgegebener Struktur

Als Einstieg in dieses Kapitel wiederholen wir zunächst noch einmal die Definition (vgl. Definition 2.9) „normaler“ Stability Margins.

Definition 5.1. Eine Funktion $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ heißt Stability Margin für das Kontrollsystem (1.14), falls der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ mit $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist. ■

Mit Satz 2.10 ist die Existenz einer Stability Margin äquivalent zu Input-to-State Stabilität. Bemerkenswert an der Definition der Stability Margin ist, dass man die Feedback-Abbildung k in der Norm durch ein ρ beschränkt. Für mehrdimensionale k 's, also Abbildungen

$$k(t, x) = \begin{pmatrix} k_1(t, x) \\ \vdots \\ k_n(t, x) \end{pmatrix}$$

kann man sich fragen, ob es auch möglich ist, die einzelnen Komponenten im Betrag durch ein ρ oder sogar durch verschiedene ρ_1, \dots, ρ_n zu beschränken. Die beiden folgenden Lemmata zeigen, dass dies möglich ist. Zuerst beschränken wir jede Komponente von k durch das gleiche ρ .

Lemma 5.2. Ein Kontrollsystem (1.14) ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es ein $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k(t, x)$ mit

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x)| \\ \vdots \\ |k_n(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho(\|x\|) \\ \vdots \\ \rho(\|x\|) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

global asymptotisch stabil ist.

Beweis: Für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$ gilt die Äquivalenz

$$\|z\| \leq C \Leftrightarrow |z_i| \leq C \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

die wir auf Bedingung (5.1) anwenden wollen. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x)| \\ \vdots \\ |k_n(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho(\|x\|) \\ \vdots \\ \rho(\|x\|) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|).$$

Anders ausgedrückt ist Bedingung (5.1) genau dann erfüllt, wenn $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$ ist. Also ist die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises für Feedbacks, die Bedingung (5.1) erfüllen, äquivalent zur globalen asymptotischen Stabilität für Feedbacks, die $\|k(t, x)\| \leq \rho(\|x\|)$ erfüllen. Das entspricht aber gerade der Bedingung dafür, dass ρ eine Stability Margin ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Das zweite Lemma ist etwas allgemeiner und lässt für die einzelnen Komponenten von k unterschiedliche ρ_i zu. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis von Lemma 5.2 und verwendet, dass das Minimum von n \mathcal{K}_∞ -Funktionen wieder eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist (vgl. Bemerkung 1.4).

Lemma 5.3. Ein Kontrollsystem (1.14) ist genau dann Input-to-State stabil, wenn es $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, sodass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

für alle ein x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k(t, x)$ mit

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x)| \\ \vdots \\ |k_n(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x\|) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

global asymptotisch stabil ist.

Beweis: Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.3. Es gilt die Implikation

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x)| \\ \vdots \\ |k_n(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x\|) \end{pmatrix} \Rightarrow \|k(t, x)\| \leq \min_{i=1, \dots, n} \rho_i(\|x\|)$$

Ist also die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises für alle Feedbacks, die Bedingung (5.2) erfüllen, gegeben, so ist

$$\rho(\|x\|) := \min_{i=1, \dots, n} \rho_i(\|x\|)$$

eine Stability Margin und das System ist Input-to-State stabil.

Ist umgekehrt die Input-to-State Stabilität gegeben, kann man ρ_1, \dots, ρ_n unter der Bedingung

$$\rho_i(\|x\|) \leq \rho(\|x\|) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

beliebig wählen und erhält die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises für alle Feedbacks, die Bedingung (5.2) erfüllen. Damit ist wieder die Behauptung gezeigt. \square

Man kann sich leicht vorstellen, dass es häufig schwerer ist, eine Stability Margin gemäß Definition 2.9 zu finden, als ein ρ in der Form (5.2), weil hier flexibler auf die einzelnen Komponenten des Systems eingegangen werden kann.

Eine interessante Frage ist nun, ob man für Kontrollsysteme, die eine bestimmte Struktur besitzen, das ρ aus (5.2) so wählen kann, dass es eine ähnliche Struktur wie das Kontrollsystem aufweist. Wir wollen dazu zunächst zweidimensionale Kontrollsysteme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

betrachten und die Aussagen anschließend auf n -dimensionale Systeme verallgemeinern. Das System (5.3) ist also ein Spezialfall des allgemeinen Kontrollsystems (1.14), bei dem die Ableitung der ersten Komponente nicht von der zweiten Komponente abhängt bzw. ein Spezialfall von (4.4) mit jeweils eindimensionalem z - und x -Teilsystem. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir häufiger die Begriffe x_1 - bzw. x_2 -Teilsystem verwenden, womit wir uns auf die einzelnen Komponenten des Systems beziehen. Das x_1 -Teilsystem ist also

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), d_1(t))$$

und das x_2 -Teilsystem

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)).$$

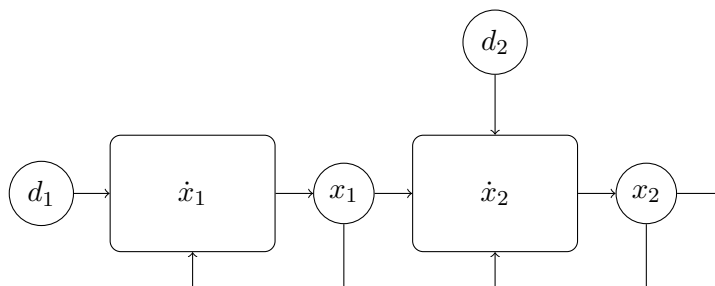


Abbildung 5.1: Grafische Darstellung des Kontrollsystems (5.3)

Die Abbildung verdeutlicht dabei noch einmal, dass auf das x_2 -Teilsystem zwei Eingangssignale einwirken, nämlich x_1 und d_2 . Nach Bemerkung 4.3 (ii) wissen wir, dass eine Stability Margin für ein System mit zwei Eingangssignalen Feedback-Abbildungen anstelle beider Eingangssignale zulässt. Für Systeme der Form (5.3) erhält man damit den geschlossenen Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, k_{10}(t, x(t))) \\ f_2(k_{21}(t, x(t)), x_2(t), k_{20}(t, x(t))) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Die Frage ist nun, ob man ein $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ finden kann, sodass (5.4) für in x Lipschitz stetige Feedbacks k_{10}, k_{21}, k_{20} mit $\max\{k_{10}(t, x), k_{21}(t, x), k_{20}(t, x)\} \leq \rho(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist. Nach Lemma 5.3 wissen wir, dass wir für ein Input-to-State stabiles System die Stability Margin ρ durch ρ_1 und ρ_2 ersetzen können, mit denen wir die einzelnen Feedbacks, nach ihrer Zugehörigkeit zu den einzelnen Komponenten gruppiert, beschränken können. Damit ist man bei der globalen asymptotischen Stabilität von (5.4) für Feedbacks k_{10}, k_{21}, k_{20} mit $k_{10}(t, x) \leq \rho_1(\|x\|)$ und $\max\{k_{21}(t, x), k_{20}(t, x)\} \leq \rho_2(\|x\|)$ angelangt. Unser Ziel ist es nun, $\rho_1(\|x\|)$ durch $\rho_1(|x_1|)$ und $\rho_2(\|x\|)$ durch $\rho_2(|x_2|)$ zu ersetzen. Der Hintergrund hierfür ist, dass man die Feedbacks, die auf die einzelnen Komponenten wirken, nur noch durch die entsprechende Zustandsvariable beschränken will, nicht mehr durch die Norm des Gesamtzustandes. Die beiden Indizes eines Feedbacks sind dabei so gewählt, dass der erste Index die Komponente des Systems angibt, auf die das Feedback wirkt und der zweite Index anzeigt, für welche Eingangsvariable das Feedback eingesetzt wurde. Dabei steht der Index 0 jeweils für die Störung d . So ist k_{21} beispielsweise das Feedback, das in der zweiten Komponente des Systems anstelle des Eingangssignals x_1 eingesetzt wird und k_{20} das Feedback für die Störung d_2 in der x_2 -Komponente. Der Vorteil, die k 's auf diese Weise zu indizieren, wird sich im Kapitel zur Verallgemeinerung auf n -dimensionale Systeme zeigen.

Eine sinnvolle Einschränkung ist es nun, Feedback-Abbildungen zu betrachten, in die nicht mehr der gesamte Zustand eingeht, sondern nur die Komponente des Systems, auf die das Feedback einwirkt. Wir ersetzen also $k_{10}(t, x(t))$ durch $k_{10}(t, x_1(t))$, $k_{21}(t, x(t))$ durch $k_{21}(t, x_2(t))$ und $k_{20}(t, x(t))$ durch $k_{20}(t, x_2(t))$. Diese Annahme wird sich vor allem in den Beweisen als nützlich erweisen und ist auch keine große Einschränkung. Denn einerseits haben wir das x_2 -Teilsystem als System mit zwei Eingangssignalen interpretiert und erhalten damit nach Bemerkung 4.3(ii) die Form von k_{20} und k_{21} , andererseits würde ein Feedback k_1 , das explizit von x_2 abhängt, eine Abhängigkeit des x_1 -Teilsystems von x_2 erzeugen und somit die besondere Struktur des Systems ruinieren. Wir fassen das in der folgenden Annahme zusammen.

Annahme 5.4. Wir betrachten Feedback-Abbildungen k_{10}, k_{21}, k_{22} mit

$$\begin{aligned} k_{10} &= k_{10}(t, x_1(t)) \\ k_{21} &= k_{21}(t, x_2(t)) \\ k_{20} &= k_{20}(t, x_2(t)) \end{aligned}$$

■

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun den Begriff der speziellen Stability Margin definieren.

Definition 5.5. Eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$ heißt spezielle Stability Margin für ein Kontrollsystem der Form (5.3), falls der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_{10}(t, x_1(t))) \\ f_2(k_{21}(t, x_2(t)), x_2(t), k_{20}(t, x_2(t))) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_{10} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$, $k_{20} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$, $k_{21} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$ mit $|k_{10}(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $\max\{|k_{20}(t, x_2)|, |k_{21}(t, x_2)|\} \leq \rho_2(|x_2|)$ global asymptotisch stabil ist. ■

Zusammengefasst wollen wir also untersuchen, ob die Existenz einer speziellen Stability Margin äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist. Zu beachten ist, dass man mit (5.5) keine Stability Margin gemäß Definition 5.1 gefunden hat. Selbst wenn man den Beweis von Lemma 5.3 verwendet, müsste

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix}$$

sein. Es fällt auf, dass die Teilsysteme im Regelkreis vollständig entkoppelt sind, also \dot{x}_1 nur von x_1 und \dot{x}_2 nur von x_2 abhängt. In Abbildung 5.2 wird der Regelkreis (5.6) grafisch veranschaulicht.

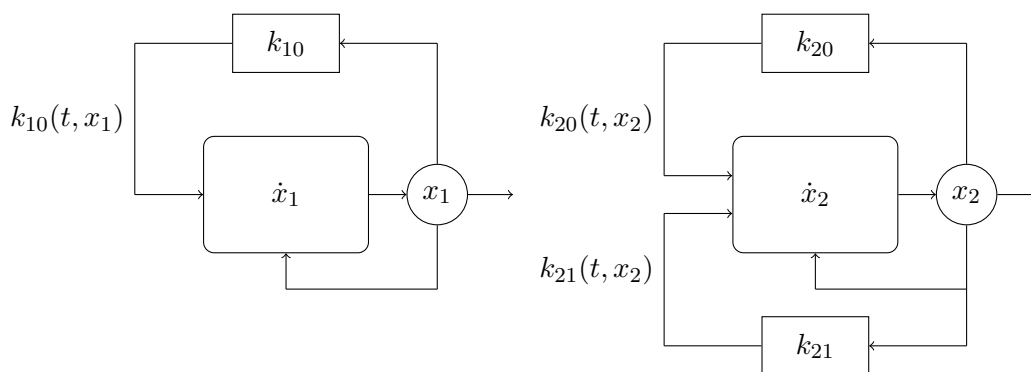


Abbildung 5.2: Grafische Darstellung des Regelkreises (5.6)

Wir betrachten zunächst ein Beispiel mit einem linearen Input-to-State stabilem System der Form (5.3) und werden sehen, dass wir hier eine spezielle Stability Margin finden können.

Beispiel 5.6. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + d_1(t) \\ -x_1(t) - x_2(t) + d_2(t) \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um ein lineares System der Form (5.3), das wir umschreiben können zu

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) + d(t).$$

Nach Satz 2.13 wissen wir, dass im linearen Fall ISS und 0 – GAS äquivalent sind. Da die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda = -1$ und damit nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat, ist das ungestörte System nach (1.7) global asymptotisch stabil und somit das gestörte System Input-to-State stabil.

Wir wollen nun eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.5 finden und definieren dazu

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1| \\ \frac{1}{4}|x_2| \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten also Feedback Abbildungen $k_{10}(t, x_1(t)), k_{21}(t, x_2(t)), k_{20}(t, x_2(t))$ mit

$$\begin{pmatrix} |k_{10}(t, x_1(t))| \\ \max\{|k_{21}(t, x_2(t))|, |k_{20}(t, x_2(t))|\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1(t)|) \\ \rho_2(|x_2(t)|) \end{pmatrix}.$$

und erhalten die Differentialungleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_1(t) + |k_{10}(t, x_1(t))| \\ -x_2(t) + |k_{21}(t, x_2(t))| + |k_{20}(t, x_2(t))| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_1(t) + \rho_1(|x_1(t)|) \\ -x_2(t) + 2\rho_2(|x_2(t)|) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -x_1(t) - |k_{10}(t, x_1(t))| \\ -x_2(t) - |k_{21}(t, x_2(t))| - |k_{20}(t, x_2(t))| \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -x_1(t) - \rho_1(|x_1(t)|) \\ -x_2(t) - 2\rho_2(|x_2(t)|) \end{pmatrix}.$$

Ausgeschrieben erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{1}{2}|x_1(t)| \\ -x_2(t) + \frac{1}{2}|x_2(t)| \end{pmatrix}}_{=:h(x(t))}$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \geq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t) - \frac{1}{2}|x_1(t)| \\ -x_2(t) - \frac{1}{2}|x_2(t)| \end{pmatrix}}_{=:g(x(t))}.$$

Wir werden nun wie in Beispiel 2.12 zwei Hilfssysteme $\dot{y}(t) = h(y(t))$ und $\dot{z}(t) = g(z(t))$ betrachten und die globale asymptotische Stabilität der Hilfssysteme beweisen. Da h quasimonoton wachsend und g quasimonoton fallend ist, können wir aus Lemma 1.21 die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises folgern. Sei also

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(t) + \frac{1}{2}|y_1(t)| \\ -y_2(t) + \frac{1}{2}|y_2(t)| \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1(t) - \frac{1}{2}|z_1(t)| \\ -z_2(t) - \frac{1}{2}|z_2(t)| \end{pmatrix}.$$

Da sich die Aussage für das z -System komplett analog beweisen lässt, zeigen wir nur die globale asymptotische Stabilität des y -Systems. Wir definieren

$$V(y) = y_1^2 + y_2^2$$

und weisen nach, dass V eine globale Lyapunov-Funktion ist. Die Bedingung

$$\alpha_1(\|y\|) \leq V(y) \leq \alpha_2(\|y\|)$$

ist trivialerweise für $\alpha_1(r) = r^2$ und $\alpha_2(r) = 2r^2$ erfüllt, da $\|y\|^2 \leq V(y) \leq 2\|y\|^2$ ist. Zu zeigen bleibt $DV(y)h(y) \leq -\alpha_3(y)$ für $\alpha_3 \in \mathcal{K}$. Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned} DV(y)h(y) &= 2y_1(-y_1 + \frac{1}{2}|y_1|) + 2y_2(-y_2 + \frac{1}{2}|y_2|) \\ &= -2y_1^2 + y_1 \cdot |y_1| - 2y_2^2 + y_2 \cdot |y_2| \\ &\leq -2|y_1|^2 + |y_1|^2 - 2|y_2|^2 + |y_2|^2 \\ &= -|y_1|^2 - |y_2|^2 \\ &\leq -\max\{|y_1|^2, |y_2|^2\} \\ &= -\|y\|^2. \end{aligned}$$

Also ist $DV(y)h(y) \leq -\alpha_3(y)$ mit der \mathcal{K} -Funktion $\alpha_3(r) := r^2$ und wir haben die globale asymptotische Stabilität des y -Systems bewiesen. Da man für das z -System analog argumentieren kann ist mit Lemma 1.21 auch der geschlossene Regelkreis (5.6) global asymptotisch stabil. Wir haben also das Ziel erreicht und eine spezielle Stability Margin ρ gefunden. ■

Es stellt sich nun die Frage, ob es sich hierbei um einen Zufall handelt, oder ob die Konstruktion einer speziellen Stability Margin (5.5) immer möglich ist. Wir wollen zuerst herausfinden, ob uns die Konstruktion auch bei einem nichtlinearen Beispiel gelingt.

Beispiel 5.7. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + d_1(t) \\ \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 + d_2(t)^3 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich also um ein nichtlineares System der Form (5.3). Anstelle von $d_2(t)^3$ könnte auch $d_2(t)$ stehen, jedoch wären dann in den Rechnungen zusätzliche Fallunterscheidungen nötig. Zudem ist es keine Einschränkung $d_2(t)^3$ zu betrachten, da man für $d_2(t)$ zu $\tilde{d}_2(t) := \sqrt[3]{d_2(t)}$ übergehen kann und damit $\tilde{d}_2(t)^3 = d_2(t)$ gilt. Im Gegensatz zum linearen Beispiel ist es nun deutlich schwerer Input-to-State Stabilität zu zeigen. Wir konstruieren dazu für beide Teilsysteme eine ISS-Lyapunov-Funktion (womit Input-to-State Stabilität der Teilsysteme gezeigt ist) und verwenden dann Satz 4.4, mit dem wir dann Input-to-State Stabilität des gesamten Systems erhalten.

Für das erste Teilsystem, welches gegeben ist durch

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), d_1(t)) = -x_1(t)^3 + d_1(t),$$

ist die Funktion $V_1(x_1) = x_1^2$ eine ISS-Lyapunov-Funktion. Die Bedingung (2.10) erhält man leicht, indem man $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ setzt. Für Bedingung (2.11) berechnen wir

$$DV_1(x_1)f(x_1, d_1) = -2x_1^4 + 2x_1d_1 \leq -2x_1^4 + 2|x_1| \cdot |d_1|.$$

Betrachtet man die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\chi_1(r) = \frac{1}{2}r^3$, folgt

$$|d_1| \leq \chi_1(|x_2|) \Rightarrow DV_1(x_1)f(x_1, d_1) \leq -2x_1^4 + |x_1| \cdot |x_1|^3 = -|x_1|^4.$$

Für die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\alpha_3(r) = r^4$ folgt (2.11) und damit Input-to-State Stabilität des ersten Teilsystems in d_1 .

Für das zweite Teilsystem, gegeben durch

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) = \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 + d_2(t)^3,$$

ist die Funktion $V_2(x_2) = x_2^2$ eine ISS-Lyapunov-Funktion. Die Bedingung (2.10) ist wieder für die gleichen α_1 und α_2 wie beim ersten Teilsystem erfüllt. Zudem gilt

$$\begin{aligned} DV_2(x_2)f(x_1, x_2, d_2) &= -2x_2^4 + 2x_2(d_2^3 + \frac{1}{4}x_1^3) \leq -2x_2^4 + 2|x_2| \cdot |(d_2^3 + \frac{1}{4}x_1^3)| \\ &\leq -2x_2^4 + 2|x_2| \cdot (|d_2|^3 + \frac{1}{4}|x_1|^3). \end{aligned}$$

Betrachtet man die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\chi_1(r) = \frac{1}{2}r$, folgt

$$\begin{aligned} \max\{|x_1|, |d_2|\} \leq \chi(|x_2|) &\Rightarrow DV_2(x_2)f(x_1, x_2, d_2) \leq -2x_2^4 + 2|x_2| \cdot (\frac{1}{2^3}|x_2|^3 + \frac{1}{4 \cdot 2^3}|x_2|^3) \\ &= -2x_2^4 + \frac{1}{4}|x_2|^4 + \frac{1}{16}|x_2|^4 \\ &\leq -x_2^4. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\alpha_3(r) = r^4$ wieder die Bedingung (2.11) und das x_2 -Teilsystem ist ISS in x_1 und d_2 . Beide Teilsysteme sind Input-to-State stabil mit den

jeweiligen Inputs, wodurch wir mit Satz 4.4 auch Input-to-State Stabilität des gesamten Systems gezeigt haben.

Wir wollen nun wieder eine spezielle Stability Margin ρ gemäß Definition 5.5 finden. Dazu definieren wir

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1|^3 \\ \frac{1}{2}|x_2|^3 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man jetzt wieder Feedback Abbildungen k_{10} , k_{21} und k_{20} mit

$$\begin{pmatrix} |k_{10}(t, x_1(t))| \\ \max\{|k_{21}(t, x_2(t))|, |k_{20}(t, x_2(t))|\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1(t)|) \\ \rho_2(|x_2(t)|) \end{pmatrix},$$

erhält man wie in Beispiel 5.6 die Differentialungleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ -x_2(t)^3 + \frac{5}{32}|x_2(t)|^3 \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ -x_2(t)^3 + \frac{1}{2}|x_2(t)|^3 \end{pmatrix}}_{=:h(x(t))}$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -x_1(t)^3 - \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ -x_2(t)^3 - \frac{5}{32}|x_2(t)|^3 \end{pmatrix} \geq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t)^3 - \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ -x_2(t)^3 - \frac{1}{2}|x_2(t)|^3 \end{pmatrix}}_{=:g(x(t))}.$$

Da h quasimonoton wachsend und g quasimonoton fallend ist, geht man jetzt wie in Beispiel 5.6 vor und definiert zunächst das y - und z -System, indem man in den beiden Differentialungleichungen \leq und \geq durch $=$ ersetzt und die globale asymptotische Stabilität der so entstehenden Hilfssysteme zeigt. Auch hier sind die Rechnungen für beide Systeme identisch und werden deshalb nur für das y -System

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(t)^3 + \frac{1}{2}|y_1(t)|^3 \\ -y_2(t)^3 + \frac{1}{2}|y_2(t)|^3 \end{pmatrix}$$

durchgeführt. Man definiert wieder

$$V(y) := y_1^2 + y_2^2$$

und zeigt, dass V eine globale Lyapunov-Funktion ist. Da die erste Bedingung wieder trivial erfüllt ist, bleibt nur die zweite Bedingung zu zeigen. Man berechnet

$$\begin{aligned} DV(y)h(y) &= 2y_1(-y_1^3 + \frac{1}{2}|y_1|^3) + 2y_2(-y_2^3 + \frac{1}{2}|y_2|^3) \\ &\leq -|y_1|^4 - |y_2|^4 \\ &\leq -\max\{|y_1|^4, |y_2|^4\} \\ &= -\|y\|^4. \end{aligned}$$

Da $\alpha_3(r) := r^4$ eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, ist damit auch die zweite Lyapunov-Bedingung erfüllt und man hat die globale asymptotische Stabilität des y -Systems gezeigt. Da das z -System ebenfalls global asymptotisch stabil ist und f quasimonoton wachsend und g quasimonoton fallend ist, folgt mit Lemma 1.21 auch die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises (5.6). ■

Uns ist es also sowohl im linearen als auch im nichtlinearen Fall gelungen, eine spezielle Stability Margin zu finden. Im folgenden Kapitel wollen wir zeigen, dass dies unter einer zusätzlichen Annahme an das System immer möglich ist. Zudem werden wir zeigen, dass die Existenz einer speziellen Stability Margin hinreichend für Input-to-State Stabilität ist.

5.2. Beweis der Äquivalenz zu Input-to-State Stabilität

Wir formulieren direkt den ersten Satz, der zeigt, dass die Existenz einer speziellen Stability Margin hinreichend für Input-to-State Stabilität ist.

Satz 5.8. Betrachte ein System der Form (5.3). Es existiere eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.5. Dann ist das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, d_2)^T$.

Beweis: Aus der Existenz der speziellen Stability Margin folgt, dass der Regelkreis (5.6) global asymptotisch stabil ist. Es existiert also ein $\beta \in \mathcal{KL}$, sodass für die Lösung von (5.6), die wir kurz mit $\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))$ bezeichnen, gilt

$$\|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir zeigen nun, dass damit das x_1 -Teilsystem Input-to-State stabil mit Input d_1 und das x_2 -Teilsystem Input-to-State stabil mit Inputs x_1 und d_2 ist. Damit haben wir dann nach Satz 4.4 die Behauptung gezeigt.

(i) Das x_1 -Teilsystem hängt nur von $k_{10}(t, x_1)$ ab. Wir können deshalb $k_{21} \equiv 0$ und $k_{20} \equiv 0$ setzen und $k_{10}(t, x_1)$ mit $|k_{10}(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ betrachten. Zudem hängt das Teilsystem nur von x_1 ab und wir setzen deshalb $x = (x_1, 0)^T$. Man sieht, dass das Feedback damit die Voraussetzung

$$\begin{pmatrix} |k_{10}(t, x_1)| \\ \max\{|k_{20}(t, x_2)|, |k_{21}(t, x_2)|\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \end{pmatrix}$$

erfüllt und der Regelkreis (5.6) folglich global asymptotisch stabil ist. Daher gilt die Abschätzung

$$|\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t)))| \leq \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \leq \beta(\|x\|, t).$$

Analog zur Lösung von (5.6) bezeichne dabei $\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t)))$ die Lösung des x_1 -Teilsystems. Da wir $x_2 = 0$ gesetzt haben, ist $\beta(\|x\|, t) = \beta(|x_1|, t)$ und somit

$$|\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t)))| \leq \beta(|x_1|, t).$$

Das entspricht aber gerade der Voraussetzung dafür, dass ρ_1 eine Stability Margin für das x_1 -Teilsystem ist, was äquivalent zu Input-to-State Stabilität mit Input d_1 ist.

(ii) Die Input-to-State Stabilität des zweiten Teilsystems lässt sich genauso zeigen. Man erkennt wieder, dass das x_2 -Teilsystem nicht von x_1 und $k_{10}(t, x_1)$ abhängt. Wir setzen also $k_{10}(t, x_1) \equiv 0$ und $x_1 = 0$ und betrachten Feedbacks $k_{21}(t, x_2) \leq \rho_2(|x_2|)$ und $k_{20}(t, x_2) \leq \rho_2(|x_2|)$. Aus der globalen asymptotischen Stabilität von (5.6) folgt damit

$$|\varphi_2(t, k_{21}(t, \varphi_2(t)), x_2, k_{20}(t, \varphi_2(t)))| \leq \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \leq \beta(\|x\|, t) = \beta(|x_2|, t).$$

Dabei ist $\varphi_2(t, k_{21}(t, \varphi_2(t)), x_2, k_{20}(t, \varphi_2(t)))$ die Lösung des x_2 -Teilsystems. Das entspricht wieder der Voraussetzung dafür, dass ρ_2 eine Stability Margin für das x_2 -Teilsystem ist und wir haben die Input-to-State Stabilität des x_2 -Teilsystems mit Inputs x_1 und d_2 gezeigt.

Mit diesen beiden Aussagen können wir nun Satz 4.4 anwenden und erhalten die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems (mit Input $d = (d_1, d_2)^T$).

□

Wir haben damit sogar eine stärkere Aussage als Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems bewiesen, nämlich Input-to-State Stabilität der Teilsysteme mit den jeweiligen Inputs. In Folgerung 5.10 werden wir diese Aussage festhalten. Für die Umkehrung des Satzes benötigen wir die Zusatzvoraussetzung, dass alle Teilsysteme Input-to-State stabil mit den entsprechenden Inputs sind. Dass diese Voraussetzung wirklich notwendig ist, wird Beispiel 5.11 zeigen. Zunächst wollen wir jedoch den Satz formulieren.

Satz 5.9. Betrachte ein Input-to-State stabiles System der Form (5.3), bei dem das x_1 -Teilsystem ISS mit Input d_1 und das x_2 -Teilsystem ISS mit Inputs x_1 und d_2 ist. Dann existiert eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.5.

Beweis: Die Input-to-State Stabilität der beiden Teilsysteme (mit entsprechenden Inputs) impliziert die Existenz von Stability Margins ρ_1 und ρ_2 . Das heißt für das erste Teilsystem, dass für alle in x_1 Lipschitz stetigen Feedback Abbildungen $k_{10}(t, x_1)$ mit $|k_{10}(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$

$$|\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t)))| \leq \beta_1(|x_1|, t)$$

für ein $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ gilt. Für das zweite Teilsystem gilt analog für alle in x_2 Lipschitz stetigen Feedback Abbildungen $k_{21}(t, x_2)$ und $k_{20}(t, x_2)$ mit $\max\{|k_{21}(t, x_2)|, |k_{20}(t, x_2)|\} \leq \rho_2(|x_2|)$

$$|\varphi_2(t, k_{21}(t, \varphi_2(t)), x_2, k_{20}(t, \varphi_2(t)))| \leq \beta_2(|x_2|, t)$$

für ein $\beta_2 \in \mathcal{KL}$. Damit gilt für die Lösung des Gesamtsystems

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| &\leq \max\{|\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t)))|, |\varphi_2(t, k_{21}(t, \varphi_2(t)), x_2, k_{20}(t, \varphi_2(t)))|\} \\ &\leq \max\{\beta_1(|x_1|, t), \beta_2(|x_2|, t)\} \\ &\leq \max\{\beta_1(\|x\|, t), \beta_2(\|x\|, t)\} \\ &=: \beta(\|x\|, t). \end{aligned}$$

Dass β eine \mathcal{KL} -Funktion ist, folgt mit Bemerkung 1.4. □

Die Sätze 5.8 und 5.9 lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Folgerung 5.10. Gegeben sei ein System der Form (5.3). Eine spezielle Stability Margin (5.5) existiert genau dann, wenn das x_1 -Teilsystem Input-to-State stabil mit Input d_1 und das x_2 -Teilsystem Input-to-State stabil mit Inputs x_1 und d_2 ist.

Wie bereits vor Satz 5.9 angedeutet, reicht die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems als Voraussetzung für den Satz nicht aus. Das folgende Gegenbeispiel verdeutlicht dies. Mit dem Beispiel ist dann auch der Begriff „spezielle Stability Margin“ für die Funktion $\rho(x) = (\rho_1(|x_1|), \rho_2(|x_2|))$ in Definition 5.5 gerechtfertigt, denn sie ist „speziell“ in dem Sinn, dass Input-to-State Stabilität nicht ausreicht um ihre Existenz zu implizieren.

Beispiel 5.11. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) \\ -x_2(t) \cdot (x_1(t) + 1) + d_2(t) \end{pmatrix}.$$

Man sieht direkt, dass das x_2 -Teilsystem nicht Input-to-State stabil mit den Inputs x_1 und d_2 ist. Setzt man $x_1(t) \equiv -2$ und $d_2(t) \equiv 0$, erhält man

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)$$

und damit die unbeschränkte Lösung

$$\varphi_2(t, x)(t) = e^t x,$$

was einen Widerspruch zur Input-to-State Stabilität liefert. Da Input-to-State Stabilität des x_2 -Teilsystems nach Satz 2.10 äquivalent zur Existenz einer Stability Margin ρ_2 ist, kann auch keine spezielle Stability Margin $\rho = (\rho_1, \rho_2)^T$ für das Gesamtsystem existieren.

Das Gesamtsystem hingegen ist Input-to-State stabil, was wir dadurch zeigen, dass die Bedingungen 0 – GAS und AG erfüllt sind. Mit der Anfangsbedingung $x = (x_1, x_2)^T$ erhält man als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t, x) \\ \varphi_2(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} x_1 \\ e^{(e^{-t}-1)x_1-t} \left(x_2 + \int_0^t \frac{d_2(s)}{e^{(e^{-s}-1)x_1-s}} ds \right) \end{pmatrix},$$

was man leicht nachrechnen kann.

Zu 0 – GAS:

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(t, x, 0)\| &= \max\{|e^{-t}x_1|, |e^{(e^{-t}-1)x_1-t}x_2|\} \\
 &\leq \max\{|e^{-t}| \cdot |x_1|, |e^{(e^{-t}-1)x_1-t}| \cdot |x_2|\} \\
 &\stackrel{t \geq 0}{\leq} \max\{e^{-t}, e^{(e^{-t}-1)(-|x_1|)-t}\} \cdot \|x\| \\
 &\leq \max\{e^{-t}, e^{(1-e^{-t})\|x\|-t}\} \cdot \|x\| \\
 &\leq \max\{e^{-t}, e^{\|x\|-t}\} \cdot \|x\| \\
 &=: \beta(\|x\|, t)
 \end{aligned}$$

Dabei ist diesmal nicht direkt klar, dass β eine \mathcal{KL} -Funktion ist. Für ein festes $t^* \geq 0$ ist aber $\beta(r, t^*)$ stetig, weil es eine Verkettung stetiger Funktionen ist, streng monoton wachsend, da der Maximumsterm in r wächst und damit der Gesamtterm streng monoton in r wächst. Zudem ist offensichtlich $\beta(0, t^*) = 0$. Andererseits gilt für ein festes $r^* > 0$: $\beta(r^*, t)$ ist stetig (wieder als Verkettung stetiger Funktionen) und streng monoton fallend in t , da beide Terme in $\max\{\cdot, \cdot\}$ streng monoton in t fallen. Zudem gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r^*, t) = 0$, da $\lim_{t \rightarrow \infty} \max\{\cdot, \cdot\} = 0$. Damit haben wir alle Voraussetzung für eine \mathcal{KL} -Funktion nachgeprüft.

Zu AG:

$$\begin{aligned}
 \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, d)\| &\leq \\
 &\leq \underbrace{\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} e^{-t}x_1 \\ e^{(e^{-t}-1)x_1-t}x_2 \end{pmatrix} \right\|}_{\stackrel{(i)}{=} 0} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(e^{-t}-1)x_1-t} \int_0^t \frac{d_2(s)}{e^{(e^{-s}-1)x_1-s}} ds \end{pmatrix} \right\|.
 \end{aligned}$$

Dass der erste Summand 0 ist, folgt aus der Bedingung 0 – GAS. Somit ist

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, d)\| \leq \underbrace{|d_2|}_{\leq \|d\|} \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\left(e^{(e^{-t}-1)x_1-t} \int_0^t \frac{1}{e^{(e^{-s}-1)x_1-s}} ds \right)}_{=: f(t, x)}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt. Wir zeigen dazu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt nämlich

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x, d)\| \leq \|d\| \cdot 1$$

und damit die Bedingung AG mit $\gamma(r) := r$. Man kann $f(t, x)$ vereinfachen zu

$$f(t, x) = \underbrace{e^{x_1 e^{-t}}}_{=:g(t,x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^t} \cdot \int_0^t \frac{e^s}{e^{x_1 e^{-s}}} ds}_{h(t,x)}.$$

Es ist also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t, x) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} h(t, x),$$

falls die Grenzwerte von g und h existieren. Offensichtlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, x) = 1.$$

Für $h(t, x)$ definieren wir

$$h_1(t, x) := \int_0^t \frac{e^s}{e^{x_1 e^{-s}}} ds \quad \text{und} \quad h_2(t, x) := e^t.$$

Damit gilt

$$h(t, x) = \frac{h_1(t, x)}{h_2(t, x)}.$$

Offensichtlich ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t, x) = \infty$$

und da man auch zeigen kann, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t, x) = \infty$$

gilt, kann man die Regel von l'Hospital verwenden. Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} h_1(t, x)}{\frac{d}{dt} h_2(t, x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^t}{e^{x_1 e^{-t}}}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_1 e^{-t}}} = 1.$$

Zusammengefasst gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t, x) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} h(t, x) = 1,$$

womit wir Bedingung AG und damit auch Input-to-State Stabilität bewiesen haben. ■

Bemerkenswert ist an diesem Beispiel auch, dass die in der Regel einfachste Möglichkeit Input-to-State Stabilität zu zeigen, nämlich die Angabe einer ISS-Lyapunov-Funktion, hier alles andere als leicht ist. Angenommen man würde wie üblich die Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

betrachten. Dann ergibt sich

$$DV(x)f(x, d) = -x_1^2 - x_2^2 x_1 - x_2^2 + d_2 x_2.$$

Problematisch ist dabei der Term $-x_2^2 x_1$, der sich mit keinem der anderen Terme verrechnen lässt. Also kann das so gewählte V in diesem Fall keine ISS-Lyapunov-Funktion sein. Dennoch garantiert uns Satz 2.10 die Existenz einer ISS-Lyapunov-Funktion, auch wenn wir diese nicht ohne weiteres angeben können.

In der folgenden Bemerkung werden wir sehen, dass in Satz 5.9 zumindest auf die Voraussetzung „ x_1 ist ISS mit Input d_1 “ verzichtet werden kann, da dies bereits aus der Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems folgt.

Bemerkung 5.12. Beispiel 5.11 sagt insbesondere aus, dass die Umkehrung von Satz 4.4 nicht gilt, also aus der Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems nicht die Input-to-State Stabilität der einzelnen Teilsysteme folgt. Was sich dennoch zeigen lässt, ist, dass das x_1 -Teilsystem ISS mit Input d_1 ist.

Angenommen das x_1 -Teilsystem wäre nicht ISS mit Input d_1 . Dann gilt: Für alle $\beta \in \mathcal{KL}$ und alle $\gamma_0 \in \mathcal{K}_\infty$ gibt es einen Zeitpunkt $t^* \geq 0$, einen Startwert $x_1^* \in \mathbb{R}$ und eine Störfunktion $d_1^*(t)$ mit

$$|\varphi_1(t^*, x_1^*, d_1^*)| > \beta(|x_1^*|, t^*) + \gamma_0(|d_1^*|).$$

Wir definieren

$$d^* := \begin{pmatrix} d_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^* := \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\|\varphi(t^*, x^*, d^*)\| \geq |\varphi_1(t^*, x_1^*, d_1^*)| > \beta(|x_1^*|, t^*) + \gamma_0(|d_1^*|) = \beta(\|x^*\|, t^*) + \gamma_0(\|d^*\|).$$

Wir können also für alle $\beta \in \mathcal{KL}$ und alle $\gamma_0 \in \mathcal{K}_\infty$ einen Zeitpunkt $t^* \geq 0$, einen Startwert $x^* \in \mathbb{R}^2$ und eine Störfunktion d^* finden, sodass die definierende Ungleichung für Input-to-State Stabilität verletzt ist. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass das Gesamtsystem Input-to-State stabil ist. Also muss auch das x_1^* -System ISS mit Input d_1^* sein.

Warum lässt sich dieser Beweis nun nicht analog für das x_2 -Teilsystem führen? Um das zu verdeutlichen, nehmen wir wieder an, das x_2 -System wäre nicht Input-to-State stabil mit den Inputs x_1 und d_2 . Dann gibt es für alle $\beta \in \mathcal{KL}$ und alle $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{K}_\infty$ einen Zeitpunkt $t^* \geq 0$, einen Startwert $x_2^* \in \mathbb{R}$ und Störfunktionen $x_1^*(t)$ und $d_2^*(t)$, sodass

$$|\varphi_2(t^*, x_1^*, x_2^*, d_2^*)| > \beta(|x_2^*|, t^*) + \underbrace{\gamma_1(|x_1^*|)}_{\geq 0} + \gamma_0(|d_2^*|) \geq \beta(|x_2^*|, t^*) + \gamma_0(|d_2^*|).$$

Ab hier könnte man vollkommen analog

$$d^* := \begin{pmatrix} 0 \\ d_2^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^* := \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^* \end{pmatrix}$$

definieren und würde mit den gleichen Abschätzungen den Widerspruch erhalten. Der Fehler im „Beweis“ ist, dass nicht garantiert ist, dass die Störfunktion $x_1^*(t)$ die Lösung des x_1 -Teilsystems ist, was sie aber sein müsste, damit die Abschätzungen korrekt sind.

Diese Beobachtung lässt sich auch in Beispiel 5.11 wiederfinden. Das x_2 -Teilsystem war zwar nicht ISS mit den Inputs x_1 und d_2 , jedoch war das Gesamtsystem trotzdem Input-to-State stabil, weil die Störfunktionen $x_1(t)$, die Probleme verursachen würden (z.B. die konstante Funktion $x_1(t) = -2$), keine Lösungen des x_1 -Teilsystems sein können. ■

Bevor wir die Aussagen dieses Kapitels auf n -dimensionale Systeme verallgemeinern, wollen wir uns noch kurz mit der Frage beschäftigen, ob sich aus der speziellen Stability Margin $\rho = (\rho_1, \rho_2)^T$ gemäß Definition 5.5, auch eine „normale“ Stability Margin $\tilde{\rho}$ gemäß Definition 5.1 konstruieren lässt. Dabei ergeben sich sehr schnell drei Probleme: Erstens lässt eine normale Stability Margin keine Feedback-Regelung für die x_1 Komponente im x_2 -System zu, zweitens hängen die Feedbacks k_{10}, k_{20} und k_{21} in der zweiten Komponente nicht vom gesamten Zustandsvektor $x(t)$ ab, sondern nach Annahme 5.4 nur von der Komponente $x_i(t)$, auf die sie einwirken. Zuletzt müsste an Stelle von $\rho = (\rho_1(|x_1|), \rho_2(|x_2|))^T$ ein $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\|x\|)$ stehen. Während man das erste Problem eventuell durch eine Zusatzvoraussetzung „ x_2 ist ISS mit Input x_1 “ wie in Satz 5.9 in den Griff bekommen könnte und für das zweite Problem ähnlich wie vor Annahme 5.4 argumentieren könnte, dass solche Feedbacks nur wenig Sinn ergeben, ist der dritte Punkt kritisch. Gegeben ist die globale asymptotische Stabilität für Feedbacks k_{10}, k_{20} und k_{21} mit $|k_{10}(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $\max\{|k_{20}(t, x_2)|, |k_{21}(t, x_2)|\} \leq \rho_2(|x_2|)$. Das Ziel (unter Verwendung von Lemma 5.2) ist jedoch die globale asymptotische Stabilität für Feedbacks k_1 und k_2 mit $|k_1(t, x)| \leq \rho_1(\|x\|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$. Damit man die gegebene Aussage verwenden kann, würden Abschätzungen $\tilde{\rho}(\|x\|) \leq \rho(|x_1|)$ und $\tilde{\rho}(\|x\|) \leq \rho(|x_2|)$ benötigt, welche natürlich nicht im Allgemeinen gelten. Doch auch wenn die Konstruktion nicht möglich ist, impliziert Input-to-State Stabilität mit Satz 2.10 dennoch die Existenz einer Stability Margin $\tilde{\rho}$.

5.3. Verallgemeinerung auf n -dimensionale Systeme

In diesem Kapitel wollen wir die Aussagen des letzten Kapitels verallgemeinern. Wir nehmen daher für das gesamte Kapitel an, dass $n \geq 2$ gilt und betrachten Systeme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), d_{n-1}(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t), d_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Man sieht direkt, dass wir damit die Systeme der Form (5.3) verallgemeinert haben, da die i -te Komponente des Systems nur von den Zustandsvariablen x_1, \dots, x_{i-1} und einer Störung d_i abhängt. Wie im letzten Kapitel wollen wir die Aussagen der Sätze 5.8 und 5.9 zeigen. Dafür treffen wir zuerst wieder die Annahme, dass nur „sinnvolle“ Feedbacks betrachtet werden.

Annahme 5.13. Wir betrachten Feedback-Abbildungen k_{ij} mit

$$k_{ij} = k_{ij}(t, x_i(t))$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $j = 0, \dots, i - 1$. ■

War die doppelte Indizierung im zweidimensionalen Fall nur wenig nützlich, zeigen sich hier die Vorteile. Insbesondere müssen wir dadurch, dass wir die Feedbacks zu d_i mit k_{i0} bezeichnet haben, diese Feedbacks nicht gesondert behandeln, sondern können einfach den zweiten Index bei 0 starten. Wir verallgemeinern nun Definition 5.5

Definition 5.14. Eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \\ \vdots \\ \rho_n(|x_n|) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

mit $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$ heißt spezielle Stability Margin für ein Kontrollsystem der Form (5.7), falls der geschlossene Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_{10}(t, x_1(t))) \\ f_2(k_{21}(t, x_2(t)), x_2(t), k_{20}(t, x_2(t))) \\ \vdots \\ f_n(k_{n1}(t, x_n(t)), \dots, k_{nn-1}(t, x_n(t)), x_n(t), k_{n0}(t, x_n(t))) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$ mit $|k_{ij}(t, x_i)| \leq \rho_i(|x_i|)$ für $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, i - 1$ global asymptotisch stabil ist. ■

Im ersten Satz zeigen wir, dass die globale asymptotische Stabilität von (5.9) hinreichend für Input-to-State Stabilität ist (vergleiche Satz 5.8).

Satz 5.15. Betrachte ein System der Form (5.7). Es existiere eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.14. Dann ist das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$.

Beweis: Sei $\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))$ die Lösung von (5.9). Aus der Existenz einer speziellen Stability Margin folgt die globale asymptotischen Stabilität von (5.9). Es gibt also ein $\beta \in \mathcal{KL}$ und \mathcal{K}_∞ , sodass

$$\|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Wir zeigen zuerst wieder, dass jedes Teilsystem für sich genommen Input-to-State stabil mit den jeweiligen Inputs ist und wenden anschließend Satz 4.4 an, um die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems zu erhalten. Wir wählen dazu ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und betrachten das x_i -Teilsystem. Aufgrund der Struktur des Gesamtsystems und Annahme 5.13 ist dieses Teilsystem nur abhängig von der Zustandskomponente x_i . Wir setzen deshalb die Feedbacks $k_{pj} \equiv 0$ für alle $p \neq i$ und betrachten den Anfangswert

$$x = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)^T$$

mit beliebigem $x_i \in \mathbb{R}$. Die Feedbacks k_{ij} erfüllen zudem $|k_{ij}(t, x_i(t))| \leq \rho_i(|x_i|)$ für alle $j = 0, \dots, i-1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |\varphi_i(t, k_{i1}(t, \varphi_i(t)), \dots, k_{ii-1}(t, \varphi_i(t)), x_i, k_{i0}(t, \varphi_i(t)))| &\leq \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \\ &\leq \beta(\|x\|, t) \\ &= \beta(|x_i|, t). \end{aligned}$$

Also ist ρ_i eine Stability Margin für das x_i -Teilsystem und damit das Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i .

Aus der Input-to-State Stabilität aller Teilsysteme kann man durch induktive Anwendung von Satz 4.4 die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems folgern. Wir betrachten dazu zuerst das $(x_1, x_2)^T$ -Teilsystem. Wir haben soeben gezeigt, dass das x_1 -System ISS mit Input d_1 und das x_2 -System ISS mit Inputs x_1 und d_2 ist. Mit Satz 4.4 ist damit $(x_1, x_2)^T$ -Teilsystem ISS mit Input $(d_1, d_2)^T$. Nimmt man nun das x_3 -Teilsystem hinzu, welches ISS mit Inputs x_1, x_2 und d_3 ist, erhält man durch erneute Anwendung des Satzes, dass das $(x_1, x_2, x_3)^T$ -System ISS mit Input $(d_1, d_2, d_3)^T$ ist. Nach $(n-1)$ -maligem Anwenden ist damit das Gesamtsystem Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$. \square

Auch hier haben wir wieder die Input-to-State Stabilität aller Teilsysteme bewiesen, also eine stärkere Aussage, was wir in Folgerung 5.17 festhalten werden. Für den Beweis der Rückrichtung benötigen wir analog zu Satz 5.8 die zusätzliche Voraussetzung, dass das x_i -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist.

Satz 5.16. Betrachte ein Input-to-State stabiles System der Form (5.7), bei dem für alle $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist. Dann existiert eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.14.

Beweis: Die Input-to-State Stabilität des x_i -Teilsystems impliziert die Existenz einer Stability Margin ρ_i . Betrachtet man für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ das x_i -Teilsystem, bedeutet das, dass für alle in x_i Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen k_{i0}, \dots, k_{ii-1} mit $|k_{ij}(t, x_i(t))| \leq \rho_i(|x_i|)$ für alle $j = 0, \dots, i-1$

$$|\varphi_i(t, k_{i1}(t, \varphi_i(t)), \dots, k_{ii-1}(t, \varphi_i(t)), x_i, k_{i0}(t, \varphi_i(t)))| \leq \beta_i(|x_i|, t)$$

für ein $\beta_i \in \mathcal{KL}$ gilt. Damit gilt für die Lösung des Gesamtsystems

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| &\leq \max\{|\varphi_1(t, x_1, k_{10}(t, \varphi_1(t))), \dots, \\ &\quad |\varphi_n(t, k_{n1}(t, \varphi_n(t))), \dots, k_{nn-1}(t, \varphi_n(t)), x_n, k_{n0}(t, \varphi_n(t))|\} \\ &\leq \max\{\beta_1(|x_1|, t), \dots, \beta_n(|x_n|, t)\} \\ &\leq \max\{\beta_1(\|x\|, t), \dots, \beta_n(\|x\|, t)\} \\ &=: \beta(\|x\|, t). \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 1.4 folgt wieder, dass β eine \mathcal{KL} -Funktion ist, womit die Behauptung gezeigt ist. □

Die beiden Sätze 5.15 und 5.16 lassen sich wieder zusammenfassen.

Folgerung 5.17. Gegeben sei ein System der Form (5.7). Eine spezielle Stability Margin (5.8) existiert genau dann, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist.

5.4. Spezielle Stability Margins im linearen Fall

In diesem Abschnitt wollen wir spezielle Stability Margins für den Spezialfall eines linearen Kontrollsystems betrachten. Wir untersuchen dabei direkt den n -dimensionalen Fall, also ein Kontrollsystem der Form (5.7). Da das System linear sein soll, ergibt sich die Systemstruktur

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{=:A} \cdot x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}}{=:B} \cdot d(t). \quad (5.10)$$

Dass A eine untere Dreiecksmatrix und B eine Diagonalmatrix ist, folgt aus (5.7), da die i -te Komponente von $\dot{x}(t)$ nur von $d_i(t)$ abhängen soll. Im Gegensatz zum nichtlinearen Fall können wir nun die erhoffte Äquivalenzaussage ohne Zusatzvoraussetzung formulieren.

Satz 5.18. Gegeben sei ein Kontrollsystem der Form (5.10). Eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.14 existiert genau dann, wenn das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ ist.

Beweis: Da Satz 5.15 für beliebige Systeme, also insbesondere für lineare Systeme gilt, bleibt zu zeigen, dass Input-to-State Stabilität die Existenz einer speziellen Stability Margin impliziert. Nach Satz 2.13 ist Input-to-State Stabilität für lineare Systeme äquivalent zu 0 – GAS, was wiederum nach (1.7) äquivalent dazu ist, dass alle Eigenwerte der Matrix A negativen Realteil besitzen. Da A eine Diagonalmatrix ist, sind die

Eigenwerte gerade die Diagonaleinträge. Zudem ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also sind die Eigenwerte reell. Daher gilt

$$a_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Wir definieren

$$z_i := \max\left\{\max_{j=1, \dots, i-1} \{|a_{ij}|\}, |b_i|\right\} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

und können o.B.d.A annehmen, dass $z_i > 0$ ist, denn für $z = 0$ wäre das x_i -Teilsystem von der Form

$$\dot{x}_i(t) = a_{ii} \cdot x_i(t),$$

also ein System ohne Eingangssignale. Insbesondere wäre das Teilsystem damit Input-to-State stabil. Wir können daher

$$\rho_i(|x_i|) = \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i \cdot z_i} \right| \cdot |x_i|$$

setzen. Dass die so definierten ρ_i \mathcal{K}_∞ -Funktionen sind, ist leicht zu sehen, denn wir haben lediglich $|x_i|$ mit einer positiven Konstanten multipliziert. Im Folgenden zeigen wir, dass die Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \dots \\ \rho_n(|x_n|) \end{pmatrix}$$

eine spezielle Stability Margin ist. Dazu betrachten wir für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ das x_i -Teilsystem von (5.10). Dieses ist gegeben durch

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j(t) + a_{ii} \cdot x_i(t) + b_i \cdot d_i(t).$$

Im Regelkreis werden die Störfunktionen $x_1(t), \dots, x_{i-1}(t)$ und $d_i(t)$ durch die Feedback-Abbildungen k_{i1}, \dots, k_{ii-1} und k_{i0} , die die Bedingung

$$|k_{ij}(t, x_i)| \leq \rho_i(|x_i|) \quad \forall j = 1, \dots, i-1$$

erfüllen, ersetzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot k_{ij}(t, x_i(t)) + a_{ii} \cdot x_i(t) + b_i \cdot k_{i0}(t, x_i(t)) \\
 &\leq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i \cdot z_i} \right| \cdot |x_i(t)| + a_{ii} \cdot x_i(t) + |b_i| \cdot \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i \cdot z_i} \right| \cdot |x_i(t)| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{i-1} |z_i| \cdot \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i \cdot z_i} \right| \cdot |x_i(t)| + a_{ii} \cdot x_i(t) + |z_i| \cdot \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i \cdot z_i} \right| \cdot |x_i(t)| \\
 &= (i-1) \cdot \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i} \right| \cdot |x_i(t)| + a_{ii} \cdot x_i(t) + \left| \frac{a_{ii}}{2 \cdot i} \right| \cdot |x_i(t)| \\
 &= \left| \frac{a_{ii}}{2} \right| \cdot |x_i(t)| + a_{ii} \cdot x_i(t) \\
 &=: h(x(t)).
 \end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung folgt dabei, weil nach der Definition der z_i

$$|a_{ij}| \leq |z_i| \quad \forall j = 1, \dots, i-1 \quad \text{und} \quad |b_i| \leq |z_i|$$

gilt. Analog folgt

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) &\geq - \left| \frac{a_{ii}}{2} \right| \cdot |x_i(t)| + a_{ii} \cdot x_i(t) \\
 &=: g(x(t)).
 \end{aligned}$$

Ersetzt man für die beiden Differentialungleichungen die Ungleichheitszeichen durch $=$, erhält man Differentialgleichungen, die global asymptotisch stabil sind, da wegen $a_{ii} < 0$ die rechten Seiten h und g die Voraussetzungen von Lemma 1.13 erfüllen. Wir haben also gezeigt, dass ρ_i eine Stability Margin gemäß Definition 5.1 für das x_i -Teilsystem ist. Daher ist das x_i -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i . Nach mehrmaligem Anwenden von Satz 4.4 folgt damit die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises. \square

5.5. Notwendigkeit der Systemstruktur

Nun wollen wir uns der Frage widmen, ob man die Struktur des Systems für die in den letzten Kapiteln bewiesenen Aussagen wirklich benötigt. Wir betrachten dazu wieder den zweidimensionalen Fall und werden sehen, dass sich bereits im Linearen Gegenbeispiele zu den Sätzen 5.8 und 5.9 finden lassen, wenn man auf die Annahme der Systemstruktur (5.3) verzichtet. Im ersten Beispiel geben wir ein System in der allgemeinen Form (1.14) an, das nicht Input-to-State stabil ist, für das aber eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.5 existiert, also ein Gegenbeispiel zu Satz 5.8.

Beispiel 5.19. Betrachte das Kontrollsystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{1}{4}x_2(t) + d_1(t) \\ 9x_1(t) - x_2(t) + d_2(t) \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass dieses System nicht Input-to-State stabil sein kann, denn es ist nicht 0 – GAS. Wir setzen dazu $d_1(t) = d_2(t) = 0$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 9 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Das System ist also nach (1.7) nicht global asymptotisch stabil. Andererseits können wir ρ definieren als

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(|x_2|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1| \\ \frac{1}{16}|x_2| \end{pmatrix}.$$

Der Regelkreis ergibt sich als

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{1}{4}x_2(t) + k_{10}(t, x_1(t)) \\ 9k_{21}(t, x_2(t)) - x_2(t) + k_{20}(t, x_2(t)) \end{pmatrix}}_{=:f(x(t))}.$$

mit $|k_{10}(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $\max\{|k_{20}(t, x_2)|, |k_{21}(t, x_2)|\} \leq \rho_2(|x_2|)$. Zu beachten ist, dass hier für x_2 im x_1 -Teilsystem kein Feedback eingesetzt wurde, da wir genau diese Situation untersuchen wollen. Nun definieren wir die Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und zeigen, dass V eine globale Lyapunov-Funktion für den Regelkreis ist. Bedingung (1.11) ist offensichtlich erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned} DV(x)f(x) &= -x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot k_{10}(t, x_1) + 9x_2 \cdot k_{21}(t, x_2) - x_2^2 + x_2 \cdot k_{20}(t, x_2) \\ &\leq -|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_1| \cdot |x_2| + \frac{1}{2}|x_1|^2 + \frac{9}{16}|x_2| \cdot |x_2| - |x_2|^2 + \frac{1}{16}|x_2|^2 \\ &= -\frac{1}{2}|x_1|^2 - \frac{3}{8}|x_2|^2 + \frac{1}{4}|x_1| \cdot |x_2|. \end{aligned}$$

Für den gemischten Term benötigt man eine Fallunterscheidung.

1. Fall:

$$|x_1| \leq |x_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}|x_1| \cdot |x_2| \leq \frac{1}{4}|x_2|^2$$

2. Fall:

$$|x_1| > |x_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}|x_1| \cdot |x_2| < \frac{1}{4}|x_1|^2$$

Zusammengefasst gilt damit

$$\frac{1}{4}|x_1| \cdot |x_2| \leq \frac{1}{4}|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_2|^2.$$

Oben eingesetzt erhält man mit dieser Abschätzung

$$\begin{aligned}
 DV(x)f(x) &\leq -\frac{1}{2}|x_1|^2 - \frac{3}{8}|x_2|^2 + \frac{1}{4}|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_2|^2 \\
 &= -\frac{1}{4}|x_1|^2 - \frac{1}{8}|x_2|^2 \\
 &\leq -\frac{1}{8}(|x_1|^2 + |x_2|^2) \\
 &\leq -\frac{1}{8} \max\{|x_1|^2, |x_2|^2\} \\
 &= -\frac{1}{8}\|x\|^2,
 \end{aligned}$$

also Bedingung (1.12) für die \mathcal{K} -Funktion $\alpha_3(r) := \frac{1}{8}r^2$. Wir haben also gezeigt, dass der Regelkreis global asymptotisch stabil ist und damit auch, dass ρ eine spezielle Stability Margin ist. ■

Abschließend geben wir ein Gegenbeispiel zu Satz 5.9 an. Das System in der allgemeinen Form (1.14) ist Input-to-State stabil, das x_1 -Teilsystem ist ISS in d_1 und das \dot{x}_2 -Teilsystem ist ISS in x_1 und d_2 , aber es existiert keine spezielle Stability Margin.

Beispiel 5.20. Betrachte das Kontrollsystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 9 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix}$$

Die Matrix A besitzt den doppelten Eigenwert $\lambda = -\frac{1}{2}$ und ist damit nach (1.7) 0-GAS und nach Satz 2.13 Input-to-State stabil. Zudem ist das x_2 -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1 und d_2 . Betrachtet man für das x_2 -Teilsystem

$$\dot{x}_2(t) = 9x_1(t) - 2x_2(t) + d_2(t) =: f_2(x_1, x_2, d_2)$$

die Funktion $V(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ ist die erste Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion trivial erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
 DV(x_2)f_2(x_1, x_2, d_2) &= 9x_1x_2 - 2x_2^2 + d_2x_2 \\
 &\leq 9|x_1| \cdot |x_2| - 2|x_2|^2 + |d_2| \cdot |x_2|.
 \end{aligned}$$

Für die \mathcal{K}_∞ -Funktion $\chi(r) = \frac{1}{8}r$ gilt also

$$\begin{aligned}
 \max\{|x_1|, |d_2|\} \leq \chi(|x_2|) &\Rightarrow DV(x_2)f_2(x_1, x_2, d_2) = 9|x_1| \cdot |x_2| - 2|x_2|^2 + |d_2| \cdot |x_2| \\
 &\leq \frac{9}{8}|x_2|^2 - 2|x_2|^2 + \frac{1}{8}|x_2|^2 \\
 &= -\frac{3}{4}|x_2|^2.
 \end{aligned}$$

Da $\alpha_3(r) = \frac{3}{4}r^2$ eine \mathcal{K} -Funktion ist, ist V eine ISS-Lyapunov-Funktion und das x_2 -Teilsystem ist ISS mit den Inputs x_1 und d_2 .

Nun bleibt zu zeigen, dass keine spezielle Stability Margin existiert. Dazu nehmen wir an, diese würde existieren. Für eine Funktion $\rho(x) = (\rho_1(|x_1|), \rho_2(|x_2|))^T$ ist also

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t) + k_{10}(t, x_1(t)) \\ 9k_{21}(t, x_2(t)) - 2x_2(t) + k_{20}(t, x_2(t)) \end{pmatrix}$$

für alle Feedback-Abbildungen mit $|k_{10}(t, x_1(t))| \leq \rho_1(|x_1|)$, $|k_{20}(t, x_2(t))| \leq \rho_2(|x_2|)$ und $|k_{21}(t, x_2(t))| \leq \rho_2(|x_2|)$ global asymptotisch stabil. (Auch hier wurde für x_2 im x_1 -Teilsystem kein Feedback eingesetzt.) Insbesondere ist also der Regelkreis global asymptotisch stabil, wenn wir die Feedback-Abbildungen $k_{10} \equiv k_{21} \equiv k_{20} \equiv 0$ setzen. Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t) \\ -2x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Für den Anfangswert $x = (1, 0)^T$ hat dieses System die Lösung

$$\varphi(t, x) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

für die $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x)\| = \infty$ gilt, was ein Widerspruch zur globalen asymptotischen Stabilität ist. ■

Da die Systeme in beiden Beispielen linear sind, kann im Linearen auch insbesondere die Äquivalenzaussage aus Satz 5.18 ohne die Systemstruktur (5.3) nicht gelten.

5.6. Verallgemeinerung auf nicht-skalare Teilsysteme

Bevor wir in Kapitel 6 einen leicht veränderten Regelkreis betrachten, wollen wir uns eine weitere Verallgemeinerung überlegen. Sei dazu im gesamten Abschnitt $n \geq 2$. In Kapitel 5.3 haben wir spezielle Stability Margins für n -dimensionale Systeme betrachtet. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass jedes Teilsystem skalar, also eindimensional, ist. Nun betrachten wir Systeme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), d_{n-1}(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t), d_n(t)) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

mit $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, wobei $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $i = 1, \dots, n$ ist. Man erkennt, dass diese Form genau (5.7) mit mehrdimensionalen Teilsystemen entspricht. Die Definition der speziellen Stability Margin ist für diesen Fall vollkommen analog zu Definition 5.14. Die Beträge werden durch Normen ersetzt und für die Feedback-Abbildungen k_{ij} gilt nun $k_{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow U$.

Definition 5.21. Betrachte ein System der Form (5.11). Eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_1\|) \\ \rho_2(\|x_2\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_n\|) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

mit $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$ heißt spezielle Stability Margin für (5.11), falls der geschlossene Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_{10}(t, x_1(t))) \\ f_2(k_{21}(t, x_2(t)), x_2(t), k_{20}(t, x_2(t))) \\ \vdots \\ f_n(k_{n1}(t, x_n(t)), \dots, k_{nn-1}(t, x_n(t)), x_n(t), k_{n0}(t, x_n(t))) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow U$ mit $\|k_{ij}(t, x_i)\| \leq \rho_i(\|x_i\|)$ für $i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, i-1$ global asymptotisch stabil ist. ■

Betrachtet man noch einmal die Beweise der Sätze 5.15 und 5.16 erkennt man, dass überhaupt nicht benötigt wurde, dass die Teilsysteme eindimensional sind und alle Beiträge durch Normen ersetzt werden können. Daher formulieren wir die Verallgemeinerung von Folgerung 5.17 direkt als Satz und verzichten auf die Wiederholung des Beweises.

Satz 5.22. Gegeben sei ein System der Form (5.11). Eine spezielle Stability Margin (5.12) existiert genau dann, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist.

In Kapitel 5.4 konnten wir zudem beweisen, dass im linearen Fall bereits die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems hinreichend für die Existenz einer speziellen Stability Margin ist. Nun wollen wir untersuchen, ob die daraus resultierende Äquivalenzaussage aus Satz 5.18 auch für Systeme der Form (5.11) gilt. Ein lineares System der Form (5.11) (also ein System der Form (5.10) mit mehrdimensionalen Teilsystemen) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_n \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Dabei ist $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ für alle $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, i$ und $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ für $i = 1, \dots, n$.

Auch Satz 5.18 können wir auf die Situation mit mehrdimensionalen Teilsystemen verallgemeinern. Der Beweis wird dabei leicht angepasst. Insbesondere geben wir die spezielle Stability Margin nicht mehr explizit an.

Satz 5.23. Gegeben sei ein Kontrollsystem der Form (5.14). Eine spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.21 existiert genau dann, wenn das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ ist.

Beweis: Mit Satz 5.22 bleibt zu zeigen, dass Input-to-State Stabilität die Existenz einer speziellen Stability Margin impliziert. Wir nehmen also an, dass das System (5.14) Input-to-State stabil ist. Dann ist das System nach Satz 2.13 auch $0-GAS$, was mit (1.7) äquivalent dazu ist, dass die Matrix A nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt. Da A eine Blockdreiecksmatrix ist, sind die Eigenwerte von A gegeben durch die Eigenwerte der Matrizen A_{ii} . Also besitzt für beliebiges $i = 1, \dots, n$ die Matrix A_{ii} nur Eigenwerte mit negativem Realteil. Daraus folgt, dass das x_i -Teilsystem

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j(t) + A_{ii}x_i(t) + B_id_i(t)$$

$0-GAS$ ist, wobei x_1, \dots, x_{i-1} und d_i die Störungen sind. Mit Satz 2.13 folgt daraus die Input-to-State Stabilität des x_i -Teilsystems in x_1, \dots, x_{i-1} und d_i . Nach Satz 2.10 existiert daher eine Stability Margin ρ_i gemäß Definition 2.9. Daher ist für alle Feedbacks k_{i0}, \dots, k_{ii-1} mit

$$\max\{\|k_{i0}(t, x_i)\|, \dots, \|k_{ii-1}(t, x_i)\|\} \leq \rho_i(\|x_i\|)$$

der Regelkreis

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}k_{ij}(t, x_i(t)) + A_{ii}x_i(t) + B_ik_{i0}(t, x_i(t))$$

global asymptotisch stabil. Die gesuchte spezielle Stability Margin ρ für das Gesamtsystem erhält man dann, indem man

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_1\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_n\|) \end{pmatrix}$$

setzt. □

Zusammengefasst gelten also alle Aussagen über spezielle Stability Margins auch für den Fall nicht-skalarer Teilsysteme.

6. Input-to-State Stabilität und verallgemeinerte Stability Margins

Wie bereits angedeutet, wollen wir nun den Regelkreis (5.6) leicht verändern und analog zu den Überlegungen in Kapitel 5 untersuchen. Dabei gehen wir sehr ähnlich zu Kapitel 5 vor, indem wir erst den Begriff der verallgemeinerten Stability Margin definieren und ein Beispiel betrachten. Anschließend werden wir untersuchen, ob die Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist.

6.1. Verallgemeinerte Stability Margins für zweidimensionale Systeme mit vorgegebener Struktur

Wie in Kapitel 5.1 wollen wir Kontrollsysteme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

betrachten, also zweidimensionale Systeme, bei denen das x_1 -Teilsystem nicht von x_2 beeinflusst wird. Diesmal jedoch wollen wir im Regelkreis nur Feedbacks anstelle der tatsächlichen Störfunktionen d_1 und d_2 zulassen. Das heißt, auf die zweite Komponente des Systems wird nur noch ein Feedback einwirken. Das bisher als Störung interpretierte $x_1(t)$ bleibt im Regelkreis unverändert stehen. Darüber hinaus soll die Stability Margin nun von der Form

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix}$$

sein. Wir bemerken, dass im Gegensatz zu Kapitel 5 der Term $\rho_2(|x_2|)$ durch $\rho_2(\|x\|)$ ersetzt wurde, wodurch die Koppelung der beiden Teilsysteme im Regelkreis erhalten bleiben wird. Motiviert wird diese Betrachtung vor allem durch Lemma 5.3. Für allgemeine Kontrollsysteme trifft das Lemma die Aussage, dass Input-to-State Stabilität äquivalent zur Existenz einer Funktion $\rho(x) = (\rho_1(\|x\|), \rho_2(\|x\|))^T$ ist, für die der Regelkreis für alle Feedback-Abbildungen mit $|k_1(t, x)| \leq \rho_1(\|x\|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist. Da in (6.1) \dot{x}_1 unabhängig von x_2 ist, liegt die Vermutung nahe, dass ρ_1 auch unabhängig von x_2 gewählt werden kann, ohne die Gültigkeit der Äquivalenzaussage zu verlieren. Die folgende Definition hält diese Vorüberlegung fest.

Definition 6.1. Eine Funktion $\rho(x) = (\rho_1(|x_1|), \rho_2(\|x\|))^T$ mit $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$ heißt verallgemeinerte Stability Margin für ein Kontrollsystem der Form (6.1), falls der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_1(t, x_1(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x(t))) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$, $k_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ mit $|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist. ■

Den Regelkreis (6.2) kann man sich auch wieder grafisch veranschaulichen. Man erkennt dabei den wesentlichen Unterschied zu (5.6) (vgl. Abbildung 5.2), nämlich die Koppelung der beiden Teilsysteme im Regelkreis.

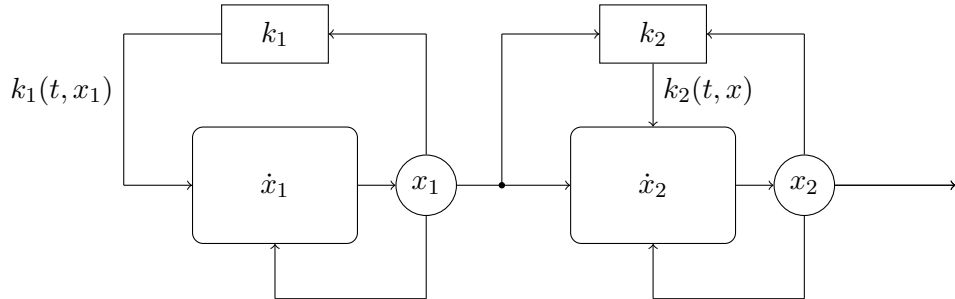


Abbildung 6.1: Grafische Darstellung des Regelkreises (6.2)

Bevor wir untersuchen, ob die Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin äquivalent zu Input-to-State Stabilität ist, betrachten wir ein Beispiel, in dem wir für ein Input-to-State stabiles System eine verallgemeinerte Stability Margin konstruieren.

Beispiel 6.2. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + d_1(t) \\ \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 + d_2(t)^3 \end{pmatrix}.$$

Dass dieses System Input-to-State stabil ist, haben wir bereits in Beispiel 5.7 bewiesen. Nun definieren wir

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1|^3 \\ \frac{1}{2}\|x\| \end{pmatrix}$$

und zeigen, dass ρ eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.1 ist. Dafür betrachten wir den Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + k_1(t, x_1) \\ \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 + k_2(t, x)^3 \end{pmatrix}}_{=: f(t, x)}$$

für Feedback Abbildungen k_1 und k_2 mit

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x_1)| \\ |k_2(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und zeigen, dass V eine globale Lyapunov-Funktion für den Regelkreis ist. Die erste Lyapunov-Bedingung (2.10) ist wieder trivial

erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
 DV(x)f(t, x) &= -x_1^4 + k_1(t, x_1) \cdot x_1 + \frac{1}{4}x_1^3 \cdot x_2 - x_2^4 + k_2(t, x)^3 \cdot x_2 \\
 &\leq -x_1^4 + \frac{1}{2}|x_1|^3 \cdot x_1 + \frac{1}{4}x_1^3 \cdot x_2 - x_2^4 + \frac{1}{8}\|x\|^3 \cdot x_2 \\
 &\leq -x_1^4 + \frac{1}{2}|x_1|^3 \cdot x_1 + \frac{1}{4}x_1^3 \cdot x_2 - x_2^4 + \frac{1}{8}(|x_1|^3 + |x_2|^3) \cdot x_2 \\
 &\leq -|x_1|^4 + \frac{1}{2}|x_1|^4 + \frac{1}{4}|x_1|^3 \cdot |x_2| - |x_2|^4 + \frac{1}{8}|x_1|^3 \cdot |x_2| + \frac{1}{8}|x_2|^4 \\
 &= -\frac{1}{2}|x_1|^4 - \frac{7}{8}|x_2|^4 + \frac{3}{8}|x_1|^3 \cdot |x_2|.
 \end{aligned}$$

Den gemischten Term betrachten wir in einer Fallunterscheidung.

1. Fall:

$$|x_1| \leq |x_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8}|x_1|^3 \cdot |x_2| \leq \frac{3}{8}|x_2|^4$$

2. Fall:

$$|x_1| > |x_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8}|x_1|^3 \cdot |x_2| < \frac{3}{8}|x_1|^4$$

Zusammengefasst gilt also

$$\frac{3}{8}|x_1|^3 \cdot |x_2| \leq \frac{3}{8}(|x_1|^4 + |x_2|^4),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
 DV(x)f(t, x) &\leq -\frac{1}{2}|x_1|^4 - \frac{7}{8}|x_2|^4 + \frac{3}{8}(|x_1|^4 + |x_2|^4) \\
 &= -\frac{1}{8}|x_1|^4 - \frac{1}{2}|x_2|^4 \\
 &\leq -\frac{1}{8}(|x_1|^4 + |x_2|^4) \\
 &\leq -\frac{1}{8} \max\{|x_1|^4, |x_2|^4\} \\
 &\leq -\frac{1}{8}\|x\|^4.
 \end{aligned}$$

Da $\alpha_3(r) := -\frac{1}{8}r^4$ eine \mathcal{K} -Funktion ist, haben wir gezeigt, dass V auch Bedingung (2.11) erfüllt, also eine globale Lyapunov-Funktion ist. Damit ist der Regelkreis global asymptotisch stabil und ρ ist eine verallgemeinerte Stability Margin. ■

Man kann sich nun die Frage stellen, wieso die globale asymptotische Stabilität hier nicht wie in den Beispielen 5.6 und 5.7 über Differentialungleichungen bewiesen wurde. Würde man hier die Feedback-Abbildungen bereits in der Differentialgleichung gegen ρ_1 und ρ_2 abschätzen, ergibt sich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t)^3 - \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 - \frac{1}{8}|x_1|^3 - \frac{1}{8}|x_2|^3 \end{pmatrix}}_{=:g(x(t))} \leq \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t)^3 + \frac{1}{2}|x_1(t)|^3 \\ \frac{1}{4}x_1(t)^3 - x_2(t)^3 + \frac{1}{8}|x_1|^3 + \frac{1}{8}|x_2|^3 \end{pmatrix}}_{=:h(x(t))}.$$

Um wie in den bisherigen Beispielen zu argumentieren, müsste h quasimonoton wachsen und g quasimonoton fallen. Man sieht aber leicht, dass diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

6.2. Beweis der Äquivalenz zu Input-to-State Stabilität

Nun wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob die Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin äquivalent zur Input-to-State Stabilität des Systems ist. Es wird sich dabei herausstellen, dass die Existenz zwar notwendig für Input-to-State Stabilität, jedoch nicht hinreichend ist. Interessanterweise ist das genau gegensätzlich zu den Aussagen über die spezielle Stability Margin aus Kapitel 5.

Satz 6.3. Betrachte ein Input-to-State stabiles System der Form (6.1). Dann existiert eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.1.

Beweis: Aus der Input-to-State Stabilität eines beliebigen zweidimensionalen Systems folgt nach Lemma 5.3, dass $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$ existieren, sodass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k(t, x)$ mit

$$\begin{pmatrix} |k_1(t, x)| \\ |k_2(t, x)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix}$$

global asymptotisch stabil ist. Für Systeme der Form (6.1) gilt

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t))) = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_1(t, x(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x(t))) \end{pmatrix}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir nur noch beweisen, dass $\rho_1(\|x\|)$ durch $\rho_1(|x_1|)$ ersetzt werden kann. Das ist möglich, weil $|x_1| \leq \|x\|$ und damit auch $\rho_1(|x_1|) \leq \rho_1(\|x\|)$ für jede \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_1 gilt. Also gilt die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises insbesondere für alle Feedback-Abbildungen k_1, k_2 mit $|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$.

Zu erwähnen bleibt, dass wir in der ersten Komponente $k_1(t, x(t))$ durch $k_1(t, x_1(t))$ ersetzt haben. Das ist jedoch unproblematisch, weil die erlaubten Feedbacks dadurch nur weiter eingeschränkt werden.

□

Nun wollen wir untersuchen, ob auch die Umkehrung von Satz 6.3 gilt, ob also die Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin Input-to-State Stabilität impliziert. Wir werden sehen, dass dies ohne eine Zusatzvoraussetzung nicht der Fall ist. Dennoch sprechen zunächst einige Beobachtungen für die Gültigkeit der Umkehrung. Zentral für den Beweis von Satz 6.3 war Lemma 5.3, das aber eine stärkere Aussage trifft als die, die im Beweis verwendet wurde, nämlich eine Äquivalenzaussage. Also impliziert die Existenz einer Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix},$$

für die der Regelkreis für alle Feedback-Abbildungen k_1, k_2 mit $|k_1(t, x)| \leq \rho_1(\|x\|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist, Input-to-State Stabilität. Hinzu kommt die besondere Struktur des Systems, nämlich dass das x_1 -Teilsystem unabhängig von x_2 ist. Man könnte also vermuten, dass auch ρ_1 unabhängig von x_2 gewählt werden kann, womit man bei einer Funktion ρ in der gewünschten Form angekommen wäre. Naheliegende Ansätze für einen Beweis wären die Verallgemeinerung der Implikation „(2) \Rightarrow (3)“ aus dem Beweis von Satz 2.10 oder eine entsprechende Abwandlung des Beweises von Satz 5.8 auf diesen Fall. Wir wollen nun in einer Bemerkung festhalten, an welchen Stellen diese beiden Beweisideen scheitern und anschließend mit einem Gegenbeispiel beweisen, dass die Umkehrung von Satz 6.3 nicht gelten kann.

Bemerkung 6.4. (i) Bei einem Versuch, „Verallgemeinerte Stability Margin \Rightarrow ISS“ zu zeigen, kann man zunächst vollkommen analog wie im Beweis von Satz 2.10 „(2) \Rightarrow (3)“ argumentieren und

$$\begin{pmatrix} k_1(t, x_1(t)) \\ k_2(t, x(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \cdot d_1(t) \\ \rho_2(\|x\|) \cdot d_2(t) \end{pmatrix}$$

setzen. Für $\|d\| \leq 1$ erfüllt das so definierte Feedback k die Voraussetzungen aus Definition 6.1, denn

$$|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|) \cdot |d_1(t)| \leq \rho_1(|x_1|)$$

und

$$|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|) \cdot |d_2(t)| \leq \rho_2(\|x\|).$$

Mit [16, Theorem 1] erhält man wieder die Implikation

$$\|d\| \leq 1 \Rightarrow DV(x)f \left(x, \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \cdot d_1 \\ \rho_2(\|x\|) \cdot d_2 \end{pmatrix} \right) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

für eine glatte Lyapunov-Funktion V und ein $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$. Im Beweis von Satz 2.10 stand in der zweiten Komponente von f der Term $\rho(\|x\|) \cdot d$. Anschließend hat man $u(t) = \rho(\|x\|) \cdot d(t)$ gesetzt und aus $\|u\| \leq \rho(\|x\|)$ die Abschätzung

$$\|d\| \leq \frac{\|u\|}{\rho(\|x\|)} \leq 1$$

gefolgert, mit der man bei der Implikation

$$\|u\| \leq \rho(\|x\|) \Rightarrow DV(x)f(x, \rho(\|x\|) \cdot d) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

angelangt war, also der zweiten Bedingung für eine ISS-Lyapunov-Funktion. Diese Folgerung funktioniert aber in der Situation mit der verallgemeinerten Stability Margin nicht, denn für

$$u(t) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \cdot d_1(t) \\ \rho_2(\|x\|) \cdot d_2(t) \end{pmatrix}$$

müsste man

$$\|u\| \leq \min\{\rho_1(|x_1|), \rho_2(\|x\|)\}$$

voraussetzen. Dann könnte man wieder wie oben argumentieren und $\|d\| \leq 1$ folgern. Die rechte Seite der benötigten Ungleichung für u lässt sich aber nicht durch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion darstellen, da ρ_1 nur von $|x_1|$ abhängt und nicht von $\|x\|$. Aus diesem Grund kann man den Beweis der Implikation „(2) \Rightarrow (3)“ aus Satz 2.10 nicht auf diese Weise verallgemeinern.

(ii) Eine zweite naheliegende Idee ist es, den Beweis von Satz 5.8 anzupassen. Dieser nutzte die Aussage von Satz 4.4 aus. Man konnte zeigen, dass das x_1 -Teilsystem ISS mit Input d_1 war und das x_2 -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1 und d_2 . Dies war insbesondere deshalb möglich, weil die spezielle Stability Margin gemäß Definition 5.5 ein Feedback für die x_1 -Komponente im x_2 -Teilsystem zugelassen hat. Da dies in der Situation der verallgemeinerten Stability Margin nach Definition 6.1 nicht der Fall ist, kann genau diese Komponente zu Problemen führen (was in Beispiel 6.5 auch der Fall sein wird). Die eigentlichen Störfunktionen d_1 und d_2 sind hingegen unproblematisch. ■

Im folgenden Beispiel zeigt sich, dass die in Bemerkung 6.4 angesprochenen Probleme bei der Verallgemeinerung der Beweise nicht nur zufällig auftreten, sondern darin begründet sind, dass es keinen solchen Beweis geben kann.

Beispiel 6.5. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + d_1(t) \\ -x_2(t) + \frac{1}{2}(x_2(t) + 1) \cdot x_1(t) \end{pmatrix}.$$

Man erkennt sofort, dass das System von der Form (6.1) ist. Ebenso leicht sieht man, dass das System nicht Input-to-State stabil sein kann. Wir setzen dazu

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d^* \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Lösung

$$\varphi(t, x^*, d^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x^*, d^*)\| = \infty$, was einen Widerspruch zur Input-to-State Stabilität liefert.

Andererseits lässt sich, wenn auch etwas aufwändiger, zeigen, dass eine verallgemeinerte Stability Margin für das System existiert. Dafür setzen wir

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1| \\ \|x\| \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ρ_2 kann dabei beliebig aus \mathcal{K}_∞ gewählt werden, da das System unabhängig von d_2 ist.

Das Phasenportrait des Regelkreises legt die Vermutung nahe, dass dieser global asymptotisch stabil ist. Der Matlab-Code für die Erstellung des Phasenportraits befindet sich im Anhang (Programm 2). Die Feedback-Abbildung k_1 wird dabei erzeugt, indem die Funktionen ρ_1 mit zufälligen Werten aus dem Intervall $[-1, 1]$ multipliziert wird. Dadurch erfüllt das Feedback k_1 die Bedingung $|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$. Dieser zufällige Einfluss erklärt auch, warum die Trajektorien etwas „verwackeln“.

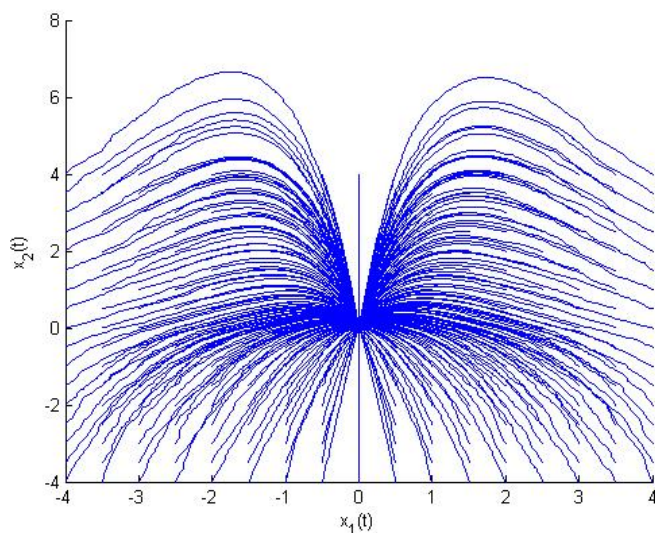


Abbildung 6.2: Phasenportrait in Beispiel 6.5

Setzt man ρ in das System ein, ergeben sich die Abschätzungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t) - \frac{1}{2}|x_1(t)| \\ -x_2(t) - \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot |x_1(t)| \end{pmatrix}}_{=:g(x(t))} \leq \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{1}{2}|x_1(t)| \\ -x_2(t) + \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot |x_1(t)| \end{pmatrix}}_{=:h(x(t))}.$$

Die Beträge in der zweiten Komponente sind nötig, da $x_1(t)$ negativ sein kann. Bei genauer Betrachtung fällt allerdings auf, dass die Funktionen h und g diesmal nicht quasimonoton sind, sodass wir nicht wie in den bisherigen Beispielen über die Abschätzung

zu Differentialungleichungen argumentieren können. Daher betrachten wir beide Teilsysteme getrennt und beweisen die globale asymptotische Stabilität über die Bedingungen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } \|x\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (1.9)$$

und

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0 \exists T > 0 \text{ mit } \|x\| < r \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T, \quad (1.10)$$

also „Stabilität“ (1.9) und „Globale Attraktivität“ (1.10) (vgl. Bem 1.6). Das erste Teilsystem erfüllt die Differentialungleichung

$$-x_1(t) - \frac{1}{2}|x_1(t)| \leq \dot{x}_1(t) \leq -x_1(t) + \frac{1}{2}|x_1(t)|.$$

Für $x_1(t) > 0$ ist also $\dot{x}_1(t) < 0$ und für $x_1(t) < 0$ ist $\dot{x}_1(t) > 0$. Daraus folgt das zentrale Argument für den Beweis, nämlich, dass die Norm von φ_1 für beliebige Anfangswerte $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ streng monoton fallend mit Grenzwert 0 ist und insbesondere $|\varphi_1(t, x)| \leq |x_1|$ gilt.

Zu (1.9): Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\delta := \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{4}\right\}.$$

Diese Fallunterscheidung ist nötig, weil damit sichergestellt ist, dass $|x_1| \leq \frac{1}{4}$ und damit auch $|\varphi_1| \leq \frac{1}{4}$ gilt.

1. Fall: Sei $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$. Dann ist $\delta = \varepsilon$ und wir betrachten Startwerte x mit $\|x\| \leq \delta = \varepsilon$. Mit der strengen Monotonie der ersten Komponente gilt

$$|\varphi_1(t, x)| \leq |x_1| \leq \varepsilon.$$

Also können wir die zweite Komponente abschätzen durch

$$-x_2(t) - \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot \varepsilon \leq \dot{x}_2(t) \leq -x_2(t) + \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot \varepsilon$$

und erhalten dadurch Schranken an $\varphi_2(t, x)$. Die Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = -v(t) + \frac{1}{2}(|v(t)| + 1) \cdot \varepsilon$$

besitzt für $\varepsilon \in (0, 2)^1$ das eindeutige Gleichgewicht $v^* = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \in_{\varepsilon \leq \frac{1}{4}} (-\varepsilon, \varepsilon)$. Die Eindeutigkeit des Gleichgewichts zeigt man, indem man den Betrag mit einer Fallunterscheidung

¹Für $\varepsilon \geq 2$ besitzt die Differentialgleichung kein eindeutiges Gleichgewicht

aufföst. Für $v(t) < 0$ erhält man $v^{**} > 0$, also einen Widerspruch. Die Differentialgleichung erfüllt

$$\dot{v}(t) \begin{cases} < 0 & v(t) \in (v^*, \varepsilon] \\ = 0 & v(t) = v^* \\ > 0 & v(t) \in [-\varepsilon, v^*). \end{cases}$$

Daher läuft die Lösung für einen beliebigen Anfangswert aus dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ gegen das Gleichgewicht v^* und erfüllt insbesondere $v(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ für alle $t \geq 0$. Analog kann man für die Differentialgleichung

$$\dot{w}(t) = -w(t) - \frac{1}{2}(|w(t)| + 1) \cdot \varepsilon$$

für $\varepsilon \in (0, 2)$ mit dem Gleichgewicht $w^* = \frac{-\varepsilon}{2+\varepsilon} \stackrel{\varepsilon \leq \frac{1}{4}}{\in} (-\varepsilon, \varepsilon)$ argumentieren. Auch hier erhält man die Eindeutigkeit des Gleichgewichts durch eine Fallunterscheidung. Zusammengefasst erhält man dadurch $|\varphi_2(t, x)| \leq \varepsilon$ und somit

$$\|\varphi(t, x)\| = \max\{|\varphi_1(t, x)|, |\varphi_2(t, x)|\} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

also Bedingung (1.9).

2. Fall: Sei $\varepsilon \geq \frac{1}{4}$. Dann ist $\delta = \frac{1}{4}$ und wir betrachten Startwerte x mit $\|x\| \leq \delta = \frac{1}{4}$. Mit der strengen Monotonie der ersten Komponente gilt

$$|\varphi_1(t, x)| \leq |x_1| \leq \frac{1}{4} < \varepsilon.$$

Dann ist man aber mit $\tilde{\varepsilon} := \frac{1}{4}$ wieder im ersten Fall und erhält mit der identischen Argumentation $|\varphi_2(t, x)| \leq \frac{1}{4}$ und insgesamt

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \frac{1}{4} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

also wieder Bedingung (1.9).

Zu (1.10): Seien $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ beliebig, aber fest. Sei x beliebig mit $\|x\| < r$. Da die erste Komponente streng monoton gegen 0 konvergiert, existiert ein $\tilde{T} > 0$, sodass

$$\varphi_1(t, x) \leq \tilde{\varepsilon} \quad \forall t \geq \tilde{T}$$

mit $\tilde{\varepsilon} := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$. Damit kann man wieder die Abschätzungen

$$-x_2(t) - \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot \tilde{\varepsilon} \leq \dot{x}_2(t) \leq -x_2(t) + \frac{1}{2}(|x_2(t)| + 1) \cdot \tilde{\varepsilon}$$

machen, die diesmal zwar nur für $t \geq \tilde{T}$ gelten, was jedoch unproblematisch ist, da uns der Verlauf der Lösung erst ab einem bestimmten Zeitpunkt $T > 0$ interessiert. Wie oben definieren wir nun wieder die Differentialgleichungen

$$\dot{v}(t) = -v(t) + \frac{1}{2}(|v(t)| + 1) \cdot \tilde{\varepsilon}$$

und

$$\dot{w}(t) = -w(t) - \frac{1}{2}(|w(t)| + 1) \cdot \tilde{\varepsilon}.$$

Diese haben die eindeutigen Gleichgewichte $v^* = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2-\tilde{\varepsilon}}$ und $w^* = \frac{-\tilde{\varepsilon}}{2+\tilde{\varepsilon}}$ und erfüllen

$$\dot{v}(t) \begin{cases} < 0 & v(t) \geq v^* \\ = 0 & v(t) = v^* \\ > 0 & v(t) \leq v^* \end{cases}$$

und

$$\dot{w}(t) \begin{cases} < 0 & w(t) \geq w^* \\ = 0 & w(t) = w^* \\ > 0 & w(t) \leq w^*, \end{cases}$$

woraus für beliebige Anfangswerte $v, w \in \mathbb{R}$ folgt: $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v^*$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w^*$. Da wir $\tilde{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ definiert haben, ist $v^* = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2-\tilde{\varepsilon}} \in (0, \varepsilon)$ und $w^* = \frac{-\tilde{\varepsilon}}{2+\tilde{\varepsilon}} \in (-\varepsilon, 0)$. Folglich existiert ein $T > 0$, sodass

$$|v(t)| \in [0, \varepsilon] \quad \forall t \geq T$$

und

$$|w(t)| \in [-\varepsilon, 0] \quad \forall t \geq T.$$

Aufgrund der Abschätzungen, mit denen die Differentialgleichungen für $v(t)$ und $w(t)$ konstruiert wurden, gilt $v(t) \leq \varphi_2(t, x) \leq w(t)$ und damit

$$\varphi(t, x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall t \geq T.$$

Damit haben wir auch Bedingung (1.10) und folglich globale asymptotische Stabilität gezeigt. ■

Bemerkung 6.6. (i) Im Beweis von Bedingung (1.9) erscheint es zunächst so, als wäre die Fallunterscheidung überhaupt nicht nötig und man könnte einfach $\delta = \varepsilon$ setzen. Das ist jedoch falsch, denn damit wären für großes ε auch Startwerte x mit großem x_1 möglich. Im Phasenportrait (Abbildung 6.2) kann man aber erkennen, dass die Lösung in der zweiten Komponente für betragsmäßig großes x_1 zunächst deutlich ansteigt, bevor

sie gegen 0 geht. Dadurch könnte die Stabilitätsbedingung verletzt werden, wenn man auf die Fallunterscheidung verzichtet.

(ii) Im Beweis von Bedingung (1.10) ist die Lösung dieses Problems etwas versteckt. Denn wie sich die Lösung in der zweiten Komponente für Zeiten t nahe bei 0 verhält, ist überhaupt nicht von Bedeutung. Wichtig ist nur, dass die erste Komponente der Lösung ab einem bestimmten Zeitpunkt $\tilde{T} > 0$ hinreichend klein ist, sodass auch die zweite Komponente ab einem bestimmten Zeitpunkt $T > 0$ im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ liegt und dieses für Zeiten $t \geq T$ nicht wieder verlässt.

(iii) Im Beispiel wären natürlich auch einige andere Abschätzungen möglich. Beispielsweise könnte man im Beweis von Bedingung (1.9) für ein beliebiges $p \in (0, 1)$

$$\delta := \min\{\varepsilon, p\}$$

definieren.

(iv) Das Beispiel beweist insbesondere, dass sich aus der Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin nicht die Existenz einer „normalen“ Stability Margin gemäß Definition 5.1 folgern lässt. Die Frage nach einer möglichen Konstruktion stellt sich also im Gegensatz zur speziellen Stability Margin aus Kapitel 5 nicht. ■

Eine Frage, die sich anschließt, ist, welche zusätzlichen Voraussetzungen nötig sind, damit sich dennoch eine Umkehrung von Satz 6.3 formulieren lässt. Betrachtet man Beispiel 6.5 noch einmal genauer, erkennt man, dass die Input-to-State Stabilität des Systems am „unkontrollierten“ Einfluss des Zustands x_1 auf das x_2 -Teilsystem scheitert. Das legt die Idee nahe, diesen Einfluss zu kontrollieren. Eine Möglichkeit, dies zu tun ist (wie schon in Kapitel 5.2) vorauszusetzen, dass das x_2 -Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs d_2 und x_1 ist. Damit lässt sich der folgende Satz formulieren.

Satz 6.7. Betrachte ein System der Form (6.1), bei dem das x_2 -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1 und d_2 ist. Zudem existiere eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.1. Dann ist das System Input-to-State stabil.

Beweis: Mit Satz 4.4 bleibt zu zeigen, dass das x_1 -Teilsystem ISS mit Input d_1 ist. Da das x_1 -Teilsystem im Regelkreis weder vom Feedback k_2 , noch von der Zustandskomponente x_2 abhängt, setzen wir $k_2 \equiv 0$ und $x_2 = 0$. Nun betrachten wir Feedback-Abbildungen k_1 , die die Voraussetzung $|k_1(t, x)| \leq \rho_1(|x_1|)$ erfüllen und Anfangswerte $x = (x_1, 0)^T$ mit beliebigem $x_1 \in \mathbb{R}$. Da das Feedback die Voraussetzungen aus Definition 6.1 erfüllt, folgt aus der globalen asymptotischen Stabilität des Regelkreises (6.2) die Abschätzung

$$|\varphi_1(t, x_1, k_1(t, \varphi_1(t)))| \leq \|\varphi(t, x, k(t, \varphi(t)))\| \leq \beta(t, \|x\|)$$

für eine \mathcal{KL} -Funktion β . Da mit der Wahl von $x_2 = 0$ aber $\beta(t, \|x\|) = \beta(t, |x_1|)$ gilt, bedeutet das

$$|\varphi_1(t, x_1, k_1(t, \varphi_1(t)))| \leq \beta(t, |x_1|),$$

was genau der Bedingung dafür entspricht, dass ρ_1 eine Stability Margin für das x_1 -Teilsystem ist. Damit haben wir bewiesen, dass das x_1 -Teilsystem ISS mit Input d_1 ist.

Da nach Voraussetzung das x_2 -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1 und d_2 ist, folgt die Input-to-State Stabilität des Systems (6.1) mit Satz 4.4. □

Die Einfachheit des Beweises verdeutlicht, dass die Zusatzvoraussetzung „ x_2 ist ISS in x_1 und d_2 “ eine relativ starke Annahme ist. Unser Ziel war es, den Einfluss des Zustands x_1 auf das x_2 -Teilsystem einzuschränken, wobei wir mit dieser Annahme zusätzlich noch die Auswirkungen der Störfunktion begrenzt haben. Dass wir die Störfunktion d_2 bereits im Regelkreis „unter Kontrolle gebracht haben“, wurde daher im Beweis überhaupt nicht benötigt. Es stellt sich die Frage, ob und wie weit man diese Voraussetzung abschwächen kann, was wir im folgenden Kapitel untersuchen werden.

6.3. Abschwächen der Voraussetzungen

Eine naheliegende Idee, die Voraussetzung von Satz 6.7 abzuschwächen, ist, dass man die Input-to-State Stabilität des x_2 -Teilsystems nur in der Zustandsvariable x_1 annimmt. Damit hätte man das Ziel erreicht und nur den Einfluss von x_1 auf das x_2 -Teilsystem begrenzt. Allerdings ist unklar, wie man die Input-to-State Stabilität eines Systems, das mehrere Inputs hat, in einem einzelnen Eingangssignal zu verstehen hat. Eine Möglichkeit, den ISS-Begriff dahingehend anzupassen, liefert die folgende Definition.

Definition 6.8. Betrachte ein System $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v_1(t), \dots, v_l(t))$ mit Eingangssignalen u und v_1, \dots, v_l . Das System heißt Input-to-State stabil in u , wenn es eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_v gibt, sodass für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen k_{v_1}, \dots, k_{v_l} mit $\|k_{v_i}(t, x)\| \leq \rho_v(\|x\|)$ für alle $i = 1, \dots, l$ das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), k_{v_1}(t, x), \dots, k_{v_l}(t, x))$$

Input-to-State stabil (im Sinne von Definition 2.1) in u ist. ■

Die gewünschte Input-to-State Stabilität des Systems $\dot{x}_2 = f(x_1, x_2, d_2)$ im Eingangssignal x_1 erhält man mit dieser Definition mit $l = 1$, $u = x_1$ und $v_1 = d_2$.

Allerdings zeigt sich, dass die Input-to-State Stabilität in einem Eingangssignal gemäß dieser Definition gerade äquivalent zu Input-to-State Stabilität in allen Eingangssignalen ist. Insbesondere zeigen wir mit diesem Lemma, dass wir die Voraussetzungen von Satz 6.7 nicht abschwächen, wenn wir „ \dot{x}_2 ist ISS in x_1 gemäß Definition 6.8“ anstelle von „ \dot{x}_2 ist ISS in x_1 und d_2 “ voraussetzen.

Lemma 6.9. Ein System $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v_1(t), \dots, v_l(t))$ ist genau dann Input-to-State stabil in u gemäß Definition 6.8, wenn es Input-to-State stabil in u, v_1, \dots, v_l gemäß Definition 2.1 ist.

Beweis: Angenommen das System ist ISS in u im Sinne von Definition 6.8. Dann existiert eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_v , sodass für Feedback-Abbildungen k_{v_1}, \dots, k_{v_l} mit

$$\|k_{v_i}(t, x)\| \leq \rho_v(\|x\|)$$

für alle $i = 1, \dots, l$ das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), k_{v_1}(t, x), \dots, k_{v_l}(t, x))$$

Input-to-State stabil in u ist. Dann existiert aber auch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_u , sodass für Feedback-Abbildungen k_u mit $\|k_u(t, x)\| \leq \rho_u(\|x\|)$ der Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k_u(t, x), k_{v_1}(t, x), \dots, k_{v_l}(t, x))$$

global asymptotisch stabil ist. Damit folgt, dass die \mathcal{K}_∞ -Funktion

$$\rho(r) := \min\{\rho_u(r), \rho_v(r)\}$$

eine Stability Margin gemäß Definition 2.9 ist. Nach Satz 2.10 ist das System also Input-to-State stabil in u, v_1, \dots, v_l .

Sei umgekehrt das System Input-to-State stabil in allen Eingangssignalen. Dann existiert nach Satz 2.10 ein $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, sodass

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k_u(t, x), k_{v_1}(t, x), \dots, k_{v_l}(t, x))$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_u, k_{v_1}, \dots, k_{v_l}$ mit

$$\max\{\|k_u(t, x)\|, \|k_{v_1}(t, x)\|, \dots, \|k_{v_l}(t, x)\|\} \leq \rho(\|x\|)$$

global asymptotisch stabil ist. Daraus folgt insbesondere, dass ρ eine Stability Margin für das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), k_{v_1}(t, x), \dots, k_{v_l}(t, x))$$

mit Input u ist. Setzt man für die \mathcal{K}_∞ -Funktion ρ_v aus Definition 6.8

$$\rho_v(r) := \rho(r),$$

hat man damit die Input-to-State Stabilität in u gemäß Definition 6.8 bewiesen. □

Es zeigt sich also, dass es nicht ausreicht, die Störfunktionen v_1, \dots, v_l durch Feedback-Abbildungen zu ersetzen, um die Input-to-State Stabilität in allen Eingangssignalen abzuschwächen. Man kann sich nun die Frage stellen, was passiert, wenn man anstelle der Feedback-Abbildungen die konstanten Funktionen $v_1 \equiv 0, \dots, v_l \equiv 0$ betrachtet. Im Gegensatz zu Definition 6.8 wollen wir diese Überlegung nicht in einer eigenen Definition festhalten, wobei sich der Grund hierfür noch zeigen wird.

Das System $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v_1(t), \dots, v_l(t))$ heißt Input-to-State stabil in u , wenn das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), 0, \dots, 0) \quad (6.3)$$

Input-to-State stabil (im Sinne von Definition 2.1) in u ist.

Offensichtlich gilt mit dieser Definition, dass ein System, das Input-to-State stabil in allen Eingangssignalen ist, dies auch in einem einzelnen Eingangssignal ist. Dass die Umkehrung nicht gelten muss und wir damit den ISS-Begriff echt verallgemeinert haben, zeigt das folgende Beispiel. Dabei ist schon $l = 1$ ausreichend.

Beispiel 6.10. Betrachte das System

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) + v(t)(x(t)^2 + 1).$$

Man sieht leicht, dass das System nicht ISS in u und v ist, denn für $u \equiv 0$ erhält man

$$\dot{x}(t) = -x(t) + v(t)(x(t)^2 + 1).$$

Von diesem System haben wir in Bemerkung 2.15 gezeigt, dass es nicht Input-to-State stabil in v ist. Also kann das Gesamtsystem auch nicht ISS in u und v sein.

Setzt man umgekehrt $v \equiv 0$ erhält man

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t).$$

Dieses System ist linear und erfüllt die Bedingung 0 – GAS. Nach Satz 2.13 ist es damit auch Input-to-State stabil in u . Also ist Bedingung (6.3) für ein System erfüllt, das nicht Input-to-State stabil in allen Eingangssignalen ist. ■

Allerdings geht mit dieser Definition auch die für den Beweis von Satz 6.7 nötige Aussagekraft verloren, was der Grund dafür ist, dass wir Bedingung (6.3) nicht sauber in einer Definition festgehalten haben. Ein System der Form (6.1), für das eine verallgemeinerte Stability Margin existiert und in dem das x_2 -Teilsystem ISS in x_1 gemäß Bedingung (6.3) ist, muss nicht Input-to-State stabil sein. Dies zeigt sich im nächsten Beispiel.

Beispiel 6.11. Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + d_1(t) \\ -x_2(t) + \frac{1}{2}(x_2(t) + 1) \cdot x_1(t) \cdot \sin(d_2(t)) \end{pmatrix}.$$

Wie in Beispiel 6.5 zeigt man leicht, dass das System nicht Input-to-State stabil ist. Man setzt

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

und erhält die unbeschränkt Lösung

$$\varphi(t, x) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix},$$

also einen Widerspruch zu Input-to-State Stabilität.

Nun definieren wir

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(|x_1|) \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|x_1| \\ \frac{1}{2}\|x\| \end{pmatrix}$$

und betrachten Feedback-Abbildungen k_1, k_2 mit $|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$. Wie in Beispiel 6.5 können wir durch eine getrennte Betrachtung der Teilsysteme wieder die globale asymptotische Stabilität zeigen, indem wir an geeigneter Stelle $|\sin(x)| \leq 1$ ausnutzen. Daran erkennt man auch, dass ρ_2 wieder beliebig gewählt werden kann, auch wenn sich die Begründung hierfür von der aus Beispiel 6.5 unterscheidet.

Zuletzt zeigen wir, dass Bedingung (6.3) erfüllt ist und setzen dafür $d_2 \equiv 0$. Für das x_2 -Teilsystem ergibt sich mit $\sin(0) = 0$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t),$$

also ein System das unabhängig von x_1 ist. Also ist x_2 insbesondere Input-to-State stabil in x_1 . ■

Man sieht also, dass sich die Voraussetzung „ \dot{x}_2 ist ISS in x_1 und d_2 “ in Satz 6.7 nicht ohne Weiteres abschwächen lässt. Besonders bemerkenswert ist dies, weil diese Voraussetzung für „normale“ Stability Margins nicht benötigt wurde. Diese unterscheiden sich (mit Lemma 5.3) von verallgemeinerten Stability Margins nur dadurch, dass die Funktion ρ_1 vom gesamten Zustand x , anstelle von x_1 abhängt. Dennoch ist der Unterschied in der Definition der beiden Begriffe ausreichend, sodass selbst für Systeme, in denen das x_1 -Teilsystem unabhängig von x_2 ist, die Zusatzvoraussetzung benötigt wird.

6.4. Verallgemeinerung auf n -dimensionale Systeme

Analog zu Kapitel 5.3 wollen wir nun die Überlegungen zu den verallgemeinerten Stability Margins im zweidimensionalen Fall aus Kapitel 6.2 auf n -dimensionale Systeme

verallgemeinern. Für $n \geq 2$ betrachten wir daher wieder Systeme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), d_{n-1}(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t), d_n(t)) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

und definieren den Begriff der verallgemeinerten Stability Margin.

Definition 6.12. Eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_{1,\dots,1}\|) \\ \rho_2(\|x_{1,\dots,2}\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_{1,\dots,n}\|) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

mit $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$ heißt verallgemeinerte Stability Margin für ein Kontrollsystem der Form (6.4), falls der geschlossene Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_1(t, x_{1,\dots,1}(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x_{1,\dots,2}(t))) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), k_{n-1}(t, x_{1,\dots,n-1}(t))) \\ f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), k_n(t, x_{1,\dots,n}(t))) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^i \rightarrow U$ mit $|k_i(t, x_{1,\dots,i})| \leq \rho_i(\|x_{1,\dots,i}\|)$ für $i = 1, \dots, n$ global asymptotisch stabil ist. ■

Dabei haben wir die zu Beginn der Arbeit erklärte Notation

$$x_{1,\dots,i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}$$

verwendet. Wir können nun direkt die Verallgemeinerungen der Sätze 6.3 und 6.7 formulieren.

Satz 6.13. Betrachte ein Input-to-State stabiles System der Form (6.4). Dann existiert eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.12.

Beweis: Der Beweis verläuft vollkommen analog zum zweidimensionalen Fall. Mit Lemma 5.3, folgt aus der Input-to-State Stabilität die Existenz einer Funktion $\rho(x) = (\rho_1(\|x\|), \dots, \rho_n(\|x\|))^T$ sodass der Regelkreis

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

für alle in x Lipschitz-stetigen Feedback-Abbildungen $k(t, x)$ mit

$$\begin{pmatrix} k_1(t, x) \\ \vdots \\ k_n(t, x) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \rho_1(\|x\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x\|) \end{pmatrix}$$

global asymptotisch stabil ist. Ersetzt man nun für alle $i = 1, \dots, n$ die Funktion $\rho_i(\|x\|)$ durch $\rho_i(\|x_{1, \dots, i}\|)$ und die Feedback-Abbildungen $k_i(t, x(t))$ durch $k_i(t, x_{1, \dots, i})$ erhält man eine kleinere Klasse erlaubter Feedbacks. Die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises bleibt also erhalten und die Behauptung ist gezeigt. \square

Satz 6.14. Betrachte ein System der Form (6.4), bei dem für alle $i = 2, \dots, n$ das x_i -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist. Zudem existiere eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.12. Dann ist das System Input-to-State stabil im Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$.

Beweis: Identisch wie im Beweis von Satz 6.7 können wir aus der Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin die Input-to-State Stabilität des x_1 -Teilsystems im Input d_1 folgern. Nach Voraussetzung sind für $i = 2, \dots, n$ die x_i -Teilsysteme Input-to-State stabil in den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i . Wie im Beweis von Satz 5.15 erhalten wir nach mehrmaligem Anwenden von Satz 4.4 die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems in $d = (d_1, \dots, d_n)^T$. \square

6.5. Verallgemeinerte Stability Margins im linearen Fall

Anschließen an die allgemeinen Überlegungen aus dem letzten Abschnitt wollen wir nun wieder die Betrachtung verallgemeinerter Stability Margins für linearer Systeme im n -dimensionalen Fall. In Kapitel 5.3 haben wir uns bereits überlegt, dass lineare System der Form (6.4) gegeben sind durch

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot d(t). \quad (6.7)$$

Analog zu Satz 5.18 können wir für Systeme dieser Form die folgende Äquivalenzaussage formulieren, wobei der Beweis diesmal nahezu trivial ist.

Satz 6.15. Gegeben sei ein Kontrollsystem der Form (6.7). Eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.12 existiert genau dann, wenn das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ ist.

Beweis: Mit Satz 6.13 ist die Rückrichtung dieser Aussage bereits bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass aus der Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin die Input-to-State Stabilität des Systems folgt. Nehmen wir also an, es existiere eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.12 für das System (6.7). Es gibt also eine Funktion $\rho(\|x\|) = (\rho_1(\|x_1\|), \dots, \rho_n(\|x\|))^T$ mit $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$, sodass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \begin{pmatrix} k_1(t, x_{1,\dots,1}) \\ \vdots \\ k_n(t, x_{1,\dots,n}) \end{pmatrix}$$

für alle k_i mit $|k_i(t, x_{1,\dots,i})| \leq \rho_i(\|x_{1,\dots,i}\|)$ für $i = 1, \dots, n$ global asymptotisch stabil ist. Insbesondere ist also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

global asymptotisch stabil. Damit ist das System 0 – GAS und nach Satz 2.13 auch Input-to-State stabil. □

6.6. Notwendigkeit der Systemstruktur

Wie schon im Fall der speziellen Stability Margins wollen wir untersuchen, ob die Voraussetzung der Systemstruktur für die einzelnen Sätze notwendig ist. Der Begriff der verallgemeinerten Stability Margin sei dazu wie in Definition 6.12 für allgemeine Systeme (1.14) definiert. Eine Beobachtung zu Satz 6.13 halten wir dabei direkt in einer Bemerkung fest.

Bemerkung 6.16. Im Beweis von Satz 6.13 wurde die Struktur (6.4) des Systems nicht verwendet. Aus der Input-to-State Stabilität wurde nach Lemma 5.3 die Existenz einer Funktion $\rho(x) = (\rho_1(\|x\|), \dots, \rho_n(\|x\|))^T$ gefolgert, mit der der Regelkreis $\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$ für alle Feedbacks mit $|k_i(t, x(t))| \leq \rho_i(\|x\|)$ ($i = 1, \dots, n$) global asymptotisch stabil ist. Anschließend wurden die zulässigen Feedbacks zweimal eingeschränkt. Zum einen wurde $\rho_i(\|x\|)$ durch $\rho_i(\|x_{1,\dots,i}\|)$, zum anderen wurden die Feedbacks $k_i(t, x(t))$ durch $k_i(t, x_{1,\dots,i}(t))$ ersetzt. Da der Regelkreis für die größere Klasse erlaubter Feedbacks stabil war, musste das auch insbesondere für die eingeschränkten Feedbacks gelten. Die identische Argumentation muss aber auch für Systeme der allgemeinen Form (1.14) gelten. Anders ausgedrückt gilt Satz 6.13 auch ohne die Voraussetzung der Systemstruktur. ■

Die Aussage „Verallgemeinerte Stability Margin \Rightarrow ISS“ konnten wir für lineare und nichtlineare Systeme unter unterschiedlichen Voraussetzungen zeigen. Daher lohnt es sich diese beiden Fälle auch getrennt zu betrachten, wenn man auf die Voraussetzung der Systemstruktur verzichtet.

Bemerkung 6.17. Für lineare Systeme konnten wir in Satz 6.15 beweisen, dass aus der Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin die Input-to-State Stabilität des Systems (6.4) folgt. Verwendet wurde dabei im Beweis, dass Input-to-State Stabilität im linearen Fall äquivalent zur Bedingung $0 - GAS$ ist. Allerdings ist das System immer $0 - GAS$, wenn eine verallgemeinerte Stability Margin existiert, unabhängig davon, ob das System von der Form (6.4) ist oder nicht. ■

Bevor wir die verwandte Aussage für nichtlineare Systeme untersuchen, halten wir das Ergebnis der beiden Bemerkungen in einem Satz fest.

Satz 6.18. Für ein lineares System der Form (1.15) existiert eine verallgemeinerte Stability Margin genau dann, wenn das System Input-to-State stabil ist.

Beweis: Die Hinrichtung dieser Aussage folgt aus Bemerkung 6.16, die Rückrichtung wurde mit Bemerkung 6.17 bewiesen. □

Für nichtlineare Systeme der Form (6.4) haben wir in Satz 6.14 unter der Voraussetzung, dass für $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem ISS in x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist, zeigen können, dass aus der Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin die Input-to-State Stabilität des Systems folgt. Die Frage, ob hierbei die Systemstruktur eine notwendige Voraussetzung ist, ist alles andere als leicht zu beantworten. Die Aussage des Satzes lässt sich für allgemeine Systeme (1.14) scheinbar weder beweisen, noch mit einem Gegenbeispiel widerlegen, wie die folgende Bemerkung für den zweidimensionalen Fall zeigt.

Bemerkung 6.19. (i) Zunächst erkennt man leicht, wo die Probleme für einen Beweis der Aussage liegen. Aus der Existenz der verallgemeinerten Stability Margin folgt, dass der Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), k_1(t, x_1(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x(t))) \end{pmatrix}$$

für alle Feedbacks k_1, k_2 mit $|k_1(t, x_1)| \leq \rho_1(|x_1|)$ und $|k_2(t, x)| \leq \rho_2(\|x\|)$ global asymptotisch stabil ist. Im Beweis von Satz 6.7 konnten wir an dieser Stelle die Unabhängigkeit des x_1 -Teilsystems von x_2 ausnutzen und Satz 4.4 verwenden. Diese Unabhängigkeit liegt hier jedoch nicht vor. Auch in anderen Beweisansätzen, z.B. durch Lyapunov-Funktionen, zeigt sich, dass zu wenig Informationen über das System bekannt sind.

(ii) Allerdings lässt sich auch nicht ohne Weiteres ein Gegenbeispiel konstruieren, wie sich im Folgenden zeigen wird. Wir setzen dazu (ohne zunächst auf Lipschitz-Stetigkeit und Lösbarkeit zu achten) für Parameter $a, b > 0$ das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + |x_2(t)|^a \cdot d_1(t) \\ -x_2(t) + |x_1(t)|^b \end{pmatrix}$$

und die Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}|x_1|^c \\ \rho_2(\|x\|) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen $\rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$ und $c > 0$ an. Man kann leicht nachrechnen, dass

$$|\varphi_2(t, x_1, x_2)| \leq e^{-t}|x_2| + \underbrace{|x_1(t)|^b}_{\gamma_2(|x_1|_\infty)}$$

gilt. Über dynamische Input-to-State Stabilität kann man zudem zeigen, dass für $c < 1$

$$|\varphi_1(t, x_1, x_2)| \leq e^{-\frac{t}{2}}|x_1| + \underbrace{\frac{1}{2}|x_2(t)|^{\frac{a}{1-c}}}_{=:\gamma_1(|x_2|_\infty)}$$

gilt, wobei wir hier nicht auf die Details der Rechnung eingehen wollen. Mit der in Bemerkung 4.5 erwähnten, allgemeineren Version von Satz 4.4 ist der Regelkreis global asymptotisch stabil, falls $\gamma_1(\gamma_2(r)) < r$ für alle $r > 0$ gilt. Hier ist

$$\gamma_1(\gamma_2(r)) = \frac{1}{2}r^{\frac{ab}{1-c}}.$$

Also ist der Regelkreis global asymptotisch stabil, wenn

$$\frac{ab}{1-c} = 1 \tag{6.8}$$

erfüllt ist. Gleichzeitig soll das System aber nicht Input-to-State stabil sein. In einigen Simulationen (vgl. Abbildungen 6.3 und 6.4) ließ sich jedoch erkennen, dass dies nur erfüllt ist, wenn $ab \geq 1$ gilt. Da aber auch $c > 0$ gelten muss, widerspricht das Bedingung (6.8). Es scheint also kein Gegenbeispiel in der oben angesetzten Form zu geben, was aber natürlich auch noch kein Beweis für die Gültigkeit der Aussage ist.

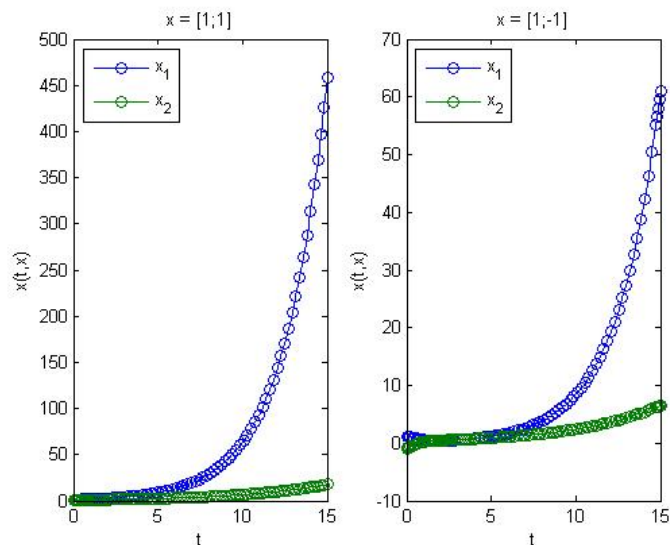


Abbildung 6.3: Simulation mit $a = 2, b = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Beispiel scheinbar nicht ISS.

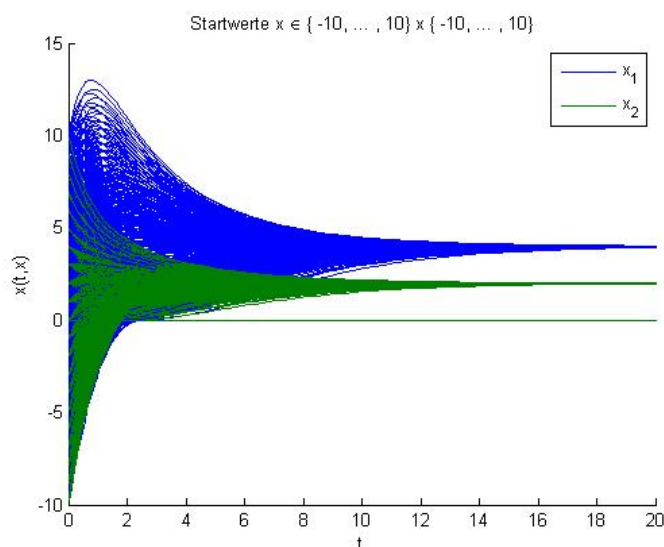


Abbildung 6.4: Simulation mit $a = 1$, $b = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Beispiel scheinbar ISS.

Der Matlab-Code für die Abbildungen befindet sich unter Programm 3 im Anhang.

6.7. Verallgemeinerung auf nicht-skalare Teilsysteme

Abschließen wollen wir das Kapitel über verallgemeinerte Stability Margins, indem wir analog zu Kapitel 5.6 die Aussagen der Sätze 6.13, 6.14 und 6.15 auf die Situation nicht-skalarer Teilsysteme verallgemeinern. Für den gesamten Abschnitt sei wieder $n \geq 2$. Wir betrachten Systeme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), d_{n-1}(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t), d_n(t)) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

mit $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, wobei $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $i = 1, \dots, n$. Auch hier ist die Definition der verallgemeinerten Stability Margin analog zu Definition 6.12

Definition 6.20. Betrachte ein System der Form (6.9). Eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_{1,\dots,1}\|) \\ \rho_2(\|x_{1,\dots,2}\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_{1,\dots,n}\|) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

mit $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{K}_\infty$ heißt verallgemeinerte Stability Margin für (6.9), falls der geschlossene Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_1(t, x_{1,\dots,1}(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x_{1,\dots,2}(t))) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), k_n(t, x_{1,\dots,n}(t))) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\tilde{n}_i} \rightarrow U$ mit $\|k_i(t, x_{1,\dots,i})\| \leq \rho_i(\|x_{1,\dots,i}\|)$ für $i = 1, \dots, n$ global asymptotisch stabil ist. Dabei ist $\tilde{n}_i := \sum_{k=1}^i n_k$. ■

Auch hier haben wir die Notation

$$x_{1,\dots,i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}$$

verwendet, wobei nun die x_i mehrdimensional sein können.

Betrachtet man noch einmal die Beweise der Sätze 6.13 und 6.14 erkennt man, wie schon in Kapitel 5.6, dass nicht benötigt wurde, dass die Teilsysteme eindimensional sind. Wir können also wieder direkt die Verallgemeinerungen der Sätze formulieren und auf eine Wiederholung der Beweise verzichten.

Satz 6.21. Betrachte ein Input-to-State stabiles System der Form (6.9). Dann existiert eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.20.

Satz 6.22. Betrachte ein System der Form (6.9), bei dem für alle $i = 2, \dots, n$ das x_i -Teilsystem ISS mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist. Zudem existiere eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.20. Dann ist das System Input-to-State stabil im Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$.

Auch Satz 6.15 können wir entsprechend verallgemeinern. Im Gegensatz zu Kapitel 5.6 können wir den Beweis diesmal unverändert für die Situation mit mehrdimensionalen Teilsystemen übernehmen, weshalb wir auch hier auf die Wiederholung verzichten wollen.

Satz 6.23. Gegeben sei ein lineares System der Form (6.9). Eine verallgemeinerte Stability Margin gemäß Definition 6.20 existiert genau dann, wenn das System Input-to-State stabil mit Input $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ ist.

Also gelten, wie schon bei den speziellen Stability Margins in Kapitel 5, alle Aussagen über verallgemeinerte Stability Margins auch für den Fall nicht-skalarer Teilsysteme.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Wir wollen die Arbeit nun mit einer Zusammenfassung der Resultate aus den Kapiteln 5 und 6 abschließen. In beiden Abschnitten haben wir einen Spezialfall der allgemeinen Kontrollsysteme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), d(t)) \quad (1.14)$$

betrachtet, nämlich Systeme der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), d_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), d_2(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), d_{n-1}(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t), d_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Da wir die Aussagen jeweils in der allgemeinsten Form zusammenfassen wollen, seien die Teilsysteme nicht notwendigerweise skalar. Für $i = 1, \dots, n$ sei daher $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ für ein $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In Kapitel 5 haben wir uns den Begriff der speziellen Stability Margin als eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_1\|) \\ \rho_2(\|x_2\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_n\|) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

definiert, sodass der Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_{10}(t, x_1(t))) \\ f_2(k_{21}(t, x_2(t)), x_2(t), k_{20}(t, x_2(t))) \\ \vdots \\ f_n(k_{n1}(t, x_n(t)), \dots, k_{nn-1}(t, x_n(t)), x_n(t), k_{n0}(t, x_n(t))) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow U$ mit $\|k_{ij}(t, x_i)\| \leq \rho_i(\|x_i\|)$ für $i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, i-1$ global asymptotisch stabil ist. Mit dieser Definition konnten wir die folgenden beiden Sätze beweisen.

Satz 7.1. Für ein System der Form (7.1) existiert eine spezielle Stability Margin genau dann, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i ist.

Satz 7.2. Für ein lineares System der Form (7.1) existiert eine spezielle Stability Margin genau dann, wenn das System Input-to-State stabil ist.

Für die Rückrichtung von Satz 7.1 muss man die Input-to-State Stabilität des Gesamtsystems nicht voraussetzen, da diese aus der Input-to-State Stabilität der Teilsysteme folgt. Ebenfalls konnten wir zeigen, dass die beiden Sätze nicht für Systeme der allgemeinen Form (1.14) gelten.

In Kapitel 6 haben wir uns den leicht abgewandelten Begriff der verallgemeinerten Stability Margin definiert. So haben wir eine Funktion

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(\|x_{1,\dots,1}\|) \\ \rho_2(\|x_{1,\dots,2}\|) \\ \vdots \\ \rho_n(\|x_{1,\dots,n}\|) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

genannt, für die der Regelkreis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), k_1(t, x_{1,\dots,1}(t))) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), k_2(t, x_{1,\dots,2}(t))) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), k_{n-1}(t, x_{1,\dots,n-1}(t))) \\ f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), k_n(t, x_{1,\dots,n}(t))) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

für alle Feedback-Abbildungen $k_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\tilde{n}_i} \rightarrow U$ mit $\|k_i(t, x_{1,\dots,i})\| \leq \rho_i(\|x_{1,\dots,i}\|)$ und $\tilde{n}_i := \sum_{k=1}^i n_k$ für $i = 1, \dots, n$ global asymptotisch stabil ist. Damit konnten wir die folgenden Sätze beweisen.

Satz 7.3. Für ein lineares System der Form (7.1) existiert eine verallgemeinerte Stability Margin genau dann, wenn das System Input-to-State stabil ist.

Satz 7.4. Ist ein nichtlineares System der Form (7.1) Input-to-State stabil, existiert eine verallgemeinerte Stability Margin.

Zudem konnten wir beweisen, dass die Systemstruktur für diese beiden Sätze nicht benötigt wurde und diese auch für Kontrollsysteme in der allgemeinen Form (1.14) gelten. Für den folgenden Satz konnten wir weder beweisen noch widerlegen, dass die Form (7.1) eine notwendige Voraussetzung ist (vgl. Bemerkung 6.19).

Satz 7.5. Existiert für ein nichtlineares System der Form (7.1) eine verallgemeinerte Stability Margin und ist für $i = 1, \dots, n$ das x_i -Teilsystem Input-to-State stabil mit den Inputs x_1, \dots, x_{i-1} und d_i , ist das System Input-to-State stabil.

A. Anhang

Lemma A.1. Sei $\varphi(t, x)$ die eindeutige und auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x.$$

Zudem sei $x^* = 0$ ein Gleichgewicht und $\varphi(t, x)$ erfülle die Bedingungen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } \|x\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (1.9)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists T > 0 \text{ mit } \|x\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T. \quad (1.10)$$

Dann ist die Abbildung $\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\beta(r, t) := \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\|$$

wohldefiniert und stetig in (r, t) .

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass $\|\varphi(t, x)\|$ nach dem Existenz und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf differenzierbar und insbesondere stetig ist. Da die Menge

$$\{t\} \times \{x \mid \|x\| \leq r\}$$

für gegebenes t und r kompakt ist, existiert das Maximum

$$\max_{\|x\| \leq r} \|\varphi(t, x)\|.$$

Mit dieser Vorüberlegung zeigen wir nun erst die Wohldefiniiertheit (a) und dann die Stetigkeit (b) von β .

(a) Um die Wohldefiniiertheit von β zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass das Supremum

$$\sup_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\|$$

für ein gegebenes $(r, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ angenommen wird (also ein Maximum ist). Dazu verwenden wir Bedingung (1.10) mit

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \max_{\|x\| \leq r} \|\varphi(t, x)\|, \quad \delta := 2r^1$$

und erhalten ein $T > 0$, sodass

$$\|\varphi(s, x)\| < \varepsilon = \frac{1}{2} \max_{\|x\| \leq r} \|\varphi(t, x)\|$$

¹ $\delta = 2r$ ist nötig, da sonst nur $\|x\| < r$ betrachtet wird. Für den Sonderfall $r = 0$ ist aufgrund der Gleichgewichtsannahme $\|\varphi(s, x)\| = 0 < \varepsilon$.

für alle $s \geq T$ und alle x mit $\|x\| < \delta$. Aufgrund der Definition von ε ist aber auch $T > t$. Für die Betrachtung des Supremums ist also nur das Zeitintervall $[t, T]$ relevant. Damit ist

$$\sup_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\| = \sup_{\|x\| \leq r, s \in [t, T]} \|\varphi(s, x)\| = \max_{\|x\| \leq r, s \in [t, T]} \|\varphi(s, x)\|.$$

Der letzte Schritt folgt dabei wieder aus der Stetigkeit von $\|\varphi(t, x)\|$ auf der kompakten Menge $[t, T] \times \{x \mid \|x\| \leq r\}$.

(b) Da φ nach dem Satz von Picard-Lindelöf differenzierbar und damit insbesondere stetig ist, ist $\|\varphi(t, x)\|$ auf kompakten Mengen sogar gleichmäßig stetig. D.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für eine kompakte Menge K

$$\| \|\varphi(t, x)\| - \|\varphi(t_0, x_0)\| \| < \varepsilon$$

für alle

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in K \text{ mit } \left\| \begin{pmatrix} t - t_0 \\ x - x_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta$$

gilt. Im Beweis der Wohldefiniertheit von β haben wir gezeigt, dass

$$\max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\| = \max_{\|x\| \leq r, s \in [t, T]} \|\varphi(s, x)\|$$

für ein $T = T(t, r)$ gilt, sodass wir im Beweis der Stetigkeit von β die gleichmäßige Stetigkeit von $\|\varphi(t, x)\|$ ausnutzen können. Die betrachtete kompakte Menge ist dabei gegeben durch die Vereinigung der beiden kompakten Mengen

$$\begin{aligned} K_{(r,t)} &:= [t, T(t, r)] \times \{x \mid \|x\| \leq r\} \\ K_{(r_0, t_0)} &:= [t_0, T(t_0, r_0)] \times \{x \mid \|x\| \leq r_0\}. \end{aligned}$$

Zunächst beweisen wir die Stetigkeit in $(r_0, t_0)^T$ mit $r_0 = 0$ und beliebigem t_0 . Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir bemerken, dass

$$\beta(0, t_0) = \max_{\|x\| \leq 0, s \geq t_0} \|\varphi(s, x)\| = \max_{s \geq t_0} \|\varphi(s, 0)\| = 0,$$

da $x^* = 0$ ein Gleichgewicht ist. Damit gilt

$$\|\beta(r, t) - \beta(0, t_0)\| = \|\beta(r, t)\| = \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\|$$

Nach Bedingung (1.9) gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\|\varphi(s, x)\| < \varepsilon \quad \forall s \geq 0$$

für alle x mit $\|x\| < \delta$ ist. Insbesondere gilt diese Ungleichung für alle $s \geq t$. Es folgt

$$\|\beta(r, t) - \beta(0, t_0)\| = \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\| < \varepsilon$$

für alle

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } \left\| \begin{pmatrix} r \\ t - t_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta,$$

da damit $r < \delta$ ist. Also ist $\beta(r, t)$ stetig in (r_0, t_0) mit $r_0 = 0$ und beliebigem t_0 .

Nun beweisen wir die Stetigkeit von $\beta(r, t)$ für $r \neq 0$. Seien dazu $r > 0$ und r_0 beliebig. Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\beta(r, t) - \beta(r_0, t_0)\| &= \|\beta(r, t) - \beta(r, t_0) + \beta(r, t_0) - \beta(r_0, t_0)\| \\ &\leq \underbrace{\|\beta(r, t) - \beta(r, t_0)\|}_{(i)} + \underbrace{\|\beta(r, t_0) - \beta(r_0, t_0)\|}_{(ii)} \end{aligned}$$

Die beiden Summanden (i) und (ii) untersuchen wir im Folgenden getrennt. Für (i) unterscheiden wir die Fälle $t \leq t_0$ und $t > t_0$.

1. Fall: Sei $t \leq t_0$. Dann ist $\beta(r, t) \geq \beta(r, t_0)$. Wir definieren

$$(s^*, x^*) \in \arg \max_{\|x\| \leq r, s \geq t} \|\varphi(s, x)\|$$

O.B.d.A. gilt $s^* < t_0$, denn sonst ist $\beta(r, t) = \beta(r, t_0)$. Zusammen mit $t \leq t_0$ folgt daraus $s^* \in [t, t_0)$. Zudem gilt $\beta(r, t_0) \geq \|\varphi(t_0, x^*)\|$. Es folgt

$$\|\beta(r, t) - \beta(r, t_0)\| = \beta(r, t) - \beta(r, t_0) \leq \|\varphi(s^*, x^*)\| - \|\varphi(t_0, x^*)\|$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $\|\varphi(t, x)\|$ auf kompakten Mengen existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass

$$\|\|\varphi(s^*, x^*)\| - \|\varphi(t_0, x^*)\|\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle s^*, t_0 mit $|s^* - t_0| < \delta_1$, da $|s^* - t_0| \leq |t - t_0| < \delta_1$ gilt.

2. Fall: Für $t > t_0$ gelten die obigen Abschätzungen mit vertauschten Rollen von t und t_0 analog. Wir haben also gezeigt, dass für ein gegebenes ε ein δ_1 existiert, sodass

$$\|\beta(r, t) - \beta(r, t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $|t - t_0| < \delta_1$ gilt.

Für den zweiten Summanden (ii) unterscheiden wir die Fälle $r \geq r_0$ und $r < r_0$.

1. Fall: Sei $r \geq r_0$. Dann ist $\beta(r, t_0) \geq \beta(r_0, t_0)$. Wir definieren wieder

$$(s^*, x^*) \in \arg \max_{\|x\| \leq r, s \geq t_0} \|\varphi(s, x)\|$$

Da $r > 0$ ist, gilt o.B.d.A. $\|x^*\| > r_0$, denn sonst wäre $\beta(r, t_0) = \beta(r_0, t_0)$. Also ist

$$x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_0 < \|x\| \leq r\}$$

Wir definieren

$$\bar{x} = x^* \cdot \frac{r_0}{\|x^*\|}$$

Dann gilt

$$\|\bar{x}\| = \|x^*\| \cdot \frac{r_0}{\|x^*\|} = r_0$$

und

$$\|x^* - \bar{x}\| = \left\| x^* - x^* \cdot \frac{r_0}{\|x^*\|} \right\| = \|x^*\| \cdot \left| \frac{\|x^*\| - r_0}{\|x^*\|} \right| = \|\|x^*\| - r_0\| \leq |r - r_0|$$

Zudem ist $\beta(r_0, t_0) \geq \varphi(s^*, \bar{x})$ und es folgt

$$\|\beta(r, t_0) - \beta(r_0, t_0)\| = \beta(r, t_0) - \beta(r_0, t_0) \leq \|\varphi(s^*, x^*)\| - \|\varphi(s^*, \bar{x})\|$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $\|\varphi(t, x)\|$ auf kompakten Mengen existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass

$$\|\|\varphi(s^*, x^*)\| - \|\varphi(s^*, \bar{x})\|\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle x^*, \bar{x} mit $\|x^* - \bar{x}\| < \delta_2$. Wegen $\|x^* - \bar{x}\| \leq |r - r_0|$ folgt damit, dass

$$\|\beta(r, t_0) - \beta(r_0, t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $|r - r_0| < \delta_2$ gilt.

2. Fall: Wie in (i) gelten auch hier die analogen Abschätzungen mit vertauschten Rollen von r und r_0 für $r < r_0$.

Fasst man (i) und (ii) zusammen, gilt

$$\|\beta(r, t) - \beta(r_0, t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \text{ mit } \left\| \begin{pmatrix} r - r_0 \\ t - t_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta$$

für

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Damit haben wir die Stetigkeit von β bewiesen.

□

Programm 1: Matlab-Code zur grafischen Darstellung einer Stability Margin (vergleiche Abbildung 2.4)

```

1 function StabilityMarginGrafisch()
2
3     %Erzeugt und plottet die Loesungen der Differentialgleichung
4     %
5     % d/dt x(t) = -2*x(t)-x(t)^3+1/2*(x(t)^2+1)*x(t)*d(t)
6     %
7     % auf dem Intervall "int". Als Anfangswert werden dabei die Werte
8     % -3,-2,-1,1,2,3 betrachtet. Die Funktion d(t) nimmt dabei zufällig Werte
9     % aus [-1, 1] an.
10
11    %Intervall festlegen
12    %int = [0 2];
13    int = [0 4];
14
15    %Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte lösen
16    [T1, X1] = ode45(@f,int,1);
17    [T2, X2] = ode45(@f,int,2);
18    [T3, X3] = ode45(@f,int,3);
19    [T4, X4] = ode45(@f,int,-1);
20    [T5, X5] = ode45(@f,int,-2);
21    [T6, X6] = ode45(@f,int,-3);
22
23    %Trajektorien plotten
24    hold on
25    xlabel('t')
26    ylabel('x(t,x_0)')
27    plot(T1,X1,'red')
28    plot(T2,X2,'blue')
29    plot(T2,X2,'blue')
30    plot(T3,X3,'green')
31    plot(T4,X4,'yellow')
32    plot(T5,X5,'cyan')
33    plot(T6,X6,'black')
34    legend('x(t,1)', 'x(t,2)', 'x(t,3)', 'x(t,-1)', 'x(t,-2)', 'x(t,-3)')
35    hold off
36
37 end
38
39 function y = f(~,x)
40
41    %Erzeuge Zufallszahl aus dem Intervall [-1, 1]
42    zz = 2*rand()-1;
43
44    %Gebe Funktionswert zurück
45    y = -2*x-x^3+(x^3+x)*zz/2;
46
47 end

```

Programm 2: Matlab-Code zum Phasenportrait in Beispiel 6.5 (vergleiche Abbildung 6.2)

```
1 function Phasenportrait_bsp_6-5()
2
3     %Erzeugt und plottet die Loesungen der Differentialgleichung
4     %
5     %   d/dt x_1(t) = -x_1(t) + rho_1(|x_1|)*z(t)
6     %   d/dt x_2(t) = -x_2(t) + 1/2*(x_2(t) + 1)*x_1(t)
7     %
8     % auf dem Intervall [0, T]. Dabei ist z(t) eine Funktion mit zufaelligen
9     % Werte aus dem Intervall [-1,1]. Als Startwerte werden dabei alle Punkte
10    % auf dem Gitter {-K, -K+h, ..., +K} x {-K, -K+h, ..., +K} betrachtet.
11    % Dafuer wird das eindimensionale Gitter t = {-K, -K+h, ..., +K} erzeugt
12    % und in einer doppelten for-Schleife zweimal durchlaufen.
13
14    % Parameter:
15    % K:   Definiert Grenzen des Gitters
16    % h:   Definiert die Abstände der Gitterpunkte
17    % x:   Speichert das Gitter
18    % n:   Anzahl der verschiedenen z_1- bzw. z_2-Werte der Gitterpunkte
19    % T:   Ende des betrachteten Zeitraums der Loesung
20
21    K = 4;
22    h = 0.5;
23    T = 10;
24
25    t = -K:h:K;
26    n = length(t);
27
28    figure(1)
29    hold on
30    for i=1:n
31        for j = 1:n
32            [~,X] = ode45(@f,[0 T],[t(i); t(j)]);
33            plot(X(:,1),X(:,2))
34        end
35    end
36
37    xlabel('x_1(t)')
38    ylabel('x_2(t)')
39
40
41    hold off
42
43 end
44
45 function y = f(~,x)
46
47     zz = 2*rand()-1;
48     y = [-x(1)+ abs(x(1))/2*zz; -x(2) + (abs(x(2)) + 1)*abs(x(1))/2];
49
50 end
```

 Programm 3: Matlab-Code für die Abbildungen 6.3 und 6.4 in Bemerkung 6.19

```

1
2 function Bemerkung6_19()
3     % Simulationen, die zeigen sollen, dass die DGL
4     %
5     % d/dt x_1(t) = -x_1(t) + |x_2(t)|^a*d_1(t)
6     % d/dt x_2(t) = -x_2(t) + |x_1(t)|^b
7     %
8     % nicht Input-to-State stabil sind, wenn (ab >= 1) gilt und
9     % Input-to-State stabil ist, wenn (ab < 1) ist, was nach Bemerkung 6.18
10    % eine hinreichende (aber nicht zwingend notwendige) Voraussetzung fuer
11    % die Existenz einer verallgemeinerten Stability Margin ist
12
13    % Teil 1: Die DGL ist nicht ISS wenn (ab >= 1) gilt.
14    % Sei dazu die Funktion "nichtISS" die angepasste rechte Seite fuer
15    %     a = 2, b = 1/2
16    % Die Stoerfunktion "d" wird dabei konstant auf den Wert 2 gesetzt
17
18    % Loesungsintervall "int" definieren
19    int = [0 15];
20
21    % Plotte die Trajektorien zu den Startwerten x = [1;1] und x = [1;-1]
22    % in zwei t-x-Diagrammen
23    figure(1)
24    subplot(1,2,1)
25    ode45(@nichtISS,int,[1;1]);
26    hold on
27    title('x = [1;1]')
28    legend('x_1','x_2','Location','northwest')
29    xlabel('t')
30    ylabel('\varphi(t,x)')
31    hold off
32
33    subplot(1,2,2)
34    ode45(@nichtISS,int,[1;-1]);
35    hold on
36    title('x = [1;-1]')
37    legend('x_1','x_2','Location','northwest')
38    xlabel('t')
39    ylabel('\varphi(t,x)')
40    hold off
41
42    % Teil 2: Die DGL ist ISS wenn (ab < 1) gilt.
43    % Sei dazu die Funktion "ISS" die angepasste rechte Seite fuer
44    %     a = 1, b = 1/2
45    % Die Stoerfunktion "d" wird wieder konstant auf den Wert 2 gesetzt
46
47    % Loesungsintervall "int" definieren
48    int = [0 20];
49
50    % Plotte die Trajektorien zu den Startwerten auf dem Gitter
51    %     {-10, ... , 10} x {-10, ... , 10}
52    % in einem t-x-Diagramm

```

```

53
54     figure(2)
55     hold on
56     for i=-10:10
57         for j = -10:10
58             [T,X] = ode45(@ISS,int,[i;j]);
59             plot(T,X)
60         end
61     end
62     title('Startwerte x \in \{-10, \dots, 10\} x \{-10, \dots, 10\}')
63     legend('x_1','x_2','Location','northeast')
64     xlabel('t')
65     ylabel('\varphi(t,x)')
66     hold off
67
68 end
69
70 function y = nichtISS(t,x)
71
72     %a = 2, b = 1/2
73     y = [-x(1) + abs(x(2))^2*d(t); -x(2) + sqrt(abs(x(1)))];
74 end
75
76 function y = ISS(t,x)
77
78     % a = 1, b = 1/2
79     y = [-x(1) + abs(x(2))^1*d(t); -x(2) + sqrt(abs(x(1)))];
80 end
81
82 function y = d(t)
83
84     %Setze Stoerfunktion konstant auf den Wert 2
85     y = 2;
86 end

```


Abbildungsverzeichnis

2.1. Grafische Veranschaulichung der Bedingung für Input-to-State Stabilität .	29
2.2. Wahl von $\rho(\cdot)$ in (1) \Rightarrow (2) im Beweis von Satz 2.10.	35
2.3. Konstruktion der β -Funktion in (1) \Rightarrow (2) im Beweis von Satz 2.10. . . .	36
2.4. Grafische Darstellung der Stability Margin in Beispiel 2.12	40
3.1. Konstruktion der Maximalfunktion im Beweis von Satz 3.1	44
3.2. Grafische Veranschaulichung der Bedingung für dynamische Input-to-State Stabilität	49
5.1. Grafische Darstellung des Kontrollsystems (5.3)	65
5.2. Grafische Darstellung des Regelkreises (5.6)	67
6.1. Grafische Darstellung des Regelkreises (6.2)	90
6.2. Phasenportrait in Beispiel 6.5	95
6.3. Simulation mit $a = 2, b = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Beispiel scheinbar nicht ISS.	108
6.4. Simulation mit $a = 1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Beispiel scheinbar ISS.	109

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, Berlin, 2nd edition, 1995.
- [2] D. Angeli, E. D. Sontag, and Y. Wang. A characterization of integral input-to-state stability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(6):1082–1097, 2000.
- [3] M. Arcak, D. Angeli, and E. D. Sontag. A unifying integral iss framework for stability of nonlinear cascades. *SIAM J. Control Optim.*, 40(6):1888–1904, 2002.
- [4] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997.
- [5] B. A. Francis. *A Course in H_∞ Control Theory*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [6] L. Grüne. *Asymptotic Behaviour of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, volume 1783 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [7] L. Grüne. Input-to-state dynamical stability and its lyapunov function characterization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(9):1499–1504, 2002.
- [8] L. Grüne. Mini course input-to-state stability, November 2004. http://num.math.uni-bayreuth.de/en/team/Gruene_Lars/miscellaneous/ISS_2004.html.
- [9] L. Grüne. Quantitative aspects of the input-to-state-stability property. In *Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis*, volume 301 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 215–230. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [10] L. Grüne. Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2010. http://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/Gruene_Lars/lecture_notes/index.html.
- [11] L. Grüne. Mathematische Kontrolltheorie. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2013. http://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/Gruene_Lars/lecture_notes/index.html.
- [12] Z.-P. Jiang, A.R. Teel, and L. Praly. Small-gain theorem for iss systems and applications. *Math. Control Signals Systems*, 7(2):95–120, 1994.
- [13] H. K Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, NJ, 3rd edition, 2002.
- [14] M. Krichman, E. D. Sontag, and Y. Wang. Input-output-to-state stability. *SIAM J. Control Optim.*, 39(6):1874–1928, 2001.
- [15] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and Integral Inequalities*. Academic Press, New York, 1st edition, 1969.

-
- [16] Y. Lin, E. D. Sontag, and Y. Wang. A smooth converse lyapunov theorem for robust stability. *SIAM J. Control Optim.*, 34(1):124–160, 1996.
- [17] M. Malisov and E. D. Sontag. Asymptotic controlability and input-to-state stabilization: the effect of actuator errors. In *Optimal Control, stabilization and nonsmooth analysis*, volume 301 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 155–171. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [18] J. W Prüss and M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Springer Basel, 1st edition, 2010.
- [19] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1st edition, 1991.
- [20] E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 34(4):435–443, 1989.
- [21] E. D. Sontag. On the input-to-state stability property. *European J. Control*, 1:24–36, 1995.
- [22] E. D. Sontag. State-space and i/o stability for nonlinear systems. In *Feedback control, nonlinear systems, and complexity (Montreal, PQ, 1994)*, volume 202 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 215–235. Springer Verlag, London, 1995.
- [23] E. D. Sontag. Comments on integral variants of iss. *Systems Control Lett.*, 34(1-2):93–100, 1998.
- [24] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer Verlag, New York, 2nd edition, 1998.
- [25] E. D. Sontag. The iss philosophy as a unifying framework for stability-like behavior. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2 (Paris)*, volume 259 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 443–467. Springer Verlag, London, 2001.
- [26] E. D. Sontag. Input to state stability: Basic concepts and results. In P. Nistri and G. Stefani, editors, *Nonlinear and Optimal Control Theory*, pages 163–220, Berlin, 2007. Springer-Verlag.
- [27] E. D. Sontag. Input to state stability. In W. S. Levine, editor, *The Control Systems Handbook: Control System Advanced Methods, Second Edition*, pages 45.1–45.21 (1034–1054), CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [28] E. D. Sontag and A. R. Teel. Changing supply functions in input/state stable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 40(8):1476–1478, 1995.
- [29] E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems Control Lett.*, 24(5):351–359, 1995.

- [30] E. D. Sontag and Y. Wang. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 41(9):1283–1294, 1996.
- [31] E. D. Sontag and Y. Wang. Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems. *Systems Control Lett.*, 29(5):279–290, 1997.
- [32] E. D. Sontag and Y. Wang. Notions of input to output stability. *Systems Control Lett.*, 38(4-5):235–248, 1999.
- [33] E. D. Sontag and Y. Wang. Lyapunov characterizations of input to output stability. *SIAM J. Control Optim*, 39(1):226–249, 2000.
- [34] J. Szarski. *Differential Inequalities*. Polish Scientific Publishers, Warschau, 1st edition, 1965.
- [35] W. Walter. *Differential- und Integral-Ungleichungen*. Springer Verlag, 2nd edition, 1964.
- [36] G. Zames. On the input-output-stability of nonlinear time-varying feedback systems, part 1. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-11:228–238, 1966.
- [37] G. Zames. On the input-output-stability of nonlinear time-varying feedback systems, part 2. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-11:465–477, 1966.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Bayreuth, 18. Februar 2015

Stefan Müller