Auktionen in Theorie und Anwendung

Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Katja Krause

im August 2019

Betreuer: Prof. Dr. Lars Grüne
Dr. Michael Baumann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeiten setzen wir uns mit den Grundlagen der mathematischen Auktionstheorie auseinander. Anschließend an die Theorie betrachten wir ein reales Beispiel einer Auktion, die Versteigerung der deutschen UMTS-Lizenzen, und vergleichen diese mit den vorher behandelten theoretischen Grundlagen. Da die Arbeit im Rahmen eines Lehramtsstudiums verfasst wurde, betrachten wir uns zum Schluss noch eine Möglichkeit, Auktionstheorie im Unterricht zu behandeln.

1.1 Motivation

Banksy ist einer der bekanntesten Straßen- und Graffitikünstler der heutigen Szene. Seine mit Schablonen gemalten Graffitis findet man an den verschiedensten öffentlichen Orten, wie beispielsweise auf der Grenzmauer in Bethlehem. Seine Werke kritisieren politische Entscheidung auf satirische Art und Weise. Obwohl er berühmt für seine kontroversen Graffitis ist, gibt es ein paar seiner Kreationen auch auf Leinwand oder als Druck (Sotheby's, a). Wie viele seiner Arbeiten erregte auch die Versteigerung seines Gemäldes *Girl with Balloon*, dargestellt in Abbildung 1.1, im Jahr 2018 großes Aufsehen. Gerade als der Hammer fiel und das Bild zu einem Preis von umgerechnet $1,4 Mio. verkauft wurde, zerstörte sich das Bild vor den Augen der Bieter durch einen im Rahmen versteckten Schredder teilweise selbst (Sotheby's, b). Auch wenn diese Auktion im Hinblick auf ihren Ablauf aus der Reihe fällt, folgt sie doch einer grundlegenden mathematischen Theorie, die sich auf einen Großteil an Auktionen verallgemeinern lässt. In der folgenden Arbeit wollen wir uns mit dieser Theorie näher auseinandersetzen.

1.2 Vorgehen und Aufbau

Bevor wir die mathematischen Theorie betrachten, schauen wir uns in Kapitel 2 zunächst die Eigenschaften der vier Auktionsformen Englische Auktion, Holländische Auktion, Verdeckte Erstpreisauktion und Verdeckte Zweitpreisauktion an. In Kapitel 3 beginnen wir mit der Theorie. Zunächst führen wir den Independent-Private-Value-Ansatz ein. Wir werden erkennen, dass wir unter bestimmten Voraussetzungen nicht zwischen vier Formen unterscheiden müssen, sondern nur zwischen zwei, da jeweils zwei Formen den gleichen Regeln folgen. Nachdem wir diese Äquivalenzen gezeigt haben, begeben wir uns auf die Suche nach dem optimalen Bietverhalten in den jeweiligen Auktionen. Das bedeutet, wir wollen wissen, welches Gebot ein Bieter am besten abgibt, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen. Für die Englische sowie die Verdeckte Zweitpreisauktion können wir dieses Optimum bereits im

vor der Auktion

nach der Auktion

Abb. 1.1: Girl with Balloon (Quelle: Sotheby's (b))

Abschnitt 3.3 finden. Für das Optimum der Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion führen wir zuerst in Kapitel 4 das sogenannte Independent-Private-Value-Grundmodell ein. Wir werden zunächst intuitiv eine Optimum finden, dass wir anschließend mathematisch beweisen. Im fünften Kapitel vergleichen wir die Erkenntnisse aus den vorherigen Kapitel mit der realen Versteigerung der deutschen UMTS-Lizenzen und schauen, inwieweit sich die Theorie auf die Praxis übertragen lässt. Abschließend wird in Kapitel 6 eine Unterrichtssequenz vorgestellt, die Teile der vorher behandelten Theorie in der Schule thematisiert.
Die theoretischen Grundlagen sind der bereits vorhandenen Literatur entnommen, jedoch wurde sie teilweise neu strukturiert und mit anschaulichen Beispielen gefüllt. Der Beweis der optimalen Bietstrategie in der Verdeckten Erstpreisauktion wurde ausführlicher gestaltet. Die deutsche UMTS-Auktion wurde in der Literatur bereits spieltheoretisch untersucht, im Rahmen dieser Arbeit wurden die vorhandenen Ergebnisse auf die in der Arbeit behandelte Theorie angepasst. Eine schulische Betrachtung des theoretischen Inhalt ist in der Literatur noch nicht vorhanden, diese wurde, wie auch die verwendeten Unterrichtsmaterialen, selbst entwickelt und erstellt.

1.3 Grundlagen

Bevor wir uns verschiedene Auktionsformen anschauen, wollen wir den Begriff der Auktion zunächst allgemein definieren.

Definition 1.1. Eine Auktion ist eine Marktsituation, mit der innerhalb fest vorgegebener Regeln auf der Basis von Geboten der Teilnehmer Güter verteilt und Zahlungen bestimmt werden.

Diese Definition ist sehr weitläufig gefasst und lässt Raum für die verschiedensten Auktionsdesigns. Berninghaus u. a. (2010) kategorisiert in Kapitel 5 Auktion hinsichtlich der Richtung des Kaufs sowie der Anzahl der verkauften Güter. Möchte der Versteigerer ein oder mehrer Güter verkaufen, spricht man von einer Verkaufsauktion. Möchte der Versteigerer hingegen ein oder mehrer Güter erwerben, für die die Bieter ihm Angebote unterbreiten, so spricht man von einer Einkaufsauktion. Nach der Anzahl der Güter lassen sich Auktionen unterscheiden in Eingutauktionen, hier wird nur ein Gut ver- oder gekauft, und Mehrgutauktionen, hier werden mehrere Güter ver- oder gekauft. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken uns auf Verkaufsauktionen eines Gutes.

2 Auktionsformen

Dieses Kapitel ist angelehnt an das Kapitel 5.2.1 von Berninghaus u. a. (2010) sowie an Kapitel 5 von Berz (2014). In diesem Kapitel betrachten wir vier konkrete Auktionsformen: Die Englische Auktion (engl. English Auction), die Holländische Auktion (engl. Dutch Auction), die Verdeckte Erstpreisauktion (engl. First Price Sealed Bid Auction) sowie die Verdeckte Zweitpreisauktion (engl. Second Price Sealed Bid Auction). Da das die gängigsten Formen sind, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf diese.

2.1 Die Englische Auktion

Die Englische Auktion ist die wohl bekannteste Auktionsform. Sie wird meistens bei der Versteigerung von Kunstobjekten angewendet. Eines der bekanntesten Auktionshäuser, das regelmäßig Englische Auktionen zum Versteigern von Gemälden, Skulpturen, Wein, Schmuck und vielem mehr veranstaltet, ist das *Sotheby's* mit Hauptsitz in London. Da diese Auktionsform auch häufig in Filmen zu sehen ist, hat jeder sofort ein Bild im Kopf: Vorne im Raum steht der Leiter der Auktion mit einem Hammer in der Hand und nennt das Eröffnungsgebot. Danach rufen die Bieter immer höhere Gebote, solange bis keiner mehr bereit ist, ein höheres Gebot zu nennen. Daraufhin beendet der Auktionator die Auktion mit den Worten „Zum ersten, zum zweiten, verkauft für Preis x an den Bieter mit der Nummer y“. So oder so ähnlich laufen auch heute Englische Auktionen häufig ab. Die wichtigsten Formalitäten für uns sind hierbei, dass mit einem Mindestpreis gestartet wird, der dann solange erhöht wird, bis nur noch ein Bieter bereit ist, den Preis zu zahlen. Den Betrag, um den das vorherige Gebot erhöht wird, nennt man Bietinkrement. Oft ist die Höhe der Inkremente vorher festgelegt, das heißt, dass das zuletzt genannte Gebot immer um einen festen Betrag erhöht werden muss. Schauen wir uns zur Verdeutlichung ein kleines Beispiel an: Wir legen das Inkrement auf 5 € fest. Der Auktionator beginnt mit einem Mindestpreis von 30 €; das nächste Gebot muss mindestens 35 € betragen, anschließend 40 € usw. Der Bieter, der bereit ist, den höchsten Preis zu zahlen, erhält den Zuschlag. Das bedeutet, er erhält das versteigerte Objekt und zahlt dafür den Preis in Höhe des finalen Gebotes.

2.2 Die Holländische Auktion

Die Holländische Auktion funktioniert im Prinzip genau gegensätzlich zur Englischen Auktion. Hier startet der Versteigerer mit einem sehr hohen Preis und verringert diesen nach und nach, bis ein Bieter seine Zustimmung durch das Heben der Bieternummer signalisiert.

Derjenige, der zuerst dem genannten Preis zustimmt, erhält den Zuschlag und bekommt das versteigerte Objekt zu dem Preis, bei dem er seine Zustimmung geäußert hat. Auch hier gibt es, wie bei der Englischen Auktion, vorher festgelegte Bietinkremente. Nehmen wir an, es soll ein Strauß Tulpen verkauft werden; der Startpreis beträgt 5 €, das Inkrement beträgt 0,20 €. Zuerst nennt der Auktionator den Preis von 5 €, danach 4,80 €, dann 4,60 €. Er vermindert den Preis solange um 0,20 € bis ein Bieter seine Nummer hebt und den Strauß Tulpen zum genannten Preis kauft. Wie der Name bereits vermuten lässt, wird diese Auktionsform häufig in Holland angewendet, vor allem zur Versteigerung von Schnittblumen.

2.3 Die Verdeckte Erstpreisauktion

Die Verdeckte Erstpreisauktion unterscheidet sich auf den ersten Blick stark von den beiden vorherigen, da hier die Gebote geheim abgegeben werden. Alle teilnehmenden Bieter schreiben ihr Gebot auf einen Zettel und teilen damit dem Leiter der Auktion ihre Zahlungsbereitschaft mit. Anschließend werden die Zettel ausgewertet und der Höchstbietende erhält das versteigerte Objekt zu dem Preis, den er auf seinen Zettel geschrieben hat. Heute werden die Gebote auch teilweise an Computern oder direkt online abgegeben. Zur Verdeutlichung schauen wir uns ein kleines Beispiel an. Versteigert werden soll ein besonderer Löffel; es nehmen drei Bieter an der Auktion teil. Bieter 1 gibt ein Gebot in Höhe 20 €, Bieter 2 in Höhe von 10 € und Bieter 3 in Höhe von 15 € ab. Somit erhält Bieter 1 den Zuschlag und zahlt für den Löffel einen Preis in Höhe von 20 €, also genau in der Höhe seines Gebotes. Wird mehrmals das gleiche höchste Gebot abgegeben, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit, beispielsweise durch ein Losverfahren, einer der entsprechenden Zettel ausgewählt.

2.4 Die Verdeckte Zweitpreisauktion

Der formale Ablauf der Verdeckten Zweitpreisauktion ist zunächst genauso wie der der Verdeckten Erstpreisauktion. Allerdings gibt es bei der Verdeckten Zweitpreisauktion einen wichtigen Unterschied bei der Vergabe des zu versteigernden Objekts. Auch hier erhält der Bieter mit dem höchsten Gebot den Zuschlag, jedoch entspricht der Preis, den er für das Objekt zu zahlen hat, nicht seinem Gebot, sondern dem zweithöchsten. Um das deutlich zu machen, schauen wir uns diese Vorgehensweise am Beispiel aus Abschnitt 2.3 an. Versteigert werden soll wieder ein besonderer Löffel; es nehmen drei Bieter an der Auktion teil. Bieter 1 gibt sein Gebot in Höhe 20 €, Bieter 2 in Höhe von 10 € und Bieter 3 in Höhe von 15 € ab. Somit erhält wieder Bieter 1 den Zuschlag, muss jedoch diesmal für den Löffel nicht die 20 €, die er geboten hat, zahlen, sondern nur das zweithöchste Gebot, also das von Bieter 3. Das heißt Bieter 1 erhält den Löffel für 15 €. Die Literatur gibt keine feste Regel vor, was passiert, wenn mehrmals das gleiche Höchstgebot abgegeben wird. Eine sinnvolle Vorgehensweise wäre, das Gut zwischen den Höchstbietenden mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufzuteilen, wie auch bei der Erstpreisauktion. Es stellt sich nun allerdings die Frage, was das zweithöchste Gebot ist.

Hier kann entweder das andere Höchstgebot oder das zweithöchste Gebot gewählt werden. Das bedeutet, entweder muss der Gewinner einen Preis in Höhe seines eigenen Gebotes oder einen tatsächlich kleineren zahlen. Wie in einem solchen Fall entschieden wird, muss vor der Auktion festgelegt werden. Für unsere weitere Analyse ist die genaue Vorgehensweise nicht von Bedeutung.

Ein Anwendungsbeispiel für die Verdeckte Zweitpreisauktion ist eine Versteigerung auf der Internetplattform Ebay. Das klingt im ersten Moment sehr verwunderlich, da man diese Internet-Auktionen eher der Englischen Auktion zuordnen würde. Wenn man jedoch eine Ebay-Versteigerung einmal genauer verfolgt oder selbst an einer teilnimmt, wird man feststellen, dass sich der Preis in den letzten Sekunden des Angebotes am stärksten ändert. Das liegt am sogenannten *Sniping* (engl. Sniper = Heckenschütze). Das meint, dass erfahrene Bieter ihr Gebot in letzter Sekunde abgeben, sodass die anderen Teilnehmer nicht mehr die Möglichkeit haben, darauf zu reagieren. Diese Strategie wird meist von mehreren Bieter angewandt. Unter diesen Bietern ist die Ebay-Auktion dann wie eine verdeckte Auktion; jeder platziert sein Gebot beinahe gleichzeitig und hinterher wird der Gewinner bekannt gegeben. Nun müssen wir uns noch überlegen, warum es sich um eine Verdeckte Zweitpreis- und keine Verdeckte Erstpreisauktion handelt. Der Grund hierfür ist die sogenannte *Proxy-Logik* (engl. Stellvertreter). Das bedeutet, dass Ebay ein automatisches Bietsystem nutzt, um die Gebote abzugeben. Zum besseren Verständnis ist diese Vorgehensweise in Abbildung 2.1 graphisch veranschaulicht. Zur Verdeutlichung betrachten wir wieder die Versteigerung des Löffels. Der Startpreis für den Löffel beträgt 1 €, Bieter 3 gibt zuerst sein Gebot in Höhe von 15 € ab. Nun lautet das aktuelle Höchstgebot nicht wie erwartet 15 €, sondern 1,50 €, da Ebay das Startgebot immer um ein vorgegebenes Mindestinkrement erhöht. Die Höhe des Inkrements ist abhängig von der Höhe des aktuellen Gebots.[1] Nun steigt auch Bieter 2 in die Auktion ein, da das aktuelle Gebot weit unter dem Preis liegt, den er bereit ist zu zahlen; er bietet 10 €. Da das aber unter dem Gebot von Bieter 3 liegt, steigt das aktuelle Gebot für den Löffel auf 10,50 € (10 € plus 0,50 € Mindestinkrement). Höchstbieter ist weiterhin Bieter 2. Steigt nun auch noch Bieter 1 in die Auktion ein und gibt sein Gebot von 20 € ab, wird das aktuelle Gebot auf 15,50 € erhöht und Bieter 1 wird zum Höchstbieter. Wenn bis zum Ende der Auktion keiner sein Gebot mehr erhöht, erhält Bieter 1 den Zuschlag und erwirbt den Löffel für 15,50 €, also das zweithöchste Gebot plus das Mindestinkrement von 0,50 €. Damit ist nun klar, dass es sich bei Ebay-Auktionen um Verdeckte Zweitpreisauktionen unter den *Snipern* handelt, wenn man das Proxy-Mindestinkrement vernachlässigt.

[1] Die genaue Höhe kann der Ebay-Website entnommen werden: https://www.ebay.de/help/buying/bidding/automatic-bidding?id=4014, Zugriffsdatum: 15.08.2019

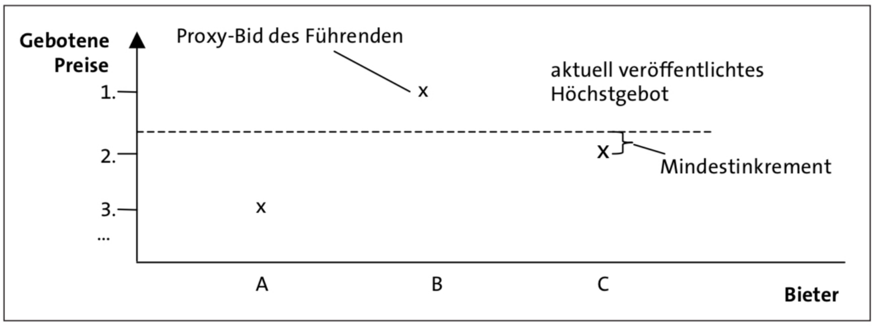

Abb. 2.1: Proxy-Logik der Ebay-Auktion (Quelle: Abb. II.5, Berz (2014))

3 Der Independent-Private-Value-Ansatz (IPV-Ansatz)

Dieses Kapitel ist angelehnt an Kapitel 5.2 von Berninghaus u. a. (2010). Nachdem wir nun wissen, wie die vier Auktionsformen formal gestaltet sind, wollen wir sie näher untersuchen. Dafür beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Theorie des Independent-Private-Value-Ansatzes (IPV-Ansatz). Im folgenden Kapitel betrachten wir allgemeine Merkmale dieses Ansatzes und schauen uns an, welche Aussagen unter diesen Annahmen für unsere vier Auktionsformen getroffen werden können.

3.1 Grundlagen des IPV-Ansatzes

Als Erstes legen wir fest, dass an unseren Auktionen immer $n > 2$ Bieter teilnehmen, $I = \{I_1, ..., I_n\}$ bezeichnet dabei die Menge der Bieter. Außerdem ist jedem Bieter bekannt, wie viele Teilnehmer $|I| = n$ es an der Auktion gibt. Jeder Bieter misst dem zu versteigerndem Gut einen individuellen monetären Wert $v_i \in [0, \tilde{v}] \subset \mathbb{R}$ bei, den er selbst zum Zeitpunkt der Auktion kennt, die anderen Bieter jedoch nicht. Wegen dieser Voraussetzung heißt der Ansatz Independent-Private-Value-Ansatz (dt. Ansatz der unabhängigen, privaten Wertschätzungen). Auch der Versteigerer misst dem Gut einen individuellen Wert bei, diesen bezeichnen wir mit $v_0 \geq 0$.

Wir nehmen an, dass die individuellen Wertschätzungen $v_1, ..., v_n$ als Realisationen der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $V_1, ..., V_n$ modelliert werden, deren Verteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n$ allen bekannt sind. Wir sprechen von einer *symmetrischen Informationsstruktur*, wenn alle individuellen Wertschätzungen aus derselben Verteilung F stammen. Wichtig für unsere spätere Analyse der Auktionsformen ist die Rangordnung der individuellen Wertschätzungen. Wir bezeichnen die k-höchste Wertschätzung der Bieter mit $v_{(k)}$, somit ergibt sich für die Rangordnung der Wertschätzungen:

$$v_{(1)} > v_{(2)} > ... > v_{(n-1)} > v_{(n)} \text{ für alle } v_i \neq v_j \text{ für alle } i \neq j$$

Um die Vorgehensweise des Bieters mathematisch analysieren zu können, definieren wir uns die sogenannte *Bietfunktion*.

Definition 3.1. Die Bietfunktion $\beta_i : [0, \tilde{v}] \to \mathbb{R}_{>0}$ ordnet jedem Bieter I_i in Abhängigkeit von der Auktionsform und seiner Wertschätzung v_i ein Gebot, eine sog. Bietstrategie, $b_i = \beta_i(v_i)$ zu. Diese ist streng monoton wachsend, d.h., $\beta_i(v_i) > \beta_i(\hat{v}_i)$ für $v_i > \hat{v}_i$ und somit invertierbar, d.h., $v_i = \beta_i^{-1}(b_i)$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{B}$ die Menge aller Bietfunktionen.

Jeder Bieter ist natürlich daran interessiert, seine Auszahlung zu maximieren. Wie hoch diese Auszahlung ist, lässt sich mit Hilfe der *Auszahlungsfunktion* bestimmen. Wir vernachlässigen hier die Kosten, die dem Bieter durch die Teilnahme an der Auktion entstehen.

Definition 3.2. Sei p der Preis, zu dem das Gut in der Auktion verkauft wird. Der monetäre Gewinn π_i des Bieters $i \in I$ ist gegeben durch die Funktionen

$$\pi_i = \begin{cases} v_i - p & \text{falls Bieter } I_i \text{ den Zuschlag erhält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Gewinn des Versteigerers wird durch $\pi_0 = p - v_0$ beschrieben.

Der Preis p ist natürlich abhängig von der gewählten Auktionsform und den Geboten der Bieter. Deshalb ist der monetäre Gewinn des Bieters I_i abhängig von seiner eigenen Wertschätzung v_i, seinem Gebot sowie den Geboten der anderen Teilnehmer.

3.2 Die strategische Äquivalenz der Holländischen und der Verdeckten Erstpreisauktion

Nachdem wir nun einige Grundbegriffe geklärt haben, schauen wir uns zunächst zwei Auktionsformen näher an, nämlich die Holländische Auktion und die Verdeckte Erstpreisauktion. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die beiden Auktionen, unter den Voraussetzungen des Abschnittes 3.1, strategisch äquivalent sind. Das meint, dass die Bieter mit gleicher Wertschätzung in beiden Auktionsdesigns sinnvollerweise das gleiche Bietverhalten verfolgen und dadurch auch das gleiche Ergebnis erzielen.

Satz 3.3. Die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion sind strategisch äquivalent.

Beweis. Dieser Beweis ist angelehnt an den Beweis auf Seite 235f. von Berninghaus u. a. (2010). In beiden Auktionsformen wird der Ausgang der Auktion allein über die Gebote der Bieter entschieden. Die Bieter erhalten keine relevanten Informationen über die anderen Teilnehmer. Bei der Verdeckten Erstpreisauktion gibt jeder sein Gebot verdeckt ab und erfährt erst am Ende, ob er den Zuschlag erhält oder nicht. Die Holländische Auktion ist an sich eine offene Auktion, das heißt die Bieter können beobachten, wer den Zuschlag erhält, jedoch ist diese Information für das Bietverhalten nicht relevant, da sie erst in dem Moment generiert wird, in dem die Auktion beendet ist. Somit ist bei beiden Auktionen die einzige relevante Information für den Bieter, ob er den Zuschlag erhalten hat oder nicht. Bei beiden Formen erhält der Höchstbietende den Zuschlag und hat den von ihm gebotenen Preis zu bezahlen. Somit sind die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion strategisch äquivalent. □

Das heißt, wir wissen nun, dass die Bieter sinnvollerweise in beiden Auktionsformen das gleiche Bietverhalten verfolgen, aber wie genau dieses Bietverhalten aussieht, können wir an dieser Stelle noch nicht klar sagen. Das werden wir uns in Kapitel 4 genauer anschauen.

3.3 Die Englische und die Verdeckte Zweitpreisauktion

Nachdem wir in Abschnitt 3.2 die strategische Äquivalenz der Holländischen und der Verdeckten Erstpreisauktion gezeigt haben, klären wir nun in diesem Abschnitt, ob wir einen ähnlichen Zusammenhang auch für die Englische und die Verdeckte Zweitpreisauktion herstellen können. Wir werden sehen, dass wir hier außerdem bereits eine Aussage über das optimale Bietverhalten treffen können.

Das Ziel unserer Analyse ist es, herauszufinden, welches Gebot Bieter I_i am besten abgibt, um seinen Gewinn zu maximieren. Dieses Gebot ist natürlich abhängig von der Wertschätzung v_i des Bieters i. Diese beiden Größen werden einander mit Hilfe der Bietfunktion β zugeordnet, die wir bereits in *Definition 3.1* festgelegt haben. Das heißt, wir suchen eigentlich die optimale Bietfunktion, auch Bietstrategie genannt, für Bieter I_i. In manchen Fällen gibt es die eine optimale Bietstrategie, die immer den größtmöglichen erwarteten Gewinn $E[\pi_i]$ für Bieter I_i bringt, unabhängig davon, welche Strategie die anderen Bieter verfolgen. Eine solche Strategie bezeichnet man als *dominant*. Formal definiert bedeutet das:

Definition 3.4. Eine Bietfunktionen $\beta_i{}^*$ heißt *dominante Strategie*, wenn für alle $v_i \in [0, \tilde{v}]$ gilt:

$$E[\pi_i(\beta_1(V_1), \ldots, \beta_{i-1}(V_{i-1}), \beta_i{}^*(v_i), \beta_{i+1}(V_{i+1}), \ldots, \beta_n(V_n))]$$

$$\geq E[\pi_i(\beta_1(V_1), \ldots, \beta_{i-1}(V_{i-1}), b_i, \beta_{i+1}(V_{i+1}), \ldots, \beta_n(V_n))]$$

für alle erlaubten Gebote b_i und für alle $\beta_j \in \mathcal{B}$.

Der nächste Satz sichert uns nun, dass es genau eine solche dominante Strategie für die Englische und die Verdeckte Zweitpreisauktion gibt.

Satz 3.5. Im IPV-Modell besitzen die Bieter in der Englischen und der Verdeckten Zweitpreisauktion jeweils die dominante Strategie, ihre Gebotsgrenze bzw. ihr Gebot gleich ihrer individuellen Wertschätzung zu setzen, d.h., $b_i = v_i$ für alle $i \in I$.

Beweis. Dieser Beweis ist angelehnt an den Beweis auf Seite 239f. von Berninghaus u. a. (2010). Wir betrachten zuerst die Englische Auktion, anschließend die Verdeckte Zweitpreisauktion.

1. Bieter I_i mit Wertschätzung v_i nehme an einer Englischen Auktion teil. Der Bieter I_i kann bis zum Auktionspreis $p = v_i$ aktiv mitbieten, da in der Englischen Auktion der Höchstbieter sein finales Gebot zahlen muss. Würde er weiter bieten, wäre sein Gewinn

im Falle eines Zuschlages negativ. Würde er vorher aussteigen, vergibt er die Chance auf einen positiven Gewinn. Somit ist die Bietgrenze $b_i = v_i$ die dominante Strategie des Bieters in der Englischen Auktion.

2. Der Beweis für die Verdeckte Zweitpreisauktion ist etwas aufwendiger, deswegen unterscheiden wir hier drei Fälle. Bieter I_i mit Wertschätzung v_i nehme an einer Verdeckten Zweitpreisauktion teil. Dabei bezeichne $m_i = \max_{i \neq j} b_j$ das Maximum der Gebote der anderen Bieter.

   a) Bieter I_i bietet genau seine Wertschätzung, also $b_i = v_i$.
   Falls $v_i > m_i$ ist, erhält Bieter I_i den Zuschlag zum Preis $p = m_i$ und sein Gewinn beträgt $\pi_i = v_i - m_i > 0$. Ist seine Wertschätzung kleiner als die der anderen Teilnehmer, also $v_i < m_i$, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt $\pi_i = 0$. Den gleichen Gewinn $\pi_i = 0$ hat er, wenn seine Wertschätzung gleich der höchsten Wertschätzung der anderen Bieter ist, also $v_i = m_i$, unabhängig davon ob er den Zuschlag erhält oder nicht.

   b) Bieter I_i bietet weniger als seine Wertschätzung, also $b_i < v_i$.
   Falls sein Gebot höher ist als die der anderen, d.h., $b_i > m_i$, erhält er den Zuschlag und sein Gewinn beträgt analog zum ersten Fall $\pi_i = v_i - m_i > 0$. Ist sein Gebot kleiner als das der anderen, d.h., $b_i < m_i$, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt $\pi_i = 0$. Das beinhaltet auch den Fall, dass seine individuelle Wertschätzung höher ist, als das höchste Gebot, das abgegeben wurde, also $b_i < m_i < v_i$. Hier hätte Bieter I_i durch Erhöhung seines Gebotes auf einen Wert zwischen m_i und v_i den Zuschlag erhalten und somit seinen Gewinn auf $\pi_i = v_i - m_i > 0$ steigern können.

   c) Bieter I_i bietet mehr als seine Wertschätzung, also $b_i > v_i$.
   Sollte der Bieter I_i den Zuschlag erhalten, beträgt sein Gewinn $\pi_i = v_i - m_i$. Dieser kann nun allerdings negativ sein, nämlich genau dann, wenn das Gebot des Bieters i höher ist als das der anderen Teilnehmer, d.h., wenn $b_i > m_i > v_i$.

   In den drei Fällen wurde klar, dass Bieter I_i sich alle möglichen Ausgänge der Auktion mit positivem Gewinn sichert und mit negativem Gewinn ausschließt, wenn er genau seine Wertschätzung bietet. Er wird sich somit immer die bestmögliche Auszahlung sichern, wenn er genau seine Wertschätzung bietet, unabhängig davon, was die anderen Teilnehmer der Auktion bieten. Somit ist $b_i = v_i$ die dominante Strategie des Bieters.

□

Da in beiden Auktionsformen dominante Strategien existieren, führt das zu einem Gleichgewicht, dem sogenannten *Gleichgewicht in dominanten Strategien*. Ein Gleichgewicht in dominanten Strategien ist ein Strategien-n-Tupel, bei dem es für jeden Spieler nur zu einer Verschlechterung seiner Auszahlung führt, wenn er von seiner Strategie abweicht, unabhängig davon, was die anderen machen. Das heißt, jeder Bieter wird die gleiche Bietfunktion verwenden, nämlich genau $\beta(v_i) = v_i$, jeder bietet also genau seine Wertschätzung. Das führt dazu, dass in der Verdeckten Zweitpreisauktion der Bieter mit der höchsten Wertschätzung den Zuschlag erhält und die zweithöchste Wertschätzung zu bezahlen hat. Das gleiche Ergebnis stellt sich bei der Englischen Auktion ein, wenn wir die Bietinkremente vernachlässigen.

Wenn wir annehmen, dass alle Bieter ihre dominante Strategie verfolgen, können wir eine Aussage über den erwarteten Gewinn des Bieters i treffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Bieter I_i den Zuschlag erhält, ist $P(v_{(1)} = v_i)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass i die höchste Wertschätzung besitzt. Erhält er den Zuschlag, hat er den Preis in Höhe der zweithöchsten Wertschätzung zu zahlen, also $p = v_{(2)}$. Somit ergibt sich für den erwarteten Gewinn $E[\pi_i]$ der Zweitpreis- bzw. der Englischen Auktion unter Verwendung der *Definition 3.2* des monetären Gewinns:

$$E[\pi_i] = (v_i - E[v_{(2)} \mid v_{(1)} = v_i]) \cdot P(v_{(1)} = v_i)$$

Es stellt sich nun die Frage, ob wir auch für die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion dominante Strategien und somit ein Gleichgewicht in dominanten Strategien finden können. Wir schauen uns das Ganze wieder anhand unseres Beispiels aus dem zweiten Kapitel an, nur haben wir diesmal die Wertschätzungen und nicht die Gebote der Bieter gegeben. Versteigert werden soll wieder ein besonderer Löffel; es nehmen drei Bieter an der Auktion teil. Die Wertschätzung von Bieter 1 beträgt $v_1 = 20$ €, die von Bieter 2 $v_2 = 10$ € und Bieter 3 hat eine Wertschätzung von $v_3 = 15$ €. Nehmen wir nun an, Bieter 1 bietet genau seine Wertschätzung, d.h., $b_1 = 20$ €. Wenn nun auch die anderen beiden Bieter ihre Wertschätzungen bieten, erhält Bieter 1 zwar den Zuschlag, sein Gewinn ist jedoch $\pi_i = 0$. Er hätte einen höheren Gewinn erzielt, wenn er weniger als seine Wertschätzung geboten hätte. Das heißt, er hat einen Anreiz, auf jeden Fall weniger als seine Wertschätzung zu bieten. Die Frage ist nun nur, um wie viel er sein Gebot verringern sollte. Wenn er z.B. $b_i = 14$ € bietet, könnte es passieren, dass sein Gebot nicht das höchste ist, wenn Bieter 3 weiterhin seine Wertschätzung bietet. Dann würde er den Zuschlag nicht erhalten, obwohl er die höchste Wertschätzung hat. Somit ist seine beste Strategie immer abhängig davon, was die anderen beiden bieten. Das heißt, für die Holländische sowie für die Verdeckte Erstpreisauktion gibt es keine dominante Strategie. Es gibt auch für solche Situationen, in denen das beste Gebot abhängig ist von den Geboten der anderen Bieter, ein Gleichgewichtskonzept, das sogenannte *Bayes-Gleichgewicht*, das wie folgt definiert ist:

Definition 3.6. Eine Kombination von Bietfunktionen $(\beta_1{}^*, \ldots, \beta_n{}^*)$ heißt *Bayes-Gleichgewicht*, wenn für jeden Bieter $i \in I$ und für alle $v_i \in [0, \tilde{v}]$ gilt:

$$E[\pi_i(\beta^*{}_1(V_1), \ldots, \beta^*{}_{i-1}(V_{i-1}), \beta^*{}_i(v_i), \beta^*{}_{i+1}(V_{i+1}), \ldots, \beta^*{}_n(V_n))]$$

$$\geq E[\pi_i(\beta^*{}_1(V_1), \ldots, \beta^*{}_{i-1}(V_{i-1}), b_i, \beta^*{}_{i+1}(V_{i+1}), \ldots, \beta^*{}_n(V_n))]$$

für alle erlaubten Gebote b_i

Hier suchen wir nicht nach der Bietfunktion, die immer die beste Antwort ist, egal was die anderen Bieter machen, sondern wir suchen die beste Antwort für gesetzte Bietfunktionen der anderen Mitbieter. Ein Bayes-Gleichgewicht ist also ein Bietfunktionen-n-Tupel, bei dem es für jeden Spieler nur zu einer Verschlechterung seiner Auszahlung führt, wenn er von seiner Strategie abweicht, während die anderen ihre Strategie beibehalten. Da eine dominante Strategie immer die beste Antwort auf jede mögliche Strategiekombination der anderen Bieter ist, folgt direkt aus der Definition, dass es sich bei einem *Gleichgewicht in dominanten Strategien* auch um ein *Bayes-Gleichgewicht* handelt.

Wir wollen nun versuchen, für die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion ein solches Bayes-Gleichgewicht zu finden. Hierfür müssen wir jedoch im nächsten Kapitel erst einige Annahmen treffen.

4 Das IPV-Grundmodell

Dieses Kapitel ist angelehnt an das Kapitel 5.2.3 von Berninghaus u. a. (2010) sowie an das Werk von Krishna (2010). In diesem Kapitel begeben wir uns auf die Suche nach einem Bayes-Gleichgewicht für die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion. Dazu führen wir vorher das sogenannte Independent-Private-Value-Grundmodell (IPV-Grundmodell) ein.

4.1 Die vier Annahmen des IPV-Grundmodells

Das IPV-Grundmodell basiert auf den folgenden vier Annahmen:

A1 Die Bieter sind risikoneutral.

A2 Die Wertschätzungen der Bieter sind individuell, voneinander unabhängig und private Information (IPV-Ansatz).

A3 Die Bieter sind (a priori) symmetrisch, d.h. alle Wertschätzungen V_i werden aus derselben Verteilung F gezogen, d.h. $F_i = F_j = F$ für alle $i, j \in I$ (symmetrische Informationsstruktur).

A4 Der Preis des Gutes wird durch die Gebote determiniert.

Diese vier Annahmen grenzen unsere Suche ein. Annahme **A1** ermöglicht es uns, den Nutzen eines Bieters gleich seinem monetären Gewinn π_i zu setzen. Wären unsere Bieter nicht risikoneutral, würden wir sie entweder als risikoscheu oder risikofreudig bezeichnen. Das bedeutet, wenn es verschiedene Alternativen gibt, die den gleichen erwarteten Gewinn haben, jedoch ein unterschiedliches Risiko, dann wählt der risikoscheue Bieter lieber die Alternative mit geringerem Risiko, der risikofreudige Bieter geht hingegen gerne ein größeres Risiko ein. Der risikoneutrale Bieter orientiert sich nur am erwarteten Gewinn. Schauen wir uns ein kurzes Beispiel zur Verdeutlichung an. Wählt der Bieter Alternative 1, erhält er 10 €, wählt er Alternative 2 wird eine Münze geworfen. Zeigt die Münze Zahl, erhält der Bieter 20 €, zeigt die Münze Kopf, erhält der Bieter nichts. In beiden Fällen beträgt der erwartete Gewinn 10 €. Der risikoscheue Bieter würde Alternative 1 wählen, während der risikofreudige Alternative 2 wählt, der risikoneutrale Bieter ist indifferent zwischen beiden Alternativen, da beide den gleichen erwarteten Gewinn haben. Die Annahme **A2** sichert uns erneut, was wir bereits in Abschnitt 3.1 im Rahmen des IPV-Ansatzes festgelegt haben. Annahme **A3** legt das die Zufallsvariablen V_i nicht nur stochastisch unabhängig, sondern auch identisch verteilt sind. Annahme **A4** verhindert, dass der Preis, zu dem das Objekt vergeben wird, durch etwas anderes als die Gebote beeinflusst wird. Das könnte z.B. das Setzen eines Mindestpreises $r > 0$ durch den Auktionator sein. Angenommen dieser liegt in der Verdeckten Zweitpreisauktion zwischen der höchsten und der zweithöchsten Wertschätzung, dann wäre der Preis, den der Höchstbieter bezahlen muss, nicht das zweithöchste Gebot, sondern der gesetzte Mindestpreis. Das heißt, wir nehmen an, dass der Versteigerer das Gut zu jedem Preis $p \geq 0$ verkauft. Außerdem schließt diese Annahme auch das Setzen von Bietinkrementen aus, das heißt in den folgenden Betrachtungen gehen wir davon aus, dass die Inkremente hinreichend klein sind, sodass wir sie vernachlässigen können.

Das bedeutet, das IPV-Grundmodell ist eine Erweiterung der im Kapitel 3.1 vorgestellten Grundlagen. Wir treffen hier nochmals drei zusätzliche Annahmen, die unsere Auktion einschränken, uns dafür aber die Suche nach einem Gleichgewicht ermöglichen. In den folgenden Abschnitten gelten immer die Annahmen des IPV-Grundmodells.

4.2 Das Bayes-Gleichgewicht in der Holländischen und der Verdeckten Erstpreisauktion

Dieser Abschnitt ist angelehnt an das zweite Kapitel des Werks von Krishna (2010). Da wir bereits in *Satz 3.3* die strategische Äquivalenz der Holländischen und der Verdeckten Erstpreisauktion gezeigt haben, werden wir im Nachfolgenden immer nur von der Verdeckten Erstpreisauktion reden. Die Ergebnisse können jedoch genauso auf die Holländische Auktion übertragen werden.

Weil wir für die Holländische und die Verdeckte Erstpreisauktion kein dominantes Gleichgewicht finden konnten, schauen wir nun, ob sich ein symmetrisches Bayes-Gleichgewicht für die beiden Auktionsdesigns finden lässt. Das heißt, wir suchen ein Gleichgewicht mit symmetrischer Verhaltensstruktur, bei dem alle Bieter die gleiche Bietfunktion verwenden. Die Frage ist nun, wie diese optimale Bietfunktion, die sog. Gleichgewichtsbietfunktion, aussieht. Im Folgenden gehen wir immer davon aus, dass alle Bieter unterschiedliche Wertschätzungen haben, das bedeutet, dass nicht mehrmals das gleiche Gebot abgegeben wird. Es ist offensichtlich, dass es für Bieter I_i nicht sinnvoll ist, mehr als die eigene Wertschätzung, also $b_i > \beta(v_i)$, zu bieten, da er so zwar den Zuschlag erhalten, jedoch einen Verlust machen könnte. Außerdem würde Bieter I_i mit Wertschätzung $v_i = 0$ nie ein Gebot größer als null abgeben, da er dann Verlust machen würde, deshalb gilt $\beta(0) = 0$. Das bedeutet, unsere Bietfunktion ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Bieter I_i erhält das Objekt, wenn er das höchste Gebot abgibt. Formal ausgedrückt heißt das, er bekommt den Zuschlag, wenn gilt

$$m_i = \max_{j \neq i} \beta_j(v_j) < b_i$$

Da die Bietfunktion β nach Definition streng monoton wachsend ist, können wir die Ungleichung wie folgt umschreiben:

$$\max_{j \neq i} \beta_j(v_j) = \beta_j(\max_{j \neq i} v_j) = \beta(y_{-i})$$

mit $y_{-i} = \max_{j \neq i} v_j$ als Realisationen der Zufallsvariable $Y_{-i} = \max_i V_{-i}$ und Y_{-i} als höchste Bewertung der $n-1$ übrigen Bieter.

Das heißt, Bieter I_i erhält den Zuschlag, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\beta(y_{-i}) < b_i \\ &\Leftrightarrow y_{-i} < \beta^{-1}(b_i) \end{aligned}$$

Der reale Gewinn, den Bieter I_i mit der Auktion erzielt, ist davon abhängig, ob er den Zuschlag erhält oder nicht. Darüber können wir vor der Auktion nichts aussagen. Wir können jedoch eine Aussage über seinen erwarteten Gewinn treffen, indem wir die Wahrscheinlichkeit, dass Bieter I_i das höchste Gebot abgibt, mit berücksichtigen. Der erwartete Gewinn ergibt sich wie folgt:

$$E[\pi_i(b_i, v_i)] = G(\beta^{-1}(b_i)) \cdot (v_i - b_i)$$

wobei G die Verteilungsfunktion von Y_{-i} bezeichnet.

Er berechnet sich also über die Wahrscheinlichkeit, dass Bieter I_i das höchste Gebot abgibt, multipliziert mit der Differenz aus der Wertschätzung und dem Gebot des Bieters i. Da die Zufallsvariablen $V_1 \ldots, V_n$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, gilt für die Verteilungsfunktion G folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y_{-i} \leq x) \\ &= P(\max\{V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n\} \leq x) \\ &= P(V_1 \leq x, \ldots, V_{i-1} \leq x, V_{i+1} \leq x, \ldots, V_n \leq x) \\ &\overset{\text{stoch..}}{\underset{\text{unabh.}}{=}} P(V_1 \leq x) \cdot \ldots \cdot P(V_{i-1} \leq x) \cdot P(V_{i+1} \leq x) \cdot \ldots \cdot P(V_n \leq x) \\ &\overset{\text{id. vert.}}{=} F^{n-1}(x) \end{aligned}$$

mit F als Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $V_1, \ldots, V_n$ aus der jeder Bieter seine Wertschätzung zieht.

Nun haben wir schon ein paar Informationen über die Gleichgewichtsbietfunktion, jedoch noch nicht genügend, um sie konkret benennen zu können. Deshalb müssen wir uns noch weitere Aspekte des Bietverhaltens anschauen. Das Ziel des risikoneutralen Bieters i ist es, seinen erwarteten Gewinn über die Wahl seines Gebots zu maximieren. Formal bedeutet das, wir suchen das Maximum der Funktion des erwarteten Gewinns. Hierfür leiten wir diese nach dem Gebot b_i ab und setzen die Ableitung gleich null.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[\pi_i(b_i, v_i)]}{\partial b_i} &= g(\beta^{-1}(b_i)) \cdot \beta^{-1\prime}(b_i) \cdot (v_i - b_i) - G(\beta^{-1}(b_i)) \\ &\overset{\text{Abl.}}{\underset{\text{Umkfkt.}}{=}} \frac{g(\beta^{-1}(b_i))}{\beta'(\beta^{-1}(b_i))} \cdot (v_i - b_i) - G(\beta^{-1}(b_i)) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

mit g Dichtefunktion von Y_{-i}.

Da unser gesuchtes Gleichgewicht symmetrisch ist, verwenden alle Bieter dieselbe Bietfunktion und wir können $b_i = \beta(v_i)$ setzen. Das führt dazu, dass gilt:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial E[\pi_i(b_i, v_i)]}{\partial b_i} &= \frac{g(\beta^{-1}(b_i))}{\beta'(\beta^{-1}(b_i))} \cdot (v_i - b_i) - G(\beta^{-1}(b_i)) \\ &= \frac{g(v_i)}{\beta'(v_i)} \cdot (v_i - \beta(v_i)) - G(v_i) \end{aligned}$$

Umformungen ergeben nun:

$$\begin{aligned} & & 0 &\stackrel{!}{=} \frac{g(v_i)}{\beta'(v_i)} \cdot (v_i - \beta(v_i)) - G(v_i) \\ \Leftrightarrow & & g(v_i) \cdot (v_i - \beta(v_i)) &= G(v_i)\beta'(v_i) \\ \Leftrightarrow & & g(v_i)v_i - g(v_i)\beta(v_i) &= G(v_i)\beta'(v_i) \\ \Leftrightarrow & & g(v_i)v_i &= G(v_i)\beta'(v_i) + g(v_i)\beta(v_i) \end{aligned}$$

Bei genauem Hinschauen erkennt man, dass die letzte Zeile äquivalent zu folgender Differentialgleichung ist:

$$\frac{d}{dv_i}(G(v_i)\beta(v_i)) = v_i g(v_i)$$

Diese Differentialgleichung können wir nun nach β auflösen und haben dann eine Bietfunktion gefunden, die ein möglicher Kandidat für die Gleichgewichtsstrategie ist. Hierfür müssen wir zunächst auf beiden Seiten integrieren und die Anfangswertbedingung $\beta(0) = 0$ verwenden:

$$\begin{aligned} & & \frac{d}{dv_i}(G(v_i)\beta(v_i)) &= v_i g(v_i) \\ \Leftrightarrow & & G(v_i)\beta(v_i) - G(0)\beta(0) &= \int v_i g(v_i) dv_i \\ \Leftrightarrow & & \beta(v_i) &= \frac{1}{G(v_i)} \int v_i g(v_i) dv_i \\ \Leftrightarrow & & \beta(v_i) &= \frac{1}{G(v_i)} \int_0^{v_i} y g(y) dy \end{aligned}$$

Diese Darstellungsweise von $\beta(v_i)$ entspricht nun genau dem *bedingten Erwartungswert*, der wie folgt definiert ist:

Definition 4.1. Der *bedingte Erwartungswert* von $X \geq 0$ unter der Bedingung $X < x$ ist gegeben durch

$$E[X \mid X < x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x t f(t) dt$$

mit F Verteilungsfunktion und f Dichte von X.

Wenden wir diese Definition auf $\beta(v_i)$ an, so erhalten wir:

$$\beta(v_i) = E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i]$$

Somit haben wir einen möglichen Kandidaten für das Bayes-Gleichgewicht gefunden. Allerdings haben wir noch nicht gezeigt, dass es für Bieter I_i wirklich die optimale Strategie ist, $\beta(v_i)$ zu bieten, wenn dies alle anderen tun. Dass es sich hierbei wirklich um ein Gleichgewicht handelt, zeigen wir mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz 4.2. Im IPV-Grundmodell ist das symmetrische Gleichgewicht der Verdeckten Erstpreisauktion gegeben durch

$$\beta(v_i) = E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i]$$

wobei Y_{-i} die höchste Bewertung der $n-1$ übrigen Bieter ist.

Beweis. Dieser Beweis ist angelehnt an den Beweis von Krishna (2010) auf den Seiten 15 und 16.
Zur Erinnerung: Die Bietfunktion β ist streng monoton steigend, das heißt im Gleichgewicht gibt der Bieter mit der höchsten Wertschätzung das höchste Gebot ab und bekommt den Zuschlag. Es ist für keinen Bieter optimal, mehr als die Wertschätzung zu bieten.
Annahme: Bieter I_i gibt das Gebot $\beta(z) = \tilde{b_i}$ ab; seine Wertschätzung ist weiterhin v_i. Sein erwarteter Gewinn beträgt dann

$$\begin{aligned}
E[\pi_i(\tilde{b_i}, v_i]) &= G(z)(v_i - \beta(z)) \\
&= G(z)v_i - G(z)\beta(z) \\
&\overset{\beta(z) = E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < z]}{=} G(z)v_i - G(z)E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < z] \\
&\overset{\text{Def. 4.1}}{=} G(z)v_i - \int_0^z zg(y)dy \\
&\underset{\text{Integration}}{\overset{\text{partielle}}{=}} G(z)v_i - G(z)z + \int_0^z G(y)dy \\
&= G(z)(v_i - z) + \int_0^z G(y)dy
\end{aligned}$$

Diesen wollen wir nun mit dem erwarteten Gewinn für das Gebot $\beta(v_i) = \hat{b_i}$ vergleichen. Um diesen zu erhalten, setzen wir in der oberen Gleichung $z = v_i$:

$$E[\pi_i(\hat{b_i}, v_i)] = \int_0^{v_i} G(y)dy$$

Um nun eine Aussage treffen zu können, welches der Gebote einen höheren Gewinn für Bieter I_i bringt, betrachten wir die Differenz der beiden erwarteten Gewinne:

$$\begin{aligned}
E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] &= \int_0^{v_i} G(y)dy - [G(z)(v_i - z) + \int_0^z G(y)dy] \\
&= \int_0^{v_i} G(y)dy - G(z)(v_i - z) - \int_0^z G(y)dy \\
&= G(z)(z - v_i) - \int_{v_i}^z G(y)dy
\end{aligned}$$

Auf den ersten Blick können wir nun jedoch keine Aussage darüber treffen, ob die Differenz größer oder kleiner als null ist. Dabei hilft uns eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $v_i = z$
   Zuerst betrachten wir den einfachsten Fall. Wenn z genau der Wertschätzung v_i von Bieter I_i entspricht, ergibt sich bei beiden Auszahlungen der gleiche Wert und die Differenz ist null.

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = G(z)(z - v_i) - \int_{v_i}^{z} G(y)dy = 0$$

2. Fall: $v_i < z$
   Dieser Fall ist schon ein bisschen komplizierter als der erste. Wir nehmen an, dass $v_i < z$, das heißt, Bieter I_i würde mehr als seine Wertschätzung bieten. Betrachten wir die Differenz der Auszahlungen. $G(y)$ ist eine Verteilungsfunktion und deshalb gilt per Definition $G(y) \geq 0$. Außerdem ist die Differenz $(z - v_i)$ ebenfalls größer als null, da wir voraussetzen, dass $v_i < z$ ist. Damit wissen wir bereits, dass gilt:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = \underbrace{\underbrace{G(z)}_{>0}\underbrace{(z - v_i)}_{>0}}_{>0} - \int_{v_i}^{z} G(y)dy$$

   Nun müssen wir uns noch das Integral näher anschauen. Die Verteilungsfunktion G ist nach Definition monoton wachsend. Es gilt $v_i < z$, deshalb können wir schließen, dass auch das Integral größer als null ist:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = \underbrace{G(z)(z - v_i)}_{>0} - \underbrace{\int_{v_i}^{z} G(y)dy}_{>0}$$

   Da wir jedoch eine Differenz haben, müssen wir uns jetzt noch überlegen, ob der Minuend oder der Subtrahend betragsmäßig größer ist. Hierfür betrachten wir das Ganze einmal geometrisch. Der Minuend $G(z)(z - v_i)$ ergibt ein Rechteck der Länge $z - v_i$ und der Breite $G(z)$, dargestellt in Abbildung 4.1 durch die gepunktete Fläche. Das Integral liefert uns die Fläche, die von der Funktion $G(y)$, z und v_i begrenzt wird, dargestellt durch die blaue Fläche in Abbildung 4.1. Da die Funktion G monoton wachsend ist, ist $G(v_i) < G(z)$ und deshalb der Wert des Integrals $\int_{v_i}^{z} G(y)dy$ betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt des Rechtecks. Somit können wir für die Differenz $E[\beta(v_i), v_i] - E[\beta(z), v_i]$ folgende Aussage treffen:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = G(z)(z - v_i) - \int_{v_i}^{z} G(y)dy > 0$$

   Das bedeutet, wenn Bieter I_i das Gebot $\beta(z)$ abgibt, ist sein erwarteter Gewinn kleiner als wenn er $\beta(v_i)$ bieten würde.

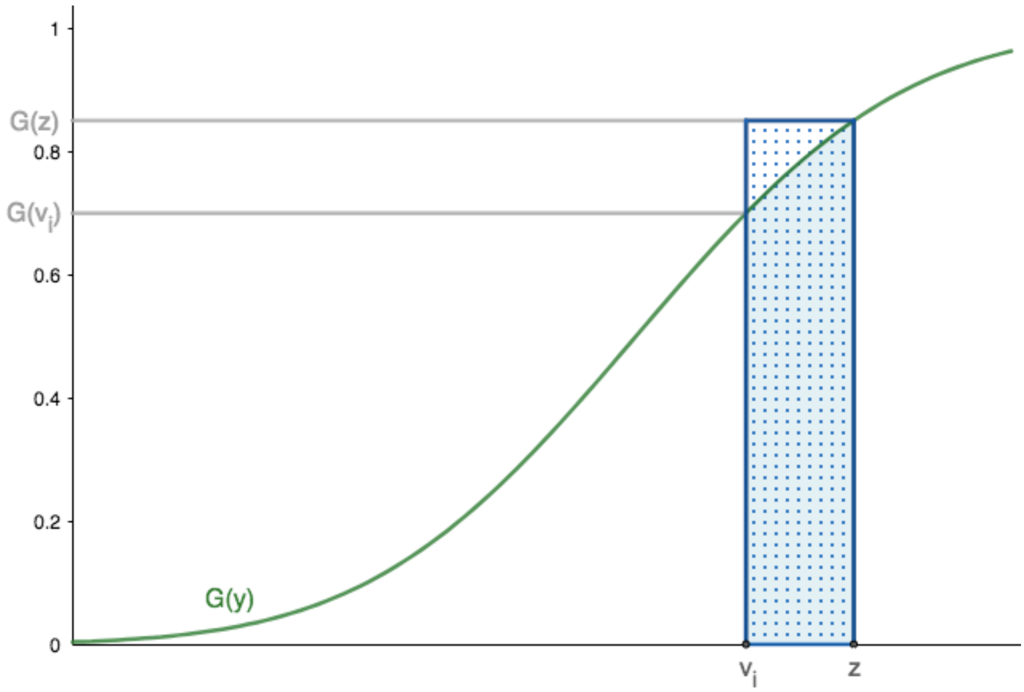

Abb. 4.1: Graphische Veranschaulichung des Falles $v_i < z$ (Quelle: Eigene Graphik. In Anlehnung an Fig. 2.1 Krishna (2010))

3. Fall: $v_i > z$
   Nun betrachten wir noch den letzten möglichen Fall. Das heißt, wir schauen uns an, was passiert, wenn Bieter I_i weniger als seine Wertschätzung bietet. Wir betrachten wieder die Differenz der Auszahlungen: $G(y)$ ist eine Verteilungsfunktion und deshalb gilt wieder $G(y) \geq 0$. Für die Differenz $(z - v_i)$ gilt: $(z - v_i) < 0$, da wir voraussetzen, dass $v_i > z$ ist. Somit wissen wir bereits, dass gilt:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = \underbrace{\underbrace{G(z)}_{>0}\underbrace{(z - v_i)}_{<0}}_{<0} - \int_{v_i}^{z} G(y)dy$$

   Nun betrachten wir wieder das Integral. Die Verteilungsfunktion G ist nach Definition monoton wachsend und es gilt $v_i > z$. Daraus können wir schließen, dass das Integral kleiner als null ist:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = \underbrace{G(z)(z - v_i)}_{<0} - \underbrace{\int_{v_i}^{z} G(y)dy}_{<0}$$

   Diese Bedingung können wir unter Verwendung der Rechenregeln für Integrale umformen, sodass gilt:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = \underbrace{G(z)(z - v_i)}_{<0} + \underbrace{\int_z^{v_i} G(y)dy}_{>0}$$

Somit bekommen wir hier eine Summe mit negativem ersten und positivem zweiten Summanden. Um herauszufinden, welcher der beiden betragsmäßig größer ist, schauen wir uns das Ganze wieder geometrisch an: Der erste Summand $G(z)(z - v_i)$ ergibt ein Rechteck der Länge $z - v_i$ und der Breite $G(z)$, dargestellt in Abbildung 4.2 durch die gepunktete Fläche. Das Integral liefert uns die Fläche, die von der Funktion $G(y)$, z und v_i begrenzt wird, dargestellt durch die orange Fläche in Abbildung 4.2. Da die Funktion G monoton wachsend ist, ist $G(v_i) > G(z)$ und deshalb ist der Wert des Integrals betragsmäßig größer als der Flächeninhalt des Rechtecks. Somit können wir für die Differenz $E[\beta(v_i), v_i] - E[\beta(z), v_i]$ folgende Aussage treffen:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = G(z)(z - v_i) - \int_{v_i}^{z} G(y)dy > 0$$

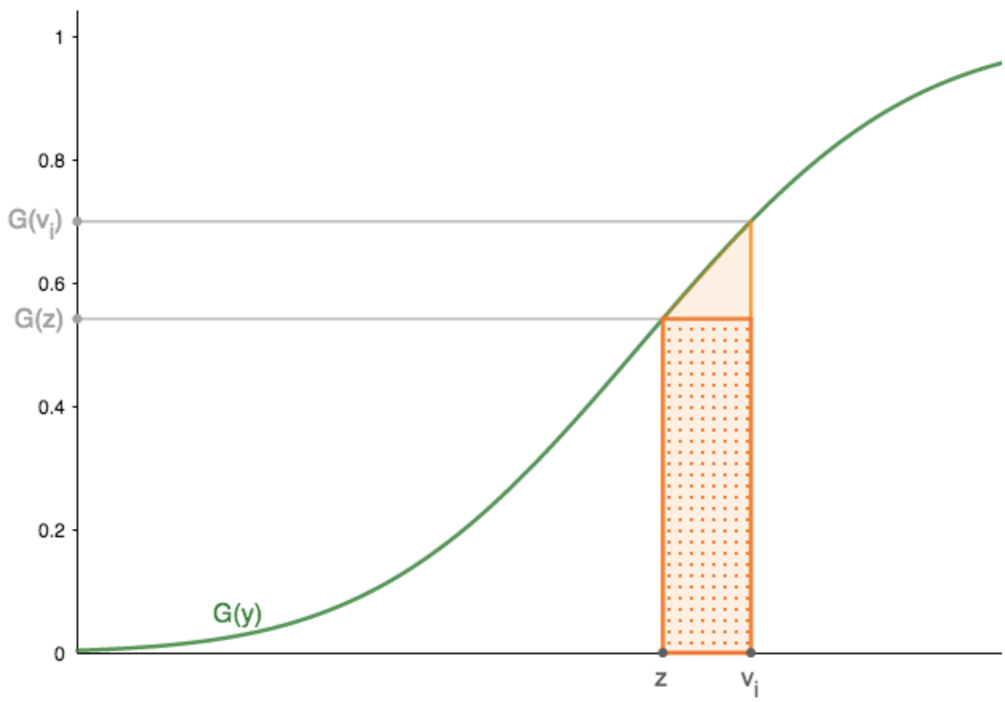

Abb. 4.2: Graphische Veranschaulichung des Falles $v_i > z$ (Quelle: Eigene Grafik. In Anlehnung an Fig. 2.1 Krishna (2010))

Wir haben nun also gezeigt, dass gilt:

$$E[\pi_i(\beta(v_i), v_i)] - E[\pi_i(\beta(z), v_i)] = G(z)(z - v_i) - \int_{v_i}^{z} G(y)dy \geq 0$$

Das bedeutet, Bieter I_i erzielt den größten erwarteten Gewinn, wenn er $\beta(v_i)$ bietet, wenn alle anderen Bieter ebenfalls die Bietfunktion β verwenden. Also ist $\beta(v_i) = E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i]$ das symmetrische Gleichgewicht und der Satz ist bewiesen.

□

Nun kennen wir die Gleichgewichtsstrategie der Verdeckten Erstpreisauktion. Wie wir erwartet haben, besagt sie, weniger als die eigene Wertschätzung zu bieten. Um das nochmals zu verdeutlichen, wollen wir sie etwas anders darstellen:

$$\begin{array}{rccc}
\beta(v_i) = & E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i] & \stackrel{\text{Def. 4.1}}{=} & \frac{1}{G(v_i)} \int_0^{v_i} yg(y)dy \\
\Leftrightarrow & G(v_i)E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i] & = & \int_0^{v_i} yg(y)dy \\
\Leftrightarrow & G(v_i)E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i] & \stackrel{\text{part. Int.}}{=} & v_iG(v_i) - \int_0^{v_i} G(y)dy \\
\Leftrightarrow & E[Y_{-i} \mid Y_{-i} < v_i] & = & v_i - \int_0^{v_i} \frac{G(y)}{G(v_i)}dy
\end{array}$$

Bei dieser Darstellungsweise für β wird auf den ersten Blick klar, dass das Gleichgewichtsgebot kleiner ist als die eigene Wertschätzung. Wie viel kleiner es ist, hängt vom Betrag des Integrals ab, also genau genommen vom Betrag des Quotienten $\frac{G(y)}{G(v_i)}$. Wie wir bereits gesehen haben, ist G die gemeinsame Verteilung der Wertschätzungen der $n-1$ übrigen Bieter und es gilt folgender Zusammenhang:

$$G = F^{n-1}$$

Somit können wir den Quotient umschreiben zu:

$$\frac{G(y)}{G(v_i)} = \left[\frac{F(y)}{F(v_i)}\right]^{n-1}$$

Aus dieser Darstellung wird nun deutlich, dass die Differenz zwischen der eigenen Wertschätzung und dem Gleichgewichtsgebot in der Verdeckten Erstpreisauktion abhängig von der Anzahl n der teilnehmenden Bieter an der Auktion ist. Das bedeutet: Mit steigender Teilnehmerzahl n, wird der Quotient immer kleiner, da $F(v_i) \leq F(y)$ für $y \in [0, v_i]$. Für große n nähert sich das Gleichgewichtsgebot der eigenen Wertschätzung an.

Wir schauen uns nun zur Verdeutlichung ein Beispiel, angelehnt an das Beispiel 5.1 von Berninghaus u. a. (2010), an. Die individuellen Wertschätzungen seien gleichverteilt über $[0, 1]$. Somit gilt für die Verteilungsfunktion F

$$F(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } v_i < 0 \\ v_i & \text{für } 0 \leq v_i \leq 1 \\ 1 & \text{für } v_i > 0 \end{cases}$$

und für die Dichtefunktion f gilt:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } v_i < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq v_i \leq 1 \\ 0 & \text{für } v_i > 0 \end{cases}$$

Das Gleichgewichtsgebot für $v_i \in [0, 1]$ können wir dann berechnen:

$$\begin{aligned} \beta(v_i) =& v_i - \int_0^{v_i} \left[\tfrac{F(y)}{F(v_i)}\right]^{n-1} dy \\ =& v_i - \int_0^{v_i} \left[\tfrac{y}{v_i}\right]^{n-1} dy \\ =& v_i - \frac{1}{(v_i)^{n-1}} \left[\frac{1}{n} y^n\right]_0^{v_i} \\ =& v_i - \left(\frac{1}{(v_i)^{n-1}} \frac{1}{n} (v_i)^n\right) \\ =& v_i - \frac{1}{n} v_i \end{aligned}$$

Das bedeutet, in diesem Fall ist es für Bieter I_i am besten, dieses Gebot in Höhe seiner Wertschätzung vermindert um den n-ten Teil seiner Wertschätzung abzugeben, wenn alle anderen auch dieser Strategie folgen. Hier sehen wir auch nochmal deutlich, dass sich das Gleichgewichtsgebot für steigende Teilnehmerzahl n der eigenen Wertschätzung annähert.

Da wir uns nun in der Theorie sehr ausführlich mit den vier verschieden Auktionsdesigns und deren Gleichgewichtsstrategien auseinandergesetzt haben, wollen wir uns im nächsten Kapitel eine reale Auktion näher anschauen.

5 Die deutsche UMTS-Auktion

Dieses Kapitel ist angelehnt an den Artikel von Lindstädt (2001) sowie an die Dissertation von Niemeier (2002). Wir schauen uns nun die deutsche Versteigerung der UMTS-Lizenzen als Beispiel einer realen Auktion näher an. Eine detaillierte theoretische Analyse der UMTS-Auktion würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir ziehen die Auktion hier nur für einen Vergleich zwischen dem theoretischen IPV-Grundmodell und der realen Wirtschaft heran. Eine genaue Analyse der Auktion kann bei Niemeier (2002) nachgelesen werden.

5.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt schauen wir uns zuerst den UMTS Mobilfunkstandard an. Danach betrachten wir die Teilnehmer sowie die Ausgestaltung der deutschen UMTS-Auktion und abschließend den Verlauf der Auktion.

5.1.1 UMTS Mobilfunkstandard

Die Abkürzung UMTS steht für *Universal Mobile Telecommunication System*. Im Jahr 2000 sollte dieses System das bis dahin vorhandene GSM (Global System for Mobile Communication) ablösen. Im Vergleich zum vorherigen System erlaubt UMTS eine schnellere Übertragungsgeschwindigkeit von Daten, nämlich 384 $kbit/s$, während bei GSM nur 14,4 $kbit/s$ möglich waren. Diese Geschwindigkeitssteigerung wird durch ein höheres Frequenzspektrum sowie eine neue Übertragungstechnik erreicht. Somit war es nun möglich auch Videokonferenzen in einfacher Qualität oder Tonübertragungen in CD-Qualität zu übermitteln. Es war zu erwarten, dass UMTS GSM vollständig ablösen wird. Das lag einerseits daran, dass die Lizenz dazu verpflichtete, bis 2005 mindestens 50% der Bevölkerung mit dem UMTS-Standard versorgen zu können. Andererseits war zu erwarten, dass Unternehmen, die bereits Teilnehmer des deutschen Mobilfunkmarktes sind, ihr Netz komplett auf UMTS umstellen, wenn sie eine Lizenz erhalten, da sie aus Kostengründen GSM und UMTS nicht parallel betreiben. Man konnte auch davon ausgehen, dass die Nachfrage nach UMTS-basierten Leistungen seitens der Bevölkerung stark ansteigt.

5.1.2 Ausgestaltung der Auktion

Im Rahmen der Auktion versteigerte die Regulierungsbehörde zwölf abstrakte Frequenzblöcke. Jeder Bieter durfte für maximal drei Frequenzblöcke bieten. Da die Blöcke abstrakt waren, wurden die Frequenzbereich erst nach der Auktion festgelegt, somit war es egal, ob ein Bieter die Blöcke 1 und 3 oder nebeneinanderliegende Blöcke ersteigerte. Um eine kleine

Lizenz zu erhalten, musste man am Ende der Auktion zwei, für eine große drei Blöcke, ersteigert haben. Es war vorher nicht klar, ob eine kleine Lizenz ausreicht, um ein qualitativ hohes Netz flächendeckend bereitstellen zu können. Die Bieter boten für eine selbstgewählte Anzahl an Blöcken, das bedeutet, es hätte auch der Fall eintreten können, dass ein Bieter am Ende der Auktion nur einen Block und somit keine Lizenz erwirbt. Wäre dieses Szenario eingetreten, hätte man diesen Block unter den Bieter, die eine Lizenz erworben haben, erneut versteigert. Wie viele Lizenzen letztlich vergeben werden, hängt vom Ergebnis der Auktion ab, möglich sind mehrere verschiedene Alternativen, die in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Die Auktion bestand aus mehreren Runden, in denen die Bieter ihre Gebote geheim über PCs abgegeben haben. In jeder Runde hatten die Bieter 40 Minuten Zeit, um ihr Gebot abzugeben. Das abgegebene Gebote musste das vorherige Höchstgebot um ein vorher festgesetztes Mindestinkrement erhöht werden. Dieses betrug zunächst zehn Prozent, wurde später jedoch zuerst auf fünf und dann auf zwei Prozent gesenkt. Der Mindestpreis für jeden Block betrug 100 Mio. DM. Am Ende jeder Runde wurde das Höchstgebot für jeden Frequenzblock und der dazugehörige Bieter preisgegeben. Die niedrigeren Gebote blieben geheim. Wurde ein mehrmals das gleiche Höchstgebot für einen Block abgegeben, dann war derjenige Höchstbieter, der das Gebot zuerst abgegeben hat. Wenn ein Bieter sich einmal dazu entschied, nur noch für eine kleine Lizenz, also für zwei statt drei Blöcke zu bieten, durfte er während der gesamten Auktion nicht mehr für drei Blöcke bieten. Die Auktion war beendet, sobald keine neuen Höchstgebote für die Frequenzblöcke abgegeben wurden. Man nennt dieses Auktionsdesign eine *ansteigende, mehrstufige Auktion*. Das bedeutet, dass die Gebote in jeder Runde steigen und nicht wie beispielsweise in der Holländischen Auktion sinken und, dass es mehrere Runden in der Auktion gibt, ähnlich zu einer Englischen Auktion. Die Hauptziele, die die Regulierungsbehörde mit der Auktion verfolgte, waren ein hoher Erlös bei einer vergleichsweise großen Wettbewerberzahl.

	Anzahl großer Lizenzen	**Anzahl kleiner Lizenzen**	**Anzahl einzelner Blöcke**	**Bieter ohne Block**	**Gesamt-anzahl Lizenzen**
A	4	0	0	3	4
B	3	1	1	2	4
C	3	0	3	1	3
D	2	3	0	2	5
E	2	2	2	1	4
F	2	1	4	0	3
G	1	4	1	1	5
H	1	3	3	0	4
I	0	6	0	1	6
J	0	5	2	0	5

Abb. 5.1: Mögliche Verteilungsszenarien der Lizenzen (Quelle: Eigene Darstellung. In Anlehnung an Tab. 1 Lindstädt (2001))

5.1.3 Teilnehmer der Auktion

An der Auktion nahmen sieben Bieter teil. Vier von diesen besaßen bereits ein eigenes GSM-Netz. Das waren die Deutsche Telekom/T-Mobile, Mannesmann/Vodafone, E-Plus/KPN/NTT/Hutchison und Viag Intercom/British Telecom. MobilCom/France Télécom, Telefonicá/Sonera und Debitel/Swisscom besaßen bis dahin noch kein eigenes deutsches Mobilfunknetz. Die Teilnehmer gingen mit deutlich verschiedenen Voraussetzungen in die Auktion. Vor allem bezüglich des vorhandenen Budgets und der bereits bestehenden Kundenbasis gab es deutliche Diskrepanzen zwischen den Bietern. Auf diesen Aspekt wird hier nicht detaillierter eingegangen, da er für die nachfolgende Betrachtung nicht von großer Bedeutung ist; näheres dazu findet sich in Kapitel 4.4 von Niemeier (2002).

5.1.4 Verlauf der Auktion

Die Auktion lief vom 31.7.2000 bis zum 17.8.2000. Innerhalb dieses Zeitraumes gab es 14 Versteigerungstage und insgesamt 173 Versteigerungsrunden. Zunächst boten alle Bieter für drei Frequenzblöcke. Debitel/Swisscom entschied sich nach dem neunten Versteigerungstag und einer Gebotssumme von 47 Mrd. DM nur noch für zwei Blöcke zu bieten. Somit konnte der Konzern auch später nicht mehr für eine große Lizenz bieten. Nach dem zehnten Versteigerungstag und einer Gebotssumme von 63 Mrd. DM stieg Debitel/Swisscom komplett aus. Damit schieden die Fälle F und J aus Abbildung 5.1 als mögliche Verteilungen der Lizenzen aus. Bei einer Gebotssumme von 78 Mrd. DM, nach dem elften Versteigerungstag, entschieden sich Viag Intercom und Telefonicá/Sonera nur noch für zwei Blöcke zu bieten. Am zwölften Tag wurde das Mindestinkrement von zehn auf fünf Prozent gesenkt. Danach entschieden sich auch E-Plus und MobilCom nur noch für kleine Lizenzen zu bieten. Von nun an boten nur noch die Deutsche Telekom und Mannesmann/Vodafone für große Lizenzen. Somit konnten die Szenarien A, B und C aus Abbildung 5.1 nicht mehr verwirklicht werden. Am vierzehnten Tag wurde das Mindestinkrement erneut gesenkt, diesmal auf zwei Prozent. Kurz danach entschieden sich auch die Deutsche Telekom und Mannesmann/Vodafone nur noch für eine kleine Lizenz zu bieten, somit war nur noch der Fall J aus Abbildung 5.1 möglich. Nachdem die Gebote nicht mehr erhöht wurden, war die Auktion am 17.08.2000 beendet. Es wurden sechs kleine Lizenzen zu einem Preis von je ca. 16,5 Mrd. DM vergeben. Das genaue Endergebnis ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Aus Sicht der Regulierungsbehörde kann man von einem großen Erfolg der Auktion sprechen, da die Hauptziele durch den Gesamterlös von ca. 99 Mrd. DM und einer Wettbewerberzahl von sechs Firmen erreicht wurden.

5.2 Vergleich mit dem IPV-Grundmodell

Dieser Abschnitt ist angelehnt an Kapitel 3.2 der Dissertation von Niemeier (2002). Nachdem wir uns nun einen groben Überblick über die deutsche UMTS-Auktion verschafft haben, schauen wir uns jetzt an, inwieweit sich das theoretische IPV-Grundmodell aus den Kapiteln 3 und 4 auf die Praxis übertragen lässt.

Bieter	**Anzahl der Blöcke**	**Lizenzpreis**
Deutsche Telekom	2	16,582 Mrd. DM
Viag Interkom	2	16,517 Mrd. DM
Mannesmann/Vodafone	2	16,474 Mrd. DM
Telefonicá/Sonera	2	16,446 Mrd. DM
E-Plus	2	16,418 Mrd. DM
MobilCom	2	16,370 Mrd. DM
SUMME	**12**	**98,807 Mrd. DM**

Abb. 5.2: Endergebnis der deutschen UMTS-Auktion (Quelle: Eigene Darstellung. In Anlehnung an Tab. 11 Niemeier (2002))

5.2.1 Risikoaversion

Die erste Annahme des IPV-Grundmodells besagt, dass die teilnehmenden Bieter der Auktion risikoneutral sind. Diese Aussage ist jedoch für die UTMS-Auktion nicht haltbar. Warum das so ist, lässt sich anhand der *Prinzipal-Agent-Theorie* erklären. Diese besagt, dass der Entscheidungsträger eines Unternehmens (Agent) teilweise Entscheidungen trifft, die nicht im Sinne des Eigentümers (Prinzipal) des Unternehmens sind. Das liegt oft an den Anreizstrukturen eines Unternehmens, denn das Gehalt des Entscheidungsträgers, häufig der Manager, hängt vom Erfolg des Unternehmens während dessen Amtszeit ab. Der Erfolg entscheidet auch über die Vertragsverlängerung des Entscheidungsträgers. Wenden wir diese Theorie auf die UMTS-Auktion an. Ziel des Entscheidungsträgers und des Eigentümers des Unternehmens ist vorrangig die Gewinnmaximierung. Ob dieses Ziel jedoch durch den Gewinn der Auktion und den damit verbundenen Erhalt einer UMTS-Lizenz erreicht werden kann, ist unklar und erst nach ein paar Jahren wirklich absehbar. Ob das Unternehmen die Lizenz erhält oder nicht, ist jedoch sofort beobachtbar. Es wird dem Entscheidungsträger positiv angerechnet, wenn er den Zuschlag in der Auktion erhält. Bis jedoch deutlich wird, ob durch die Lizenz wirklich Gewinn erwirtschaftet wird, ist der Entscheidungsträger voraussichtlich nicht mehr im Unternehmen tätig bzw. spielen dabei noch viele weitere Faktoren eine Rolle, die dem Entscheidungsträger nicht direkt zugeordnet werden können. Deswegen sind die Entscheidungsträger durchaus risikoavers, um einen persönlichen Nutzen aus dem Auktionsgewinn zu ziehen und wir können nicht mehr von risikoneutralen Bietern sprechen.

5.2.2 Wertunsicherheit und Wertabhängigkeiten

Die Annahme **A2** des IPV-Grundmodells besagt, dass die Wertschätzungen der Bieter individuell, voneinander unabhängig und private Information sind. Das ist im Fall der UMTS-Auktion jedoch nicht gegeben. Die eigene Wertschätzung ist dem Bieter selbst nicht bekannt. Es war nicht abzusehen, wie UMTS einsetzbar sein wird bzw. wie sich die Nachfrage der Kunden entwickeln wird. Es bestanden große Unsicherheiten bezüglich des Marktes, aber auch bezüglich der Technologie, denn es war nicht klar, ob z.B. Substitute entwickelt werden würden, die UMTS ersetzen. Deshalb wussten die Unternehmen selbst nicht, welchen Wert sie der

Lizenz beimessen. Außerdem sind die Wertschätzungen der verschiedenen Bieter voneinander abhängig, da sich die Unsicherheiten im gleichen Maße auf die Unternehmen auswirken. Das bedeutet, man kann hier nicht mehr von *independent values* sprechen, sondern eher von sogenannten *common values* (engl. gemeinsame Wertschätzung).

5.2.3 Asymmetrie

Die dritte Annahme des IPV-Grundmodells besagt, dass alle Bieter symmetrisch sind, also ihre Wertschätzungen aus der selben Verteilung F ziehen. Auch das ist in der UMTS-Auktion nicht gegeben, da es systematische Unterschiede zwischen den Bietern gibt. Diese Asymmetrie ist dadurch bedingt, dass der Wert der UMTS-Lizenz für die verschiedenen Unternehmen davon abhängig ist, ob das Unternehmen als Neueinsteiger auf den Markt kommt oder bereits etablierter Marktteilnehmer ist. Diese Unterschiede sind allen bereits vor der Auktion bekannt, es ist allerdings unklar, wie groß die Unterschiede genau sind. Somit sprechen wir bei der UMTS-Auktion von einer Auktion mit asymmetrischer Informationsstruktur; das bedeutet, die Bieter ziehen ihre Wertschätzung aus verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen F_i.

5.2.4 Mindestinkrement und -preis

Auch die Annahme **A4** des IPV-Grundmodells wird nicht erfüllt. Der Preis der einzelnen Blöcke wird nicht alleine durch die Gebote der Bieter determiniert. Durch den festgelegten Mindestpreis der einzelnen Frequenzblöcke von 100 Mio DM können die Bieter nicht weniger als diesen bieten. Das bedeutet, alle Bieter mit einer Wertschätzung $v_i < 100$ Mio können nicht an der Versteigerung teilnehmen. Auch das Mindestinkrement widerspricht der Annahme A4. Das Bietverhalten wird dadurch beeinflusst. Es könnte z.B. sein, dass Bieter I_i bis zu seiner Wertschätzung $v_i = 1$ Mrd. DM mitbieten möchte. Wenn das letzte Höchstgebot jedoch beispielsweise 950 Mio DM beträgt, müsste er in der nächsten Runde mindestens $1,045$ Mrd. DM bieten, da das Gebot 10% höher sein muss als das vorherige Höchstgebot. Da das aber seine Wertschätzung übersteigt, kann er nicht mehr bieten und scheidet aus der Auktion aus. Wenn nun beispielsweise alle Wertschätzungen der Bieter zwischen 950 Mio DM und $1,045$ Mrd. DM liegen, wird das Ergebnis der Auktion durch das Mindestinkrement beeinflusst.

5.3 Zusammenfassung

Da die UMTS-Auktion einen so hohen Gewinn erzielt hat, wurden auch alle weiteren Mobilfunkstandards in Deutschland durch Auktionen vergeben. Deshalb ist sie ein gutes Beispiel für eine reale Auktion, wie sie in der Wirtschaft häufig genutzt wird. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich das IPV-Grundmodell kaum auf die Realität übertragen lässt. Verglichen mit realen Auktionen sind die strikten Annahmen nicht haltbar und deshalb können die Ergebnisse, die wir in Kapitel 3 und 4 gewonnen haben, nicht eins zu eins übertragen werden. Jedoch ist dieses Modell sehr gut, um ein Grundverständnis der Auktionstheorie zu erhalten und bereits erste Abschätzungen zu treffen. Durch die Aufweichung der verschiedenen Annahmen wird die mathematische Analyse einer Auktion komplizierter, ist jedoch durch bestimme Erweiterungen des IPV-Grundmodells möglich. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese Erweiterungen nicht näher betrachtet.

6 Auktionstheorie in der Schule

Im folgenden Kapitel wird aufgrund besserer Lesbarkeit von Schülern gesprochen. Damit sind aber, sofern nicht anders erwähnt, immer Schülerinnen und Schüler, also beide Geschlechter, gemeint.

6.1 Motivation

Da diese Arbeit im Rahmen eines Lehramtsstudiums verfasst wurde, stellte sich die Frage, ob Auktionstheorie gewinnbringend für Schüler in den Schulunterricht integriert werden kann. Auktionen begegnen uns in unserem Alltag sehr häufig, fast jeder nimmt einmal in seinem Leben an einer Ebay-Auktion teil oder hört von horrenden Gewinn einer Kunstversteigerung. Allein deswegen gibt es eine Berechtigung, diese auch in der Schule zu thematisieren. Natürlich können nicht alle Inhalte dieser Arbeit im Unterricht angesprochen werden, da einige das Niveau der Schulmathematik übersteigen. Teilbereiche jedoch, wie beispielsweise die Ebay-Auktion, eignen sich sehr gut für den Unterricht, da sie aus der Alltagswelt der Schüler stammen. In den nachfolgenden Abschnitten wird eine Unterrichtssequenz zur Auktionstheorie vorgestellt. Hierbei werden die vier verschiedenen Auktionsformen, die Ebay-Auktion im Speziellen und der Beweis der dominanten Strategie in der Verdeckten Zweitpreisauktion behandelt.

6.2 Didaktische Analyse

Die Auktionstheorie ist kein Inhalt des bayerischen Lehrplans, jedoch kann sie in der Oberstufe im Rahmen eines Wissenschaftspropädeutischen Seminars im Fach Mathematik behandelt werden. Im sogenannten W-Seminars „sollen Schülerinnen und Schüler fachübergreifende Kompetenzen erlangen, um ein wissenschaftliches Studium zu bewältigen und durch eine fragende und kritische Grundeinstellung Wissenschaft und Persönlichkeit zu befördern“ (ISB-Bayern). Im Zuge eines solchen Seminars kann die hier vorgestellte Stundensequenz abgehalten werden. Als Entscheidungshilfe bei der Auswahl der Lerninhalte kann das Modell der Didaktischen Analyse von Wolfgang Klafki, einem wichtigen deutschen Erziehungswissenschaftler, genutzt werden. Nach diesem Modell müssen zuerst folgende Aspekte geklärt werden, bevor ein Lerninhalt in den Unterricht aufgenommen wird: Die Gegenwarts- und Zukunftsdeutung des Lerninhaltes für die Schüler, der exemplarische Gehalt des Lerninhaltes, die thematische Strukturierung und die Zugänglichkeit für die Schüler zum Lernstoff (Apel und Sacher, 2007). Die Inhalte der Sequenz sind sowohl für die Gegenwart als auch für die Zukunft der Schüler wichtig. Sie können an ihre bisherigen Erfahrungen mit Auktionen anknüpfen und ihr Wissen vertiefen. Sie werden auch in Zukunft an Versteigerungen teilnehmen und dabei das neugelernte Wissen einsetzen können. Die Ebay-Versteigerung wurde hier exemplarisch für eine Verdeckte Zweitpreisauktion gewählt, da sie der Alltagswelt der Schüler entstammt. Die Erkenntnisse können auch auf andere Zweitpreisauktionen übertragen werden. Die strategische Äquivalenz zur Englischen Auktion sowie die Gleichgewichtsstrategie der Verdeckten Erstpreisauktion und der Holländischen Auktion werden hier bewusst nicht thematisiert, da diese Inhalte für die Schule zu komplex sind. Die thematische Struktur sowie die Zugänglichkeit werden in Abschnitt 6.2 näher erläutert.

6.3 Methodische Analyse

Die Sequenz ist als eine Einzel- und eine Doppelstunde geplant, sie kann jedoch auch anders aufgeteilt werden, nur die Reihenfolge muss beibehalten werden. Während der gesamten Sequenz werden die folgenden vier Lernziele erarbeitet.

LZ 1	Die Schüler können den Ablauf, den Gewinner sowie den zu zahlenden Preis der Englischen Auktion, Holländischen Auktion, Verdeckten Erstpreisauktion und der Verdeckten Zweitpreisauktion nennen.
LZ 2	Die Schüler können den Ablauf einer Ebay-Auktion beschreiben.
LZ 3	Die Schüler können die Begriffe Sniping-Strategie und Proxy-Logik erklären.
LZ 4	Die Schüler können die dominante Strategie einer Verdeckten Zweitpreisauktion beweisen.

In der ersten Stunde wird das erste Lernziel erarbeitet. Zum Einstieg bringt die Lehrkraft eine Tafel Schokolade mit und fragt die Schüler, wer bereit ist diese zu kaufen und welchen Preis derjenige zahlen möchte. Mehrere Schüler werden die Schokoladen zu unterschiedlichen Preisen haben wollen. Nun fragt die Lehrkraft, wie entschieden werden kann, wer die Schokolade erhält. Die Schüler nennen verschiedene Möglichkeiten. Mögliche Antworten sind, dass derjenige die Schokolade bekommt, der zuerst sein Interesse kundgetan hat oder derjenige, der bereit ist, am meisten zu zahlen. Eventuell schlagen die Schüler selbst die Möglichkeit einer Versteigerung vor, falls dies nicht der Fall sein sollte, bringt die Lehrkraft diese Möglichkeit an. Anschließend fragt die Lehrkraft, wie man eine Auktion zur Versteigerung der Schokolade gestalten könnte. Die Schüler beschreiben daraufhin verschiedene Möglichkeiten, die sie bereits aus ihrem Alltag kennen. Dann wird die Klasse in vier gleich große Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe erhält einen Informationstext (Text 1-4) zu einem der vier Auktionsformen Englische Auktion, Holländische Auktion, Verdeckte Erstpreisauktion, Verdeckte Zweitpreisauktion und füllt zu dieser einen Steckbrief (AB 1) aus. Hierfür hat jede Gruppe 8 Minuten Zeit. Auf dem Steckbrief vermerken die Schüler den allgemeinen Ablauf der Auktionsform, den Gewinner sowie den zu zahlenden Preis. Außerdem notieren sie konkrete Anwendungsbeispiele. Für die Verdeckte Zweitpreisauktion wird im Text kein Anwendungsbeispiel genannt. Hier wird am Ende der Stundensequenz die Ebay-Versteigerung ergänzt. Im Anschluss an die Erarbeitungsphase erklären die Gruppen ihren Auktionstyp anhand der

Versteigerung der Schokolade aus dem Eingangsbeispiel der Klasse. Der ausgefüllte Steckbrief liegt währenddessen unter der Dokumentenkamera. Die anderen Schüler füllen dabei den Steckbrief zur vorgestellten Auktionsform ebenfalls aus. Somit haben die Schüler einen kompakten Gesamtüberblick über die vier Auktionsformen und können zu einem späteren Zeitpunkt nochmals die Merkmale nachlesen. Anschließend erhalten die Schüler verschiedene Aufgaben (AB 2) zu den Auktionsformen, die sie in Partnerarbeit lösen. Hierbei können sie überprüfen, ob sie den Ablauf der Auktionsformen verstanden haben und die wichtigsten Merkmale kennen. Zum Schluss der Stunde wird das Arbeitsblatt gemeinsam verbessert.

In der zweiten und dritten Stunde werden die Lernziele zwei bis vier erarbeitet. Zu Beginn der Doppelstunde setzt die Lehrkraft einen stummen Impuls, indem sie die Ebay-Website über den Beamer zeigt. Die Schüler kennen diese Methode bereits und wissen, dass sie nun ihre Assoziationen zum Impuls nennen sollen. Sie werden berichten, dass sie oder ihre Eltern bereits an Ebay-Auktionen teilgenommen haben oder vielleicht auch etwas über Ebay versteigert haben. In Anknüpfung an die Vorstunde fragt die Lehrkraft, welchem Auktionstyp eine Ebay-Versteigerung zugeordnet werden kann. Die Schüler werden der Meinung sein, dass es sich vermutlich um eine Englische Auktion handelt. Um herauszufinden, ob es sich wirklich um eine Englische Auktion handelt, wird die Ebay-Versteigerung näher betrachtet. Zur Erarbeitung des zweiten und dritten Lernziels erklärt die Lehrkraft den Schülern frontal die Proxy-Logik von Ebay-Auktionen. Dieser Inhalt eignet sich nicht für eine eigenständige Erarbeitung durch die Schüler, da es hier eine genaue Erklärung braucht, um die Vorgehensweise zu verstehen. Das kann durch frontalen Unterricht schneller und effektiver erreicht werden. Die wichtigsten Punkte werden an der Tafel festgehalten, diesen Anschrieb übernehmen die Schüler in ihr Heft (Hefteintrag 1a). Anschließend fragt die Lehrkraft, ob es einen optimalen Zeitpunkt gibt, zu dem man sein Gebot abgeben sollte. Die Schüler werden verschiedene Mutmaßungen anstellen. Während eines entwickelnden Lehrer-Schüler-Gesprächs erklärt die Lehrkraft die Sniping-Strategie. Abschließend dazu wird die Tafelanschrift um die Sniping-Strategie ergänzt (Hefteintrag 1b). Somit wurde das zweite und dritte Lernziel der Unterrichtssequenz gesichert. Nun stellt die Lehrkraft den Schülern die Frage, welche Höhe das Gebot haben sollte, das man in einer Ebay-Auktion abgibt. In einem weiteren Schüler-Lehrer-Gespräch wird die Unterscheidung zwischen Wertschätzung und Gebot deutlich gemacht und der Begriff dominante Strategie definiert und erklärt. Die Schüler werden erkennen, dass es eine dominante Strategie ist, ein Gebot in Höhe seiner Wertschätzung abzugeben. Daran anknüpfend führt die Lehrkraft gemeinsam mit den Schülern den Beweis, dass es wirklich die dominante Strategie ist, seine Wertschätzung zu bieten. Hierfür behandelt sie die drei Fälle nacheinander. Der Beweis ist sehr komplex für die Schüler, da sie in ihrer bisherigen Schullaufbahn nur wenige, einfache Beweise gesehen haben. Da die Stunden jedoch für einen Oberstufenkurs konzipiert wurden, ist es durchaus sinnvoll diesen Beweis mathematisch korrekt zu führen. Die Lehrkraft leitet die Schüler anhand von gezielten Fragen durch den Beweis. Somit können sie leichter folgen und auch die komplizierten Stellen verstehen. Zur Sicherung des vierten Lernziels erhalten die Schüler ein Arbeitsblatt (AB 3) auf dem der Beweis sauber aufgeschrieben ist, jedoch einzelne Lücken gelassen wurden. Diese müssen sie gemeinsam mit ihrem Sitznachbarn füllen. Zum Abschluss der Doppelstunde wird das Arbeitsblatt verbessert und das fehlende Anwendungsbeispiel der Verdeckten Zweitpreisauktion auf dem Arbeitsblatt 1 ergänzt.

7 Abschließende Bemerkung

Diese Arbeit stellt eine Einführung in das Themengebiet der Auktionstheorie dar, indem sie einige grundlegenden Erkenntnisse im Rahmen des IPV-Ansatzes aufzeigt. Diese sind kaum auf die Realität übertragbar, wie die Analyse der UMTS-Versteigerung zeigt. Hier gibt es die Möglichkeit, im Rahmen einer aufbauenden Arbeit anzuknüpfen und die Theorie zu erweitern. Auch das vierte Kapitel liefert Anknüpfungspunkte. Hier wurde der Fall, dass in der Verdeckten Erstpreisauktion mehrmals das gleiche Höchstgebot abgegeben wird, ausgeschlossen. Dieser müsste noch gesondert betrachtet werden. Das sechste Kapitel zeigt, dass sich auch komplexe Themengebiete aus der Mathematik bereits in Schule umsetzen lassen. Es soll als Motivation dienen, auch komplizierte Sachverhalte im Unterricht zu thematisieren. Durch anschauliche Aufbereitung der Inhalte können die Schüler folgen und werden nicht überfordert.

Anhang

Stundenverlaufsskizzen

1. Stunde

Zeit	Phase	Inhalt	Lehrer-Aktivität	Schüler-Aktivität	Sozialform / Medien / did. Begründung
5 min	Einführung	Verkauf einer Tafel Schokolade	Lehrer zeigt Schokolade und fragt, ob sie jemand kaufen möchte Wie kann der Verkauf gestaltet werden?	„Für einen festen Preis“ „Wer das höchste bietet“	Entwickelndes Lehrer-Schüler-Gespräch
8 min	Erarbeitung des 1. LZ	Englische Auktion, Holländische Auktion, Verdeckte Erst-/Zweitpreisauktion	Beobachtet und unterstützt	Erarbeiten Merkmale eines Auktionstyps Füllen AB 1 aus	Gruppenarbeit Text 1-4 AB 1
15 min	Erarbeitung des 1. LZ	Vorstellung der Gruppenarbeit	Beobachtet	Stellen vor Erklären anhand der Schokoladenversteigerung Füllen AB 1 aus	Frontal AB 1
12 min	Sicherung des 1. LZ	Übungen zu den Auktionstypen	Beobachtet und unterstützt	Füllen AB 2 aus	Partnerarbeit AB 2
5 min	Sicherung des 1. LZ	Verbesserung von AB 2	Beobachtet und korrigiert ggf.	Stellen Ergebnisse vor Korrigieren AB 2	Frontal Dokumentenkamera

2. und 3. Stunde

Zeit	Phase	Inhalt	Lehrer-Aktivität	Schüler-Aktivität	Sozialform / Medien
7 min	Einführung	Ebay-Website	Gibt stillen Impuls Welcher Auktionstyp ist eine Ebay-Auktion?	„Das ist die Ebay-Website“ „Da kann man etwas ver-/ ersteigern“ „Englische Auktion“	Stiller Impuls: Ebay-Website Schüler-Lehrer-Gespräch
16 min	Erarbeitung und Sicherung des 2. und 3. LZ	Ablauf einer Ebay-Versteigerung	Erklärung der Proxy-Logik	Hören zu Notieren Hefteintrag	Frontal Hefteintrag 1a
12 min	Erarbeitung und Sicherung des 2. und 3. LZ	Sniping	„Zu welchem Zeitpunkt gibt man am besten sein Gebot ab?“	Geben Ideen Notieren Hefteintrag	Lehrer-Schüler-Gespräch Hefteintrag 1b
10 min	Erarbeitung des 4. LZ	Unterscheidung Wertschätzung – Gebot Dominante Strategie	„Welche Höhe sollte mein abgegebenes Gebot haben?“	Hören zu Geben Ideen	Entwickelndes Lehrer-Schüler - Gespräch
30 min	Erarbeitung des 4. LZ	Beweis der dominanten Strategie	Erklärt Beweis Stellt gezielte Fragen	Hören zu Geben Ideen	Lehrer – Schüler – Gespräch, Frontal
15 min	Sicherung des 4. LZ	Beweis der dominanten Strategie	Beobachtet und unterstützt	Füllen AB aus	AB 3, Partnerarbeit

Die Englische Auktion

Die Englische Auktion ist die wohl bekannteste Auktionsform. Sie wird meistens bei der Versteigerung von Kunstobjekten angewendet. Eines der bekanntesten Auktionshäuser, das regelmäßig Englische Auktionen zum Versteigern von Gemälden, Skulpturen, Wein, Schmuck und vielem mehr veranstaltet, ist das *Sotheby's* mit Hauptsitz in London. Da diese Auktionsform auch häufig in Filmen zu sehen ist, hat jeder sofort ein Bild im Kopf: Vorne im Raum steht der Leiter der Auktion mit einem Hammer in der Hand und nennt das Eröffnungsgebot. Danach rufen die Bieter immer höhere Gebote, solange bis keiner mehr bereit ist, ein höheres Gebot zu nennen. Dann beendet der Auktionator die Auktion mit den Worten „Zum ersten, zum zweiten, verkauft für Preis x an den Bieter mit der Nummer". So oder so ähnlich laufen auch heute Englische Auktionen häufig ab. Die wichtigsten Formalitäten sind hierbei, dass mit einem Mindestpreis gestartet wird, der dann solange erhöht wird, bis kein Bieter mehr bereit ist, den Preis zu zahlen. Den Betrag, um den der Auktionator das vorherige Gebot erhöht, nennt man Bietinkrement. Oft ist die Höhe der Inkremente vorher festgelegt, das heißt, dass das genannte Gebot immer um einen festen Betrag erhöht wird.

Schauen wir uns ein kleines Beispiel an: Es soll eine Vase versteigert werden. Wir legen das Inkrement auf 5€ fest. Der Auktionator beginnt mit einem Mindestpreis von 30€; das nächste Gebot muss mindestens 35€ betragen, das anschließende 40€ usw. Der Bieter, der bereit ist, den höchsten Preis zu zahlen, erhält den Zuschlag. Das bedeutet, er erhält das die Vase und zahlt dafür den Preis in Höhe des finalen Gebotes.

Text 2

Die Holländische Auktion

Bei einer Holländischen Auktion startet der Versteigerer mit einem sehr hohen Preis und verringert diesen nach und nach, bis ein Bieter seine Zustimmung durch das Heben der Bieternummer signalisiert. Die wichtigsten Formalitäten sind hierbei, dass mit einem Höchstpreis gestartet wird, der dann solange vermindert wird, bis ein Bieter bereit ist, den Preis zu zahlen. Den Betrag, um den der Auktionator das vorherige Gebot verringert, nennt man Bietinkrement. Oft ist die Höhe der Inkremente vorher festgelegt, das heißt, dass das genannte Gebot immer um einen festen Betrag vermindert wird. Der Bieter, der dem Preis zuerst zustimmt, erhält den Zuschlag. Das bedeutet, er erhält das Gut zu dem Preis, dem er zugestimmt hat.

Schauen wir uns ein kleines Beispiel an: Es soll ein Strauß Tulpen versteigert werden; der Startpreis beträgt 5€, das Inkrement beträgt 0,20€. Zuerst nennt der Auktionator den Preis von 5€, danach 4,80€, dann 4,60€ usw. Er vermindert den Preis solange um 0,20€, bis ein Bieter seine Nummer hebt und den Strauß Tulpen zum genannten Preis kauft. Wie der Name bereits vermuten lässt, wird diese Auktionsform häufig in Holland angewendet, vor allem zur Versteigerung von Schnittblumen.

Text 3

Die Verdeckte Erstpreisauktion

Bei der Verdeckte Erstpreisauktion werden die Gebote geheim abgegeben. Alle teilnehmenden Bieter schreiben ihr Gebot auf einen Zettel und teilen damit dem Leiter der Auktion ihre Zahlungsbereitschaft mit. Anschließend werden die Zettel ausgewertet und der Höchstbietende erhält das versteigerte Objekt zu dem Preis, den er auf seinen Zettel geschrieben hat. Heute werden die Gebote auch teilweise an Computern oder direkt online abgegeben. Diese Versteigerungsform wird häufig für die Vergabe von Bauaufträgen genutzt.

Schauen wir uns ein kleines Beispiel an: Versteigert werden soll ein besonderer Löffel; es nehmen drei Bieter an der Auktion teil. Bieter 1 gibt ein Gebot in Höhe 20€, Bieter 2 in Höhe von 10€ und Bieter 3 in Höhe von 15€ ab. Somit erhält Bieter 1 den Zuschlag und zahlt für den Löffel einen Preis in Höhe von 20€, also genau in der Höhe seines Gebotes. Wird mehrmals das gleiche höchste Gebot abgegeben, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit einer der entsprechenden Zettel ausgewählt, indem beispielsweise einer der Zettel gelost wird.

Text 4

Die Verdeckte Zweitpreisauktion

Bei der Verdeckte Zweitpreisauktion werden die Gebote geheim abgegeben. Alle teilnehmenden Bieter schreiben ihr Gebot auf einen Zettel und teilen damit dem Leiter der Auktion ihre Zahlungsbereitschaft mit. Anschließend werden die Zettel ausgewertet und der Höchstbietende erhält das zu versteigernde Objekt. Jedoch muss er nicht den Preis zahlen, den er auf seinen Zettel geschrieben hat, sondern nur das zweithöchste abgegebene Gebot. Heute werden die Gebote auch teilweise an Computern oder direkt online abgegeben.

Schauen wir uns ein kleines Beispiel an: Versteigert werden soll ein besonderer Löffel; es nehmen drei Bieter an der Auktion teil. Bieter 1 gibt ein Gebot in Höhe 20€, Bieter 2 in Höhe von 10€ und Bieter 3 in Höhe von 15€ ab. Somit erhält Bieter 1 den Zuschlag und zahlt für den Löffel einen Preis in Höhe von 15€, also genau in der Höhe des zweithöchsten Gebotes.

Die Englische Auktion

Ablauf:

Gewinner:

Zu zahlender Preis:

Anwendungsbeispiele:

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Holländische Auktion

Ablauf:

Gewinner:

Zu zahlender Preis:

Anwendungsbeispiele:

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Verdeckte Erstpreisauktion

Ablauf:

Gewinner:

Zu zahlender Preis:

Anwendungsbeispiele:

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Verdeckte Zweitpreisauktion

Ablauf:

Gewinner:

Zu zahlender Preis:

Anwendungsbeispiele:

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Englische Auktion

Ablauf:
Der Leiter nennt das Eröffnungsgebot. Danach rufen die Bieter immer höhere Gebote, solange bis keiner mehr bereit ist, ein höheres Gebot zu nennen. Dann beendet der Auktionator die Auktion mit den Worten „Zum ersten, zum zweiten, verkauft an Bieter y für x€“.

Gewinner:
Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.

Zu zahlender Preis:
In Höhe des letzten genannten Gebots

Anwendungsbeispiele:
Kunstversteigerungen, Antiquitätenversteigerungen

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Holländische Auktion

Ablauf:
Es wird mit einem Höchstpreis gestartet, der dann solange vermindert wird, bis ein Bieter bereit ist, den Preis zu zahlen. Das macht er durch das Heben seiner Bieternummer deutlich.

Gewinner:
Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.

Zu zahlender Preis:
In Höhe des Gebots, bei dem eine Stimmkarte gehoben wurde

Anwendungsbeispiele:
Schnittblumenversteigerung in Holland

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Verdeckte Erstpreisauktion

Ablauf:
Die Gebote werden geheim abgegeben. Alle teilnehmenden Bieter schreiben ihr Gebot auf einen Zettel und teilen damit dem Leiter der Auktion ihre Zahlungsbereitschaft mit. Anschließend werden die Zettel ausgewertet und der Höchstbietende erhält das versteigerte Objekt.

Gewinner:
Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.

Zu zahlender Preis:
In Höhe des höchsten abgegebenen Gebotes

Anwendungsbeispiele:
Vergabe von Bauaufträgen

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Die Verdeckte Zweitpreisauktion

Ablauf:
Die Gebote werden geheim abgegeben. Alle teilnehmenden Bieter schreiben ihr Gebot auf einen Zettel und teilen damit dem Leiter der Auktion ihre Zahlungsbereitschaft mit. Anschließend werden die Zettel ausgewertet und der Höchstbietende erhält das versteigerte Objekt.

Gewinner:
Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.

Zu zahlender Preis:
In Höhe des zweithöchsten abgegebenen Gebotes

Anwendungsbeispiele:
Ebay-Auktion *(kann erst nach der dritten Stunde ausgefüllt werden)*

Bildquelle: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/10/45/hammer-311343_960_720.png

Auktionsformen

1. Ordne der Aussage die passende Auktionsform zu. Es kann auch für mehr als eine zutreffend sein.

	EA	HA	VEA	VZA
1. Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.	☐	☐	☐	☐
2. Der Gewinner muss zahlt den Preis in Höhe des zweithöchsten Gebotes.	☐	☐	☐	☐
3. Die Gebote werden auf Zetteln abgegeben.	☐	☐	☐	☐
4. Die Gebote werden per Handzeichen abgegeben.	☐	☐	☐	☐
5. Ein Bieter kann während der Auktion mehrere Gebote abgeben.	☐	☐	☐	☐
6. Der genannte Preis für das zu versteigernde Gut wird immer vermindert.	☐	☐	☐	☐
7. Der genannte Preis für das zu versteigernde Gut wird immer erhöht.	☐	☐	☐	☐
8. Die Auktion besteht aus mehreren Runden.	☐	☐	☐	☐

EA (Englische Auktion) VEA (Verdecktet Erstpreisauktion) HA (Holländische Auktion) VZA (Verdeckte Zweitpreisauktion)

2. Ordne jedem Beispiel die passende Auktionsform zu.

Beispiel	Auktionsform
Es wird das Spiel *FIFA 20* für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Der Auktionator nennt zur Eröffnung einen Preis von 5€. Peter ruft ein Gebot von 7€. Danach erhöht Anna auf 10€. Max erhöht nochmal auf 15€. Danach erhöht keiner mehr das Gebot. Der Auktionator sagt: „Zum Ersten, zum Zweiten, verkauft an Max für 15€“.	
Es wird das Spiel *FIFA 20* für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Der Auktionator nennt zuerst einen Preis von 30€. Keiner hebt seine Stimmkarte. Danach verringert der Auktionator den Preis auf 20€. Es hebt immer noch keiner seine Stimmkarte. Der Auktionator verringert den Preis nochmal auf 15€. Nun hebt Max die Karte. Somit erhält er das Spiel für 15€.	

3. Schreibe das Beispiel aus Aufgabe 2 um, sodass es sich um eine Verdeckte Erstpreisauktion bzw. eine Verdeckte Zweitpreisauktion handelt.

Verdeckte Erstpreisauktion

____
____
____
____
____
____
____

Verdeckte Zweitpreisauktion

____
____
____
____
____
____
____

Auktionsformen

1. Ordne der Aussage die passende Auktionsform zu. Es kann auch für mehr als eine zutreffend sein.

	EA	HA	VEA	VZA
1. Der Höchstbietende erhält den Zuschlag.	☒	☒	☒	☒
2. Der Gewinner zahlt den Preis in Höhe des zweithöchsten abgegebenen Gebotes.	☐	☐	☐	☒
3. Die Gebote werden auf Zetteln abgegeben.	☐	☐	☒	☒
4. Die Gebote werden per Handzeichen abgegeben.	☒	☒	☐	☐
5. Ein Bieter kann während der Auktion mehrere Gebote abgeben.	☒	☐	☐	☐
6. Der genannte Preis für das zu versteigernde Gut wird immer vermindert.	☐	☒	☐	☐
7. Der genannte Preis für das zu versteigernde Gut wird immer erhöht.	☒	☐	☐	☐
8. Die Auktion besteht aus mehreren Runden.	☒	☒	☐	☐

EA (Englische Auktion) VEA (Verdecktet Erstpreisauktion) HA (Holländische Auktion) VZA (Verdeckte Zweitpreisauktion)

2. Ordne jedem Beispiel die passende Auktionsform zu.

Beispiel	**Auktionsform**
Es wird das Spiel *FIFA 20* für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Der Auktionator nennt zur Eröffnung einen Preis von 5€. Peter ruft ein Gebot von 7€. Danach erhöht Anna auf 10€. Max erhöht nochmal auf 15€. Danach erhöht keiner mehr das Gebot. Der Auktionator sagt: „Zum Ersten, zum Zweiten, verkauft an Max für 15€“.	Englische Auktion
Es wird das Spiel *FIFA 20* für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Der Auktionator nennt zuerst einen Preis von 30€. Keiner hebt seine Stimmkarte. Danach verringert der Auktionator den Preis auf 20€. Es hebt immer noch keiner seine Stimmkarte. Der Auktionator verringert den Preis nochmal auf 15€. Nun hebt Max die Karte. Somit erhält er das Spiel für 15€.	Holländische Auktion

3. Schreibe das Beispiel aus Aufgabe 2 um, sodass es sich um eine Verdeckte Erstpreisauktion bzw. eine Verdeckte Zweitpreisauktion handelt.

Verdeckte Erstpreisauktion

Es wird das Spiel FIFA 20 für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Anna schreibt auf ihren Zettel 10€, Peter 5€ und Max 15€. Max gewinnt die Auktion und zahlt für das Spiel 15€.

Verdeckte Zweitpreisauktion

Es wird das Spiel *FIFA 20* für die PS4 versteigert. An der Auktion nehmen Anna, Peter und Max teil. Anna schreibt auf ihren Zettel 10€, Peter 5€ und Max 15€. Max gewinnt die Auktion und zahlt für das Spiel 10€.

Dominante Strategie in der Verdeckten Zweipreisauktion

Satz

Im IPV-Modell besitzen die Bieter in der Verdeckten Zweitpreisauktion die dominante Strategie, ihre Gebotsgrenze bzw. ihr Gebot gleich ihrer individuellen Wertschätzung zu setzen, d.h. $b_i = v_i$ für alle $i \in I$.

Beweis

Bieter I_i mit Wertschätzung v_i nehme an einer Verdeckten Zweitpreisauktion teil. Dabei bezeichne $m_i = max_{\{i \neq j\}} b_j$ das Maximum der Gebote der anderen Bieter. Wir betrachten drei Fälle.

1. Fall: ____

   Falls $v_i > m_i$ ist, erhält Bieter I_i den Zuschlag zum Preis _________ und sein Gewinn beträgt ___________. Ist seine Wertschätzung kleiner als die der anderen Teilnehmer, also ________________, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt ___________. Den gleichen Gewinn $\pi_i = 0$ hat er, wenn seine Wertschätzung gleich der ________________Wertschätzung der anderen Bieter ist, also $v_i = m_i$, unabhängig davon ob er den Zuschlag erhält oder nicht.

2. Fall: ____

   Falls sein Gebot höher ist als die der anderen, d.h. ____________, erhält er den Zuschlag und sein Gewinn beträgt analog zum ersten Fall ___________. Ist sein Gebot ______________ als die der anderen, d.h. _________, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt ____________. Das beinhaltet auch den Fall, dass seine individuelle Wertschätzung höher ist, als das höchste Gebot, das abgegeben wurde, also ____________. Hier hätte Bieter I_i durch ___________________ seines Gebotes auf einen Wert zwischen m_i und v_i den Zuschlag erhalten und somit seinen Gewinn auf _____________ steigern können.

3. Fall: ____

   Sollte Bieter I_i den Zuschlag erhalten, beträgt sein Gewinn _______________. Dieser kann nun allerdings ______________ sein, nämlich genau dann, wenn das Gebot des Bieters I_i höher ist als das der anderen Teilnehmer, d.h. ______________________.

In den Fällen wurde klar, dass ein Bieter I_i sich alle möglichen Ausgänge der Auktion mit positivem Gewinn sichert und negativen Gewinn ausschließt, wenn er __________________________________ bietet. Er wird sich somit immer die bestmögliche Auszahlung sichern, wenn er ____________________________ bietet, unabhängig davon, was die anderen Teilnehmer der Auktion bieten. Somit ist $b_i = v_i$ die dominante Strategie des Bieters.

$q.e.d.$

Dominante Strategie in der Verdeckten Zweipreis-auktion

<u>Satz</u>
Im IPV-Modell besitzen die Bieter in der Verdeckten Zweitpreisauktion die dominante Strategie, ihre Gebotsgrenze bzw. ihr Gebot gleich ihrer individuellen Wertschätzung zu setzen, d.h. $b_i = v_i$ für alle $i \in I$.

<u>Beweis:</u>
Bieter I_i mit Wertschätzung v_i nehme an einer Verdeckten Zweitpreisauktion teil. Dabei bezeichne $m_i = max_{\{i \neq j\}} b_j$ das Maximum der Gebote der anderen Bieter. Wir betrachten drei Fälle

1. Fall: *<u>Bieter I_i bietet genau seine Wertschätzung, also $b_i = v_i$.</u>*
   Falls $v_i > m_i$ ist, erhält Bieter I_i den Zuschlag zum Preis $\underline{p = m_i}$ und sein Gewinn beträgt $\underline{\pi_i = v_i - m_i > 0}$. Ist seine Wertschätzung kleiner als die der anderen Teilnehmer, also $\underline{v_i < m_i}$, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt $\underline{\pi_i = 0}$. Den gleichen Gewinn $\pi_i = 0$ hat er, wenn seine Wertschätzung gleich der *<u>höchsten</u>* Wertschätzung der anderen Bieter ist, also $v_i = m_i$, unabhängig davon ob er den Zuschlag erhält oder nicht.

2. Fall: *<u>Bieter I_i bietet weniger als seine Wertschätzung, also $b_i < v_i$.</u>*
   Falls sein Gebot höher ist als die der anderen, d.h. $\underline{b_i > m_i}$, erhält er den Zuschlag und sein Gewinn beträgt analog zum ersten Fall $\underline{\pi_i = v_i - m_i > 0}$. Ist sein Gebot *<u>kleiner</u>* als das der anderen, d.h. $\underline{b_i < m_i}$, erhält er den Zuschlag nicht und sein Gewinn beträgt $\underline{\pi_i = 0}$. Das beinhaltet auch den Fall, dass seine individuelle Wertschätzung höher ist, als das höchste Gebot, das abgegeben wurde, also $\underline{b_i < m_i < v_i}$. Hier hätte Bieter I_i durch *<u>Erhöhung</u>* seines Gebotes auf einen Wert zwischen m_i und v_i den Zuschlag erhalten und somit seinen Gewinn auf $\underline{\pi_i = v_i - m_i > 0}$ steigern können.

3. Fall: *<u>Bieter I_i bietet mehr als seine Wertschätzung, also $b_i > v_i$</u>*.
   Sollte der Bieter I_i den Zuschlag erhalten, beträgt sein Gewinn $\underline{\pi_i = v_i - m_i}$. Dieser kann nun allerdings *<u>negativ</u>* sein, nämlich genau dann, wenn das Gebot des Bieters I_i höher ist als das der anderen Teilnehmer, d.h. $\underline{b_i > m_i > v_i}$.

In den Fällen wurde klar, dass ein Bieter I_i sich alle möglichen Ausgänge der Auktion mit positivem Gewinn sichert und negativen Gewinn ausschließt, wenn er *<u>genau seine Wertschätzung</u>* bietet. Er wird sich somit immer die bestmögliche Auszahlung sichern, wenn er *<u>genau seine Wertschätzung</u>* bietet, unabhängig davon, was die anderen Teilnehmer der Auktion bieten. Somit ist $b_i = v_i$ die dominante Strategie des Bieters.

$q.e.d.$

Ebay-Versteigerung

Proxy-Logik (engl. Stellvertreter)

Ebay benutzt ein automatisches Bietsystem, um die Gebote abzugeben.

Beispiel: Versteigerung eines Löffels

Startpreis: 1€

Gebot Bieter 3: 15€

→ aktuelles Höchstgebot nicht wie erwartet 15€, sondern 1,50€ (Startpreis + vorgegebenes Mindestinkrement)

Gebot Bieter 2: 10€

→ aktuelles Höchstgebot: 10,50€ (Gebot Bieter 2 + Mindestinkrement)

→ Höchstbieter: Bieter 3

Gebot Bieter 1: 20€

→ aktuelles Höchstgebot: 15,50€ (Gebot Bieter 3 + Mindestinkrement)

→ Höchstbieter: Bieter 1

Gewinner der Auktion: Bieter 1

Zu zahlender Preis: 15,50€

→ **Zweitpreisauktion** (Mindestinkrement vernachlässigbar)

Hefteintrag 1b

Sniping-Strategie

Sniping (engl. Heckenschütze) bedeutet, dass erfahrene Bieter ihr Gebot in letzter Sekunde abgeben, sodass die anderen Teilnehmer nicht mehr die Möglichkeit haben, darauf zu reagieren.

→ **verdeckte Auktion** unter Snipern

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Apel und Sacher 2007] APEL, Hans J. ; SACHER, Werner: *Studienbuch Schulpädagogik*. Bad Heilbrunn : Verlag Julius Klinkhardt, 2007

[Berninghaus u. a. 2010] BERNINGHAUS, Siegfried ; EHRHART, Karl-Martin ; GÜTH, Werner: *Strategische Spiele - Ein Einführung in die Spieltheorie*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2010

[Berz 2014] BERZ, Georg: *Spieltheoretische Verhandlungs- und Auktionsstrategien - Mit Praxisbeispielen von Internetauktionen bis Investmentbanking*. Stuttgart : Schäffer-Poeschel Verlag, 2014

[ISB-Bayern] ISB-BAYERN: *W-Seminar Gesamtdokument*. – URL `http://www.oberstufenseminare.bayern.de/download/1388/gesamtw__seminar.pdf`. – Zugriffsdatum: 31.07.2019

[Krishna 2010] KRISHNA, Vijay: *Auction Theory*. London : Elsevier Inc., 2010

[Lindstädt 2001] LINDSTÄDT, Hagen: *Die Versteigerung der deutschen UMTS-Lizenzen - Eine ökonomische Analyse des Bieterverhaltens*. Handelshochschule Leipzig (HHL), 2001 (HHL-Arbeitspapier 42)

[Niemeier 2002] NIEMEIER, Stefan: *Die deutsche UMTS-Auktion - Eine spieltheoretische Analyse*. Schriftenreihe der Handelshochschule Leipzig. Wiesbaden : Deutscher Universitäts-Verlag, 2002

[Oehlrich 2016] OEHLRICH, Marcus: *Organisation: Organisationsgestaltung, Principal-Agent-Theorie und Wandel von Organisationen*. München : Verlag Franz Vahlen, 2016

[Sotheby's a] SOTHEBY'S: *Banksy Biography*. – URL `https://www.sothebys.com/en/artists/banksy`. – Zugriffsdatum: 20.08.2019

[Sotheby's b] SOTHEBY'S: *Sotheby's Gets Banksy'ed at Contemporary Art Auction in London*. – URL `https://www.sothebys.com/en/articles/sothebys-gets-banksyed-at-contemporary-art-auction-in-london`. – Zugriffsdatum: 14.08.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Datum: ______________________ Unterschrift: ______________________