

**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik

Mathematisches Institut

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Thema:

Der Satz von Poincaré-Bendixson

Bachelorarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Lars Grüne
vorgelegt von Kade Andreas
MatNR. 1330135

Abgabedatum 18.01.2019

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
1 Einleitung	4
2 Einführung in die Theorie dynamischer Systeme	5
2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen	6
2.2 Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichten	9
2.2.1 Stabilitätsuntersuchung mittels Linearisierung	11
2.2.2 Stabilitätsuntersuchung mittels Lyapunov-Funktionen	13
2.3 Zentrale Begriffe der Poincaré-Bendixson Theorie	15
3 Beweis des Satzes von Poincaré-Bendixson und dessen Verallgemeinerung	18
4 Das Räuber-Beute-Modell als Anwendungsbeispiel in der Biologie	29
5 Fazit	37
6 Abbildungsverzeichnis	38
7 Literatur und Software	39
7.1 Literatur	39
7.2 Software	40

1 Einleitung

Welches Langzeitverhalten zeigen Lösungskurven in stetigen zweidimensionalen dynamischen Systemen?

Mit dieser Frage beschäftigt sich der Satz von Poincaré-Bendixson, dem sich die vorliegende Arbeit widmet [6, S. 85]. Seinen Namen erhielt der Satz, weil er 1881 zunächst vom berühmten französischen Mathematiker Henri Poincaré aufgestellt wurde. Einen vollständigen Beweis konnte 1901 schließlich der schwedische Mathematiker Ivar Bendixson liefern [18, S. 159].

Sei $K \subset X$ kompakt und für den positiven Halborbit $\gamma^+(x)$ gelte $\gamma^+(x) \subset K$. Dann gilt die folgende Aussage: Enthält die ω -Limesmenge $\omega(x)$ keine Ruhelage, dann ist $\omega(x)$ ein periodischer Orbit [2, S. 361 Theorem 24.6].

So lautet eine der vielen äquivalenten Formulierungen des Satzes. Die Kernaussage besteht darin, dass bei geeigneten Voraussetzungen die Existenz eines sogenannten periodischen Orbits, also einer geschlossenen Lösungskurve, nachgewiesen werden kann. Eine weitere allgemeine Version des Satzes, die ebenfalls in dieser Arbeit behandelt wird, grenzt das Langzeitverhalten von Lösungskurven in zweidimensionalen nichtlinearen autonomen Systemen auf drei Möglichkeiten ein und schließt somit unvorhersehbares chaotisches Verhalten der Lösungen aus [23, S. 136].

Die nachfolgende Arbeit beginnt mit einem groben Überblick zum Thema Theorie dynamischer Systeme, innerhalb derer der Satz von Poincaré-Bendixson eines der Kernthemen darstellt. Dabei werden zunächst einige grundlegende Begriffe eingeführt und mit der Linearisierung und Lyapunov-Funktionen die wichtigsten Werkzeuge der Stabilitätstheorie, die in der Poincaré-Bendixson Theorie eine bedeutende Grundlage darstellt, behandelt. Anschließend werden mit ω -Limesmengen, invarianten Mengen und lokalen transversalen Segementen wichtige Begriffe und Hilfsmittel vorgestellt, die für den Satz von Poincaré-Bendixson unverzichtbar sind. Diese tauchen entweder direkt in der Formulierung des Satzes auf, oder spielen eine zentrale Rolle beim Beweis des Satzes. Um den Satz und seine Verallgemeinerung in Kap. 3 schließlich beweisen zu können, ist es zunächst nötig einige wichtige Hilfsaussagen zu behandeln. Den Abschluss der Arbeit bildet die Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson beim sogenannten Räuber-Beute-Modell, welches mittels Differentialgleichungen die Wechselwirkungen zwischen einer Räuber- und einer Beutepopulation beschreibt. Der Text dieser Arbeit wurde mit Microsoft Word [31] verfasst. Für die Abbildungen, die teilweise mit Microsoft Word verfeinert und angepasst wurden, fanden die Programme Gimp [29] (Abbildung 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) und Matlab [30] [27] (Abbildung 1, 2, 12, 14, 15, 16) Anwendung.

2 Einführung in die Theorie dynamischer Systeme

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über die Thematik der stetigen dynamischen Systeme geben. Innerhalb dieser Arbeit dient es vor allem dazu, die wichtigsten Begriffe zu definieren und Hilfsmittel vorzustellen, die als Grundlage für den Satz von Poincaré-Bendixson und dessen Anwendungen benötigt werden. Als Literatur wurden in diesem Kapitel vor allem das Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ von Amann [2, S. 137-142, S. 219-249, S. 362] und das Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme“ von Grüne und Junge [11, S. 29, S. 96-101, S. 138f.] verwendet. Zusätzliche Quellen werden jeweils gesondert markiert.

Die Theorie der dynamischen Systeme beschäftigt sich vor allem damit, mathematische Modelle für zeitabhängige Prozesse zu entwerfen und so deren qualitative Eigenschaften zu charakterisieren und Vorhersagen zu treffen [25, S. 261]. Ursprünglich ist der Begriff dynamisches System aus der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen entstanden. Die Begründer, dieser Ende des 19. Jh. entstandenen Wissenschaft, waren vor allem die Mathematiker Lyapunov und Poincaré [15, S. 7]. In diesem Zusammenhang sind dynamische Systeme also im engeren Sinne zeitabhängige Prozesse, die durch mathematische Modelle beschrieben werden. Der Prozessverlauf derartiger Systeme hängt nur vom Anfangszustand und nicht vom Anfangszeitpunkt ab. Deshalb bezeichnet man dynamische Systeme auch häufig als homogen bezüglich der Zeit. Ein sehr bekanntes dynamisches System ist die Planetenbewegung im Gravitationsfeld. Für den Verlauf der Planeten spielt nur der Anfangszustand, also die Anfangsposition und die Anfangsgeschwindigkeit, eine Rolle. Der Anfangszeitpunkt ist dagegen irrelevant. Weitere Beispiele für dynamische Systeme sind die Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten wie Gonorrhoe in der Medizin [5, S. 500] oder das Räuber-Beute-Modell in der Biologie, welches im letzten Kapitel mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson näher betrachtet wird. Der Begriff der Stabilität, mit dem sich Kapitel 2.2 dieser Arbeit auseinandersetzt, spielt in der Theorie der dynamischen Systeme eine bedeutende Rolle. Beispielsweise können zeitabhängige Prozesse in der Natur nur dann aufrechterhalten werden, wenn sie stabil sind [25, S. 261f.].

2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Formal lassen sich dynamische Systeme folgendermaßen definieren:

Definition 2.1. [2, S. 137f.] Gegeben sei eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ und für jedes $x \in M$ sei $J(x) := (t^-(x), t^+(x))$ ein offenes Intervall in \mathbb{R} mit $0 \in J(x)$. Ferner seien

$$\Omega := \bigcup_{x \in M} J(x) \times \{x\}$$

und $\varphi: \Omega \rightarrow M$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- a) Ω ist offen in $\mathbb{R} \times M$;
- b) $\varphi: \Omega \rightarrow M$ ist stetig;
- c) $\varphi(0, \cdot) = id_M$;
- d) für $x \in M$, $s \in J(x)$ und $t \in J(\varphi(s, x))$ ist $s + t \in J(x)$, und es gilt

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x).$$

Dann heißt φ Fluss auf M (oder (lokales) dynamisches System auf M). Für jedes $x \in M$ heißt $t^-(x)$ bzw. $t^+(x)$ negative bzw. positive Fluchtzeit von x . Gilt $\Omega = \mathbb{R} \times M$, d.h. $t^-(x) = -\infty$ und $t^+(x) = \infty$ für alle $x \in M$, so heißt φ globaler Fluss (oder globales dynamisches System). Wählt man als Zeitparameterbereich \mathbb{R}_+ statt \mathbb{R} dann heißt φ Halbfluss.

In dieser Arbeit werden im Hinblick auf den Satz von Poincaré-Bendixson und die betrachteten Anwendungen nur autonome Differentialgleichungen betrachtet. Autonome Differentialgleichungen sind von der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

mit $f \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$ (C^1 steht für einmal stetig differenzierbar). In diesem Fall hängt das sogenannte Vektorfeld f nicht von der Zeit t ab. Dynamische Systeme sind, wie oben erwähnt, abhängig von Anfangszuständen bzw. Anfangswerten. Deshalb wird im Folgenden der Begriff des Anfangswertproblems eingeführt.

Definition 2.2. [11, S. 29 Def. 3.1] Ein Anfangswertproblem (kurz AWP) besteht darin, eine Lösung $x(t)$ einer gegebenen (autonomen) Differentialgleichung (1) zu finden, die für die Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$ und einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_0, x_0) \in M$ die Bedingung

$$x(t_0) = x_0$$

erfüllt. Das Paar (t_0, x_0) nennt man Anfangsbedingung und die dadurch charakterisierte Lösung bezeichnet man mit $x(t; t_0, x_0)$.

Autonome Differentialgleichungen haben zusätzlich eine besondere Eigenschaft, die sogenannte Translationsinvarianz. Diese sagt aus, dass man durch eine Verschiebung einer Lösungskurve in t -Richtung wieder eine Lösungskurve erhält [12, S. 206]. Daher kann man als Anfangszeitpunkt stets $t_0 = 0$ wählen. Der Fluss lässt sich durch die folgende Bemerkung auf das gerade definierte Anfangswertproblem übertragen:

Bemerkung 2.3. [2, S. 138 Theorem 10.3] Sei $f \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$, dann stellt die Lösung

$$\varphi: \Omega(f) \rightarrow M$$

des AWP

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

einen Fluss auf M dar, den von f erzeugten Fluss.

Weitere wichtige Begriffe sind die Flusslinie und der Orbit, die sich mit Hilfe des Flusses einführen lassen.

Definition 2.4. [2, S. 140] Sei φ ein Fluss auf M . Dann heißt für jedes $x \in M$ die Abbildung

$$\varphi_x := \varphi(\cdot, x): J(x) \rightarrow M, t \rightarrow \varphi(t, x)$$

die Flusslinie durch x und M wird als Phasenraum des Flusses bezeichnet. Für jedes $x \in M$ ist

$$\gamma^+(x) := \varphi([0, t^+(x)), x) = \{\varphi(t, x) \mid 0 \leq t < t^+(x)\}$$

bzw.

$$\gamma^-(x) := \varphi((t^-(x), 0], x)$$

bzw.

$$\gamma(x) := \varphi\left((t^-(x), t^+(x)), x\right) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$$

der positive bzw. der negative Halborbit bzw. der Orbit (auch Trajektorie oder Lösungskurve genannt) durch x .

Die Flusslinie kann in diesem Zusammenhang als die Bewegung des Punktes x mit der Zeit gedeutet werden. Sie stellt also eine Parametrisierung einer Trajektorie $\gamma(x)$ dar.

Dies ist auch der Grund dafür, weshalb die Orbits in Grafiken oft mit Richtungspfeilen versehen werden. Der Orbit hat einige wichtige Eigenschaften, die in folgender Bemerkung festgehalten werden.

Bemerkung 2.5. [2, S. 140] Jeder Punkt aus dem Phasenraum ist genau in einem Orbit enthalten, d.h. M wird durch die Orbits disjunkt zerlegt, was gleichbedeutend damit ist, dass sich zwei verschiedene Trajektorien nicht schneiden können. Eine derartige Zerlegung wird auch Phasenportrait genannt.

Für den Satz von Poincaré-Bendixson spielen eine besondere Klasse von Trajektorien, die sogenannten periodischen Orbits, eine wichtige Rolle.

Definition 2.6. [2, S. 141f.] Ein Punkt $x \in M$ heißt periodischer Punkt, falls ein $T \neq 0$ existiert mit

$$\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x)$$

für alle $t \in J(x)$. Jedes $T \neq 0$ mit dieser Eigenschaft ist eine Periode von x . Falls x periodisch ist, so heißen auch der Orbit $\gamma(x)$ und die Flusslinie periodisch.

Beispiel 2.7. [24, S. 335f.] Ein bekanntes Beispiel einer Differentialgleichung mit periodischen Orbits ist die des mathematischen Pendels

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x,\end{aligned}$$

deren Phasenportrait in der nachfolgenden Abbildung zu sehen ist.

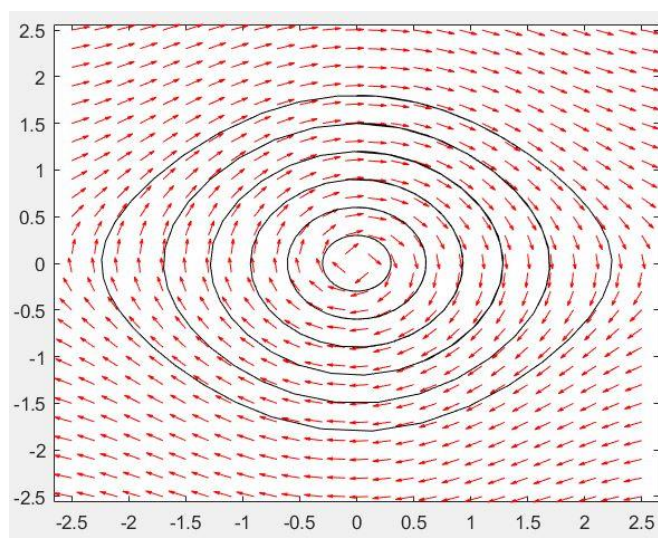


Abbildung 1: Phasenportrait des mathematischen Pendels

Eine besondere Art der periodischen Orbits, die vor allem bei der Anwendung in Kapitel 3 von großer Bedeutung sind, sind Grenzzyklen.

Definition 2.8. [2, S. 362] Ein (nichtkritischer) periodischer Orbit γ heißt Grenzzyklus (genauer: ω -Grenzzyklus bzw. α -Grenzzyklus), falls ein $x \in M \setminus \gamma$ existiert mit $\varphi(t, x) \rightarrow \gamma$ für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$.

Beispiel 2.9. [1, S. 26f.] Als Illustration zeigt Abbildung 2 den Grenzzyklus der sogenannten Van-der-Pol-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (1 - x^2)y.\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt beispielsweise einen elektrischen Schwingkreis für Radiosender.

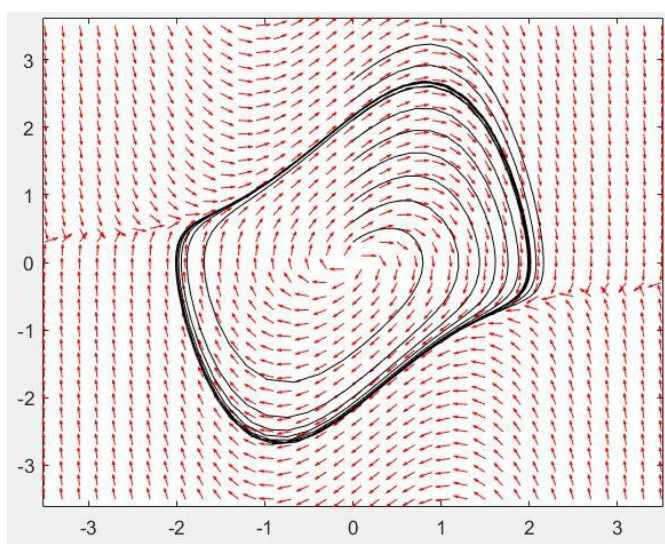


Abbildung 2: Phasenportrait der Van-der-Pol-Differentialgleichung

2.2 Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichten

Bevor Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt werden können, muss zunächst der Begriff des Gleichgewichts eingeführt werden. Gleichgewichte werden auch Ruhelagen, Equilibria oder kritische Punkte genannt. Sie sind die konstanten Lösungen einer Differentialgleichung [21, S. 20] und lassen sich, in Bezug auf den im vorherigen Kapitel eingeführten Fluss, folgendermaßen definieren:

Definition 2.10. [11, S. 96] Ein Gleichgewicht x^* eines Vektorfeldes f , also ein Punkt mit $f(x^*) = 0$, ist ein Fixpunkt des zugehörigen Flusses. Es gilt also

$$\varphi(t, x^*) = x^*$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bei der Stabilitätsuntersuchung wird im Wesentlichen das qualitative Verhalten, des von einer Differentialgleichung erzeugten Flusses, in der Nähe einer Ruhelage untersucht [2, S. 219]. Es geht also darum, wie sich die Lösungen im direkten Einzugsgebiet eines kritischen Punktes verhalten. Die Lösungen können sich beispielsweise vom Gleichgewicht entfernen, in der Nähe bleiben, oder sogar gegen das Gleichgewicht konvergieren. Aus den unterschiedlichen Verhaltensweisen der Lösungen ergeben sich die unterschiedlichen Stabilitätsbegriffe, die wie folgt definiert werden:

Definition 2.11. [11, S. 100f. Def. 7.3 und Def. 7.5] Sei x^* ein Gleichgewicht von (1). Dann heißt x^*

a) stabil, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$ für alle Anfangswerte $x_0 \in R^n$ mit $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ erfüllt ist.

b) lokal asymptotisch stabil, falls es stabil ist und darüber hinaus eine Umgebung U von x_0 existiert, sodass die Lösungen mit Anfangswerten $x_0 \in U$ gegen x^* konvergieren, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = x^*$$

für alle $x_0 \in U$.

c) global asymptotisch stabil, falls in b) $U = R^n$ gilt

d) instabil, falls es nicht stabil ist, d.h., falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für jedes $\delta > 0$ ein $x_0 \in R^n$ mit $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ und ein $T > 0$ existiert, sodass

$$\|\varphi(T, x_0) - x^*\| \geq \varepsilon$$

gilt.

Anschaulich können die Begriffe wie folgt gedeutet werden:

Eine Ruhelage ist stabil, wenn Lösungen, die nahe genug beim Gleichgewicht starten, auch nahe bei diesem bleiben. Als asymptotisch stabil wird sie bezeichnet, wenn die nahe genug bei der Ruhelage startenden Lösungen, zusätzlich gegen diese konvergieren [10, S. 89f.]. Das Gleichgewicht ist instabil, wenn es in beliebig kleinen Umgebungen Lösungen gibt, die in der Nähe des Ruhepunktes starten, sich aber dann von ihm entfernen [5, S. 404].

Die zwei, in Bezug auf die in dieser Arbeit verwendeten Differentialgleichungen, wichtigsten Hilfsmittel zur Bestimmung der Stabilität einer Ruhelage, sind die Linearisierung und Lyapunov-Funktionen. Im Folgenden werden die beiden Konzepte eingeführt und ihr Einsatzbereich anschaulich an zwei Beispielen erläutert. Auf formale Beweise wird

an dieser Stelle verzichtet. Diese können in der einschlägigen Fachliteratur nachgelesen werden.

2.2.1 Stabilitätsuntersuchung mittels Linearisierung

Eines der bedeutendsten Konzepte zur Stabilitätsuntersuchung ist die sogenannte Linearisierung. Das genaue Vorgehen und wie die Stabilität der Ruhelagen letztlich bestimmt wird, beschreibt der folgende Satz und das zugehörige Beispiel.

Satz 2.12. (Prinzip der linearisierten Stabilität) [21, S. 95 Satz 5.4.1.] Sei x^* eine Ruhelage der Differentialgleichung (1). Die Matrix A sei definiert als $A := f'(x^*)$ und wird im folgenden als Jacobimatrix im Punkt x^* bezeichnet. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- Gilt Realteil $\mu_j < 0$ für alle Eigenwerte μ_j von A , so ist die Ruhelage x^* asymptotisch stabil.
- Existiert ein Eigenwert μ_j , mit Realteil $\mu_j > 0$, so ist die Ruhelage x^* instabil.

An dieser Stelle bietet es sich an, instabile Ruhelagen im Hinblick auf Kapitel 4 nochmals feiner zu klassifizieren.

Bemerkung 2.13. [20, S. 45] Bei einer Ruhelage handelt es sich um eine instabile Quelle, wenn sämtliche Eigenwerte reell und positiv sind. Sind die Eigenwerte komplex mit positivem Realteil, dann werden sie als instabile Spirale bezeichnet. Hat ein Teil der Eigenwerte positive und der andere Teil der Eigenwerte negative Realteile, dann wird die Ruhelage instabiler Sattel genannt.

Im letzten Fall gibt es also sowohl stabile Kurven, die auf die Ruhelage zulaufen, als auch instabile Kurven, die sich von der Ruhelage entfernen.

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen schematisch die Phasenportraits der in dieser Arbeit wichtigsten Arten von Ruhelagen [Abbildungen in Anlehnung an 20, S. 46].

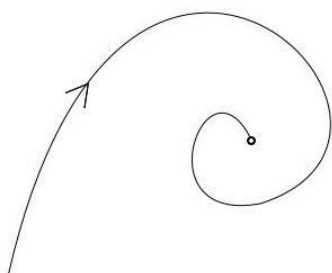


Abbildung 3: asymptotisch stabile Ruhelage

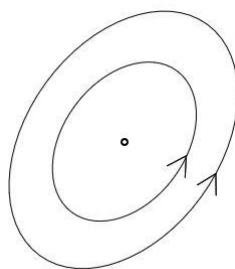


Abbildung 4: stabile Ruhelage

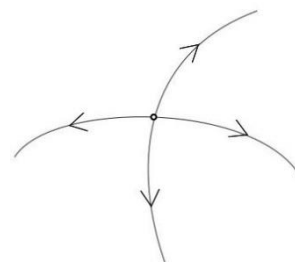


Abbildung 5: instabile Quelle

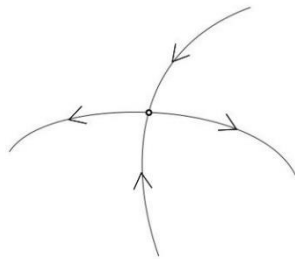


Abbildung 6: instabiler
Sattel

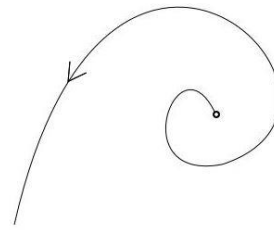


Abbildung 7: instabile
Spirale

Das folgende Beispiel veranschaulicht wie Satz 2.12. in der Praxis angewendet wird:

Beispiel 2.14. [28, Staatsexamen Frühjahr 2013 T1A5]

Es sei das (autonome) System

$$\dot{x} = -x - y + 3$$

$$\dot{y} = x^2 - 4y - 20$$

gegeben.

- Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.
- Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$-x - y + 3 = 0$$

$$x^2 - 4y - 20 = 0$$

erhält man die beiden stationären Punkte $(4, -1)$ und $(-8, 11)$.

Sei nun $g(x, y) := (-x - y + 3, x^2 - 4y - 20)^T$, dann ist die Jacobimatrix des Systems gegeben durch

$$D_g(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2x & -4 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen des ersten stationären Punktes $(4, -1)$ ergibt die Matrix

$$D_g(4, -1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem charakteristischen Polynom $\mu^2 + 5\mu + 12$ berechnen sich die Eigenwerte zu

$$\mu_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{2}.$$

Der Realteil beider Eigenwerte ist demnach < 0 , die Ruhelage $(4, -1)$ ist also nach Satz 2.12. asymptotisch stabil.

Setzt man nun den zweiten stationären Punkt $(-8, 11)$ ein, ergeben sich die Eigenwerte

$$\mu_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2}.$$

Wegen $\sqrt{73} > 5$ hat ein Eigenwert positiven Realteil, die Ruhelage $(-8, 11)$ ist also nach Satz 2.12. instabil.

Gibt es allerdings Eigenwerte mit Realteil Null, dann sind im Allgemeinen mit dem Prinzip der Linearisierung keine Aussagen mehr zur Stabilität möglich. In solchen Fällen kann häufig eine Stabilitätsuntersuchung mittels Lyapunov-Funktion hilfreich sein.

2.2.2 Stabilitätsuntersuchung mittels Lyapunov-Funktionen

Um diese Methode anwenden zu können, müssen zunächst die Begriffe Lyapunov-Funktion und strikte Lyapunov-Funktion eingeführt werden:

Definition 2.15. [9, S. 209] Gegeben sei eine Ruhelage x^* der Differentialgleichung (1). Dann heißt eine in einer Umgebung U von x^* stetig differenzierbare Funktion V Lyapunov-Funktion, falls V bei x^* ein striktes lokales Minimum besitzt und die Funktion

$$\dot{V}(x) := \langle \text{grad}V(x), f(x) \rangle$$

auf U die Ungleichung $\dot{V}(x) \leq 0$ erfüllt. Gilt sogar $\dot{V}(x) < 0$ für $x \neq x^*$, dann spricht man von einer strikten Lyapunov-Funktion.

Die Stabilitätsuntersuchung wird schließlich durch folgenden Satz verwirklicht:

Satz 2.16. (Lyapunov'scher Stabilitätssatz) [9, S. 209f.] Zu einer Ruhelage x^* von (1) existiere eine (strikte) Lyapunov-Funktion. Dann ist x^* ein (asymptotisch) stabiles Gleichgewicht.

Am folgenden Beispiel wird die Anwendung in der Praxis verdeutlicht:

Beispiel 2.17. [28, Staatsexamen Frühjahr 2014 T1A1]

Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ der in R^2 vorgegebenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + y^5 \\ \dot{y} &= -xy^4 - y^3.\end{aligned}$$

Führt Linearisierung zum Ziel?

Sei zunächst $f(x, y) := (-x^3 + y^5, -xy^4 - y^3)^T$. Dann ist die Jacobimatrix des Systems gegeben durch

$$D_f(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 5y^4 \\ -y^4 & -4xy^3 - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Ruhelage $(0,0)$ ergibt

$$D_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die resultierende Matrix hat den doppelten Eigenwert 0. Eine Aussage mittels Linearisierung ist also nicht möglich. Um die direkte Methode von Lyapunov nutzen zu können, macht man den folgenden Ansatz:

$$V(x, y) := x^2 + y^2$$

Es gilt:

$$V(0,0) = 0 \text{ und } V(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \neq (0,0)$$

Außerdem berechnet man:

$$\langle \text{grad}V(x, y), f(x, y) \rangle = -2x^4 - 2y^4 < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0,0)$$

Demnach handelt es sich bei V um eine strikte Lyapunov-Funktion. Die Ruhelage $(0,0)$ ist damit nach Satz 2.16. asymptotisch stabil.

2.3 Zentrale Begriffe der Poincaré-Bendixson Theorie

In diesem Kapitel werden einige Begriffe eingeführt, die für die Erarbeitung des Satzes von Poincaré-Bendixson besonders wichtig sind. Zunächst werden mit invarianten Mengen und der sogenannten ω -Limesmenge zwei spezielle Arten von Mengen eingeführt. Im Anschluss wird ein wichtiges Hilfsmittel, der lokale transversale Schnitt vorgestellt.

Definition 2.18. [2, S. 248f.] Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi: \Omega \rightarrow X$ ein Halbfluss auf X . Für jedes $x \in X$ wird die ω -Limesmenge (auch positive Limesmenge) $\omega(x)$ definiert als

$$\omega(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+ \varphi(t, x)}.$$

Gilt $t^+(x) = \infty$ so lässt sich die positive Limesmenge auch schreiben als

$$\omega(x) = \{y \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \text{ mit } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}.$$

Betrachtet man die zweite Schreibweise, dann ist die ω -Limesmenge eines Punktes demnach die Menge aller Häufungspunkte seines positiven Halborbis [11, S. 137].

Ein weiteres zentrales Konzept in der Theorie der dynamischen Systeme sind invariante Mengen. Diese Art von Mengen im Allgemeinen und speziell positiv invariante Mengen, sind für den Satz von Poincaré-Bendixson von großer Bedeutung. Anschaulich bezeichnet man eine Menge D als invariant, wenn jede Lösung, die in D startet, für alle positiven und negativen Zeiten existiert und in D verbleibt [11, S. 137]. Als positiv invariant wird sie bezeichnet, wenn in jedem Randpunkt der Menge die Lösungskurve nach innen läuft [2, S. 235]. Formal lassen sich die Begriffe folgendermaßen definieren:

Definition 2.19. [2, S. 235] Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt positiv invariant, wenn $\gamma^+(M) \subset M$ gilt, d.h. wenn aus $m \in M$ stets $\gamma^+(m) \subset M$ folgt. Die Menge M ist invariant, wenn für jedes $m \in M$ eine Lösung $u_m: J \rightarrow X$ von φ durch m existiert mit $u_m(J) \subset M$. Ist schließlich φ ein Fluss, so heißt M negativ invariant, wenn $\gamma^-(M) \subset M$ gilt.

Die anschließende Bemerkung macht den Zusammenhang der eingeführten Begriffe deutlich.

Bemerkung 2.20. [2, S. 235] Ist φ ein Fluss, dann ist eine Teilmenge $M \subset X$ genau dann invariant, wenn M positiv und negativ invariant ist.

Die ω -Limesmenge hat einige wichtige Eigenschaften, die beim Beweis des Satzes von Poincaré-Bendixson eine zentrale Rolle spielen.

Lemma 2.21. (Eigenschaften der ω -Limesmenge) [11, S. 138 Prop. 9.6-9.8]

Die ω -Limesmenge $\omega(x)$ ist:

- a) abgeschlossen
- b) invariant

Ist $\gamma^+(x)$ beschränkt, dann ist die ω -Limesmenge $\omega(x)$:

- c) nicht leer
- d) kompakt
- e) zusammenhängend

Beweis [Grüne, S.138]:

a) Per Definition gilt

$$\omega(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+ \varphi(t, x)}.$$

Da der Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, ist die ω -Limesmenge $\omega(x)$ abgeschlossen.

b) Sei $y \in \omega(x)$. Die ω -Limesmenge $\omega(x)$ lässt sich nach Definition 2.18. auch schreiben als

$$\omega(x) = \{y \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \text{ mit } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}.$$

Daher existiert eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi(t_n, x) \rightarrow y$. Auf Grund der Stetigkeit von φ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t_n + t, x) \rightarrow \varphi(t, y)$ und somit per Definition $\varphi(t, y) \in \omega(x)$. Es folgt also $\varphi(t, \omega(x)) \subset \omega(x)$ und damit, gemäß Definition 2.19., die Invarianz der ω -Limesmenge $\omega(x)$.

c) Die ω -Limesmenge ist definiert als

$$\omega(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, x))}.$$

Daher folgt aus der Beschränktheit von $\gamma^+(x)$ und $\overline{\gamma^+(\varphi(t_1, x))} \subset \overline{\gamma^+(\varphi(t_0, x))}$ für $t_1 > t_0$, dass $\omega(x)$ nicht leer sein kann.

d) Die ω -Limesmenge $\omega(x)$ ist beschränkt und nach a) zusätzlich abgeschlossen, also kompakt.

e) Die einzelnen $\overline{\gamma^+(\varphi(t, x))}$ sind zusammenhängend, also ist auch $\omega(x)$ zusammenhängend.

□

Das wichtigste Hilfsmittel in der Theorie rund um den Satz von Poincaré-Bendixson ist der sogenannte lokale transversale Schnitt, der auch als Transversale oder transversales Segment bezeichnet wird [21, S. 185]. Er spielt vor allem bei den Argumentationen innerhalb der Beweise in Kapitel 3 eine wichtige Rolle.

Definition 2.22. [11, S. 139] Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld in der Ebene mit $X \subset \mathbb{R}^2$. Ein lokaler (transversaler) Schnitt zu f , auch kurz Transversale genannt, ist eine Strecke $S \subset X$ die transversal zum Vektorfeld f liegt, d.h. für jeden Punkt $x \in S$ gilt $\langle f(x), n \rangle \neq 0$, wobei $0 \neq n \in \mathbb{R}^2$ senkrecht auf S steht.

S ist also eine Transversale, wenn deren Richtung von der von $f(x)$ für jedes $x \in S$ verschieden ist und keine Ruhelage in S enthalten ist [21, S. 186]. Aus der Definition ergeben sich zusätzlich die folgenden wichtigen Eigenschaften eines lokalen transversalen Schnitts.

Bemerkung 2.23. [21, S. 186] Sei $\dot{x} = f(x)$ eine autonome Differentialgleichung mit $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$ und $X \subset \mathbb{R}^2$ offen.

- a) Ist $x \in X$ keine Ruhelage, dann existiert eine Transversale S durch x .
- b) Jeder Orbit, der einen lokalen transversalen Schnitt trifft, kreuzt diesen.
- c) Alle Trajektorien, die eine Transversale treffen, passieren diese in gleicher Richtung.

3 Beweis des Satzes von Poincaré-Bendixson und dessen Verallgemeinerung

In diesem Kapitel wird der Satz von Poincaré-Bendixson und dessen Verallgemeinerung schließlich bewiesen. Als Hauptliteratur dienen in diesem Kapitel die zwei Bücher „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ von Amann [2, S. 346-361] und „Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme“ von Prüss und Wilke [21, S. 190f.]. Zusätzliche Quellen werden wiederum gesondert markiert.

Eine zentrale Rolle für den Beweis des Satzes spielt der Jordansche Kurvensatz, dessen Gültigkeit auch der Grund dafür ist, warum zweidimensionale Systeme im Vergleich zu höheren Dimensionen mathematisch noch relativ gut beherrschbar sind [6, S. 85].

Satz 3.1. (Jordanscher Kurvensatz) [6, S. 85] Eine geschlossene doppelunktfreie Kurve zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Teile, ein Inneres und ein Äußeres. Diese Zerlegung ist derart, dass man zwei Punkte im Inneren oder zwei Punkte im Äußeren immer durch einen stetigen Weg, der die Kurve nirgends trifft, miteinander verbinden kann. Ein Punkt im Inneren und ein Punkt im Äußeren können nicht in dieser Art verbunden werden.

Beweis: Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Dieser ist beispielsweise nach zu lesen in [22].

Der Jordansche Kurvensatz ist deshalb so wichtig, weil jeder periodische Orbit und auch viele weitere Gebilde im R^2 eine solche geschlossene doppelunktfreie Kurve darstellen. Für höhere Dimensionen gilt der Jordansche Kurvensatz nicht, da ein periodischer Orbit nur im R^2 die Ebene in ein Inneres und ein Äußeres aufteilt. Im R^3 dagegen, würde der periodische Orbit vielmehr wie ein dünner Ring im Raum liegen, an dem die Lösungskurven vorbei- oder hindurchwandern können. Dies ist auch der Hauptgrund dafür, dass der Satz von Poincaré-Bendixson nur im R^2 gilt [16, S. 100f.]. Aufgrund dieser Tatsache werden im weiteren Verlauf der Arbeit ausschließlich zweidimensionale autonome Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

mit $f \in C^1(X, R^2)$ und $X \subset R^2$ offen betrachtet. Wie im vorherigen Kapitel sei dabei stets φ der von f erzeugte Fluss.

Bevor der eigentliche Satz und später dessen Verallgemeinerung bewiesen werden können, benötigt man einige vorbereitende Hilfssätze. Eine Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird als wachsend auf einem Orbit bezeichnet, wenn die Folgeglieder der Orientierung des Orbits entsprechend nacheinander auf ihm liegen. Als wachsend auf einer Transversalen

$S \subset \mathbb{R}^2$ wird sie bezeichnet, wenn gilt $y_n - y_0 = t_n(y_1 - y_0)$ für $n = 2, 3, 4, \dots$ mit einer wachsenden Folge $t_n \geq 1$ [2, S. 359]. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 8 eine entsprechende Folge, die sowohl auf dem Orbit als auch auf der Transversalen wachsend ist.

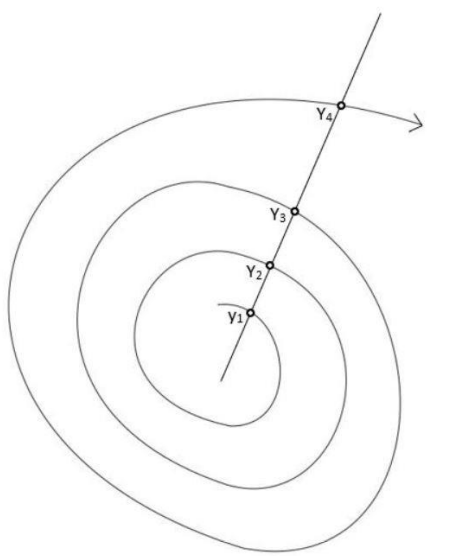


Abbildung 8: Eine auf dem Orbit und der Transversalen wachsende Folge

Diese Charakterisierung sowie die in Abbildung 8 dargestellte Situation, führt zum ersten vorbereitenden Hilfssatz.

Lemma 3.2. [2, S. 359 Lemma 24.1] Gegeben sei eine Transversale S und eine Folge von Punkten $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, die auf dem gleichen Orbit γ liegen und in S enthalten sind. Wenn die Folge auf der Trajektorie γ wachsend ist, dann ist sie es auch auf der Transversalen S .

Beweis [2, S. 359f.]: Es genügt an dieser Stelle die Behauptung für drei Punkte y_k , y_{k+1} und y_{k+2} zu zeigen. Die allgemeine Aussage folgt dann durch vollständige Induktion. In diesem Zusammenhang sei y_{k+1} der erste Punkt, an dem der Orbit γ die Transversale S das erste Mal wieder trifft.

(1) Im ersten Beweisschritt zeigen wir zunächst, dass y_{k+2} nicht zwischen y_k und y_{k+1} liegen kann.

Der Teil des Orbits, der y_k mit y_{k+1} verbindet, bildet zusammen mit der Teilmenge $T \subset S$ des lokalen transversalen Schnitts S zwischen y_k und y_{k+1} eine doppeltpunktfreie geschlossene Kurve. Der Jordansche Kurvensatz (Satz 3.1.) bescheinigt an dieser Stelle die Existenz eines eindeutigen Innengebiets, welches im weiteren Verlauf mit D bezeichnet wird (vgl. Abbildung 9).

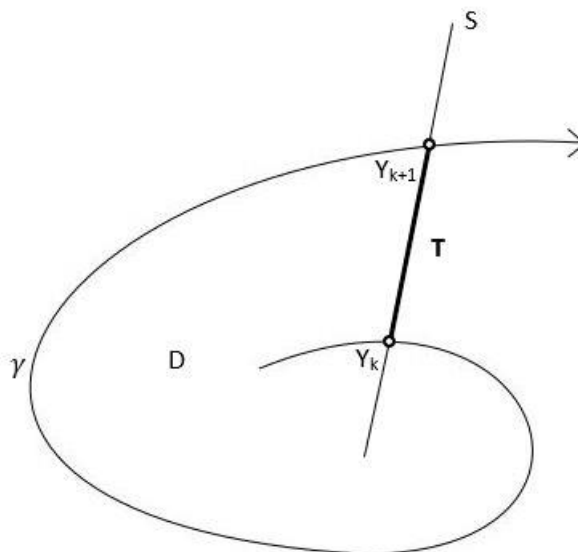


Abbildung 9: Bildung einer doppeltpunktfreien geschlossenen Kurve

[in Anlehnung an 2, S. 359]

Als Zwischenschritt müssen wir zunächst zeigen, dass die Vektoren auf dem lokalen transversalen Schnitt alle in die gleiche Richtung zeigen. Wie in Abbildung 9 eingezeichnet, zeige der Vektor $f(y_{k+1})$ bei y_{k+1} aus \bar{D} hinaus (\bar{D} bezeichne hier den Abschluss von D). Mit $T_{\text{au\ss}en}$ bezeichnen wir an dieser Stelle die Menge aller Punkte von T mit nach au\ss en gerichteten Vektoren. F\ur jedes $y \in T_{\text{au\ss}en}$ l\asst sich nun ein geeignetes $\varepsilon > 0$ finden, sodass f\ur alle $y^* \in T$ mit $d(y, y^*) < \varepsilon$ $f(y^*)$ transversal zu S ist, woraus die Offenheit von $T_{\text{au\ss}en}$ in T folgt. Entsprechend obiger Definition, sei T_{innen} die Menge aller Punkte von T mit nach innen zeigenden Vektoren, welche ebenfalls offen ist. Per Definition gilt nun $T_{\text{au\ss}en} \cup T_{\text{innen}} = T$. Offensichtlich ist T zusammenh\angend und es gilt

$T_{\text{au\ss}en} \cap T_{\text{innen}} = \emptyset$. Da eine Menge genau dann zusammenh\angend ist, wenn es nicht m\oglich ist sie in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen zu zerlegen [13, S. 124] und zus\atzlich $y_{k+1} \in T_{\text{au\ss}en}$ und somit $T_{\text{au\ss}en} \neq \emptyset$ gilt, folgt: $T_{\text{innen}} = \emptyset$. Das hei\st T besteht nur aus Punkten, die die Definition von $T_{\text{au\ss}en}$ erf\ullen. Somit zeigen die Vektoren alle in die gleiche Richtung. Es gilt also

$$y_{k+2} \in S \setminus T.$$

Demnach kann y_{k+2} nicht zwischen y_k und y_{k+1} liegen.

(2) Im zweiten und letzten Beweisschritt zeigen wir nun, dass y_{k+2} tatsächlich über y_{k+1} und nicht unter y_k liegt.

Hierfür zerlegen wir die Menge $S \setminus T$ gedanklich in zwei halboffene Intervalle I_{oben} und I_{unten} . Dem Namen entsprechend, liege I_{oben} oberhalb von y_{k+1} und I_{unten} unterhalb von y_k (vgl. Abbildung 10).

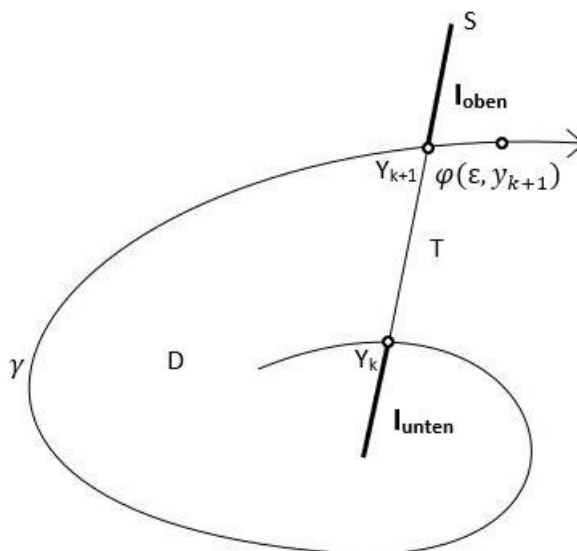


Abbildung 10: Zerlegung der Transversalen [in Anlehnung an 2, S. 359]

Wir wählen nun ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodass der Punkt $\varphi(\varepsilon, y_{k+1})$ mit I_{oben} stetig verbunden werden kann, ohne die doppeltpunktfreie geschlossene Kurve zu berühren (vgl. Abbildung 10). Somit gilt

$$\dot{I}_{oben} \subset X \setminus \bar{D}.$$

(\dot{I} bezeichne hier das Innere von I). Eine analoge Argumentation führt zu

$$\dot{I}_{unten} \subset \dot{D}.$$

Da y_{k+2} nicht in \dot{D} liegen kann, kann y_{k+2} nicht auf I_{unten} liegen. Es folgt also $y_{k+2} \in I_{oben}$. Wenn man am Anfang annimmt, dass die Trajektorie \bar{D} in y_k statt in y_{k+1} verlässt, kann analog argumentiert werden und man kommt zum selben Ergebnis.

□

Trifft eine Trajektorie γ durch einen Punkt x_1 den Punkt y_1 zum Zeitpunkt t_1 , dann gibt es eine ganze Umgebung U von x_1 , sodass jeder Punkt in der Umgebung U den lokalen transversalen Schnitt S trifft. Die zugehörige Treffzeitfunktion τ ist stetig (vgl. Abbildung 11).

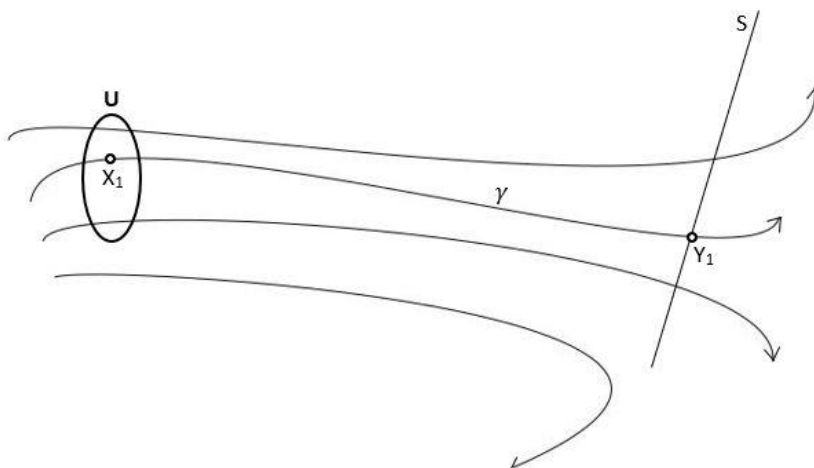


Abbildung 11: Jeder Punkt in U trifft S [in Anlehnung an 2, S. 346]

Formal lässt sich die Aussage durch folgende Bemerkung formulieren:

Bemerkung 3.3. [2, S. 346 Lemma 23.4] Ist S eine Transversale von φ in y_1 mit $\varphi(t_1, x_1) = y_1$, dann existiert eine offene Umgebung U von x_1 und eine eindeutig bestimmte einmal stetig differenzierbare Funktion τ mit $\tau(x_1) = t_1$ sowie $\varphi(\tau(x), x) \in S$ für alle $x \in U$.

Mit der Hilfe der gerade formulierten Bemerkung lässt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen Transversalen und ω -Limesmengen herstellen.

Lemma 3.4. [2, S. 360 Lemma 24.2] Gegeben seien $x \in X$ und $y \in \omega(x)$. Dann hat ein lokaler transversaler Schnitt S höchstens einen Punkt mit der ω -Limesmenge $\omega(x)$ bzw. mit $\gamma^+(y)$ gemeinsam.

Beweis [2, S. 360]: Laut Lemma 2.21.b) ist $\omega(x)$ invariant und damit mit Bemerkung 2.20. auch positiv invariant. Es gilt also $\gamma^+(y) \subset \omega(x)$. Demnach genügt es, die Aussage für die ω -Limesmenge $\omega(x)$ zu zeigen. Wir wollen die Aussage per Widerspruch beweisen. Sei also $y_1, y_2 \in \omega(x)$ mit $y_1 \neq y_2$, sodass sowohl y_1 als auch y_2 im Schnitt $S \cap \omega(x)$ enthalten sind. Um nun den gesuchten Widerspruch zu erhalten, orientieren wir uns in den weiteren Beweisschritten an folgender Beweisidee:

Wir konstruieren zunächst eine Folge, die auf dem Orbit wachsend ist. Mit Lemma 3.2. muss diese dann auch auf dem lokalen transversalen Schnitt S wachsend sein.

Ziel ist es daher, die Folge so zu gestalten, dass sie auf S nicht wachsend sein kann, um so einen Widerspruch zu generieren.

Seien im Folgenden U_1 und U_2 disjunkte Umgebungen von y_1 und y_2 . Es ist $\omega(x)$ nach Definition 2.18. schreibbar als $\omega(x) = \{y \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \text{ mit } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}$. Daher gibt es eine Folge $t_n \rightarrow \infty$ mit $\varphi(t_{2n+1}, x) \in U_1$ und $\varphi(t_{2n}, x) \in U_2$. Wenn wir die U_i klein genug wählen, finden wir nach Bemerkung 3.3. eine einmal stetig differenzierbare Treffzeitfunktion $\tau \in C^1(U_1 \cap U_2, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\varphi(\tau(x), x) \in U_i \cap S$ für alle $x \in U_i$. Definieren wir nun

$$a_n := \varphi\left(\tau(\varphi(t_{2n+1}, x)), \varphi(t_{2n+1}, x)\right) \text{ und}$$

$$b_n := \varphi\left(\tau(\varphi(t_{2n}, x)), \varphi(t_{2n}, x)\right),$$

so erhalten wir die auf der Trajektorie $\gamma(x)$ wachsende Folge $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$

Nach Lemma 3.2. muss diese auch auf der Transversalen S wachsend sein. Da aber

$a_n \in U_1 \cap S$ und $b_n \in U_2 \cap S$, ist dies jedoch nicht möglich. □

Das nächste Lemma führt in Bezug auf die Theorie im Rahmen des Satzes von Poincaré-Bendixson erstmals zu periodischen Orbits.

Lemma 3.5. [2, S. 360] Ist $\gamma^+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$, dann ist x periodisch.

Beweis [2, S. 360]: Angenommen es gilt $\gamma^+(x) = \{x\}$, dann ist x eine Ruhelage und somit periodisch. Wir nehmen daher $\gamma^+(x) \neq \{x\}$ an. Für ein $y \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$ gilt damit $f(y) \neq 0$. Somit finden wir also nach Bemerkung 2.23.a) einen lokalen transversalen Schnitt S durch y . Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.4. erfüllt. Der einzige Schnittpunkt von $\gamma^+(x)$ und der Transversalen S ist demnach y . Da $y \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$, gibt es einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ sodass $\varphi(t_1, x) = y$. Wählt man eine ausreichend kleine Umgebung U von y , dann existiert ein $t_2 > t_1$ mit $\varphi(t_2, x) \in U$. Demnach gilt

$$\varphi\left(\tau(\varphi(t_2, x)), \varphi(t_2, x)\right) \in S.$$

Wählt man nun ein $t^* := t_2 + \tau(\varphi(t_2, x)) - t_1$ dann folgt

$$\varphi(t^*, y) = \varphi\left((t_2 + \tau(\varphi(t_2, x)) - t_1), \varphi(t_1, x)\right) = \varphi\left(\tau(\varphi(t_2, x)), \varphi(t_2, x)\right)$$

mit $\varphi\left(\tau(\varphi(t_2, x)), \varphi(t_2, x)\right) \in S$.

Es gilt also $\varphi(t^*, y) = y$. Somit ist $\gamma^+(y)$ periodisch, woraus direkt die Periodizität von x folgt. □

Um die Vorarbeit abzuschließen und letztendlich den Beweis des Satzes durchführen zu können, benötigt man noch das folgende abschließende Lemma.

Lemma 3.6. [2, S. 361 Satz 24.5] Sei $K \subset X$ kompakt mit $\gamma^+(x) \subset K$. Wenn die ω -Limesmenge $\omega(x)$ einen periodischen Orbit γ enthält der keine Ruhelage ist, dann gilt $\omega(x) = \gamma$.

Beweis [2, S. 361]: Sei also $\omega(x) \neq \gamma$, das heißt es muss gelten $\omega(x) \setminus \gamma \neq \emptyset$. Da $\gamma(y)$ das stetige Bild des abgeschlossenen Periodenintervalls $[0, T]$ ist, ist $\gamma = \gamma(y)$ abgeschlossen in X . Wegen $\omega(x) = \overline{\omega(x)}$ folgt auch die Abgeschlossenheit in $\omega(x)$. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist [z.B. in 3, S. 326]. Daher ist das Komplement des Orbits γ $\omega(x) \setminus \gamma$ offen in $\omega(x)$. Nach Lemma 2.21.e) ist $\omega(x)$ mit den gegebenen Voraussetzungen zusammenhängend. Weiterhin ist die Menge $\omega(x) \setminus \gamma$ nicht abgeschlossen, da eine Menge genau dann zusammenhängend ist, wenn die leere Menge und die Menge selbst die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen sind [z.B. in 17, S. 64]. Außerdem ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie all ihre Häufungspunkte enthält [z.B. in 26, S. 435]. Daher gibt es einen Häufungspunkt z von $\omega(x) \setminus \gamma$ der in γ enthalten ist. Da z keine Ruhelage ist, existiert nach Bemerkung 2.23.a) ein lokaler transversaler Schnitt S durch z . Laut Bemerkung 3.3. gibt es in einer klein genug gewählten Umgebung U von z einen Punkt p für den $\gamma(p)$ die Transversale S trifft. Da jedoch $\omega(x)$ nach Lemma 2.21.b) invariant ist gilt

$$\gamma(p) \subset \omega(x)$$

und somit auch

$$\varphi(\tau(p), p) \in \omega(x).$$

Dies bedeutet, dass die beiden Schnittpunkte in $\omega(x)$ enthalten sind. Gemäß Lemma 3.4. kann eine ω -Limesmenge jedoch nur einen gemeinsamen Punkt mit einer Transversalen haben. Der gesuchte Widerspruch ist also gefunden.

□

Schlussendlich folgt der angestrebte Satz und dessen Beweis.

Satz 3.7. (Der Satz von Poincaré-Bendixson) [2, S. 361] Sei $K \subset X$ kompakt und für den positiven Halborbit $\gamma^+(x)$ gelte $\gamma^+(x) \subset K$. Dann gilt die folgende Aussage: Enthält die ω -Limesmenge $\omega(x)$ keine Ruhelage, dann ist $\omega(x)$ ein periodischer Orbit.

Beweisskizze: Die geleistete Vorarbeit soll durch die folgende Beweisidee genutzt werden: Um zeigen zu können, dass $\omega(x)$ ein periodischer Orbit ist, müssen wir zunächst, um Lemma 3.6. anwenden zu können, einen periodischen Orbit $\gamma(y)$ finden der in $\omega(x)$ enthalten ist. Wenn wir beweisen können, dass $\omega(x) \cap \gamma^+(x) \neq \emptyset$ ist, liefert uns Lemma 3.5. diesen gesuchten periodischen Orbit.

Formaler Beweis [2, S. 361]: Nach Lemma 2.21.c) ist $\omega(x)$ bei gegebenen Voraussetzungen nicht leer, es gibt also ein $y \in \omega(x)$. Da $\omega(x)$ zusätzlich invariant ist (vgl. Lemma 2.21.b), gilt $\gamma(y) \subset \omega(x)$. Demnach ist $\omega(x)$ ebenfalls nicht leer und es gilt $\omega(y) \in \omega(x)$. Sei nun $p \in \omega(y)$. Weil $\omega(x)$ nach Voraussetzung keine Ruhelage enthält, gilt dies auch für $\omega(y)$. Es folgt also $f(p) \neq 0$. Daher gibt es nach Bemerkung 2.23.a) einen lokalen transversalen Schnitt S durch p . Außerdem muss die Transversale S $\gamma^+(y)$ schneiden, da $p \in \omega(y)$. Nach Lemma 3.4. gibt es aber nur höchstens einen solchen Schnittpunkt. Es folgt also

$$p \in \omega(y) \cap \gamma^+(y).$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.5. erfüllt, $\gamma(y)$ ist also periodisch. Mit Lemma 3.6. folgt schließlich die Behauptung.

□

Ein typisches Anwendungsbeispiel für den Satz von Poincaré-Bendixson sind Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Poincaré-Bendixson kann nun die Existenz von periodischen Orbits in bestimmten Gebieten gezeigt werden.

Genauer geht man dabei folgendermaßen vor:

Wie in den Voraussetzungen des Satzes formuliert, sucht man ein kompaktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, welches kein Gleichgewicht enthält. Falls das System eine instabile Ruhelage enthält, lässt sich diese „herausschneiden“ um das gesuchte Gebiet zu erhalten. Gibt es dann zumindest einen Orbit der für eine Zeit $t \geq 0$ in das Gebiet G hineinführt und darin verbleibt, dann muss G nach dem Satz von Poincaré-Bendixson

mindestens einen periodischen Orbit enthalten [7, S. 130f.]. Formal lässt sich für diese Situation folgende Bemerkung formulieren:

Bemerkung 3.8. [21, S. 190 Kor. 9.2.3.]

Sei $\psi := f^{-1}(0) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Ruhelagen von (2) und $K \subset X$ kompakt und nicht leer. Wenn $K \cap \psi = \emptyset$ und $\gamma^+(x) \subset K$, dann hat die Differentialgleichung (2) mindestens eine periodische Lösung in K .

Das oben genannte Vorgehen wird an folgendem Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 3.9. [8, S. 83f.]

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Zunächst werden die Ruhelagen des Systems bestimmt und anschließend mittels Linearisierung deren Stabilität untersucht.

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Ruhelage, dann muss laut Definition 2.8. gelten

$$(1): -y + x(1 - x^2 - y^2) = 0$$

$$(2): x + y(1 - x^2 - y^2) = 0.$$

Damit ist offensichtlich $(0,0)$ eine Ruhelage des Systems.

Formt man die beiden Gleichungen um, erhält man für $x, y \neq 0$

$$\frac{y}{x} = (1 - x^2 - y^2)$$

$$\frac{-x}{y} = (1 - x^2 - y^2)$$

und schließlich

$$\frac{y}{x} = \frac{-x}{y}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -x^2.$$

Es existieren also keine weiteren Ruhelagen.

Berechnet man die Jacobimatrix des Systems und setzt die Ruhelage ein, so erhält man die Matrix

$$D_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte lassen sich mittels charakteristischem Polynom berechnen und lauten $\mu_1 = 1 + i$ und $\mu_2 = 1 - i$.

Da der Realteil beider Eigenwerte jeweils > 0 ist, ist die Ruhelage $\bar{x} = (0,0)$ nach Satz 2.12. instabil.

Sei nun $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ dann gilt

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x^2(1 - x^2 - y^2) + y^2(1 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

Damit ist \dot{V} positiv auf dem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und negativ auf dem Kreis mit Radius 2. Der Kreisring R der durch die beiden genannten Kreise begrenzt wird ist demnach positiv invariant. Mit Matlab ergibt sich das folgende Phasenportrait in das der Kreisring R schwarz eingezeichnet ist.

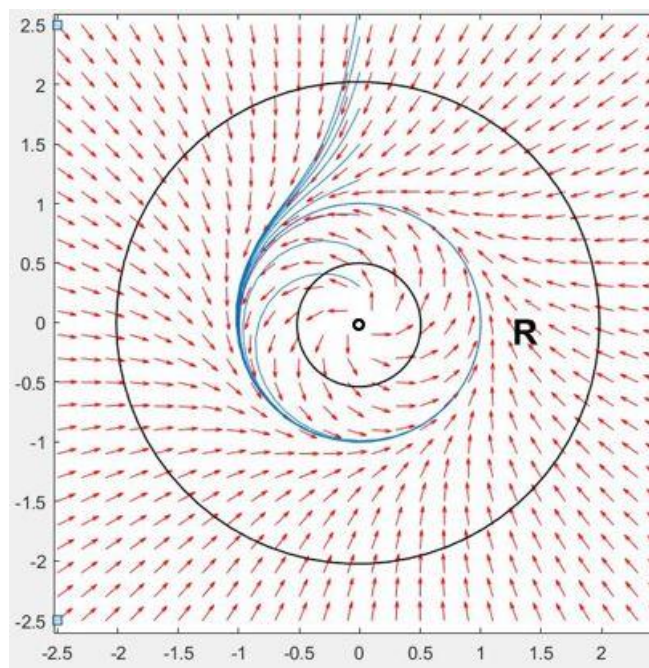


Abbildung 12: Phasenportrait mit positiv invariantem Kreisring

Alle Lösungskurven auf den Rändern von R verlaufen in R hinein. Es sind also insbesondere die Voraussetzungen von Bemerkung 3.8. erfüllt und in R muss mindestens ein periodischer Orbit liegen. In diesem Fall ist der periodische Orbit, wie in Abbildung 12 zu erkennen, ein Grenzyklus.

Enthält die ω -Limesmenge $\omega(x)$ endlich viele Ruhelagen, dann lässt sich der Satz von Poincaré-Bendixson folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 3.10. (Verallgemeinerung des Satzes von Poincaré-Bendixson) [21, S. 190 Satz 9.2.4.] Sei erneut $\psi := f^{-1}(0) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Ruhelagen von (2). Außerdem sei $K \subset X$ kompakt mit $\gamma^+(x) \subset K$ und $K \cap \psi$ endlich. Dann gelten die folgenden Alternativen:

- (1) $\omega(x) = \{x^*\}$ für ein $x^* \in \psi$
- (2) $\omega(x)$ ist ein periodischer Orbit
- (3) $\omega(x)$ besteht aus endlich vielen Ruhelagen und außerdem aus (möglicherweise unendlich vielen) Orbits, die für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen eine dieser Ruhelagen konvergieren.

Beweis [21, S. 190f.]: Nach Voraussetzung ist $K \cap \psi$ endlich. Demnach kann es auch nur endlich viele Ruhelagen in der ω -Limesmenge $\omega(x)$ geben. Außerdem ist $\omega(x)$ nach Lemma 2.21.e) mit den gegebenen Voraussetzungen zusammenhängend. Gilt also $\omega(x) \subset \psi$, dann muss $\omega(x) = \{x^*\}$ einpunktig sein. Womit Alternative (1) erfüllt ist.

Alternative (2) ergibt sich folgendermaßen:

Sei $x_1 \in \omega(x) \setminus \psi$. Da $\omega(x)$ laut Lemma 2.21.b) invariant ist, ist x_1 der Anfangspunkt einer vollständigen Trajektorie $\gamma(z) \subset \omega(x)$. Nach Lemma 2.21.c) ist $\omega(z)$ mit den gegebenen Voraussetzungen ebenfalls nicht leer. Wir können also annehmen, dass es ein $y \in \omega(z) \setminus \psi$ gibt. Da y keine Ruhelage ist, gibt es nach Bemerkung 2.23.a) einen lokalen transversalen Schnitt L durch y . Eine Transversale L und die ω -Limesmenge $\omega(x)$ haben nach Lemma 3.4. aber nur höchstens einen gemeinsamen Punkt. Es gilt also $\omega(x) \cap L = \{y\}$. Außerdem ist $L \cap \gamma^+(z) \neq \emptyset$. z ist damit laut Lemma 3.5. ein periodischer Orbit. Mit Lemma 3.6. folgt schließlich $\omega(x) = \gamma^+(z)$ und somit, dass $\omega(x)$ ein periodischer Orbit ist.

Die letzte Möglichkeit ist, dass jeder nichtkonstante Orbit $\gamma(z) \subset \omega(x)$ Grenzwerte $x^* \in \omega(x) \cap \psi$ hat, womit Alternative (3) erfüllt ist.

□

4 Das Räuber-Beute-Modell als Anwendungsbeispiel in der Biologie

Dieses Kapitel orientiert sich vor allem an den Werken „Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos“ von Hirsch, Smale und Devaney [14, S. 239-246] und „Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme“ von Grüne und Junge [11, S. 192-196]. Zusätzlich verwendete Quellen werden gesondert markiert.

Der italienische Biologe Umberto D’Ancona untersuchte zwischen 1914 und 1923 den prozentualen Anteil verschiedener Fischarten am Gesamtfang. Besonderes Augenmerk legte er dabei auf den Anteil der Haie, also der Raubfische, die als Beifang in den Netzen landeten. Die nachfolgende Tabelle zeigt den Anteil an Haien am Gesamtfang im italienischen Hafen von Triest:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11,9%	21,4%	22,1%	21,2%	36,4%	27,3%	16,0%	15,9%	14,8%	10,7%

Abbildung 13: Anteil der Haie am Gesamtfang [in Anlehnung an 5, S. 474]

Es fällt auf, dass während der Kriegsjahre des ersten Weltkrieges (1914-1918), der Anteil an Raubfischen im Vergleich zu anderen Fischarten stark anstieg. Ein Erklärungsversuch D’Anconas bestand darin, dass während des Krieges der Fischfang stark eingeschränkt wurde und so die Raubfische mehr Beute zur Verfügung hatten und sich vermehren konnten. Wenn jedoch der Fischfang zurückgeht, müsste auch die Anzahl der Beutefische in gleichem Maße steigen, was jedoch nicht der Fall war. D’Ancona beschäftigte sich also vor allem mit der Frage, warum der Rückgang des Fischfangs die Räuberpopulation mehr begünstigt als die Beutepopulation. Nachdem er für dieses Phänomen keine plausible Erklärung fand, wendete er sich an den italienischen Mathematiker Volterra. Dieser sollte ein mathematisches Modell für das Wachstum der beiden Populationen aufstellen, um so die Frage beantworten zu können [5, S. 473f.]. Auf diese Weise entstand das sogenannte klassische Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra [19, S. 97] mit den Volterra-Lotka-Gleichungen [2, S. 8]

$$\dot{x} = x(a - by)$$

$$\dot{y} = y(-c + dx)$$

mit $a, b, c, d > 0$. Dabei beschreibt die Variable x die Beutepopulation und die Variable y die Räuberpopulation. Es werden die folgenden Modellannahmen getroffen (vgl. [19, S. 97] und [3, S. 1034]):

- die Räuber ernähren sich ausschließlich von der Beute
- die Nahrungsressourcen der Beute sind unendlich groß
- sind keine Räuber vorhanden, dann wächst die Beutepopulation exponentiell mit einer Rate von $a > 0$ unbegrenzt
- die Population der Räuber nimmt exponentiell mit einer Rate von $-c$ ab, wenn keine Beute vorhanden ist, bis sie schließlich ausstirbt
- die Wahrscheinlichkeit für eine Räuber-Beute-Begegnungen ist sowohl zur Räuber- als auch zur Beutepopulation proportional, die zugehörigen positiven Proportionalitätskonstanten sind b und d

Das genannte System wird im Folgenden mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson analysiert. Zunächst werden mittels Linearisierung die Ruhelagen $(0,0)$ und $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ auf Stabilität untersucht. Sei hierzu $g := (x(a - by), y(-c + dx))^T$, dann ist die Jacobi-matrix des Systems gegeben durch

$$D_g(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}.$$

Einsetzen des ersten Gleichgewichts $(0,0)$ ergibt die Matrix

$$D_g(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

und somit die beiden Eigenwerte $\mu_1 = a > 0$ und $\mu_2 = -c < 0$. Die Ruhelage ist also nach Bemerkung 2.13. ein instabiler Sattel. Setzt man die zweite Ruhelage ein, erhält man die Matrix

$$D_g\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\mu_{1/2} = \pm i\sqrt{ac}$. Der Realteil beider Eigenwerte ist null, demnach ist mit Linearisierung keine Aussage möglich. Im weiteren Verlauf wird der 1. Quadrant mit $x, y > 0$ genauer betrachtet. Die instabile Ruhelage $(0,0)$ hat, wie auch in Abbildung 14 zusehen, eine stabile Kurve auf der y -Achse und eine instabile Kurve auf der x -Achse. Da sich verschiedene Lösungskurven nicht schneiden können ist der 1. Quadrant invariant. Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson (Satz 3.10.) konvergieren die Lösungskurven also entweder gegen die Ruhelage $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, oder es handelt sich um periodische Orbits.

Um genauere Angaben machen zu können wird die Funktion

$$L(x, y) = dx - c \log(x) + by - a \log(y)$$

verwendet, um die Ruhelage $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ erneut auf Stabilität zu untersuchen.

Wegen

$$\dot{L} = \langle \text{grad}L(x, y), f(x, y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} d - \frac{c}{x} \\ b - \frac{a}{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ist L konstant entlang der Lösungskurven des Systems. Außerdem ist, wie durch die Vorzeichen der Ableitungen von L nach x und y zu sehen ist, $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ein absolutes Minimum von L . Dies bedeutet L ist eine Lyapunov-Funktion und die Ruhelage $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ist nach Satz 2.16. stabil. Die genaue Charakteristik der Lösungskurven des klassischen Räuber-Beute-Modells beschreibt der folgende Satz.

Satz 4.1. [14, S. 242] Außer der Ruhelage $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ und den Koordinatenachsen, ist jede Lösung des klassischen Räuber-Beute-Modells ein periodischer Orbit.

Beweis [14, S. 242f.]:

Sei $\gamma(w)$ ein Orbit durch einen Punkt $w = (e, f)$ mit $e, f > 0$ sowie $w \neq (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Dann gibt es eine Folge

$$\dots t_{-1} < t_0 < t_1 \dots$$

sodass die Punkte $\varphi(t_n, w)$ auf der Linie $x = \frac{c}{d}$ liegen und $t_n \rightarrow \pm\infty$ für $n \rightarrow \pm\infty$. Angenommen $\gamma(w)$ ist kein periodischer Orbit, dann sind die Punkte $\varphi(t_n, w)$ wachsend auf $x = \frac{c}{d}$. Es gilt also entweder

$$\varphi(t_n, w) \rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

oder

$$\varphi(t_n, w) \rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \quad \text{für } n \rightarrow -\infty.$$

Da L konstant entlang der Lösungskurven ist, gilt demnach $L(w) = L(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Tatsache, dass $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ein absolutes Minimum von L ist.

Daher muss $\gamma(w)$ ein periodischer Orbit sein.

□

Die nachfolgende Abbildung zeigt beispielhaft das Phasenportrait eines klassischen Räuber-Beute-Modells mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 4$.

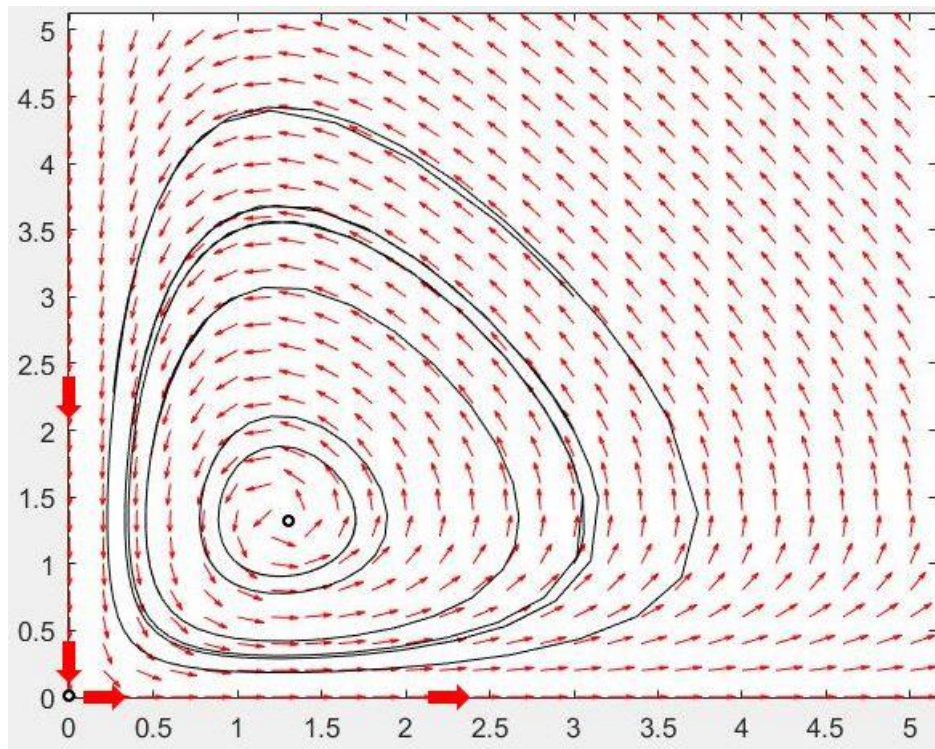


Abbildung 14: Phasenportrait des klassischen Räuber-Beute-Modells mit unbeschränktem Wachstum mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 4$.

In Bezug auf die Praxis lässt sich demnach sagen, dass für jeden beliebigen Anfangswert $(x(0), y(0))$ mit $x(0) \neq 0$ und $y(0) \neq 0$ die Populationen periodisch schwanken. Außerdem sterben, unabhängig von der genauen Anzahl der Tiere, weder die Jäger- noch die Beutepopulation aus oder vermehren sich unendlich stark.

Da ein unbeschränktes Wachstum der Beutepopulation bei Abwesenheit der Räuber in der Natur unrealistisch ist, lassen sich die Volterra-Lotka-Gleichungen durch das Einfügen von sogenannten „sozialen Reibungstermen“ erweitern [2, S. 10]. Fügt man die genannten Terme ein, so erhält man das sogenannte Räuber-Beute-Modell mit beschränktem Wachstum

$$\dot{x} = x(a - by - \beta x)$$

$$\dot{y} = y(-c + dx - \delta y)$$

mit $a, b, c, d, \beta, \delta > 0$. Die sozialen Reibungsterme βx^2 und δy^2 beschreiben den internen Konkurrenzkampf der Beute um Futterressourcen bzw. der Räuber um die

begrenzte Anzahl von Beutetieren [5, S. 480]. Auch hier kann der Satz von Poincaré-Bendixson verwendet werden, um das Modell zu analysieren.

Setzt man $y = 0$ in die erste Gleichung ein, erhält man $\dot{x} = x(a - \beta x)$ sowie die beiden Ruhelagen $(0, 0)$ und $(\frac{a}{\beta}, 0)$. Alle Lösungen auf der x -Achse tendieren gegen $\frac{a}{\beta}$.

Für $x = 0$ erhält man $\dot{y} = y(-c - \delta y)$. Es ist also $\dot{y} < 0$ falls $y > 0$, daher tendieren alle Lösungen auf der y -Achse zum Ursprung. Mittels Linearisierung lässt sich die Stabilität der Ruhelagen bestimmen.

Sei zunächst $f := (x(a - by - \beta x), y(-c + dx - \delta y))^T$, dann ist die Jacobimatrix des Systems gegeben durch

$$D_f(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - 2\beta x & -bx \\ dy & -c + dx - 2\delta y \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der ersten Ruhelage $(0, 0)$ ergibt die Matrix

$$D_f(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Demnach gibt es einen Eigenwert $\mu_1 = a$ mit positivem Realteil und einen Eigenwert $\mu_2 = -c$ mit negativem Realteil. Die Ruhelage ist nach Bemerkung 2.13. ein instabiler Sattel.

Einsetzen der Ruhelage $(\frac{a}{\beta}, 0)$ ergibt die Matrix

$$D_f\left(\frac{a}{\beta}, 0\right) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{\beta} \\ 0 & -c + \frac{ad}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Diesmal erhält man die Eigenwerte $\mu_1 = -a$ und $\mu_2 = \frac{ad}{\beta} - c$. Durch eine Fallunterscheidung ergeben sich dann unterschiedliche Szenarien für die Stabilität der Ruhelage. Ist $ad < c\beta$ dann ist μ_2 negativ und die Ruhelage ist nach Satz 2.12. asymptotisch stabil. Für $ad > c\beta$ ist μ_2 positiv und die Ruhelage ist nach Bemerkung 2.13. ein instabiler Sattel. Für $ad = c\beta$ gilt $\mu_2 = 0$ was dazu führt, dass mit Linearisierung keine Aussage möglich ist. Dieser Fall ist für die spätere Betrachtung jedoch uninteressant.

Als nächstes soll, wie im 1. Modell, der 1. Quadrant mit $x, y > 0$ näher betrachtet werden. Eine zentrale Bedeutung hierfür, hat der Begriff der Nullkline.

Definition 4.2. [14, S. 189f.] Für ein System der Form

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

·

·

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

heißt die Menge der Punkte die die Gleichung $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ erfüllt x_j -Nullkline.

Demnach ist in einem zweidimensionalen System der Schnittpunkt zweier Nullklinien eine Ruhelage.

Zusätzlich zu den beiden Koordinatenachsen, findet man als Nullklinien des Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum noch die beiden Geraden

$$L: a - by - \beta x = 0$$

$$M: -c + dx - \delta y = 0.$$

Je nach Größe der Parameter gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Lage von L und M im 1. Quadranten. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass sich L und M im ersten Quadranten nicht schneiden:

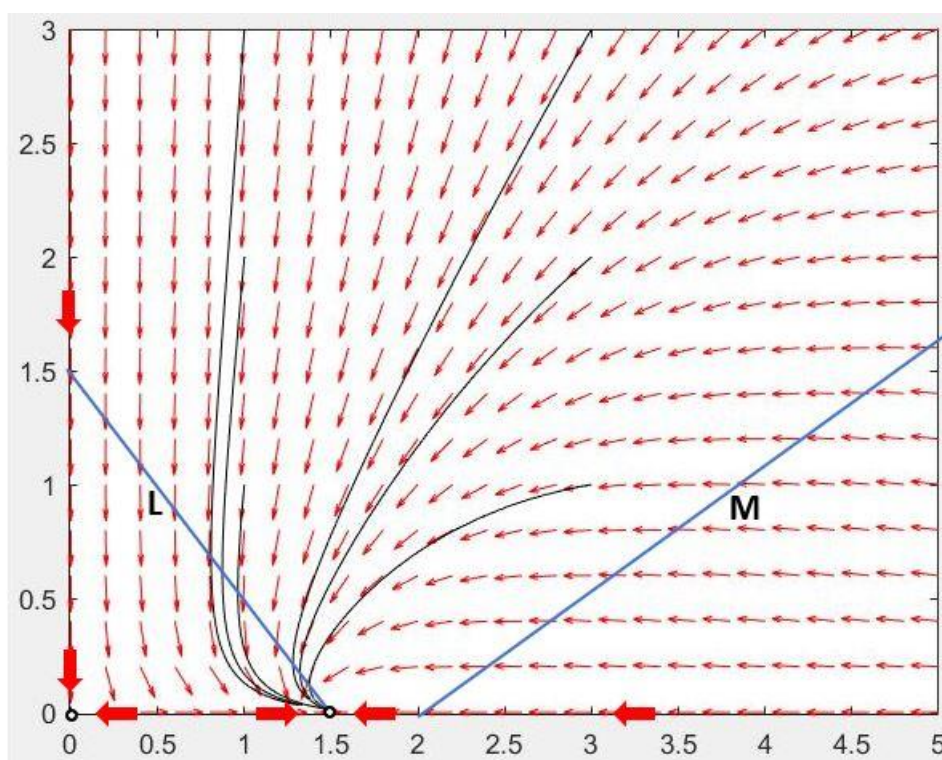


Abbildung 15: Phasenportrait eines Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum mit sich im 1. Quadranten nicht schneidenden Nullklinien

($a = 3$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 3$, $\beta = 2$, $\delta = 5$) [in Anlehnung an 14, S. 244]

Wie man auch dem Phasenportrait entnehmen kann, tendieren alle Lösungen innerhalb des 1. Quadranten zur Ruhelage $\left(\frac{a}{\beta}, 0\right)$. Daraus lässt sich folgern, dass im ersten Fall die Population der Räuber ausstirbt und die Beutepopulation ihren Maximalwert $\frac{a}{\beta}$ annimmt.

Betrachtet man nun den Fall, dass sich L und M im ersten Quadranten schneiden, erhält man mit dem Schnittpunkt $z = \left(\frac{a\delta+bc}{bd+\beta\delta}, \frac{ad-c\beta}{bd+\beta\delta}\right) = (x_z, y_z)$ eine zusätzliche Ruhelage im 1. Quadranten. Die zusätzliche Ruhelage wird, wiederum mit Linearisierung, zunächst auf Stabilität untersucht. Für $ad < c\beta$ liegt die Ruhelage nicht im 1. Quadranten, weshalb diese Situation vernachlässigt werden kann. Für $ad \geq c\beta$ erhält man, durch Einsetzen der Ruhelage in die Jacobimatrix und anschließendes Vereinfachen, die Matrix

$$D_f\left(\frac{a\delta+bc}{bd+\beta\delta}, \frac{ad-c\beta}{bd+\beta\delta}\right) = \begin{pmatrix} -\beta \frac{a\delta+bc}{bd+\beta\delta} & -b \frac{a\delta+bc}{bd+\beta\delta} \\ d \frac{ad-c\beta}{bd+\beta\delta} & -\delta \frac{ad-c\beta}{bd+\beta\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta x_z & -b x_z \\ d y_z & -\delta y_z \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$(\mu + \beta x_z) \cdot (\mu + \delta y_z) + b d x_z y_z.$$

Durch Vereinfachen und Nullsetzen erhält man die Gleichung für die Eigenwerte

$$\mu^2 + (\beta x_z + \delta y_z)\mu + (\beta\delta + bd)x_z y_z = 0.$$

Sei nun $e := (\beta x_z + \delta y_z)$ und $f := (\beta\delta + bd)x_z y_z$. Da alle Parameter > 0 sind, sind auch e und $f > 0$ und die Eigenwerte der Matrix ergeben sich zu

$$\mu_{1/2} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4f}}{2}.$$

Falls der Term unter der Wurzel negativ ist, sind die Realteile beider Eigenwerte < 0 und die Ruhelage ist nach Satz 2.12. asymptotisch stabil. Auch wenn der Term unter der Wurzel positiv ist, ist die Ruhelage asymptotisch stabil, denn wegen

$$\frac{-e + \sqrt{e^2 - 4f}}{2} < \frac{-e + \sqrt{e^2}}{2} = 0$$

sind die Realteile beider Eigenwerte ebenfalls < 0 . Die Ruhelage ist also in jedem Fall asymptotisch stabil.

In dieser Situation gibt es demnach mit z , $(0,0)$ und $\left(\frac{a}{\beta}, 0\right)$ insgesamt drei relevante Ruhelagen. Die Ruhelage $\left(\frac{a}{\beta}, 0\right)$ ist ein Sattel mit stabiler Kurve auf der x -Achse (vgl. Abbildung 16).

Die Nullkline L schneidet die x -Achse in $(\frac{a}{\beta}, 0)$ und die y -Achse in $(0, \frac{a}{b})$. Bildet man ein Rechteck R aus den Punkten $(0,0)$, $(p, 0)$, $(0, q)$ und (p, q) mit $p > \frac{a}{\beta}$ und $q > \frac{a}{b}$, dann ist R positiv invariant.

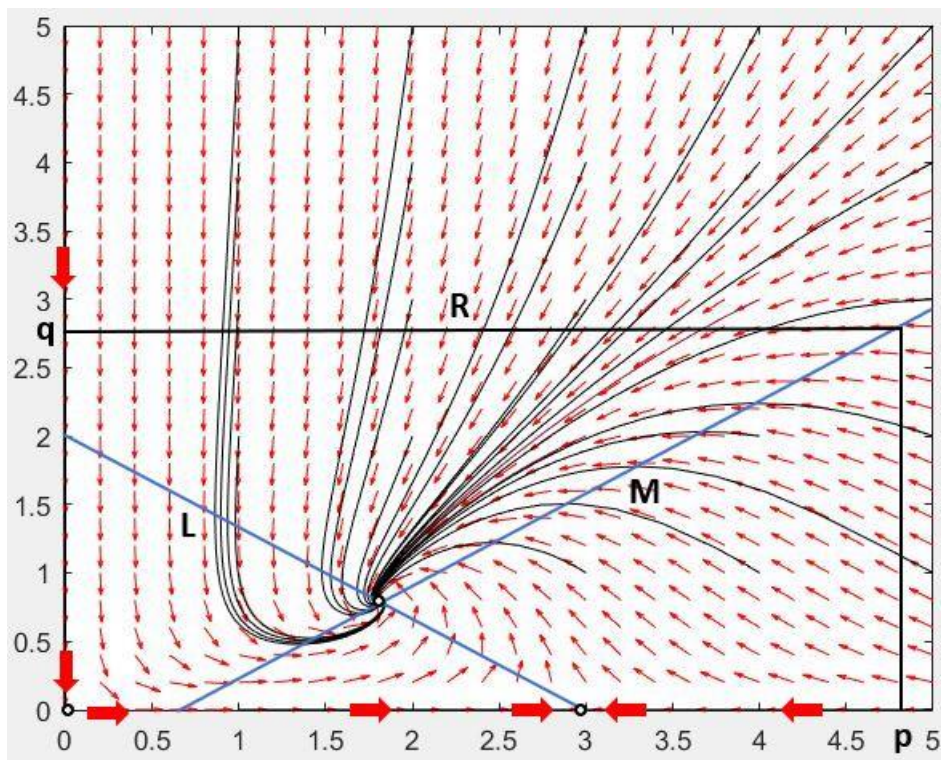


Abbildung 16: Phasenportrait eines Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum mit sich im 1. Quadranten schneidenden Nullklinen

$(a = 6, b = 3, c = 5, d = 8, \beta = 2, \delta = 12)$ [in Anlehnung an 14, S. 245]

Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson (Satz 3.10.) ist also die ω -Limesmenge eines jeden Punktes aus R mit $x, y > 0$ ein Grenzyklus oder enthält eine der drei Ruhelagen z , $(0,0)$ oder $(\frac{a}{\beta}, 0)$. Die Ruhelagen $(0,0)$ und $(\frac{a}{\beta}, 0)$ sind instabil mit stabilen Kurven auf der y -Achse oder der x -Achse. Daher können diese beiden Punkte nicht in der ω -Limesmenge enthalten sein. Das heißt die ω -Limesmenge ist entweder z oder ein z umrundender Grenzyklus. Da R positiv invariant ist, beinhaltet jedes wie oben gewählte Rechteck alle Grenzyklen. Fixiert man also (p, q) , dann folgt, dass für jeden Anfangswert $(x(0), y(0))$ ein t_0 existiert, sodass $x(t) < p$ und $y(t) < q$ ist falls $t \geq t_0$. In Bezug auf das Langzeitverhalten der Lösungen lässt sich demnach folgern, dass sich eine Lösung entweder z oder einem Grenzyklus annähert. Langfristig wird sich eine Räuber-Beute-Population, die die obigen Voraussetzungen erfüllt, entweder einem Gleichgewichtszustand annähern oder periodisch schwanken. Außerdem gibt es wie oben bereits erwähnt Maximalwerte, die keine der Populationen unabhängig von den Anfangswerten überschreiten kann.

5 Fazit

Der Satz von Poincare-Bendixson ist, wie in der Einleitung bereits erwähnt, sehr hilfreich, wenn es darum geht das Langzeitverhalten von Lösungen stetiger zweidimensionaler dynamischer Systeme zu untersuchen. In diesem Zusammenhang eignet sich der Satz besonders gut, um die Existenz periodischer Orbits bzw. periodischer Lösungen in positiv invarianten kompakten Gebieten ohne Ruhelagen nachzuweisen. Wie in Beispiel 3.9. Kapitel 3 gezeigt, ist es mit Hilfe des Satzes möglich, Aussagen über das Lösungsverhalten und speziell über die Existenz periodischer Orbits einer Differentialgleichung zu machen, ohne eine explizite Lösung zu kennen bzw. berechnen zu müssen. Die verallgemeinerte Version des Satzes erweitert den Einsatzbereich nochmals und erlaubt es schließlich sogar, Aussagen über positiv invariante kompakte Gebiete zu machen, die eine endliche Anzahl von Ruhelagen enthalten. Dadurch können auch in der in Kapitel 4 aufgezeigten Situation des Räuber-Beute-Modells mit unbeschränktem Wachstum einfacher Aussagen getroffen und periodische Lösungen nachgewiesen werden. Des Weiteren kann die Verallgemeinerung des Satzes auch sehr hilfreich sein, wenn es darum geht das Langzeitverhalten von Lösungen auf einige wenige Möglichkeiten einzugrenzen. Im Falle des Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum, welches diese Arbeit abschließt, kann der Satz dadurch genutzt werden, um die Entwicklungsmöglichkeiten bei der Populationen vorherzusagen.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Phasenportrait des mathematischen Pendels	8
Abbildung 2: Phasenportrait der Van-der-Pol-Differentialgleichung	9
Abbildung 3: asymptotisch stabile Ruhelage	11
Abbildung 4: stabile Ruhelage	11
Abbildung 5: instabile Quelle	11
Abbildung 6: instabiler Sattel	12
Abbildung 7: instabile Spirale	12
Abbildung 8: Eine auf dem Orbit und der Transversalen wachsende Folge	19
Abbildung 9: Bildung einer doppelpunktfreien geschlossenen Kurve [in Anlehnung an 2, S. 359]	20
Abbildung 10: Zerlegung der Transversalen [in Anlehnung an 2, S. 359]	21
Abbildung 11: Jeder Punkt in U trifft S [in Anlehnung an 2, S. 346]	22
Abbildung 12: Phasenportrait mit positiv invariantem Kreisring	27
Abbildung 13: Anteil der Haie am Gesamtfang [in Anlehnung an 5, S. 474]	29
Abbildung 14: Phasenportrait des klassischen Räuber-Beute-Modells mit unbeschränktem Wachstum mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 4$	32
Abbildung 15: Phasenportrait eines Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum mit sich im 1. Quadranten nicht schneidenden Nullklinen	34
Abbildung 16: Phasenportrait eines Räuber-Beute-Modells mit beschränktem Wachstum mit sich im 1. Quadranten schneidenden Nullklinen	36

7 Literatur und Software

7.1 Literatur

- [1] J. Adamy. *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Auflage. Berlin: Springer Vieweg, 2018.
- [2] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Auflage. Berlin, New York: de Gruyter, 1995.
- [3] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger und H. Stachel. *Grundwissen Mathematikstudium: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.
- [4] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel. *Mathematik*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
- [5] M. Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. New York: Springer, 1979.
- [6] M. Brokate, N. Henze, F. Hettlich, A. Meister, G. Schranz-Kirlinger und T. Sonar. *Grundwissen Mathematikstudium: Höhere Analysis, Numerik und Stochastik*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016.
- [7] K. Burg, H. Haf, F. Wille und A. Meister: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. 6. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [8] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Springer, 1999.
- [9] O. Deiser, C. Lasser, E. Vogt und D. Werner. *12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016.
- [10] W. Forst und D. Hoffmann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Theorie und Praxis*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [11] L. Grüne und O. Junge. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. 2. Auflage. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer, 2016.
- [12] H. Günzel. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. München: Oldenbourg, 2008.
- [13] K.-E. Hellwig und B. Wegner. *Mathematik und theoretische Physik*. Berlin, New York: de Gruyter, 1992.
- [14] M.W. Hirsch, S. Smale und R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. 2. Auflage. Amsterdam, New York: Academic Press, 2004.
- [15] W. Krabs. *Dynamische Systeme: Steuerbarkeit und chaotisches Verhalten*. Stuttgart, Leipzig: Teubner, 1998.
- [16] W. Lentz. *Neuere Entwicklungen in der Theorie dynamischer Systeme und ihre Bedeutung für die Agrarökonomie*. Berlin: Duncker & Humboldt, 1993.
- [17] K.H. Mayer. *Algebraische Topologie*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1989.

- [18] C. Mazza und M. Benaïm. *Stochastic Dynamics for Systems Biology*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2014.
- [19] W. Metzler. *Dynamische Systeme in der Ökologie*. Stuttgart: Teubner, 1987.
- [20] P. Plaschko und K. Brod. *Nichtlineare Dynamik, Bifurkationen und chaotische Systeme*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1995.
- [21] J. W. Prüss und M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Basel: Birkhäuser/Springer, 2010.
- [22] W. Rinow. *Lehrbuch der Topologie*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1975.
- [23] R. Stoop und W.-H. Steeb. *Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen*. Basel: Birkhäuser, 2006.
- [24] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 7. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
- [25] E. Zeidler. *Springer-Handbuch der Mathematik 4*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.
- [26] V.A. Zorich. *Analysis 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [27] J. Taghia (2015). *Using Matlab for Higher Order ODEs and Systems of ODEs*. Zugriff am 20.11.18 unter www.javadtaghia.com/control-system-math/non-linear-control/matlabphaseplot
- [28] T. Weth. *Mathematikstaatsexamen*. Zugriff am 23.11.18 unter http://staatsexamen.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Examina/Mathe_vertieft/Funktionentheorie/Funktionentheorieexamen.htm

7.2 Software

- [29] S. Kimball und P. Mattis. *Gimp*. (Version 2.8.22), 2017.
- [30] The MathWork Inc. *Matlab R2018b*. (Version 9.5), 2018.
- [31] Microsoft Corporation. *Microsoft Word (Microsoft Office 365 ProPlus)*. (Version 1811), 2018.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst wurde. Die Arbeit wurde in dieser oder vergleichbarer Form nicht bereits zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.

Ort, Datum: _____

Unterschrift: _____