



UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Modellprädiktive Regelung für stochastisches Lastmanagement

Masterarbeit

von

Lisa Krügel

UNIVERSITÄT BAYREUTH

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK

MATHEMATISCHES INSTITUT

Erstgutachter: Prof. Dr. L. GRÜNE
Zweitgutachter: Prof. Dr. A. SCHIELA

Datum:
22.11.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Ziel dieser Arbeit	3
2	Mathematische Grundlagen	5
2.1	Grundlagen der Stochastik	5
2.1.1	Allgemeine Definitionen	5
2.1.2	Markov-Ketten	7
2.2	Kontrolltheoretische Grundlagen	10
2.2.1	Grundlagen der mathematischen Kontrolltheorie	10
2.2.2	Modellprädiktive Regelung	14
3	Modellierung der Kühlschranktemperatur	23
4	Der stochastische Zustand	27
4.1	Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten	27
4.2	Der Erwartungswert	31
4.3	Die Varianz	35
4.4	Das System für den Erwartungswert und die Varianz	37
5	Modellprädiktive Regelung	41
5.1	Deterministisches Modell	41
5.1.1	Die Netzdaten	43
5.1.2	Der Zustand und die Kontrolle	44
5.1.3	Die Kostenfunktion	46
5.1.4	Modellprädiktive Regelung	48
5.1.5	Numerische Resultate	50
5.2	Erweitertes Gesamtmodell	56
5.2.1	Zufallssteuerung der Kühlschränke	57
5.2.2	Zusammenschluss von Haushalten und zentraler Steuerung	60
5.2.3	Numerische Resultate	62
6	Ausblick und Fazit	67

A Implementierung des MPC in Matlab	69
A.1 Bestandteile	69
A.2 Initialisierung der Simulation	70
A.3 Start der Simulation und Ausgabe	71
Verzeichnis der Algorithmen	72
Abbildungsverzeichnis	72
Literaturverzeichnis	77
Eigenständigkeitserklärung	

1 Einführung

1.1 Motivation

Erneuerbare Energien sollen in Deutschland zukünftig den Hauptanteil der Energieversorgung übernehmen und bis 2050 mindestens 80 Prozent der Stromversorgung liefern [6]. Bereits in den vergangenen Jahren stieg der Anteil der Stromerzeugung aus erneuerbaren Energien an, sodass nach Branchenangaben der Ökostrom-Anteil in Deutschland bis September 2019 auf 42.9 Prozent erhöht werden konnte. Damit wurde erstmals mehr Strom aus erneuerbaren Energien als aus Kohle erzeugt [25]. Durch die Energiewende entstehen neue Chancen, aber auch neue Risiken. Der grüne Strom wird vor allem dezentral im windreichen Norden und sonnigen Süden erzeugt. Um auch zukünftig eine stabile und sichere Stromversorgung zu gewährleisten, müssen die Stromnetze an die veränderte Erzeugungsstruktur angepasst werden [24]. Derzeit gibt es in Deutschland so wenig Stromausfälle wie in kaum einem anderen Land. Um dies weiterhin zu gewährleisten und die Versorgungssicherheit auf hohem Niveau zu halten, ist ein gut ausgebautes Übertragungsnetz essentiell. Es verknüpft die verschiedenen Erzeugungsarten und Regionen miteinander und macht die Stromversorgung aus erneuerbaren Energiequellen damit stabiler [7].

Die erneuerbaren Energien müssen kontinuierlich in das Stromversorgungssystem integriert werden, damit sie die konventionellen Energieträger zunehmend ersetzen. Dies erfordert einen grundlegenden Umbau des Energieversorgungssystems, das an die sich zeitlich stark ändernden Angebots- und Nachfragesituationen angepasst werden muss. Beispielsweise muss der Stromverbrauch flexibler werden, was durch sogenanntes Lastmanagement oder auch Demand Side Management ermöglicht wird. Hierbei wird Strom gezielt dann verbraucht, wenn gerade viel davon zur Verfügung steht. Durch die Steuerung der Verbrauchsseite kann auch die Höchstlast und damit der Bedarf an gesicherter Leistung reduziert werden [6]. So können die Stromverbraucher einen Beitrag zur Versorgungssicherheit leisten. Auch private Haushalte können das Netz durch Lastmanagement entlasten. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, beispielsweise mittels Speicherung des durch Photovoltaikanlagen erzeugten Stroms in Batterien. Dabei ist nicht nur die technische Umsetzbarkeit zu beachten, sondern auch der Einfluss auf die Netzregulierung. Erste mathematische Ansätze zur Verwendung solcher Energiespeicher sind in der Arbeit von Braun [5] zu finden. Darin wird gezeigt, auf welche

Weise ein Zusammenschluss von Haushalten, die einen Teil ihres Stroms selbst durch Sonnenenergie gewinnen, unter Verwendung spezieller Batterien geregelt werden kann. Die Energiespeicher dienen dabei zur Stabilisierung dieses Mikronetzes.

Die netzoptimierende Maßnahme Demand Side Management in Haushalten wirkt durch die zeitliche Verschiebung des Betriebs von Haushaltsgeräten. Dies bedeutet, dass der Strombezug eines Haushaltes zu einem definierten Zeitpunkt verringert und dafür zu einem späteren oder früheren Zeitpunkt entsprechend erhöht wird. Bisher standen dabei hauptsächlich zwei Anwendungen im Fokus: Reduktion des Energieeinkaufspreises durch Lastverschiebung in billigere Stunden und verbesserte Integration erneuerbarer Erzeugung [12]. Darüber hinaus kann die Maßnahme aber auch zur Vermeidung kritischer Netzsituationen eingesetzt werden, indem in solchen Fällen der Netzbezug an betroffenen Netzanschlusspunkten erhöht oder reduziert wird. In typischen Privathaushalten ist eine Vielzahl unterschiedlicher Geräte vorhanden, welche prinzipiell zu beliebigen Zeiten betrieben werden können. Da das Demand Side Management aber stark in den Tagesablauf der Verbraucher eingreift, kommen nur Gerätetypen in Frage, bei denen die Akzeptanz zum flexiblen Betrieb vorhanden ist. Zwei Gruppen von Geräten haben sich in bisherigen Studien als geeignet erwiesen: zum einen Spülmaschinen, Waschmaschinen und Wäschetrockner, bei denen eine Verschiebung des Startzeitpunktes in gewissen zeitlichen Rahmen keine Nachteile für den Nutzer hat, und zum anderen Kühl- und Gefriergeräte, welche meist durchgehend ohne Nutzerinteraktion in Betrieb sind [12].

Diesen Vorteil von Haushaltskühlschränken haben auch Angeli und Kountouritotis [1] erkannt und für einen Ansatz zur Netzstabilisierung genutzt. Da Kühlschränke zwar zu jeder Tages- und Jahreszeit in Betrieb sind, aber nur einen Teil der Zeit arbeiten und kühlen, können diese Kühlzeiten durch das Netz gesteuert werden. Des Weiteren benötigen Kühl- und Gefriergeräte ungefähr 23% des Haushaltsstromverbrauches in einem Jahr [8]. In [1] wird zur Regelung der Geräte die Netzfrequenz verwendet und diese Steuerungsgröße dadurch auch stabilisiert. Allerdings ist eine Steuerung von Kühlschränken nur auf Basis von Netzgrößen, wie der Netzfrequenz oder des Strompreises, nicht möglich, da weiterhin eine durchgehend angemessene Kühlung der Lebensmittel garantiert werden muss.

Es braucht also eine Kontrollstrategie, die die Kühlschränke auf Basis ihrer Temperatur und Netzgrößen so regelt, dass die Geräte genau dann arbeiten, wenn viel Strom vorhanden ist. Zudem wird eine zentrale Steuereinheit benötigt, die anhand des Stromverbrauchs, der Stromerzeugung und der Kühlschrankschaltung der Haushalte eine optimale Steuerungsgröße für das Netz berechnet, um so möglichen Schwankungen entgegenzuwirken.

1.2 Ziel dieser Arbeit

Zu Beginn dieser Arbeit werden wir die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Kontrolltheorie erarbeiten. Daraufhin beschäftigen wir uns mit den Methoden zur Lösung eines optimalen Steuerungsproblems durch modellprädiktive Regelung und gehen dabei vor allem auf Stabilitätsbegriffe und optimale Steuerung ein.

Anschließend dienen Kapitel 3 und Kapitel 4 zur Analyse der Kühlschranktemperatur und der stochastischen Größen des Gerätes. Bei der Modellierung der Temperatur und des Systems orientieren wir uns an dem zugrundeliegenden Paper *A Stochastic Approach to „Dynamic Demand“ Refrigerator Control* [1].

Daraufhin werden wir in Kapitel 5 die einzelnen Bestandteile des modellprädiktiven Reglers modellieren und analysieren. Zum einen werden wir die vorangegangenen Resultate der Arbeit verwenden, zum anderen die Modellgrößen so beschreiben und wählen, dass sie das gegebene Problem optimal modellieren. Daraufhin werden wir den Regler und das optimale Steuerungsproblem formulieren und uns dabei an *Hierarchical distributed optimization and predictive control of a smart grid* [5] orientieren. Nachdem wir das Optimierungsproblem untersucht haben, erweitern wir das Modell um die dezentrale probabilistische Steuerung der Haushaltskühlschränke. Zunächst untersuchen wir die zufällige Schaltung der Geräte und verbinden sie dann mit dem bereits erarbeiteten Regler.

Abschließend ziehen wir ein Fazit, welche Chancen und Herausforderungen für das betrachtete Modell bestehen und geben einen Ausblick auf mögliche weitere Anpassungen.

2 Mathematische Grundlagen

In dieser Arbeit wollen wir bestehende Modelle der modellprädiktiven Regelung als Grundlage verwenden und sie mit bekannten Methoden aus den Bereichen der Differentialgleichungen und der Stochastik erweitern. Zunächst wollen wir also die zugrunde liegenden Verfahren verstehen. Dazu beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der Stochastik und den gewöhnlichen Differentialgleichungen. Anschließend gehen wir zur Kontrolltheorie über und führen schließlich die modellprädiktive Regelung ein.

2.1 Grundlagen der Stochastik

Aus dem Bereich der Stochastik verwenden wir zum einen die klassischen Definitionen für Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswert und Varianz und zum anderen führen wir stochastische Prozesse, insbesondere Markov-Ketten, ein.

2.1.1 Allgemeine Definitionen

Zuerst wiederholen wir die wichtigsten Definitionen und Resultate aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und beziehen uns dabei auf [23]. Dafür setzen wir die maßtheoretischen Grundlagen voraus und verweisen hierfür auf [3]. Im Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$ die Borel'sche σ -Algebra über \mathbb{R} , wobei \mathcal{O} das System der offenen Teilmengen in \mathbb{R} bezeichnet.

Definition 2.1

Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Eine Funktion

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$ und für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ von paarweise disjunkten Ereignissen gilt

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(A_n).$$

Das Tripel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ heißt dann *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Nun wollen wir Hilfsmittel zur Darstellung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes einführen und betrachten dazu die Dichtefunktion.

Definition 2.2

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Dichtefunktion, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq 0$$

gilt.

Sie heißt zusätzlich normiert, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

erfüllt ist.

Satz 2.3

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

gilt.

Für einen ausführlichen Beweis von Satz 2.3 und weitere Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verweisen wir nochmals auf [3].

Definition 2.4

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein Maßraum. Dann nennen wir eine Funktion $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariable, falls für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass ihr Urbild $X^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ im Mengensystem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegt.

Im Anschluss wollen wir die Kenngrößen für das Zentrum und das Streuungsverhalten einer Zufallsvariable formulieren. Dazu definieren wir den Erwartungswert und die Varianz.

Definition 2.5 (Erwartungswert und Varianz)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, f die zu \mathbb{P} zugehörige Dichtefunktion und X eine Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$.

Dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariable definiert als

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} X(y) f(y) dy, \tag{2.1}$$

sofern das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Die Varianz ist gegeben durch

$$\sigma^2(X) := \text{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]. \tag{2.2}$$

Bemerkung 2.6

Sei X eine Zufallsvariable, sodass die Erwartungswerte von X und X^2 existieren. Dann gilt eine Variante des Verschiebungssatzes

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad (2.3)$$

Mit den vorangegangenen Definitionen des Wahrscheinlichkeitsmaß, des Erwartungswertes und der Varianz können wir später die gewünschten Größen modellieren. Im Anschluss verwenden wir weiterhin die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums, um so einen stochastischen Prozess zu formulieren.

2.1.2 Markov-Ketten

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Grundlagen von stochastischen Prozessen und insbesondere Markov-Ketten beschäftigen. Dafür verweisen wir auf [18, 22].

Bevor wir jedoch eine allgemeine Markov-Kette definieren können, benötigen wir die Begriffe des Zustandsraums und der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Definition 2.7

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X_n : \mathbb{R} \rightarrow S$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Familie von Zufallsvariablen.

Die Menge S wird Zustandsraum genannt und enthält alle Werte, die die Zufallsvariablen annehmen können.

Seien $X_1, X_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Zufallsvariablen und $i_1, i_2 \in S$ Zustände. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von $X_1 = i_1$ gegeben $X_2 = i_2$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_2 = i_2) = \frac{\mathbb{P}((X_1 = i_1) \cap (X_2 = i_2))}{\mathbb{P}(X_2 = i_2)}.$$

Definition 2.8

Sei S ein endlicher Zustandsraum und $Y = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von Zufallsvariablen, sodass die Werte von X_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ in S liegen.

Dann heißt Y genau dann Markov-Kette, wenn für die Zustände $(j, i_0, \dots, i_n) \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n). \quad (2.4)$$

gilt.

Die Gleichung (2.4) beschreibt, dass die Wahrscheinlichkeit, die den Übergang zwischen zwei Zuständen beschreibt, nur vom aktuellen Zustand abhängt. Diese Eigenschaft wird auch *Markov-Eigenschaft* oder *Gedächtnislosigkeit* genannt.

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$ zwischen zwei Zuständen heißt *Übergangsraten*. Diese Raten lassen sich als Matrix zusammenfassen. Dazu bezeichnen wir kurz mit $\mathbb{P}(X_i, X_j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand $i \in S$ in den Zustand $j \in S$ übergeht.

Definition 2.9

Die Matrix $\mathbf{P} = (\mathbb{P}(X_i, X_j)_{i,j \in S})$ heißt Übergangsmatrix genau dann, wenn

$$\mathbb{P}(X_i, X_j) \geq 0, \quad \sum_{Z_j \in Y, j \neq i} \mathbb{P}(X_i, Z_j) = 1, \quad X_i, X_j \in Y, i, j \in S.$$

Zur Veranschaulichung der vorangegangenen Definitionen, betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 2.10

Wir betrachten die Wettervorhersage einer Region, in der sich typischerweise längere Regen- und Trockenperioden abwechseln. Die Anzahl der Regen- und Sonnentage sind im Mittel gleich. Daraus ergibt sich der Zustandsraum $S = \{1, 2\}$, wobei **1** für Regen und **2** für Sonne steht.

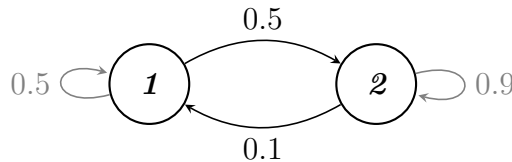


Abbildung 2.1: graphische Darstellung der Wettervorhersage

In Abbildung 2.1 wird die zugehörige Markov-Kette graphisch dargestellt. Die Übergangsrate $\alpha = 0.5$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das Wetter von Regen auf Sonne wechselt, während die Übergangsrate $\beta = 0.1$ den Wechsel von Sonnenschein auf Regen darstellt. Die grau eingefärbten Pfeile kennzeichnen die Wahrscheinlichkeiten $1 - \alpha = 0.5$ und $1 - \beta = 0.9$, die die Wahrscheinlichkeiten beschreiben, dass sich das Wetter nicht verändert. Diese ausführliche Beschreibung wird häufig weggelassen und dient nur der vollständigen Darstellung. Aus der graphisch veranschaulichten Markov-Kette können wir nun die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

ableiten.

Mit Hilfe der Übergangsmatrix \mathbf{P} können wir die zeitabhängige Übergangsfunktion definieren, die anschließend für die Formulierung der Veränderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in der Zeit verwendet wird. Zudem führen wir die Vorwärtsgleichung nach Kolmogorov ein.

Definition 2.11

Sei S ein endlicher Zustandsraum, \mathbf{P} eine Übergangsmatrix auf S und sei $\{R_i \mid i \in S\} \subseteq [0, \infty)$ eine beschränkte Menge nicht negativer Zahlen. Dann ist die Übergangsfunktion $t \mapsto \mathbf{p}(t)$ gegeben durch

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n = e^{t\mathbf{Q}},$$

wobei $\mathbf{Q} = \mathbf{R}(\mathbf{P} - \text{Id})$ mit $(\mathbf{R})_{i,j} = \delta_{i,j}R_i$. Die Matrix \mathbf{Q} wird für $\mathbf{R} = \text{Id}$ auch als Q -Matrix oder infinitesimaler Generator bezeichnet.

Insbesondere beschreiben die Einträge der Übergangsfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, das heißt, sie geben an, wie wahrscheinlich ein Zustand zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ ist.

Satz 2.12 (Kolmogorov)

Sei $t \mapsto \mathbf{p}(t)$ eine Übergangsfunktion auf einem endlichen Zustandsraum S . Dann ist die Übergangsfunktion \mathbf{p} die Lösung der Vorwärtsgleichung, die gegeben ist durch

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}, \quad \mathbf{p}(0) = \text{Id}. \tag{2.5}$$

Im folgenden Beispiel beschreiben wir die Veränderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Zustände in der Zeit. Dazu verwenden wir die vorangegangenen Resultate.

Beispiel 2.13

Wir betrachten erneut die Markov-Kette aus Beispiel 2.10 und die zugehörige Übergangsmatrix \mathbf{P} . Nun wollen wir die Veränderung der Wahrscheinlichkeit von Regen beziehungsweise Sonne in der Zeit berechnen. Dazu bilden wir die Q -Matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsfunktion hat die allgemeine Form

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) \\ p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) \end{pmatrix}.$$

Da wir jedoch nur an den Wahrscheinlichkeiten für Regen oder Sonne interessiert sind, genügt es den Zeilenvektor $\hat{\mathbf{p}}(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t))$ mit $\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$ zu betrachten, wobei π_1 die Wahrscheinlichkeit von Regen und π_2 die Wahrscheinlichkeit von Sonne beschreibt. Durch die Vorwärtsgleichung (2.5) erhalten wir die zeitliche Änderungsrate der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) &= (\dot{\pi}_1(t), \dot{\pi}_2(t)) \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} = (-0.5\pi_1(t) + 0.1\pi_2(t), -0.1\pi_2(t) + 0.5\pi_1(t)), \\ &(\pi_1(0), \pi_2(0)) = (1, 0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die zeitliche Veränderung von $\hat{\mathbf{p}}$ in Gleichung (2.6) kann in jeder Komponente als ein- und auslaufende Wellen anschaulich beschrieben werden. Das bedeutet, dass der Zustand **1** mit dem Faktor $\alpha = 0.5$ verlassen und mit $\beta = 0.1$ von Zustand **2** aus erreicht wird.

In Beispiel 2.13 haben wir gezeigt, dass die Veränderung einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit von den Übergangsraten sowie von den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten aller Zustände zu einem bestimmten Zeitpunkt abhängt.

2.2 Kontrolltheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir zuerst die Grundlagen der Kontrolltheorie erarbeiten, um anschließend ein optimales Steuerungsproblem zu formulieren. Damit wollen wir die wichtigsten Resultate der modellprädiktiven Regelung einführen.

2.2.1 Grundlagen der mathematischen Kontrolltheorie

Im Folgenden wollen wir die Grundlagen der mathematischen Kontrolltheorie vorstellen, um sie später anwenden zu können. Dazu beziehen wir uns auf [14, 21].

Zu Beginn definieren wir ein allgemeines lineares Kontrollsystem für kontinuierliche und diskrete Zeit sowie den Raum der stetigen Funktionen, um anschließend eine Lösungsformel angeben zu können. Im Allgemeinen wird ein Kontrollsystem durch die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

beschrieben. Dabei ist $x(t) \in \mathbb{R}^n$ der Zustand und $u(t) \in \mathbb{R}^m$ die Kontrolle jeweils zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld. Die Funktion f und die Kontrolle $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ müssen gewisse Regularitätseigenschaften erfüllen, damit die Lösung des Kontrollsystems existiert und eindeutig ist.

Zunächst wollen wir uns mit einer bestimmten Art von Kontrollsystemen beschäftigen.

Definition 2.14

Ein lineares zeitinvariantes Kontrollsystem ist in kontinuierlicher Zeit gegeben durch die Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.7}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

In diskreter Zeit ist das Kontrollsystem gegeben durch

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer linearen Abbildung $B : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Definition 2.15

Eine Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stückweise stetig*, falls für jedes kompakte Intervall $[t_1, t_2]$ eine endliche Folge von Zeiten $t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = t_2$ existiert, sodass die Funktion u auf (τ_i, τ_{i+1}) , für alle $i = 1, \dots, k - 1$, stetig und beschränkt ist.

\mathcal{U} ist der Raum der stückweise stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^m .

Für die lineare Form eines kontinuierlichen Kontrollsystems können wir eine explizite Lösungsformel angeben.

Satz 2.16

Für das lineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und gegebenen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und jede Anfangsbedingung der Form

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede stückweise stetige Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ existiert genau eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die die Anfangsbedingung (2.8) erfüllt und deren Ableitung für jedes t , in dem u stetig ist, existiert und das Kontrollsystem (2.7) erfüllt. Diese Funktion heißt *Lösung des Kontrollsystems (2.7) mit Anfangsbedingung (2.8)* und wird mit $x(t; t_0, x_0, u)$ bezeichnet. Für diese Lösung gilt

$$x(t; t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{2.9}$$

Bemerkung

Für die Lösung $x(t; t_0, x_0, u)$ des Kontrollsystems (2.7) mit Anfangsbedingung (2.8) schreiben wir kurz $x(t; x_0, u)$, falls wir zur Zeit $t_0 = 0$ starten.

Betrachten wir nun das Kontrollsystem im eindimensionalen Fall, also für $x(t) \in \mathbb{R}$, ohne Kontrolle u und definieren A und B als allgemeine zeitabhängige Funktionen $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so erhalten wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t). \tag{2.10}$$

Für einen gegebenen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ können wir auch für (2.10) eine Lösungsformel angeben, für deren Gültigkeit wir auf [15] verweisen.

Lemma 2.17 (Variation der Konstanten)

Für eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form (2.10) mit Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

ist die Lösung für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right) ds\right). \quad (2.11)$$

Für den weiteren Verlauf der Arbeit benötigen wir eine weitere Klasse von Kontrollsystemen, die wir in der folgenden Bemerkung angeben.

Bemerkung 2.18

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist ein nichtlineares Kontrollsystem definiert durch

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \quad (2.12)$$

Analog kann eine nichtlineare Differentialgleichung definiert werden.

Zudem wollen wir ein Kontrollsystem auf dessen Stabilität untersuchen. Hierfür beschränken wir uns auf die Analyse gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zunächst benötigen wir die Definition eines Gleichgewichtes.

Definition 2.19

Ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, falls für ihre zugehörige Lösung

$$x(t; \bar{x}) = \bar{x}, \quad t \in \mathbb{R}$$

gilt.

Insbesondere ist ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gleichgewicht, wenn \bar{x} die Nullstelle der rechten Seite der Differentialgleichung ist. Das bedeutet für die Gleichung $\dot{x} = f(x)$ gilt

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Ein Gleichgewicht \bar{x} einer Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ kann auf dessen Stabilität untersucht werden. Dazu führen wir verschiedene Stabilitätsbegriffe ein.

Definition 2.20 (Stabilitätsbegriffe)

Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

(i) Das Gleichgewicht \bar{x} heißt stabil, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\|x(t; x_0) - \bar{x}\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \geq 0$$

für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$ gilt.

(ii) Das Gleichgewicht \bar{x} heißt lokal asymptotisch stabil, falls es stabil ist und zusätzlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = \bar{x}$$

für alle Anfangswerte x_0 aus einer offenen Umgebung U von \bar{x} gilt.

(iii) Das Gleichgewicht \bar{x} heißt global asymptotisch stabil, falls (ii) mit $U = \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Zur Illustration der vorangegangenen Definitionen betrachten wir im folgenden Beispiel eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung.

Beispiel 2.21

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -2tx(t) + t$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Zunächst berechnen wir die Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe von Lemma 2.17. Damit ergibt sich unter Verwendung der Rechenregeln für Integrale die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_0^t -2s ds\right) \left(x_0 + \int_0^t s \exp\left(\int_0^s \tau d\tau\right) ds\right) \\ &= \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Des Weiteren soll das Gleichgewicht gefunden und dieses auf seine Stabilität untersucht werden. Dazu berechnen wir die Nullstelle der rechten Seite

$$-2tx + t = 0$$

und erhalten das Gleichgewicht $\bar{x} = \frac{1}{2}$. Analysieren wir nun das Konvergenzverhalten der Lösung, so ergibt sich, dass für die Lösung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

gilt. Damit konvergiert die Lösung unabhängig vom Startwert x_0 zum Gleichgewicht \bar{x} . Mit Definition 2.20 folgt daraus, dass das Gleichgewicht \bar{x} global asymptotisch stabil ist.

Das obige Beispiel zeigt insbesondere, dass eine konvergente Lösung einer Differentialgleichung gegen ihr Gleichgewicht konvergiert. Es genügt also für die Stabilitätsanalyse das Konvergenzverhalten einer Lösung zu kennen ohne diese explizit zu berechnen.

Bemerkung 2.22

Betrachte eine inhomogene lineare Differentialgleichung (2.10) mit stetigen Funktionen $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Inhomogenität $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \bar{b}$ konvergent und konvergiert die Vorfaktorfunktion $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) < 0$ gegen einen negativen Wert, so ist die Lösung der Differentialgleichung (2.10) mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ konvergent gegen das Gleichgewicht \bar{x} der Differentialgleichung, das heißt, es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

Bemerkung 2.23

Ein Kontrollsystem oder eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt autonom, falls die rechte Seite nicht explizit von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Solch ein Kontrollsystem bezeichnen wir kurz mit

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Die obigen Resultate bleiben für autonome Kontrollsysteme und Differentialgleichungen weiterhin gültig.

2.2.2 Modellprädiktive Regelung

Modellprädiktive Regelung (kurz: MPC¹) ist eine Methode zur Lösung eines optimalen Steuerungsproblems auf einem unendlichen oder endlichen Zeithorizont. Die Idee des MPC-Verfahrens ist das vorliegende diskrete Problem, das nichtlinear und unbeschränkt sein kann, in mehrere Teilprobleme mit fester Horizontlänge $N \in \mathbb{N}$ zu unterteilen und diese anschließend nacheinander zu lösen. Dabei bilden die Lösungen der Teilprobleme iterativ die Gesamtlösung. Dieses Vorgehen ist vor allem dann geeignet, wenn relevante Informationen nur für eine begrenzte Zeit in die Zukunft vorliegen. In diesem Kapitel geben wir die wichtigsten Resultate aus [14, 16] wieder.

Wir betrachten zunächst das diskrete Modell

$$x^+ = f(x, u), \tag{2.13}$$

wobei $f : X \times U \rightarrow X$ eine nichtlineare Abbildung und X, U metrische Räume sind. Die Funktion f bildet einen Zustand $x \in X$ und eine Kontrolle $u \in U$ auf den darauffolgenden Zustand $x^+ \in X$ ab.

Starten wir nun mit dem Zustand $x(k)$ zum aktuellen Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$, so können wir für eine beliebige, gegebene Kontrollfolge $u(0), \dots, u(N-1)$, mit Horizontlänge $N \geq 2$, Gleichung (2.13) iterieren, so dass wir eine prädiktive Trajektorie

$$x_u(0) = x(k), \quad x_u(j+1) = f(x_u(k), u(j)), \quad k = 0, \dots, N-1$$

¹aus dem Englischen: model predictive control

erhalten. Setzen wir diese Vorgehensweise fort, so erhalten wir Zustandsprognosen $x_u(k)$ für das System $x(k+j)$ für j Zeiteinheiten in die Zukunft. Das bedeutet insbesondere, dass wir zwischen der aktuellen Zeit k und den Zeiteinheiten in die Zukunft j unterscheiden.

Damit wir nun $u(0), \dots, u(N-1)$ bestimmen können, nutzen wir das Prinzip der optimalen Steuerung. Dazu betrachten wir die sogenannten *Stufenkosten*

$$\ell : X \times U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Diese, gegebenenfalls sehr allgemeine, Funktion bestraft die Abweichung des Zustandes $x(k)$ oder des Kontrollwertes $u(k)$ zu einem Referenzwert x^* beziehungsweise u^* zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Aus den Stufenkosten können wir die Kostenfunktion modellieren. Die Kostenfunktion summiert die Abweichung des Zustandes und der Kontrolle zu den Referenzwerten zu einem aktuellen Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ für die zukünftigen Zeiteinheiten auf. Hierfür benötigen wir den MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$, der angibt, wie viele Zeiteinheiten in die Zukunft gegangen werden sollen und erhalten so die *Kostenfunktion*

$$J_N(x(k), u(k)) := \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x_u(j), u(j)). \quad (2.15)$$

Abhängig von der Form der Kostenfunktion unterscheiden wir die Art des MPC. Verwenden wir quadratische Stufenkosten der Form

$$\ell(x_u(k), u(k)) = \|x_u(k) - x^*\|^2 + \lambda \|u(k) - u^*\|^2,$$

wobei $\lambda \geq 0$ ein Gewichtungsfaktor und $\|\cdot\|$ die jeweils passende Norm ist, so sprechen wir von einem *stabilisierenden MPC*. Wählen wir hingegen eine allgemeinere Kostenfunktion, sprechen wir von einem *ökonomischen MPC*. Mit gegebener Kostenfunktion J_N und Horizontlänge $N \geq 2$ können wir nun ein optimales Steuerungsproblem (kurz: OCP²) und damit den allgemeinen Algorithmus des MPC-Verfahrens 2.1 formulieren. Das betrachtete optimale Steuerungsproblem (2.16) minimiert die allgemeine Kostenfunktion $J_N(x_0, u(\cdot))$ über eine Menge $\mathbb{U}^N(x_0) \subseteq U^N$. Diese Menge identifizieren wir zunächst mit $\mathbb{U}^N(x_0) := U^N$. Im nächsten Abschnitt werden wir die *Menge der zulässigen Kontrollfolgen* genauer analysieren und beschreiben, wie diese Menge gewählt werden kann. Die in Algorithmus 2.1 Schritt 3 erhaltene optimale Kontrollfolge $u^*(k; N)$ für das betrachtete Teilproblem wird auch als *open-loop* Lösung bezeichnet. Das erste Element dieser Folge entspricht dem Feedback $\mu_N(x(k)) = u^*(0)$, das wir, wie in Schritt 4 beschrieben, auf unser System anwenden, um den nächsten Zustand $x(k+1)$ zu erhalten. Diesen Zustand $x(k+1)$ nutzen wir als unseren neuen Startzustand und beginnen den Algorithmus von vorne.

²aus dem Englischen: optimal control problem

Algorithmus 2.1 Basis MPC-Algorithmus

Input: MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$, Anzahl der Optimierungsschritte $\mathcal{N} \in \mathbb{N} \cup \infty$, Startzustand $x(0) \in \mathbb{X}$

for $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$:

1. Bestimme den Zustand $x(k)$ des Systems zum Zeitpunkt k .
2. Setze $x_0 = x(k)$.
3. Löse das OCP

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)} J_N(x_0, u(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x_u(j, x_0), u(j)) \\ x_u(0, x_0) &= x_0 \\ x_u(k+1, x_0) &= f(x_u(k, x_0), u(k)) \end{aligned} \tag{2.16}$$

und erhalte die optimale Kontrollfolge $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)$.

4. Setze $\mu_N(x(k)) := u^*(0) \in U$ und wende die Systemdynamik an, um den nächsten Startzustand zu erhalten.
-

Auf diese Weise erlangen wir iterativ eine vollständige Regelung μ^* des Systems. Diese Steuerung μ^* ist die sogenannte *closed-loop* Lösung. Da bei diesem Vorgehen der Horizont nach jedem Optimierungsschritt verschoben wird, wird MPC auch oft als *Receding Horizon Control* bezeichnet. Dieses Verfahren eignet sich damit insbesondere für Problemstellungen, die auf Vorhersagen aus beispielsweise Messdaten basieren, deren Genauigkeit mit zunehmender Horizontlänge sinkt.

Bemerkung 2.24

In Algorithmus 2.1 haben wir angenommen, dass eine optimale Kontrollfolge $u^(\cdot)$ existiert. Im Allgemeinen kann dies nicht garantiert werden. Unter bestimmten Stetigkeits- und Beschränktheitsbedingungen kann die Existenz von $u^*(\cdot)$, beispielsweise in [17], gezeigt werden.*

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nehmen wir an, dass eine optimale Kontrollfolge $u^(\cdot)$ für ein gegebenes optimales Steuerungsproblem existiert.*

Nebenbedingungen und zulässige Mengen

Neben der Berücksichtigung von Vorhersagen ist ein weiterer Vorteil von MPC, dass dieses Verfahren Nebenbedingungen beachten kann, da diese direkt in den Algorithmus eingefügt werden können. Dabei können sowohl der Zustand als auch die Steuerung restringiert werden. Dazu betrachten wir die nicht leere *Menge der zulässigen*

Zustände $\emptyset \neq \mathbb{X} \subseteq X$ und für jeden Zustand $x \in \mathbb{X}$ die nicht leere Menge der zulässigen Kontrollen $\emptyset \neq \mathbb{U}(x) \subseteq U$, wobei \mathbb{U} auch unabhängig von x gewählt werden kann. Die Mengen verwenden wir zum einen, um die Beschränkungen an den Zustand beziehungsweise die Kontrollen zu definieren und zum anderen, um zu garantieren, dass die Trajektorien in \mathbb{X} und die zugehörigen Kontrollwerte in $\mathbb{U}(x)$ liegen.

Definition 2.25

Betrachte ein Kontrollsystem der Form

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

mit den Mengen $\mathbb{X} \subseteq X$ und $\mathbb{U} \subseteq U$.

- (i) Die Elemente $x \in \mathbb{X}$ heißen zulässige Zustände und die Elemente $u \in \mathbb{U}(x)$ heißen zulässige Kontrollwerte für x . Das Paar

$$(x, u) \in \mathbb{Y} := \{(x, u) \in X \times U \mid x \in \mathbb{X}, u \in \mathbb{U}(x)\}$$

heißt zulässig.

- (ii) Für $N \in \mathbb{N}$ und einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{X}$ heißt eine Kontrollfolge $u \in U^N$ und die zugehörige Trajektorie $x_u(k, x_0)$ zulässig für x_0 bis zum Zeitpunkt N , falls für alle $k = 0, \dots, N-1$ und $x_u(N, x_0) \in \mathbb{X}$ das Paar $(x_u(k, x_0), u(k))$ zulässig ist.
- (iii) Ein Feedback $\mu : X \rightarrow U$ heißt zulässig, falls $\mu(x) \in \mathbb{U}^1(x)$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt.

Wenn wir Nebenbedingungen fordern, müssen wir sicherstellen, dass diese zu jedem Zeitpunkt k erfüllt werden können. Dazu setzen wir voraus, dass der Startwert $x_0 \in \mathbb{X}$ zulässig für das optimale Steuerungsproblem (2.16) ist, was bedeutet, dass die Menge der zulässigen Kontrollen $\mathbb{U}^N(x_0) \neq \emptyset$ nicht leer ist.

Beispiel 2.26

Wir betrachten das Kontrollsystem

$$x^+ = x + u$$

und die Stufenkosten

$$\ell(x, u) = x^2 + u^2$$

mit der Menge der zulässigen Zustände $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ und der Menge der zulässigen Kontrollwerte $\mathbb{U} = \mathbb{R}$. Die Abweichung des Zustandes und der Kontrolle von den Referenzwerten $x^* = u^* = 0$ wird unter der gegebenen Systemdynamik bei einem Startzustand $x(0) = 1$ quadratisch bestraft.

Für einen MPC-Horizont $N = 2$ betrachten wir den Fall ohne Zustandsbeschränkung

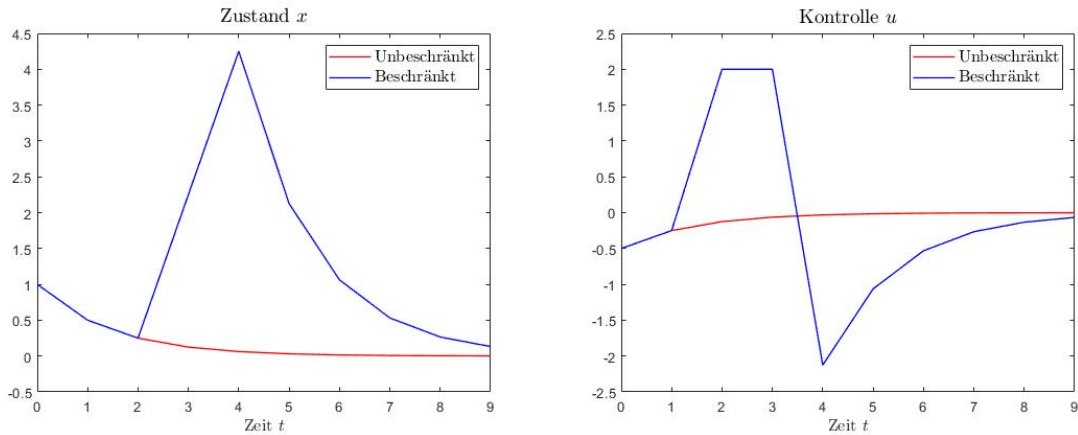


Abbildung 2.2: Zustand x und Kontrolle u aus Beispiel 2.26

und mit der Vorschrift, dass $x(4) \geq 2$, das heißt, wir schreiben dem Zustand einen Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 4$ vor. In Abbildung 2.2 sind in der linken Grafik die closed-loop Lösungen des unbeschränkten und des beschränkten MPC-Algorithmus für 10 Schritte abgebildet. Zudem sind in der rechten Grafik in Abbildung 2.2 die jeweils zugehörigen Kontrollwerte graphisch dargestellt. Im Vergleich der beiden MPC ist deutlich zu erkennen, dass der beschränkte Regler erst nach zwei Schritten von der Bedingung erfährt und dementsprechend die Kontrolle anpasst, sodass die Zustandsbeschränkung erfüllt werden kann. Anschließend wird der Zustand zurück zu seinem Referenzwert $x^* = 0$ gesteuert. Der unbeschränkte MPC steuert hingegen den Zustand x und die Kontrolle u zu den jeweiligen Referenzwerten und verbleibt dort.

Prinzip der dynamischen Programmierung

Eine Grundlage der optimalen Steuerung ist das sogenannte Prinzip der dynamischen Programmierung. Dabei ist die Grundidee, ähnlich zur modellprädiktiven Regelung, ein komplexes Problem in mehrere Teilprobleme aufzuteilen, die leichter zu lösen sind. Die Lösungen der aufgeteilten Probleme ergeben zusammen die Lösung des Gesamtproblems. Da wir später das Prinzip der dynamischen Programmierung auf das MPC-Verfahren anwenden wollen, setzen wir die nachfolgenden Definitionen und Resultate in den Kontext eines optimalen Steuerungsproblems.

Definition 2.27

Gegeben sei ein optimales Steuerungsproblem (2.16) mit Anfangszustand $x_0 \in \mathbb{X}$ zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ und ein MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$.

Dann heißt die Funktion

$$V_N(x_0) := \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^N(x_0)} J_N(x_0, u(\cdot))$$

optimale Wertefunktion.

Eine Kontrollfolge $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)$ heißt optimale Kontrollfolge für x_0 , wenn

$$V_N(x_0) = J_N(x_0, u^*(\cdot))$$

gilt. Die zugehörige Trajektorie x_{u^*} heißt optimale Zustandstrajektorie.

Satz 2.28 (Prinzip der dynamischen Programmierung)

Betrachte das optimale Steuerungsproblem (2.16) mit Startzustand $x_0 \in \mathbb{X}$ und Zeit-
horizont $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $K = 1, \dots, N$, dass

$$V_N(x_0) = \inf_{u(\cdot) \in \mathbb{U}^{N-K}(x_0)} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \ell(x_u(k, x_0), u(k)) + V_{N-K}(x_u(K, x_0)) \right\}. \quad (2.17)$$

Wenn zusätzlich eine optimale Kontrollfolge $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)$ für x_0 existiert, so gilt

$$V_N(x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} \ell(x_{u^*}(k, x_0), u^*(k)) + V_{N-K}(x_{u^*}(K, x_0)). \quad (2.18)$$

Insbesondere ist in diesem Fall das Infimum in Gleichung (2.17) ein Minimum.

Mit dem folgenden Satz wenden wir das Prinzip der dynamischen Programmierung auf den MPC-Algorithmus an.

Satz 2.29

Betrachte das optimale Steuerungsproblem (2.16) mit Startzustand $x_0 \in \mathbb{X}$ und MPC-
Horizont $N \in \mathbb{N}_0$. Existiert eine optimale Kontrollfolge $u^*(\cdot)$, so gelten für das MPC-
Feedback $\mu_N(x_0) = u^*(0)$ die Gleichungen

$$\mu_N(x_0) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{U}^1(x_0)} \{ \ell(x_0, u) + V_{N-1}(1, f(x_0, u)) \} \quad (2.19)$$

und

$$V_N(x_0) = \ell(x_0, \mu_N(x_0)) + V_{N-1}(1, f(x_0, \mu_N(x_0))). \quad (2.20)$$

Aus dem Satz kann insbesondere gefolgert werden, dass die optimale Kontrollfolge aus dem Feedback generiert werden kann. Anhand des nächsten Beispiels soll dies veranschaulicht werden.

Beispiel 2.30

Wir betrachten erneut das Beispiel 2.26

$$x^+ = x + u, \quad \ell(x, u) = x^2 + u^2$$

mit den zulässigen Mengen $\mathbb{X} = \mathbb{U} = \mathbb{R}$ und MPC-Horizont $N = 2$. Wir setzen $K = 1$ und betrachten die optimale Wertefunktion

$$V_{N-K}(x_0) = V_1(x_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^0 \ell(x_u(j, x_0), u(j)) = x_0^2.$$

Daraus können wir nun nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung die optimale Wertefunktion

$$\begin{aligned} V_N(x_0) = V_2(x_0) &= \inf_{u(\cdot) \in \mathbb{U}^1(x_0)} \{ \ell(x_u(0, x_0), u(0)) + V_1(x_u(1, x_0)) \} \\ &= \inf_{u \in \mathbb{U}} \{ x_0^2 + u^2 + (x_0 + u)^2 \} = \frac{3}{2} x_0^2 \end{aligned}$$

berechnen und erhalten nach Satz (2.29) das Feedback $\mu_2(x_0) = u^*(0) = -\frac{x_0}{2}$.

Ökonomische modellprädiktive Regelung

Wir haben bereits bei der Formulierung der Kostenfunktion bemerkt, dass es verschiedene Arten von modellprädiktiver Regelung gibt. Wenn der Zustand nicht mehr zu einem bestimmten Zielwert gesteuert wird, sondern die Erfüllung einer anderen Eigenschaft, wie beispielsweise Optimierung der Energieeffizienz, das Ziel ist, so sprechen wir von einem ökonomischen MPC. Im Verlauf dieser Arbeit wollen wir eine ökonomischen modellprädiktiven Regler formulieren, da unsere Ziel ist Schwankungen im Stromnetz zu minimieren. Dafür kennen wir allerdings nicht das Zielgleichgewicht, weshalb wir ein optimales Gleichgewicht definieren.

Definition 2.31

Ein zulässiges Paar $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{Y}$ heißt Gleichgewicht, falls für die Systemdynamik

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$$

gilt. Ein Gleichgewicht (x^*, u^*) heißt optimales Gleichgewicht, falls zusätzlich für die Stufenkosten die Ungleichung

$$\ell(x^*, u^*) \leq \ell(\bar{x}, \bar{u})$$

für alle Gleichgewichte $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{Y}$ erfüllt ist.

Ein optimales Gleichgewicht ist also das Gleichgewicht, in dem die Stufenkosten den kleinsten Wert annehmen. Unter bestimmten Voraussetzung existiert ein optimales Gleichgewicht, was in dem folgenden Lemma beschrieben ist.

Lemma 2.32

Sei die Menge $\mathbb{Y} \subset X \times U$ kompakt und seien die Abbildungen $\ell : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ stetig. Dann existiert ein optimales Gleichgewicht $(x^*, u^*) \in \mathbb{Y}$.

Da wir trotz der Verwendung einer sehr allgemeiner Stufenkosten weiterhin sinnvolle Ergebnisse generieren möchten, führen wir den Begriff der Dissipativität ein. Zuvor definieren wir noch verschiedene Klassen für Vergleichsfunktionen, die uns später als Hilfsmittel dienen werden.

Definition 2.33

Die Mengen der Vergleichsfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \{\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \alpha \text{ stetig, streng monoton wachsend, } \alpha(0) = 0\}, \\ \mathcal{K}_\infty &:= \{\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \alpha \in \mathcal{K}, \alpha \text{ unbeschränkt}\}, \\ \mathcal{L} &:= \{\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \delta \text{ stetig, streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0\}, \\ \mathcal{KL} &:= \{\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \beta \text{ stetig, } \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

Definition 2.34

Ein optimales Steuerungsproblem mit Stufenkosten ℓ heißt in einem Gleichgewicht $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{Y}$ strikt dissipativ, falls eine von unten beschränkte Funktion $\lambda : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\lambda(\bar{x}) = 0$$

gilt und eine Funktion $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ existieren, sodass die Ungleichung

$$\ell(x, u) - \ell(\bar{x}, \bar{u}) + \lambda(x) - \lambda(f(x, u)) \geq \rho(|x - \bar{x}|)$$

für alle $(x, u) \in \mathbb{Y}$ gilt.

Wenn wir nun die Stabilitätsbegriffe aus Abschnitt 2.2.1 etwas einschränken, können wir aus der strikten Dissipativität eine Form der Stabilität für den ökonomischen MPC folgern.

Definition 2.35

Betrachte das closed-loop System aus dem MPC-Algorithmus 2.1

$$x^+ = f(x, \mu_N(x)),$$

das Feedback μ_N und die zugehörige Lösung x_{μ_N} .

Ein Gleichgewicht (\bar{x}, \bar{u}) des closed-loop Systems heißt semiglobal praktisch asymptotisch stabil bezüglich des MPC-Horizonts N , falls eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ existiert, sodass für alle $\delta > 0$ und $\Delta > \delta > 0$ eine Konstante $N_{\delta, \Delta} > 0$ existiert, sodass für alle $N \geq N_{\delta, \Delta}$, $x \in \mathbb{X}$ mit $|x - \bar{x}| \leq \Delta$ und $k \geq 0$ die Ungleichung

$$|x_{\mu_N}(k, x) - \bar{x}| \leq \max\{\beta(|x - \bar{x}|, k), \delta\}$$

gilt.

Satz 2.36

Betrachte den MPC-Algorithmus 2.1 für ein strikt dissipatives optimales Steuerungsproblem mit den Funktionen λ und $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. Dann gilt unter bestimmten Stetigkeitsbedingungen für λ und V_N im Gleichgewicht \bar{x} , dass das Gleichgewicht \bar{x} semiglobal praktisch asymptotisch stabil auf \mathbb{X} bezüglich des MPC-Horizonts N ist.

Für den Beweis und die ausführliche Erläuterung der Annahmen, die für λ und V_N getroffen werden, verweisen wir auf [14, 16].

Nachdem wir nun alle Grundlagen aufbereitet haben, können wir diese in den folgenden Kapiteln verwenden, um die Temperatur eines Kühlschranks, seinen stochastischen Zustand sowie einen modellprädiktiven Regler zu modellieren und zu formulieren. Des Weiteren werden wir die Eigenschaften der einzelnen Komponenten genauer analysieren, allerdings werden wir den Fokus nicht auf den analytischen Nachweis der Stabilität setzen, sondern auf die Modellierung und die numerischen Resultate. Aus diesen Simulationen können wir schließlich eine Form der Stabilität numerisch folgern.

3 Modellierung der Kühlschranktemperatur

Im Folgenden wollen wir die Veränderung der Kühlschranktemperatur im Zeitverlauf modellieren. Damit können wir später die Temperatur zum nächsten Zeitpunkt in Abhängigkeit des jetzigen Zustandes beschreiben und ermitteln. Bevor wir die Gerätetemperatur formulieren können, stellen wir fest, dass ein Kühlschrank zwei mögliche Zustände besitzt. Das Gerät ist entweder angeschaltet, das heißt der Kompressor arbeitet und es wird gekühlt, oder es ist ausgeschaltet und es nimmt auf lange Sicht die Umgebungstemperatur an. Wir bezeichnen mit AN den Zustand, in dem der Kühlschrank gekühlt wird und mit AUS den Zustand, in dem der Kompressor nicht arbeitet. Ferner wird das Gerät zwischen seinen Zuständen wechseln können, dies ist jedoch für die anschließende Modellierung zunächst nicht relevant, weshalb wir die Temperatur je nach Zustand formulieren werden.

Die Temperatur eines Kühlschranks hängt von seinem Zustand und von seiner Bauart ab. Das bedeutet, wir betrachten die Wärmedämmung A und die Wärmekapazität m_c eines Kühlschranks. Beide Größen sind Indikatoren dafür, wie viel Energie nötig ist um die Temperatur zu ändern. Des Weiteren brauchen wir die Leistungszahl η , die das Verhältnis von erzeugter Kälteleistung zur eingesetzten elektrischen Leistung angibt. Zuletzt sind noch die Leistung Q des Gerätes, die die umgesetzte Energie in einer Zeitspanne beschreibt und die Umgebungstemperatur T^0 notwendig. Mit den gegebenen Größen können wir nach [1] die Veränderung der Temperatur eines bestimmten Kühlschranks als affine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben, falls das Gerät angeschaltet ist. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{T}(t) &= -\frac{A}{m_c} \left(T(t) - T^0 + \frac{\eta Q}{A} \right), \\ T(0) &= T_0\end{aligned}$$

mit Starttemperatur T_0 zum Zeitpunkt $t = 0$. Dabei beschreibt der Koeffizient $\frac{A}{m_c}$ die thermische Verteilung und der Faktor $\frac{\eta Q}{A}$ die Leistung des Kompressors, die notwendig ist um das Gerät zu kühlen. Daraus können wir nun die Differentialgleichung für einen Kühlschrank folgern, der ausgeschaltet ist. Dazu nehmen wir an, dass der Kompressor

nur dann arbeitet, wenn der Kühlschrank gekühlt wird. Auch hier verwenden wir die obige Anfangsbedingung und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{T}(t) &= -\frac{A}{m_c} (T(t) - T^0), \\ T(0) &= T_0.\end{aligned}$$

Die Gleichungen der Temperaturveränderung sind inhomogene Differentialgleichungen und damit existieren für die Gleichungen eindeutige Lösungen. Für die spätere Simulation der Kühlschränke und deren Temperatur stehen uns gegebenenfalls nicht alle dieser physikalischen Größen für jedes einzelne Gerät zur Verfügung. Deshalb führen wir verschiedene Parameter ein, die diese Größen zusammenfassen und vereinfachen sollen. Zunächst betrachten wir den thermischen Verteilungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{A}{m_c} > 0,$$

der stets positiv ist. Zudem führen wir konstante Temperaturen T_{AN} und T_{AUS} ein. Die Umgebungstemperatur

$$T^0 = T_{AUS}$$

entspricht der Temperatur eines Kühlschranks, der immer ausgeschaltet ist und deswegen auf lange Sicht die Raumtemperatur annimmt. Die Temperatur T_{AN} gibt den gegenteiligen Zustand an. Wir betrachten also ein Gerät, das immer gekühlt wird und berechnen die Größe

$$T_{AN} = T_{AUS} - \frac{\eta Q}{A},$$

die sich aus der Raumtemperatur und der Kühlleistung bestimmen lässt. Nun wollen wir die Parameter nutzen, um die Temperaturveränderung je nach Zustand vereinfacht darzustellen. Setzen wir die Größen α , T_{AN} und T_{AUS} in die oben formulierten Gleichungen ein, so erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\dot{T}(t) = -\alpha (T(t) - T_{AN}), \quad \text{falls AN,} \quad (3.1)$$

$$\dot{T}(t) = -\alpha (T(t) - T_{AUS}), \quad \text{falls AUS,} \quad (3.2)$$

in Abhängigkeit der möglichen Zustände eines Kühlschranks jeweils mit der Anfangsbedingung $T(0) = T_0$. Die Gleichungen entsprechen zudem dem Newtonschen Abkühlungsgesetz [13].

Die verkürzten Gleichungen der Temperatur sind weiterhin inhomogene Differentialgleichungen, das heißt insbesondere sind diese eindeutig lösbar. Damit können wir auch die Temperaturveränderung auf ihre Stabilität untersuchen. Das Resultat fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.1

Das Gleichgewicht

$$\bar{T} = T_{AN}$$

ist global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (3.1).

Das Gleichgewicht

$$\bar{T} = T_{AUS}$$

ist global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (3.2).

Beweis:

Da die Temperaturveränderung (3.1) und (3.2) bis auf einen Parameter identisch sind, genügt es die Gleichung (3.1) zu betrachten.

Nach Lemma 2.17 können wir die Temperatur T explizit berechnen. Dabei beginnen wir die Betrachtung zum Zeitpunkt $t = 0$ und bei einer Temperatur T_0 . Daraus können wir die Lösung

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp\left(\int_0^t -\alpha ds\right) \left(T_0 + \int_0^t \alpha T_{AN} \exp\left(\int_0^s \alpha d\tau\right) ds\right) \\ &= (T_0 - T_{AN}) e^{-\alpha t} + T_{AN} \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ bestimmen. Anschließend betrachten wir den Grenzübergang der Lösung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (T_0 - T_{AN}) e^{-\alpha t} + T_{AN} = T_{AN}$$

und erhalten das geforderte Gleichgewicht. Da die Lösung unabhängig von der Starttemperatur T_0 konvergiert, ist das Gleichgewicht global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (3.1). \square

Im nächsten Abschnitt werden wir näher auf den Zusammenhang der möglichen Zustände eines Kühlschranks eingehen und die Übergänge zwischen diesen modellieren und formulieren. Ferner werden wir die Differentialgleichungen (3.1) und (3.2) für unsere Kontrollstrategie nutzen, da die Temperatur trotz Zufallsregelung weiterhin Beachtung finden soll.

4 Der stochastische Zustand

Zur Modellierung des Kühlschrankszustandes wählen wir verschiedene stochastische Größen, da wir den Zustand zu einem Zeitpunkt t aufgrund von äußeren Einflüssen nicht sicher bestimmen können. Zuerst formulieren wir die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Gerät an- beziehungsweise ausgeschaltet ist und betrachten deren Veränderungen in der Zeit. Des Weiteren nutzen wir den Erwartungswert zur Beschreibung der Kühlschranktemperatur, da durch die Nutzerinteraktion, wie beispielsweise durch eine länger geöffnete Kühlschranktür, die Gerätetemperatur nicht immer sicher vorhersagbar ist. Nachdem der Erwartungswert den Wert angibt, den die Temperatur im Mittel annimmt, benötigen wir eine weitere Größe, um zu große Abweichungen der Temperatur zu vermeiden. Dafür wählen wir die Varianz, die ein Maß für die Streuung und zudem die quadratische Abweichung von dem Erwartungswert ist. Außerdem betrachten wir, wie die genannten Größen zusammenhängen und wollen dafür ein Differentialgleichungssystem modellieren. Anschließend werden wir die Gleichungen für die Wahrscheinlichkeiten, den Erwartungswert und die Varianz auf Stabilität untersuchen und analysieren, ob auch über das ganze System eine Stabilitätsaussage getroffen werden kann.

4.1 Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

In Kapitel 3 haben wir bereits erläutert, dass ein Kühlschrank zwei mögliche Zustände besitzt. Der Kühlschrank ist entweder an- oder ausgeschaltet. Zudem kann das Gerät zwischen diesen Zuständen wechseln. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät von angeschaltet zu ausgeschaltet übergeht, bezeichnen wir mit $\lambda_1 \in (0, 1)$ und den gegenteiligen Wechsel mit $\lambda_2 \in (0, 1)$.

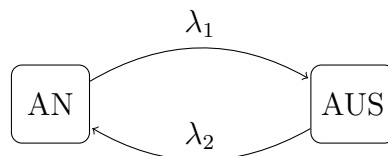


Abbildung 4.1: Illustration der Markov-Kette

Daraus können wir nach Kapitel 2.1.2 eine zeit-diskrete Markov-Kette formulieren, die in Abbildung 4.1 graphisch dargestellt ist. Wir bezeichnen im Folgenden mit π_{AN} die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Kühlschrank angeschaltet ist und mit π_{AUS} die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät ausgeschaltet ist. Die Größen π_{AN} und π_{AUS} entsprechen den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände des Kühlschranks. Aus dieser Formulierung folgt, dass der Zustandsraum zweielementig ist, weshalb zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$$\pi_{AN}(t) + \pi_{AUS}(t) = 1 \quad (4.1)$$

gilt. Zudem können wir die Übergangsraten, wie in Beispiel 2.10 beschrieben, zu einer Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Diese Matrix können wir, wie in Beispiel 2.13 gezeigt, benutzen um die Q-Matrix zu generieren und um daraus ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die zeitliche Veränderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} zu formulieren. Das Differentialgleichungssystem ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{AN}(t) &= -\lambda_1\pi_{AN}(t) + \lambda_2\pi_{AUS}(t), \\ \dot{\pi}_{AUS}(t) &= -\lambda_2\pi_{AUS}(t) + \lambda_1\pi_{AN}(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit Startwerten $\pi_{AN}(t_0)$ und $\pi_{AUS}(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 . Insbesondere beschreibt das System die Abhängigkeit der zwei Zustände voneinander und wie diese sich gegenseitig beeinflussen.

Für die weitere Analyse der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} betrachten wir im folgenden Lemma die Stabilität des Gleichungssystems (4.2).

Lemma 4.1

Das Gleichgewicht

$$\begin{pmatrix} \bar{\pi}_{AN} \\ \bar{\pi}_{AUS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

ist global asymptotisch stabil für das Differentialgleichungssystem (4.2).

Beweis:

Im ersten Schritt soll eine explizite Lösung für die Gleichungen (4.2) angegeben werden. Dazu verwenden wir den Zusammenhang (4.1) und können so die einzelnen Gleichungen voneinander entkoppeln. Setzen wir $\pi_{AUS}(t) = 1 - \pi_{AN}(t)$ in die erste Gleichung des Systems ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{\pi}_{AN}(t) = -\lambda_1\pi_{AN}(t) + \lambda_2 - \lambda_2\pi_{AN}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_{AN}(t) + \lambda_2. \quad (4.4)$$

Diese Differentialgleichung ist autonom und wir können annehmen, dass der Startzeitpunkt $t_0 = 0$ und der Startpunkt $\pi_{AN}(0) \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Zudem ist die Gleichung 4.4 eine inhomogene lineare Differentialgleichung, womit wir die Lösung π_{AN} nach Lemma 2.17 angeben können. Damit erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}\pi_{AN}(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_1 + \lambda_2 d\tau\right) \left(\pi_{AN}(0) + \int_0^t \lambda_2 \exp\left(-\int_0^s -(\lambda_1 + \lambda_2) d\tau\right) ds\right) \\ &= \left(\pi_{AN}(0) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

für $t \geq 0$. Im zweiten Schritt wollen wir die Gleichung (4.4) auf ihre Stabilität untersuchen. Hierfür betrachten wir den Grenzwert der Lösung und erhalten dadurch das Gleichgewicht

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_{AN} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{AN}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\pi_{AN}(0) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.\end{aligned}$$

Da die Lösung $\pi_{AN}(t)$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkt ist und die Konvergenz gegen das Gleichgewicht $\bar{\pi}_{AN}$ unabhängig von der Wahl des Startwertes $\pi_{AN}(0)$ ist, erhalten wir global asymptotische Stabilität für die Differentialgleichung (4.4).

Das ebenfalls global asymptotisch stabile Gleichgewicht

$$\bar{\pi}_{AUS} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

kann durch analoges Vorgehen für die zweite Differentialgleichung des Systems gewonnen werden. Fassen wir nun die beiden Gleichgewichte zusammen, so haben wir das gewünschte Gleichgewicht (4.3) für das System (4.2) gefunden. \square

Bemerkung

Die Stabilität in Lemma 4.1 ist unabhängig von der Wahl des Startvektors $(\pi_{AN}(0), \pi_{AUS}(0))^T \in \mathbb{R}^2$. Allerdings ist anschaulich nur die Wahl $\pi_{AN}(0), \pi_{AUS}(0) \in [0, 1]$ sinnvoll, da die Größen als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Anschließend wollen wir die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} nutzen, um den Erwartungswert und die Varianz der Kühlschranktemperatur zu modellieren und zu analysieren. Jedoch sind dazu weder die Darstellung über die Differentialgleichungen (4.2), noch die explizite Lösung gut geeignet. Deshalb werden wir nun Dichtefunktionen einführen, um daraufhin die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten über Integrale zu formulieren. Wir betrachten also die nicht-normalisierten Dichtefunktionen

$$\rho_+(t, T), \rho_-(t, T) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

4.1 Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

in Abhängigkeit ihrer Zufallsvariable T , die wir als die Kühlschrankschranktemperatur interpretieren, und der Zeit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Abhängigkeit der Dichtefunktionen von der Zeit resultiert aus der Formulierung der Wahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} als zeitabhängige Funktionen. Die Dichten zur Formulierung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten als Integrale existieren nach [3]. Daraus folgt, dass wir die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten durch

$$\pi_{AN}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_+(t, T) dT, \quad \pi_{AUS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_-(t, T) dT$$

darstellen können. Weiterhin bleibt die Eigenschaft (4.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_+(t, T) dT + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_-(t, T) dT = 1$$

gültig, das heißt die Dichtefunktion $\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)$ ist normalisiert.

Des Weiteren können wir die Veränderung der Dichtefunktionen in der Zeit in Abhängigkeit voneinander und von der Temperatur beschreiben. Wir differenzieren die Dichten nach der Zeit t , verweisen dabei auf Christofides [9, Kapitel 2] und erhalten die partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_+}{\partial t} &= \alpha (T - T_{AN}) \frac{\partial \rho_+}{\partial T} + (\alpha - \lambda_1) \rho_+ + \lambda_2 \rho_- \\ \frac{\partial \rho_-}{\partial t} &= \alpha (T - T_{AUS}) \frac{\partial \rho_-}{\partial T} + (\alpha - \lambda_2) \rho_- + \lambda_1 \rho_+, \end{aligned} \tag{4.5}$$

mit $\alpha > 0$ der thermische Verteilungskoeffizient und T_{AN} , T_{AUS} die Temperaturen eines Kühlschranks, der immer an- beziehungsweise ausgeschaltet ist. Diese partiellen Differentialgleichungen beschreiben eine Art Transportprozess der thermischen Energie eines Kühlschranks, der von der Verteilung der Gerätezustände und der Gerätetemperatur im jeweiligen Zustand abhängt. Im Folgenden dienen uns die partiellen Differentialgleichungen (4.5) als Hilfsmittel, um die Gleichungen für den Erwartungswert und die Varianz der Temperatur vereinfacht darstellen zu können.

4.2 Der Erwartungswert

Die Kühlschranktemperatur kann durch verschiedenste äußere Einflüsse nicht immer sicher vorausgesagt werden. Aus diesem Grund bedienen wir uns der Temperatur, die im Mittel angenommen wird, und verwenden damit den Erwartungswert. Auch hier wollen wir eine Differentialgleichung formulieren und eine Stabilitätsaussage über die erwartete Temperatur treffen. Dazu erinnern wir uns an Definition 2.5 und stellen den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} T(\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT$$

als das Integral über die Zufallsvariable T und die normalisierte Dichtefunktion $\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)$ dar. Zur besseren Darstellung teilen wir zunächst den Erwartungswert formal in zwei Funktionen

$$T_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T\rho_+(t, T)dT, \quad T_-(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T\rho_-(t, T)dT$$

auf. Daraus folgt für den Erwartungswert, dass

$$\mathbb{E}[T(t)] = T_+(t) + T_-(t). \quad (4.6)$$

gilt. Nachdem wir die Änderungsrate der erwarteten Temperatur in der Zeit modellieren wollen, betrachten wir zuerst die Ableitung des Erwartungswertes nach der Zeit. Differenzieren wir die Gleichung für den Erwartungswert (4.6) bezüglich der Zeit t , so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[T(t)] = \frac{d}{dt}T_+(t) + \frac{d}{dt}T_-(t).$$

Da die Ableitung der erwarteten Temperatur eine Summe von Ableitungen ist, genügt es zunächst die Funktion T_+ bezüglich der Zeit t zu differenzieren. Damit erhalten wir die Ableitung

$$\frac{d}{dt}T_+(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T\rho_+(t, T)dT.$$

Zudem stellen wir fest, dass der Integrand stetig und beschränkt ist und können, unter Verwendung der partiellen Differentialgleichungen (4.5) und der vorangegangenen Definitionen, das Integral so umformen, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_+(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha T^2 \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) - \alpha T_{AN} T \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) + (\alpha - \lambda_1) T \rho_+(t, T) \\ &\quad + \lambda_2 T \rho_-(t, T) dT \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha T^2 \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) dT - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha T_{AN} T \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) dT \\ &\quad + (\alpha - \lambda_1) T_+(t) + \lambda_2 T_-(t). \end{aligned}$$

4.2 Der Erwartungswert

Weiter wenden wir auf die noch vorhandenen Integrale partielle Integration an und nutzen die Eigenschaften von Dichtefunktionen nach [3], sodass die Randterme verschwinden und wir erneut die Definitionen anwenden können. Damit ergibt sich für die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_+(t) &= -2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} T\rho_+(t, T)dT + \alpha T_{AN} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_+(t, T)dT + (\alpha - \lambda_1)T_+(t) + \lambda_2 T_-(t) \\ &= -2\alpha T_+(t) + \alpha T_{AN}\pi_{AN}(t) + (\alpha - \lambda_1)T_+(t) + \lambda_2 T_-(t).\end{aligned}$$

Da die rechte Seite von der Funktion T_+ selbst abhängt, erhalten wir eine Differentialgleichung in Abhängigkeit der Funktionen π_{AN} und T_- . Die Ableitung von T_- bezüglich der Zeit t berechnen wir analog und erhalten somit das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{T}_+(t) &= -(\alpha + \lambda_1)T_+(t) + \lambda_2 T_-(t) + \alpha T_{AN}\pi_{AN}(t) \\ \dot{T}_-(t) &= -(\alpha + \lambda_2)T_-(t) + \lambda_1 T_+(t) + \alpha T_{AUS}\pi_{AUS}(t).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Dieses System werden wir später zur Definition des Erwartungswertes nutzen, weshalb wir nun dessen Stabilität untersuchen wollen. Hierfür wollen wir wie in Abschnitt 4.1 die Eigenschaft (4.6) nutzen, um die entkoppelten Gleichungen betrachten zu können. Allerdings ist in diesem Fall die rechte Seite $\mathbb{E}[T]$ keine Konstante, weswegen wir diese Funktion zuerst auf Konvergenz untersuchen müssen. Da wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ lediglich über die Größen T_+, T_- gegeben haben, formulieren wir die Differentialgleichung des Erwartungswertes

$$\dot{\mathbb{E}}[T(t)] = \dot{T}_+(t) + \dot{T}_-(t) = -\alpha (\mathbb{E}[T(t)] - T_{AN}\pi_{AN}(t) - T_{AUS}\pi_{AUS}(t))\tag{4.8}$$

über die Summe aus den Gleichungen des Systems (4.7). Damit hängt der Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ von den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} ab.

Im folgenden Lemma wird die erwartete Temperatur auf Stabilität untersucht. Dabei werden wir im Beweis verwenden, dass die rechte Seite nur von bereits bekannten Größen abhängt.

Lemma 4.2

Das Gleichgewicht

$$\overline{\mathbb{E}[T]} := \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}T_{AN} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}T_{AUS}\tag{4.9}$$

ist global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (4.8) mit Anfangsbedingung $\mathbb{E}[T(0)] = \mathbb{E}[T]_0$.

Beweis:

Da die Differentialgleichung (4.8) inhomogen ist, erinnern wir uns zunächst an die Lösungsformel aus Lemma 2.17. Die Konvergenz der so gewonnenen Lösung hängt

somit nach Bemerkung 2.22 von der Konvergenz der Inhomogenität und dem Vorfaktor ab. Dieses Resultat haben wir bereits in Beispiel 2.21 veranschaulicht. Betrachten wir also die rechte Seite der Gleichung (4.8), so stellen wir fest, dass wir bereits wissen, dass die Funktionen $\pi_{AN}(t)$ und $\pi_{AUS}(t)$ nach Lemma 4.1 konvergent sind. Darüber hinaus ist der Faktor $-\alpha$ stets negativ und wir können folgern, dass die Lösung der Differentialgleichung (4.8) für $t \rightarrow \infty$ konvergiert.

Zur Ermittlung des Gleichgewichts berechnen wir zuerst die Nullstelle der rechten Seite der Differentialgleichung (4.8) und erhalten

$$\mathbb{E}[T(t)] = T_{AN}\pi_{AN}(t) + T_{AUS}\pi_{AUS}(t),$$

was der klassischen Definition des Erwartungswertes entspricht.

Anschließend betrachten wir den Grenzübergang unter Verwendung der Gleichgewichte von π_{AN} und π_{AUS} , sodass wir das Gleichgewicht

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}[T]} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} T_{AN}\pi_{AN}(t) + T_{AUS}\pi_{AUS}(t) \\ &= T_{AN}\bar{\pi}_{AN} + T_{AUS}\bar{\pi}_{AUS} \\ &= T_{AN}\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + T_{AUS}\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

erhalten.

Da der Vorfaktor $-\alpha < 0$ stets negativ ist, können wir aus der Lösungsformel aus Lemma 2.17 folgern, dass die Konvergenz der Lösung $\mathbb{E}[T]$ unabhängig von dem Startwert ist. Zudem sind auch die Funktionen π_{AN} und π_{AUS} unabhängig von ihren Startwerten konvergent, weswegen das geforderte Gleichgewicht (4.9) global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung des Erwartungswertes (4.8) ist. \square

Mithilfe der Konvergenz des Erwartungswertes $\mathbb{E}[T]$ können wir anschließend das Differentialgleichungssystem (4.7) auf dessen Stabilität untersuchen.

Lemma 4.3

Das Gleichgewicht

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_+ \\ \bar{T}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 T_{AUS} + (\alpha + \lambda_2) T_{AN}) \\ \frac{\lambda_1}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} ((\alpha + \lambda_1) T_{AUS} + \lambda_2 T_{AN}) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

ist global asymptotisch stabil für das Differentialgleichungssystem (4.7) mit Anfangsbedingung $(T_+(0), T_-(0)) = (T_{+0}, T_{-0})$.

Beweis:

Zu Beginn verwenden wir die Gleichung (4.6), um die zwei Gleichungen des Systems (4.7) zu entkoppeln, das heißt wir setzen $T_-(t) = \mathbb{E}[T(t)] - T_+(t)$ in die erste Gleichung ein. Damit können wir die zwei Differentialgleichungen des Systems unabhängig voneinander analysieren. Da die resultierenden entkoppelten Differentialgleichungen analog zu behandeln sind, betrachten wir nur

$$\dot{T}_+(t) = -(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2) T_+(t) + \lambda_2 \mathbb{E}[T(t)] + \alpha T_{AN} \pi_{AN}(t) \quad (4.11)$$

und übertragen dann unsere Resultate auf die Größe T_- .

Auch hier argumentieren wir wie in Lemma 4.2 und stellen fest, dass die Größen π_{AN} und $\mathbb{E}[T]$ der rechten Seite bekannt sind und diese nach Lemma 4.1 und Lemma 4.2 konvergent sind. Zudem ist der Vorfaktor $-(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)$ stets negativ und somit können wir folgern, dass die Lösung der Differentialgleichung (4.11) nach Lemma 2.17 für $t \rightarrow \infty$ konvergiert.

Durch Nullstellenbestimmung der rechten Seite der Gleichung (4.11) und entsprechender Grenzwertbetrachtung erhalten wir das Gleichgewicht

$$\begin{aligned} \bar{T}_+ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + \lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_2 \mathbb{E}[T(t)] + \alpha T_{AN} \pi_{AN}(t)) \\ &= \frac{\lambda_2}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 T_{AUS} + (\alpha + \lambda_2) T_{AN}). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich das Gleichgewicht

$$\bar{T}_- = \frac{\lambda_1}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} ((\alpha + \lambda_1) T_{AUS} + \lambda_2 T_{AN}).$$

Die zwei Gleichgewichte sind zusätzlich global asymptotisch stabil für das System (4.7), da die Lösungen π_{AN} , π_{AUS} und $\mathbb{E}[T]$ unabhängig von ihren Startwerten konvergieren und der Vorfaktor $-(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2) < 0$ stets negativ ist. \square

Damit haben wir die erwartete Temperatur sowie deren Bestandteile modelliert und analysiert. Die Stabilitätseigenschaften des Erwartungswertes (4.8) und des zugehörigen Systems (4.7) sind dabei von den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten aus dem vorherigen Abschnitt abhängig.

4.3 Die Varianz

Abschließend möchten wir noch die Abweichung der Kühlschrankschranktemperatur formulieren, um gemeinsam mit dem Erwartungswert einen Temperaturbereich zu modellieren. Zu diesem Zweck wählen wir die Varianz der erwarteten Temperatur, da diese ein Maß der Streuung angibt. Die quadratische Standardabweichung ist hier gut geeignet, da wir die Varianz direkt nach Definition 2.5 aus dem Erwartungswert bestimmen können. Zudem können wir den Verschiebungssatz aus Bemerkung 2.6 anwenden und erhalten die Varianz

$$\begin{aligned} v(t) &:= \text{Var}[T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (T - \mathbb{E}[T(t)])^2 (\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T^2 (\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT - (\mathbb{E}[T(t)])^2. \end{aligned}$$

Auch hier wollen wir eine Differentialgleichung für die Streuung formulieren und differenzieren die Varianz bezüglich der Zeit t , sodass für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} T^2 (\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT - (\mathbb{E}[T(t)])^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T^2 (\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT - 2\mathbb{E}[T(t)]\dot{\mathbb{E}}[T(t)] \end{aligned}$$

gilt. Da der Integrand stetig und beschränkt ist, differenzieren wir unter dem Integral und verwenden die partiellen Differentialgleichungen (4.5) und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha T^3 \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) - \alpha T_{AN} T^2 \frac{\partial}{\partial T} \rho_+(t, T) + (\alpha + \lambda_1) T^2 \rho_+(t, T) \\ &\quad + \lambda_2 T^2 \rho_-(t, T) + \alpha T^3 \frac{\partial}{\partial T} \rho_-(t, T) - \alpha T_{AUS} T^2 \frac{\partial}{\partial T} \rho_-(t, T) + (\alpha - \lambda_2) T^2 \rho_-(t, T) \\ &\quad + \lambda_1 T^2 \rho_+(t, T) dT - 2\mathbb{E}[T(t)]\dot{\mathbb{E}}[T(t)]. \end{aligned}$$

Weiter wenden wir partielle Integration sowie die Definitionen von T_+ und T_- an und können die Ableitung so umformen, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= -3\alpha \int_{-\infty}^{\infty} T^2 \rho_+(t, T) dT + 2\alpha T_{AN} T_+(t) - 3\alpha \int_{-\infty}^{\infty} T^2 \rho_-(t, T) dT \\ &\quad + 2\alpha T_{AUS} T_-(t, T) + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} T^2 (\rho_+(t, T) + \rho_-(t, T)) dT - 2\mathbb{E}[T(t)]\dot{\mathbb{E}}[T(t)]. \end{aligned}$$

Anschließend formen wir die Ableitung so um, dass diese von der Varianz v abhängt und erzeugen so eine Differentialgleichung, die von dem Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ und

4.3 Die Varianz

seinen Bestandteilen T_+ und T_- abhängt. Damit ist die Differentialgleichung für die Varianz gegeben durch

$$\dot{v}(t) = -2 \left(\alpha (v(t) + \mathbb{E}[T(t)]^2 - T_{AN}T_+(t) - T_{AUS}T_-(t)) + \mathbb{E}[T(t)]\dot{\mathbb{E}}[T(t)] \right). \quad (4.12)$$

Bevor wir die Veränderung der Varianz in der Zeit (4.12) auf ihre Stabilität untersuchen, formulieren wir die Gleichung so um, dass die rechte Seite vereinfacht dargestellt wird. Dafür verwenden wir die Ableitung des Erwartungswertes (4.8), womit die Differentialgleichung (4.12) geschrieben werden kann als

$$\dot{v}(t) = -2\alpha (v(t) - T_{AN}T_+(t) - T_{AUS}T_-(t) + \mathbb{E}[T(t)] (T_{AN}\pi_{AN}(t) + T_{AUS}\pi_{AUS}(t))).$$

Nun können wir im anschließenden Lemma eine Stabilitätsaussage über die Varianz v unter Verwendung der bisherigen Resultate treffen.

Lemma 4.4

Das Gleichgewicht

$$\bar{v} = \frac{\alpha\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)} (T_{AN} - T_{AUS})^2 \quad (4.13)$$

ist global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (4.12) mit Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

Beweis:

Wir wissen bereits aus den vorherigen Abschnitten, dass die Lösungen $T_+(t)$, $T_-(t)$, $\mathbb{E}[T(t)]$, $\pi_{AN}(t)$ und $\pi_{AUS}(t)$ der zugehörigen Differentialgleichungen konvergieren. Zusammen mit dem negativen Vorfaktor -2α können wir auf die Konvergenz der Lösung $v(t)$ der Gleichung (4.12) für $t \rightarrow \infty$ nach Bemerkung 2.22 schließen.

Für den Wert des Gleichgewichts berechnen wir den Grenzwert der Nullstelle der rechten Seite. Insbesondere lösen wir die Gleichung (4.12) nach der Varianz

$$v(t) = T_{AN}T_+(t) + T_{AUS}T_-(t) + T_{AN}\mathbb{E}[T(t)]\pi_{AN}(t) + T_{AUS}\mathbb{E}[T(t)]\pi_{AUS}(t)$$

auf. Setzen wir nun die global asymptotisch stabilen Gleichgewichte $\bar{\pi}_{AN}$, $\bar{\pi}_{AUS}$, \bar{T}_- und \bar{T}_+ im Grenzprozess ein, so ergibt sich das Gleichgewicht

$$\bar{v} = \frac{\alpha\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)} (T_{AN} - T_{AUS})^2 \quad (4.14)$$

und es folgt, dass das Gleichgewicht \bar{v} , wie gefordert, global asymptotisch stabil für die Differentialgleichung (4.12) ist, da die Lösung v unabhängig von dem Startwert v_0 konvergiert. \square

Die quadratische Standardabweichung ist nach Definition vom Erwartungswert und dieser von den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten abhängig. Diese Tatsache spiegelt sich auch in der Lösung v , Differentialgleichung (4.12) und ihrem Gleichgewicht \bar{v} wider. Dennoch können wir uns diese Abhängigkeit zu Nutze machen, wie bereits im Beweis von Lemma 4.4, indem wir die Eigenschaften der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und des Erwartungswertes ausnutzen. Dieses Vorgehen werden wir im nächsten Abschnitt erneut aufgreifen.

4.4 Das System für den Erwartungswert und die Varianz

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln alle notwendigen Größen motiviert und formuliert haben, wollen wir daraus ein System für den stochastischen Zustand eines Kühlschranks modellieren. Dabei dienen die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten π_{AN} und π_{AUS} zur Beschreibung des Gerätezustandes. Basierend darauf verwenden wir die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ und deren Varianz v , um einen Temperaturbereich zu erhalten, den die Kühlschranktemperatur nicht verlässt. Aufgrund dessen sind wir daran interessiert vor allem diesen Bereich zu stabilisieren, um eine angemessene Kühlung der Lebensmittel zu garantieren. Natürlich soll auch der Zustand des Kühlschranks auf lange Sicht einen stabilen Wert annehmen, damit der durchschnittliche Verbrauch des Gerätes nahezu konstant ist.

Zur Modellierung des gewünschten Systems fassen wir die bereits definierten Differentialgleichungen in einem System zusammen und untersuchen zudem dessen Stabilität. Das Resultat ist in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4.5

Das Gleichgewicht

$$\begin{pmatrix} \bar{\pi}_{AN} \\ \bar{\pi}_{AUS} \\ \bar{T}_+ \\ \bar{T}_- \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{\lambda_2}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 T_{AUS} + (\alpha + \lambda_2) T_{AN}) \\ \frac{\lambda_1}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_2 T_{AN} + (\alpha + \lambda_1) T_{AUS}) \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \alpha}{(\alpha + \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)^2} (T_{AN} - T_{AUS})^2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

ist für das System

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}_{AN} &= -\lambda_1 \pi_{AN} + \lambda_2 \pi_{AUS} \\
 \dot{\pi}_{AUS} &= -\lambda_2 \pi_{AUS} + \lambda_1 \pi_{AN} \\
 \dot{T}_+ &= -(\alpha + \lambda_1) T_+ + \lambda_2 T_- + \alpha \pi_{AN} T_{AN} \\
 \dot{T}_- &= -(\alpha + \lambda_2) T_- + \lambda_1 T_+ + \alpha \pi_{AUS} T_{AUS} \\
 \dot{v} &= -2(\alpha (v + (T_+ + T_-)^2 - T_{AN} T_+ - T_{AUS} T_-) \\
 &\quad - \alpha (T_+ + T_-) (T_+ + T_- - \pi_{AN} T_{AN} - \pi_{AUS} T_{AUS}))
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

mit Anfangsbedingung

$$(\pi_{AN}(0), \pi_{AUS}(0), T_+(0), T_-(0), v(0))^T = (\pi_{AN_0}, \pi_{AUS_0}, T_{+0}, T_{-0}, v_0)^T$$

global asymptotisch stabil.

Beweis:

Für den Beweis stellen wir fest, dass wir für die Untersysteme (4.2), (4.7) und (4.12) die global asymptotisch stabilen Gleichgewichte bereits berechnet haben.

Weiterhin ist das System für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}_{AN}(t) &= -\lambda_1 \pi_{AN}(t) + \lambda_2 \pi_{AUS}(t) \\
 \dot{\pi}_{AUS}(t) &= -\lambda_2 \pi_{AUS}(t) + \lambda_1 \pi_{AN}(t)
 \end{aligned}$$

unabhängig von den Größen T_+ , T_- und v . Aus diesem Grund bleibt Lemma 4.1 gültig. Analog können wir für das Subsystem

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_+(t) &= -(\alpha + \lambda_1) T_+(t) + \lambda_2 T_-(t) + \alpha T_{AN} \pi_{AN}(t) \\
 \dot{T}_-(t) &= -(\alpha + \lambda_2) T_-(t) + \lambda_1 T_+(t) + \alpha T_{AUS} \pi_{AUS}(t)
 \end{aligned}$$

argumentieren und erhalten aus Lemma 4.3 das geforderte Gleichgewicht. Abschließend verweisen wir auf Lemma 4.4, um die gewünschte Ruhelage für die Varianz

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t) &= -2(\alpha (v(t) + (T_+(t) + T_-(t))^2 - T_{AN} T_+(t) - T_{AUS} T_-(t)) \\
 &\quad - \alpha (T_+(t) + T_-(t)) (T_+(t) + T_-(t) - T_{AN} \pi_{AN}(t) - T_{AUS} \pi_{AUS}(t)))
 \end{aligned}$$

zu erhalten.

Die Gleichgewichte der einzelnen Untersysteme fassen wir als das Gleichgewicht des Systems (4.16) zusammen. Aufgrund der Unabhängigkeit der Subsysteme von den nachfolgenden Systemen, können wir auf die globale asymptotische Stabilität des Gleichgewichts $(\bar{\pi}_{AN}, \bar{\pi}_{AUS}, \bar{T}_+, \bar{T}_-, \bar{v})^T$ schließen. \square

In Satz 4.5 haben wir das System (4.16) formuliert, das den stochastischen Zustand eines Kühlschranks beschreibt. Zudem besitzt dieses Differentialgleichungssystem ein Gleichgewicht (4.15), das global asymptotisch stabil ist. Diese Eigenschaft ist im weiteren Verlauf essentiell, da wir dadurch bei der Modellierung des Regler die Systemdynamik nicht stabilisieren müssen und so den Fokus auf eine ökonomische Formulierung legen können.

Bevor wir die Regelung im nächsten Kapitel motivieren und beschreiben, wollen wir noch eine Bemerkung zur Interpretation der einzelnen Größen geben.

Bemerkung 4.6

1. Die Größen π_{AN} , π_{AUS} , T_+ , T_- und v aus Satz 4.5 beschreiben den stochastischen Zustand eines bestimmten Kühlschranks. Insbesondere werden die Wahrscheinlichkeiten, dass das Gerät an- beziehungsweise ausgeschaltet ist, seine erwartete Temperatur und die zugehörige quadratische Standardabweichung beschrieben.
2. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit π_{AN} eines Kühlschranks kann auch als seine Einschaltdauer interpretiert werden. Die Einschaltdauer gibt in Prozent an, welchen Anteil eines Zeitintervalls das Gerät angeschaltet ist und dementsprechend Strom verbraucht.
3. Der Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ und die Varianz v der Temperatur T geben einen Temperaturbereich vor, in der die tatsächliche Kühlschranktemperatur erwartungsgemäß liegt.
4. Die Wahrscheinlichkeit π_{AN} kann bei einem großen Bestand an Geräten auch als der Anteil der Kühlschränke, die angeschaltet sind, interpretiert werden. Dementsprechend geben der Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ und die Varianz v den Temperaturbereich für den gesamten Gerätebestand vor.

5 Modellprädiktive Regelung

Im Kontext eines intelligenten Netzes wollen wir in diesem Kapitel das optimale Steuerungsproblem und die modellprädiktive Regelung motivieren und formulieren. Dafür betrachten wir im ersten Schritt den Verbund aller Haushaltskühlschränke, das heißt, wir regeln den Verbund und erfassen diesen als ein Gerät unabhängig von der individuellen Steuerung der einzelnen Kühlschränke. Für diese Regelung werden wir die modellbezogenen Größen definieren und anschließend analysieren. Daraufhin wollen wir die dezentrale stochastische Kontrollstrategie der einzelnen Kühlschränke modellieren und in das vorher beschriebene optimale Steuerungsproblem einbinden.

5.1 Deterministisches Modell

Im folgenden Abschnitt wollen wir einen Zusammenschluss von Haushalten, die als Stromverbraucher und -erzeuger agieren, als optimales Steuerungsproblem modellieren und modellprädiktiv regeln. Dieses Netzwerk aus mehreren Haushalten, die durch ihren Stromverbrauch und ihre Stromerzeugung das Stromnetz beeinflussen, bezeichnen wir als *Smart Grid*. Durch Nutzung elektrischer Geräte entsteht dabei die Stromnachfrage eines Haushaltes und durch Photovoltaikanlagen seine Stromerzeugung. Insbesondere gehen wir davon aus, dass zunächst jeder Haushalt ein Gerät besitzt, das als Energiespeicher dient. Einen Haushalt, der Strom erzeugen und durch ein Gerät Energie speichern kann, bezeichnen wir als *Residential Energy System* (kurz: RES). In diesem Modell werden wir Kühlschränke als Energiespeicher verwenden. Diese Geräte eignen sich ideal, da sie bereits in jedem Haushalt vorhanden sind. Zudem sind Kühlschränke zumeist ganzjährig und -täglich ohne Nutzerinteraktion in Betrieb. Solange eine angemessene Kühlung der Lebensmittel garantiert werden kann, wird also der Nutzer durch eine externe Regelung des Kühlschranks nicht beeinflusst. Wir gehen davon aus, dass jedem Haushalt ein Kühlschrank zugeordnet werden kann. Zunächst betrachten wir einen deterministischen Regler, das heißt, wir regeln einen Verbund der Geräte. Darin werden alle Kühlschränke zusammengefasst und ihre Zustände aggregiert, sodass ein Gesamtmodell der Geräte entsteht. Dabei ist es für diese Betrachtung nicht relevant, wie ein einzelner Kühlschrank gesteuert wird. Außerdem nehmen wir an, dass dem Netz eine Kommunikationsstruktur zugrunde liegt, sodass die nötigen Modellgrößen zwischen den Bestandteilen des Netzwerks weitergegeben werden können. In Abbild-

ung 5.1 ist die Struktur des Smart Grids vereinfacht dargestellt.

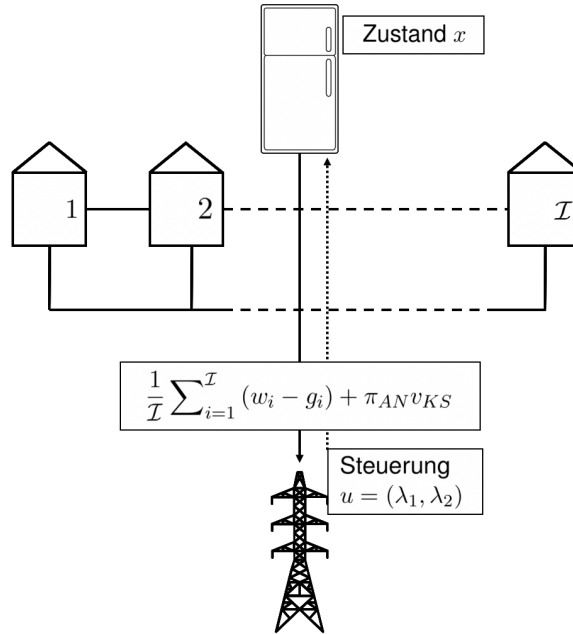


Abbildung 5.1: Gesamtmodellarchitektur

In jedem Optimierungsschritt misst der Verbund der Kühlschränke seinen Zustand x , der aus der Größe π_{AN} , der erwarteten Temperatur $\mathbb{E}[T]$ und der erlaubten Temperaturabweichung v besteht. Des Weiteren ermittelt jeder Haushalt seinen Stromverbrauch $w(k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und seine Stromerzeugung $g(k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Der Zustand des Geräts und die Differenz zwischen Stromverbrauch und Stromerzeugung der Haushalte werden an die zentrale Steuerungseinheit (kurz: CE¹) gesendet, die daraufhin die Steuerungsgröße $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ durch Lösen eines optimalen Steuerungsproblems berechnet und zurück kommuniziert. Darauf basierend kann ein neuer Zustand gemessen werden.

Zur genaueren Beschreibung des Vorgehens analysieren wir im Folgenden die einzelnen Bestandteile des Regelkreises. Dabei gehen wir auf die Netzdaten, den Zustand und die Kontrolle sowie auf die Formulierung der Kostenfunktion ein.

¹aus dem Englischen: central entity

5.1.1 Die Netzdaten

Zur Simulation des Netzverhaltens verwenden wir einen Datensatz, der von dem australischen Elektrizitätsunternehmen Ausgrid [2] erzeugt wurde. Eine ausführliche Analyse der Daten ist in dem Paper von Ratnam et al. [19] sowie in der Arbeit von Braun [5] zu finden. Die Daten enthalten den Stromverbrauch und die Stromerzeugung von 300 Haushalten. Diese haben jede halbe Stunde den aktuellen Zustand ihres Verbrauchs und ihrer Erzeugung über ein Jahr hinweg an Ausgrid übermittelt. Wir bezeichnen allgemein mit $\mathcal{I} \in \mathbb{N}$ die Anzahl der betrachteten Haushalte, da das spätere Vorgehen unabhängig davon ist.

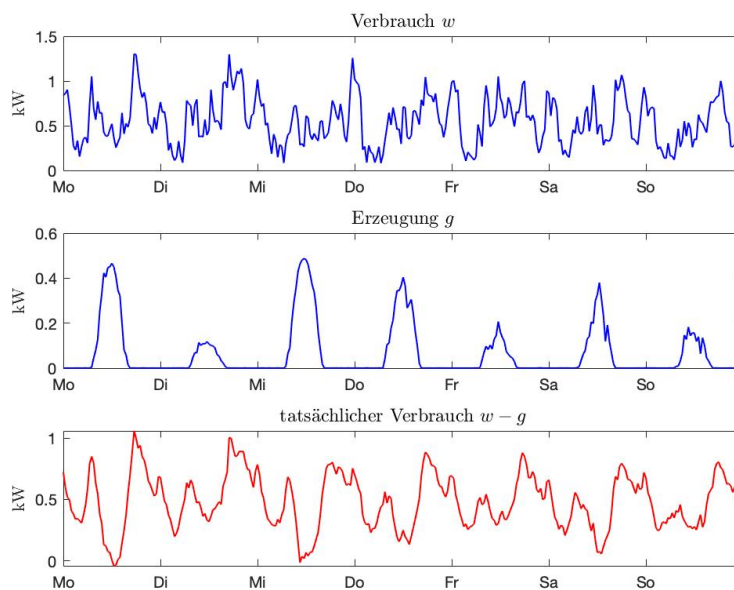


Abbildung 5.2: Netzdaten

In Abbildung 5.2 sind der Verbrauch und die Erzeugung in Kilowatt (kW) von 100 Haushalten in einer Woche im Mittel abgebildet. Dabei bezeichnen wir mit $w_i(k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ den Stromverbrauch und mit $g_i(k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Stromerzeugung eines Haushaltes $i \in \mathcal{I}$ zum Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Aus der Differenz dieser beiden Größen erhalten wir den tatsächlichen Verbrauch

$$w_i(k) - g_i(k) \in \mathbb{R}$$

eines Haushaltes $i \in \mathcal{I}$ zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. In Abhängigkeit von der Tageszeit ist es möglich, dass der tatsächliche Stromverbrauch negativ ist, das heißt, die Haushalte haben zu diesem Zeitpunkt mehr Strom erzeugt als verbraucht und haben damit überflüssigen Strom zur Verfügung.

Da die Netzdaten nur für 30-minütige Intervalle vorliegen, werden wir dementsprechend auch unsere Optimierungsschritte wählen. Dazu verwenden wir das Intervall $T = 0.5$ Stunden, das heißt zwischen den Optimierungsschritten liegt jeweils eine halbe Stunde. Des Weiteren verwenden wir zur Vereinfachung die gemittelten Werte von Stromverbrauch und -erzeugung, die für ein Zeitintervall T konstant sind.

5.1.2 Der Zustand und die Kontrolle

Zur Messung des Zustandes des Verbundes der Kühlschränke verwenden wir eine Form des in Kapitel 4.4 analysierten Differentialgleichungssystems (4.16). Dieses liefert die Wahrscheinlichkeit π_{AN} , die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ sowie die zugehörige quadratische Standardabweichung v . Zudem erinnern wir uns an Bemerkung 4.6 und interpretieren $\pi_{AN}(k)$ als den Anteil der Kühlschränke im Verbund, die zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ angeschaltet sind. Auch die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ und die Varianz v beziehen sich in diesem Fall auf den Kühlschrankverbund. Bevor wir das System als Dynamik in unserem modellprädiktiven Regler einsetzen, vereinfachen wir die Gleichungen, diskretisieren diese und ermitteln die Menge der zulässigen Zustände \mathbb{X} . Zur Diskretisierung der Systemdynamik verwenden wir ein s -stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren [10]. Zunächst nutzen wir den Zusammenhang

$$\pi_{AN}(k) + \pi_{AUS}(k) = 1$$

zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$, um den Anteil der Kühlschränke, die ausgeschaltet sind, durch den Anteil der angeschalteten Kühlschränke auszudrücken. Zudem diskretisieren wir die Differentialgleichung (4.4) mithilfe des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h = 0.5$, das heißt mithilfe eines einstufigen Runge-Kutta-Verfahrens, und erhalten

$$\pi_{AN}(k+1) = (1 - 0.5(\lambda_1(k) + \lambda_2(k)))\pi_{AN}(k) + 0.5\lambda_2(k). \quad (5.1)$$

Basierend auf dieser Größe können wir angeben, wie viel Strom der Verbund der Kühlschränke pro Zeitintervall im Durchschnitt benötigt. Zudem sind wir daran interessiert, in welchem Bereich die Gerätetemperatur erwartungsgemäß liegt. Dazu verwenden wir die Größen T_+ und T_- , um aus deren Summe die erwartete Temperatur zu erhalten. Zudem stellt die Varianz v die quadratische Abweichung der Temperatur dar. Daraus ergibt sich, dass der Zustand

$$x = (\pi_{AN}, T_+, T_-, v)^T$$

aus dem Anteil der angeschalteten Geräte im Verbund, der erwarteten Temperatur und der zugehörigen Varianz besteht. Aus dem Erwartungswert und der Varianz erhalten wir den Temperaturbereich des Kühlschrankverbundes, der auch für die einzelnen Geräte gilt. Dieser sollte so gewählt werden, dass eine angemessene Kühlung der

Lebensmittel garantiert werden kann. Zu diesem Zweck definieren wir die Menge der zulässigen Zustände \mathbb{X} . Dazu betrachten wir erneut die einzelnen Komponenten des Zustandsvektors x . Zunächst stellt π_{AN} einen prozentualen Anteil dar, sodass

$$0 \leq \pi_{AN} \leq 1$$

gilt. Zudem wollen wir erreichen, dass die erwartete Temperatur in einem vorgegebenen Bereich liegt und fordern deshalb, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[T] = T_+ + T_-$ von oben und unten durch konstante Temperaturen

$$\underline{T} \leq T_+ + T_- \leq \bar{T}$$

beschränkt ist. Die Temperaturbeschränkungen $\underline{T}, \bar{T} \in [T_{AN}, T_{AUS}]$ liegen formal zwischen den zwei Extremzuständen des Gerätes, jedoch werden wir sie später an die empfohlene Temperatur eines Haushaltskühlschranks anpassen. Weiterhin wollen wir zu große Temperaturabweichungen vermeiden, weshalb wir die Varianz mit einer Konstante \overline{var} von oben beschränken, während sie nach Definition zudem stets nicht negativ ist. Mit diesen Bedingungen können wir nun die Menge der zulässigen Zustände

$$\mathbb{X} := \left\{ \begin{pmatrix} \pi_{AN} \\ T_+ \\ T_- \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 0 \leq \pi_{AN} \leq 1 \\ \underline{T} \leq T_+ + T_- \leq \bar{T} \\ 0 \leq v \leq \overline{var} \end{array} \right\}$$

definieren.

Im nächsten Schritt betrachten wir die Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$, die sich aus den Übergangsraten λ_1, λ_2 zwischen den möglichen Zuständen eines Kühlschranks ergibt. In diesem Zusammenhang interpretieren wir λ_1 und λ_2 als die Übergangsraten, die den Anteil der angeschalteten Kühlschränke verringern beziehungsweise erhöhen. Diese Größen eignen sich als Steuergrößen, da sie direkt den Anteil der angeschalteten Kühlschränke in Gleichung (5.1) beeinflussen. So kann je nach der Menge des verfügbaren Stroms die Größe π_{AN} steigen oder sinken. Insbesondere hängen davon auch die erwartete Temperatur und die Varianz ab, sodass bei steigender Wahrscheinlichkeit π_{AN} die Temperatur sinkt und umgekehrt. Nun wollen wir die Menge der zulässigen Kontrollwerte definieren. Da die einzelnen Komponenten der Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ weiterhin als Übergangsraten zwischen den möglichen Kühlschrankzuständen interpretiert werden können, ist die Menge der zulässigen Kontrollen gegeben als

$$\mathbb{U} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}.$$

Insbesondere ist die Menge \mathbb{U} unabhängig vom Startzustand x_0 und von dem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ gewählt.

Nachdem wir alle notwendigen Größen zur Definition der Nebenbedingung des Reglers festgelegt haben, können wir das Kontrollsystem $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ abhängig von dem Zustand $x(k)$ und der Kontrolle $u(k)$ formulieren. Die Systemdynamik für das optimale Steuerungsproblem ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \pi_{AN}(k+1) &= (1 - 0.5(\lambda_1(k) + \lambda_2(k))) \pi_{AN}(k) + 0.5\lambda_2(k) \\
 T_+(k+1) &= (1 - 0.5(\alpha + \lambda_1(k))) T_+(k) + 0.5(\lambda_2(k)T_-(k) + \alpha T_{AN}\pi_{AN}(k)) \\
 T_-(k+1) &= (1 - 0.5(\alpha + \lambda_2(k))) T_-(k) + 0.5(\lambda_1(k)T_+(k) + \alpha T_{AUS}(1 - \pi_{AN}(k))) \\
 v(k+1) &= (1 - \alpha)v(k) - 0.5(T_{AN}T_+(k) + T_{AUS}T_-(k) - \\
 &\quad (T_+(k) + T_-(k))(T_{AN}\pi_{AN}(k) + T_{AUS}(1 - \pi_{AN}(k))).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir das System (5.2) zur Abkürzung mit

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)).$$

Dabei beschreibt die Funktion $f : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ die rechte Seite der Systemdynamik. Weiter treffen wir die Annahme, dass sich der Zustand x und die Kontrolle u innerhalb eines Optimierungsschrittes nicht verändern können. Da die Netzdaten nach Abschnitt 5.1.1 in einem halbstündigen Intervall $T = 0.5$ vorliegen, verwenden wir diese Größe auch als Schrittgröße zwischen den Optimierungsschritten und somit als Intervall, auf dem der Zustand x und die Kontrolle u konstant sind.

5.1.3 Die Kostenfunktion

Für den Regler wollen wir in diesem Abschnitt eine ökonomische Kostenfunktion formulieren. Da es unser Ziel ist, mögliche Schwankungen im tatsächlichen Verbrauch durch den Verbund der Kühlschränke auszugleichen, wollen wir die Kostenfunktion dementsprechend konstruieren. Dabei sollen die Abweichungen von einem vorgegebenen Zielwert quadratisch bestraft werden, um besonders große Schwankungen zu vermeiden. Zudem ist das System (5.2) nach Kapitel 4.4 global asymptotisch stabil, weswegen die Dynamik unseres modellprädiktiven Reglers nicht zusätzlich durch die Kostenfunktion stabilisiert werden muss. Im Folgenden analysieren wir die einzelnen Komponenten der Stufenkosten, um anschließend die Kostenfunktion zu definieren. Zu Beginn betrachten wir den tatsächlichen Verbrauch $w_i(k) - g_i(k)$ eines Haushaltes $i \in \mathcal{I}$ zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Zur Simulation des Netzes aggregieren wir den tatsächlichen Verbrauch der \mathcal{I} Haushalte

$$a(k) := \frac{1}{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} w_i(k) - g_i(k)$$

zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$.

Weiter gehen wir davon aus, dass ein Kühlschrank nur dann Strom verbraucht, wenn er gerade kühlt, also angeschaltet ist. Deshalb addieren wir zu dem durchschnittlichen tatsächlichen Verbrauch der Haushalte den Energiebedarf eines Kühlschranks, der den durchschnittlichen Verbrauch der Geräte im Verbund repräsentiert. Dieser Verbrauch nimmt an, dass der Kühlschrank im gesamten Zeitintervall $T = 0.5$ arbeitet. Da wir allerdings voraussetzen, dass nur ein angeschalteter Kühlschrank Strom verbraucht, skalieren wir den Kühlschrankverbrauch v_{KS} mit der Größe π_{AN} . Diese kann nach Bemerkung 4.6 auch als Einschaltdauer eines Gerätes interpretiert werden, was uns anschaulich den durchschnittlichen Verbrauch eines angeschalteten Kühlschranks $\pi_{AN}(k)v_{KS}$ in einem Optimierungsschritt $k \in \mathbb{N}_0$ liefert. Damit erhalten wir die zu regulierende Größe

$$z(k) = \frac{1}{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} w_i(k) - g_i(k) + \pi_{AN}(k)v_{KS}$$

zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Als Referenzgröße verwenden wir einen über den MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$ und der Anzahl der betrachteten Haushalte \mathcal{I} gemittelten tatsächlichen Verbrauch, der abhängig von der Tageszeit ist. Wir definieren die zeitabhängige Zielgröße

$$\zeta(k) = \frac{1}{\mathcal{I}N} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} \sum_{j=k}^{k+N-1} w_i(j) - g_i(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=k}^{k+N-1} a(j)$$

zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ als die zusätzliche Mittelung des aggregierten tatsächlichen Verbrauchs $a(k)$ über die zukünftigen Zeiteinheiten bis zum Zeithorizont N .

Da wir die Abweichung des tatsächlichen Verbrauchs der Haushalte und deren Kühlschrankverbrauch $z(k)$ zur Referenzgröße $\zeta(k)$ quadratisch bestrafen wollen, um großen Schwankungen entgegenzuwirken, verwenden wir die Stufenkosten

$$\ell(x(k), u(k)) = (z(k) - \zeta(k))^2$$

und erhalten damit die Kostenfunktion

$$\begin{aligned} J_N(x(k), u(k)) &= \sum_{j=0}^{N-1} (z(j) - \zeta(k))^2 \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} w_i(k+j) - g_i(k+j) + \pi_{AN}(k)v_{KS} - \frac{1}{\mathcal{I}N} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} \sum_{j=k}^{k+N-1} w_i(j) - g_i(j) \right)^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet insbesondere, dass $z(k)$ der durchschnittlichen Stromnachfrage zu einem Zeitpunkt $k+j$ entspricht. Es wird also eine möglichst konstante Nachfrage, unter

Berücksichtigung der Schwankungen des tatsächlichen Verbrauchs während eines Tages, angestrebt. Der Verbund der Kühlschränke soll zur Stabilisierung der Differenz zwischen Stromverbrauch und Stromerzeugung dienen. Je nach verfügbarem Strom verändert sich der Anteil der Geräte, die im Verbund angeschaltet sind und damit auch der nachgefragte Strom.

5.1.4 Modellprädiktive Regelung

Zur modellprädiktiven Regelung des Smart Grids verwenden wir eine zentrale Steuerungseinheit. Das bedeutet insbesondere, dass zunächst alle Informationen der Haushalte an die zentrale Einheit gesendet werden müssen. Dabei ist jedoch zu betonen, dass die zentrale Einheit keine individuellen Verbrauchsdaten der Haushalte benötigt, sondern lediglich gemittelte Werte verwendet. Aus diesen Daten der Haushalte kann die zentrale Steuerungseinheit die optimale Kontrolle berechnen, jedoch nicht auf Verhaltensweisen der einzelnen Haushalte schließen. Damit kann nur auf das Verhalten des gesamten Smart Grids rückgeschlossen werden, was ausreichend für die zentrale Einheit zur Bestimmung der zu regulierenden Größe ist.

In einem Optimierungsschritt misst der Verbund der Kühlschränke zuerst seinen aktuellen Zustand $x(k)$. Dieser wird zusammen mit dem Stromverbrauch und der Stromerzeugung der Haushalte an die zentrale Einheit gesendet. Aus den übermittelten und gemittelten Daten wird die Stromnachfrage der Haushalte $z(k)$ berechnet. Daraufhin wird durch die zentrale Einheit das optimale Steuerungsproblem gelöst, indem die Kostenfunktion J_N minimiert wird unter der Systemdynamik, die durch das Differenzgleichungssystem (5.2) mit gemessenem Startzustand $x(k)$ gegeben ist. Zudem fordern wir, dass das Paar aus Zustand und Kontrolle $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$ in jedem Optimierungsschritt zulässig ist. Nachdem die optimale Steuerungsfolge $u^*(\cdot)$ gefunden wurde, wird ihr erster Wert $u^*(0)$ als Feedback $\mu_N(x(k))$ zurück an die Haushalte gesendet. Darauf basierend kann der Kühlschrank im nächsten Schritt seinen neuen Zustand messen. Das beschriebene Vorgehen ist in Algorithmus 5.1 dargestellt.

Algorithmus 5.1 MPC-Algorithmus

Input: MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$, Anzahl der Optimierungsschritte $\mathcal{N} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Anzahl der RES $\mathcal{I} \in \mathbb{N}$, Startzustand $x(0) \in \mathbb{X}$

for $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$:

RES

1. Bestimme den Zustand $x(k) \in \mathbb{X}$ des aggregierten Kühlschrankverbundes.
2. Sende den Stromverbrauch $w_i(k)$ und die Stromerzeugung $g_i(k)$ der RES an die CE und setze $x_0 = x(k)$.

CE

3. Löse das optimale Steuerungsproblem

$$\begin{aligned}
 \min_{u(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)} J_N(x_0, u(\cdot)) &:= \sum_{j=0}^{N-1} (z(j) - \zeta(k))^2 \\
 x(0, x_0) &= x_0 \\
 x(k+1) &= f(x(k), u(k))
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

und erhalte die optimale Kontrollfolge $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)$.

4. Setze $\mu_N(x(k)) := u^*(0) \in \mathbb{U}$ und wende diese auf die Systemdynamik an, um den nächsten Startzustand zu erhalten.
-

5.1.5 Numerische Resultate

Den theoretisch motivierten und modellierten Algorithmus 5.1 wollen wir nun durch Simulationen verifizieren. Dazu verwenden wir ein Matlab-Programm, das das Prinzip der vollständigen Diskretisierung [16] nutzt. Dabei fassen wir den Zustandsvektor x als eigenständige Entscheidungsvariable auf und integrieren diese direkt in das Optimierungsproblem. Das heißt, wir fassen den Zustand x und die Kontrolle u zu einer Optimierungsvariablen $y = (x(0), u(0), x(1), u(1), \dots, x(N-1), u(N-1)) \in (\mathbb{X} \times \mathbb{U})^N$ zusammen. Zudem wird dabei die Systemdynamik als nicht-lineare Nebenbedingung der Optimierung $c_{\text{eq}}(y) = 0$ implementiert. Insbesondere wird also das Differenzgleichungssystem (5.2) so umgestellt, dass für jedes $k = 0, \dots, N-1$ die Gleichung

$$c_{\text{eq}}(y(k)) = x(k+1) - f(x(k), u(k)) = 0$$

gilt. Außerdem können wir die Beschränkungen des Zustandes als lineare Bedingung $Ay \leq b$ formulieren. Dies ermöglicht eine einfache Implementierung der Bedingung an die erwartete Temperatur $\underline{T} \leq T_+ + T_- \leq \bar{T}$ als lineares Gleichungssystem. Des Weiteren können die Komponenten der Optimierungsvariablen y durch Schranken lb , ub restringiert werden, womit wir die restlichen Bedingungen an Zustand und Kontrolle umsetzen können. Daraus ergibt sich für einen Optimierungsschritt das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{z \in (\mathbb{X} \times \mathbb{U})^N} J_N(y) \\ \text{s.d.} \quad & c_{\text{eq}}(y) = 0, \\ & Ay \leq b, \\ & lb \leq y \leq ub. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die Blockdiagonalmatrix A erzeugen wir aus den Matrizen A_j , die für jede zukünftige Zeiteinheit j identisch sind. Für den Vektor b gehen wir analog vor.

Bevor wir die Simulationsergebnisse genauer analysieren, formulieren wir zunächst die Ausgangssituation. Wir betrachten 100 Haushalte, die durch Photovoltaikanlagen Strom erzeugen können und durch Nutzung elektrischer Geräte Strom verbrauchen. Zusammen mit ihren Kühlschränken, die als Energiespeicher dienen, bilden die Haushalte ein Smart Grid. Eine zentrale Einheit berechnet eine optimale Steuerung, auf der basierend die Geräte kontrolliert werden. Dadurch können die Haushaltskühlschränke auf den aktuellen Stromverbrauch des Netzes reagieren. Für die Prognose des Verbrauchs und der Erzeugung nutzen wir die in Kapitel 5.1.1 vorgestellten Daten. Zur Beschreibung der technischen Daten des Verbunds der Kühlschränke verwenden wir die in [1] angegebenen Datengrößen. Wir initialisieren den thermischen Verteilungskoeffizienten mit $\alpha = 2.4 \cdot 10^{-4}$. Des Weiteren sind die Temperaturen eines stets angeschalteten beziehungsweise ausgeschalteten Gerätes gegeben durch $T_{AN} = -38.3^\circ\text{C}$ und $T_{AUS} = 20^\circ\text{C}$.

Zuletzt benötigen wir den durchschnittlichen Verbrauch eines Kühlschranks. Hierbei ist es wichtig, den Wert im richtigen Maß zu wählen. Ist der Verbrauch zu niedrig, so haben die Geräte keine Auswirkung auf das Smart Grid. Wählen wir den Verbrauch hingegen zu groß, so wird der aggregierte tatsächliche Verbrauch der Haushalte von den Kühlschränken überlagert. Aus diesem Grund ist der Verbrauch des durchschnittlichen Kühlschranks gegeben durch $v_{KS} = 0.5 \text{ kW}$. Zudem benötigen wir die konkreten Zustandsbeschränkungen aus Abschnitt 5.1.2. Da die Größe π_{AN} als prozentualer Anteil interpretiert wird, liegt sie zwischen 0 und 1. Weiter liegt die empfohlene Kühlschranktemperatur zwischen 5°C und 7°C . Diese Empfehlung [4] wird jedoch aus unterschiedlichen Gründen, wie beispielsweise falschen Einstellungen, nicht von jedem Haushalt eingehalten. Infolgedessen nehmen wir an, dass die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ durch 2°C und 8°C begrenzt ist. Außerdem wollen wir die quadratische Standardabweichung sehr klein halten, weswegen wir sie auf 1°C^2 beschränken. Daraus können wir die Menge der zulässigen Zustände

$$\mathbb{X} := \left\{ \left(\begin{array}{c} \pi_{AN} \\ T_+ \\ T_- \\ v \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 0 \leq \pi_{AN} \leq 1 \\ 2 \leq T_+ + T_- \leq 8 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array} \right\}$$

an die gegebene Situation anpassen. Wir initialisieren den Anteil der Geräte, die im Verbund angeschaltet sind mit $\pi_{AN}(0) = 0.2$. Die Größen $T_+(0) = T_-(0) = 3.5^\circ\text{C}$ setzen wir so, dass sie zusammen den empfohlenen Wert einer Kühlschranktemperatur von 7°C ergeben. Die quadratische Standardabweichung legen wir zu Beginn mit $v(0) = 0.2^\circ\text{C}^2$ fest. Zur Überprüfung der Funktionalität des Algorithmus 5.1 simulieren wir eine Woche, das heißt, wir setzen die Anzahl der Optimierungsschritte auf $\mathcal{N} = 336$ und den MPC-Horizont auf $N = 48$, was einen Tag entspricht. In Tabelle 5.1 sind die vorangegangenen Werte der Konstanten nochmals zusammengefasst.

	Wert	Bedeutung
\mathcal{I}	100	Anzahl der betrachteten Haushalte
T_{AN}	-38.3°C	Temperatur eines Kühlschranks, der immer angeschaltet ist
T_{AUS}	20°C	Temperatur eines Kühlschranks, der immer ausgeschaltet ist
α	$2.4 \cdot 10^{-4}$	thermischer Verteilungskoeffizient
v_{KS}	0.5 kW	Stromverbrauch des Kühlschrankverbundes
N	48	MPC-Horizont
\mathcal{N}	336	Anzahl der Optimierungsschritte

Tabelle 5.1: Tabelle der benötigten Größen

5.1 Deterministisches Modell

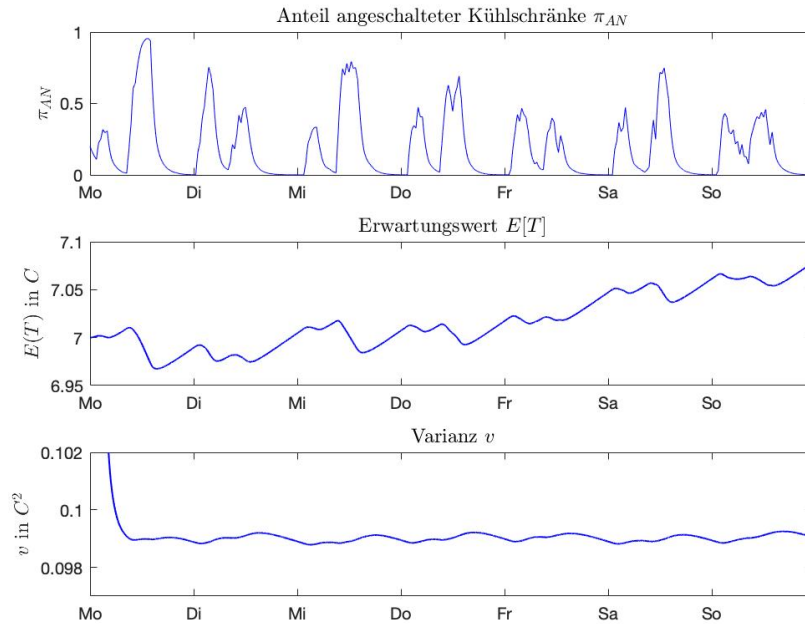


Abbildung 5.3: Zustand des Kühlschranksverbunds

Zur besseren Analyse verwenden wir in den folgenden Grafiken den Erwartungswert $\mathbb{E}[T] = T_+ + T_-$. Zuerst betrachten wir den Zustand des Kühlschranksverbunds, der in Abbildung 5.3 dargestellt ist. Wir betrachten also den Anteil der angeschalteten Geräte π_{AN} , die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ und deren Varianz v . Die Größe π_{AN} steigt oder sinkt je nach aktuellem tatsächlichem Stromverbrauch. Dementsprechend verhält sich auch der Erwartungswert. Ist der Anteil der Kühlschränke, die angeschaltet sind, höher beziehungsweise steigt diese Größe, so sinkt die erwartete Temperatur und wird zunehmend kälter. Bei abnehmendem Anteil π_{AN} steigt hingegen der Erwartungswert des Kühlschranksverbunds. Insbesondere reagieren damit die Kühlschränke auf die Stromnachfrage, indem die Geräte an- beziehungsweise ausgeschaltet werden und dementsprechend verändert sich auch ihre erwartete Temperatur. Anschaulich bedeutet dies, dass je mehr Kühlschränke kühlen, desto kälter sollte ihre durchschnittliche Temperatur sein. Dies wird zudem durch die Varianz bestätigt, da diese sehr stabil um $0.099\text{ }^\circ\text{C}^2$ schwankt. Die Schwankungen passen sich dem Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ und dem prozentualen Anteil π_{AN} an. Aus Erwartungswert und Varianz entsteht über die simulierte Woche ein Temperaturbereich, den die Kühlschränke nicht verlassen. Die Gerätetemperaturen schwanken damit ungefähr zwischen $6.8\text{ }^\circ\text{C}$ und $7.2\text{ }^\circ\text{C}$. Dies entspricht einer sehr stabilen durchschnittlichen Kühlschrankschranktemperatur, was wir unter anderem erreichen wollten.

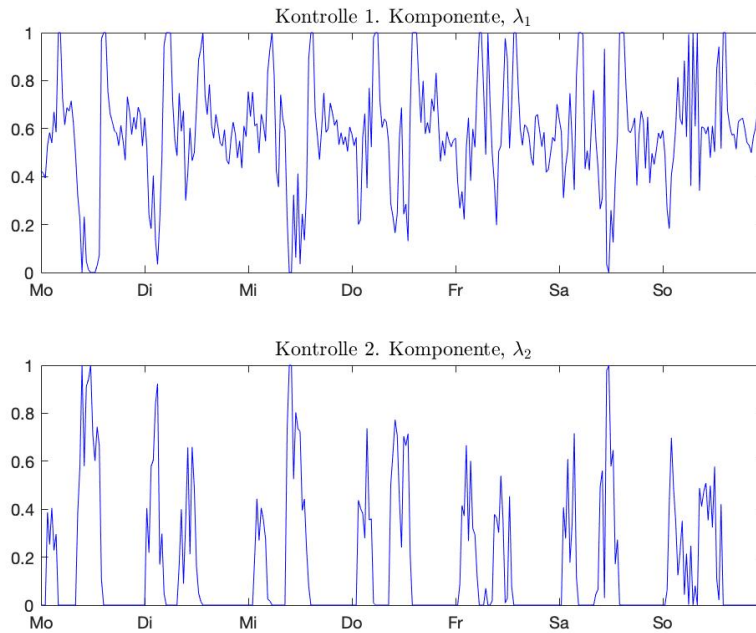


Abbildung 5.4: Kontrollkomponenten des Reglers

Im nächsten Schritt betrachten wir die einzelnen Komponenten der Steuerung u in Abbildung 5.4. Wir erinnern daran, dass λ_1 die Übergangsrate von angeschaltet zu ausgeschaltet und λ_2 die Rate von ausgeschaltet zu angeschaltet darstellt. Die Rate von an- zu ausgeschaltet schwankt um 60%, während der Übergang von aus- zu angeschaltet nur dann von nahezu 0% ausschlägt, wenn gerade viel Strom zur Verfügung steht. Anschaulich bedeutet dies, dass um die Mittagszeit viel Strom erzeugt und nur wenig Strom verbraucht wird. Diesen Erzeugungüberschuss nutzt der Regler und schaltet die Kühltürme an und nur wenige Geräte aus, was sich in den Übergangsraten λ_1 und λ_2 widerspiegelt.

Aus den Grafiken in Abbildung 5.3 und Abbildung 5.4 lässt sich schließen, dass der Anteil der angeschalteten Kühltürme π_{AN} genau dann sinkt, wenn die Übergangsrate λ_1 steigt. Es werden also mit einer hohen Wahrscheinlichkeit Geräte ausgeschaltet, was sich in dem Anteil der angeschalteten Kühltürme des Verbunds ausdrückt. Analog ist der umgekehrte Effekt zu erkennen. Sinkt die Übergangsrate λ_2 , das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kühltürme angeschaltet werden, so sinkt auch der Anteil der angeschalteten Geräte. Aus den graphischen Darstellungen des Zustands x und der Kontrolle u können wir folgern, dass die Größen des Algorithmus sich konsistent zueinander verhalten. Der Anteil der angeschalteten Kühltürme steigt dann, wenn gerade viel Strom zur Verfügung steht, was sich auch in der Veränderung in den Kontrollkomponenten λ_1 und λ_2 zeigt. In Abhängigkeit der Veränderung der Größe π_{AN}

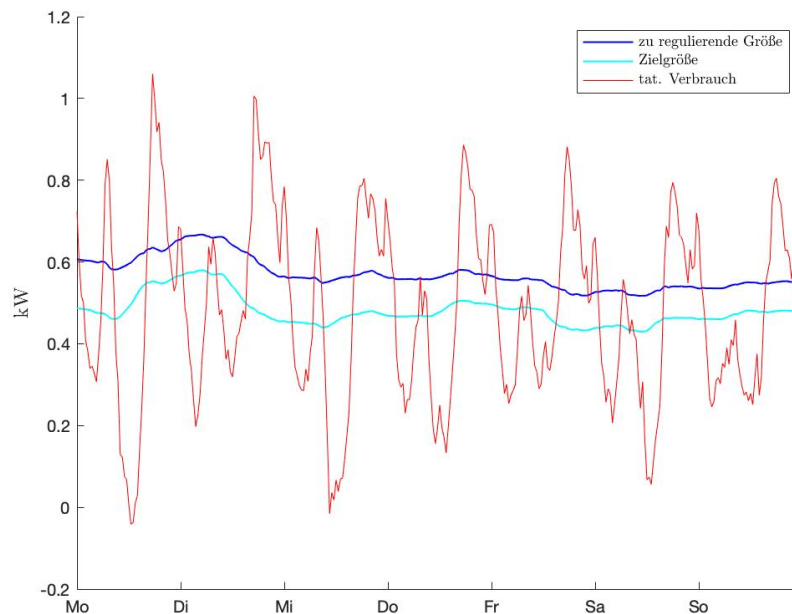


Abbildung 5.5: Wirkung der modellprädiktiven Regelung

schwankt auch die erwartete Temperatur in einem zulässigen Bereich. Da die Schwankungen jedoch so gering sind, können wir von einem stabilen Erwartungswert sprechen. Zudem verhält sich auch die Varianz stabil. Die Stabilität der Systemdynamik, die wir bereits in Kapitel 4 gezeigt haben, ist also erhalten geblieben.

Abschließend wollen wir noch graphisch analysieren und untersuchen, ob die modellprädiktive Regelung Schwankungen im tatsächlichen Verbrauch kompensieren kann. Betrachten wir die zu regulierende Größe z , die die Kühlschränke als Energiespeicher verwendet, im Vergleich zur Zielgröße ζ und zu dem unkontrollierten tatsächlichen Verbrauch der Haushalte $w - g$, so ist deutlich in Abbildung 5.5 zu erkennen, dass die modellprädiktive Regelung großen Ausschlägen entgegenwirken kann und damit einen glättenden Effekt erreicht. Jedoch liegt die zu regulierende Größe z stets leicht über der Zielgröße ζ , da die Zielgröße die Kühlschränke als Energiespeicher nicht berücksichtigt. Dennoch ist dies das Minimum an quadratischer Abweichung, das unter der gegebenen Systemdynamik erreicht werden kann. Dabei wird immer die Zulässigkeit der Zustände und der Kontrollen erhalten, was aus dem Matlab-Programm ersichtlich wird. Dazu verweisen wir auf die Anwendung des Programms, welche im Anhang A zu finden ist. Trotz der kleinen Abweichung zur Zielgröße ζ kann durch die modellprädiktive Regelung ein sehr guter Effekt erzielt werden. Der tatsächliche Verbrauch der Haushalte schwankt ungesteuert zwischen -0.05 kW und 1.06 kW, was für das Netz schwierig auszugleichen ist. Betrachten wir hingegen die zu regulierende Größe, so bewegt sich die

Stromnachfrage nur noch leicht zwischen 0.52 kW und 0.67 kW. Vor allem den großen Ausschlägen zur Mittagszeit und am Abend kann entgegengewirkt werden.

Durch die Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 konnten wir die Funktionalität der Simulation und des Algorithmus selbst verifizieren. Zudem konnten wir einen stabilen Temperaturbereich der Kühlschränke sowie einen regulierenden Effekt des tatsächlichen Verbrauchs erreichen. Des Weiteren wurde die Funktionsweise des Programms durch Verwendung verschiedener Parameter, wie zum Beispiel verschiedener Temperaturbereiche, Kühlschrankverbrauchswerte und Anzahl der Haushalte, überprüft. Die Funktionalität war der Situation entsprechend stets gegeben. Bei Veränderung der Anzahl der Haushalte \mathcal{I} unter sonst gleichbleibenden Bedingungen hat sich ergeben, dass je größer \mathcal{I} , desto besser ist die regulierende Wirkung des Reglers. So ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Simulationen mit 10 Haushalten und den verwendeten 100 Haushalten zu erkennen.

Damit haben wir den theoretisch modellierten Algorithmus 5.1 auch in Simulationen umsetzen können und einen Weg zur Netzstabilisierung mittels eines Verbunds von Haushaltskühlschränken gefunden.

5.2 Erweitertes Gesamtmodell

Der zuvor entworfene modellprädiktive Regler soll nun um die individuelle Regelung der Kühlschränke erweitert werden. Dabei stellt sich die Frage, wie die Kontrollstrategie der einzelnen Kühlschränke formuliert werden kann, um mögliche Überschwingungen im tatsächlichen Verbrauch der Haushalte zu vermeiden. Zu diesem Zweck entscheiden wir uns für eine probabilistische Strategie. Wir wollen also den aggregierten Verbund der Kühlschränke durch Modelle stochastischen Verhaltens der einzelnen Haushaltskühlschränke ersetzen. Zudem wollen wir einen gemittelten Zustand aller Kühlschränke ermitteln, sodass der bereits vorhandene Regler weiter eingesetzt werden kann. Wir betrachten in Abbildung 5.6 das vereinfacht dargestellte Smart Grid mit der Erweiterung um die individuelle Steuerung der Kühlschränke.

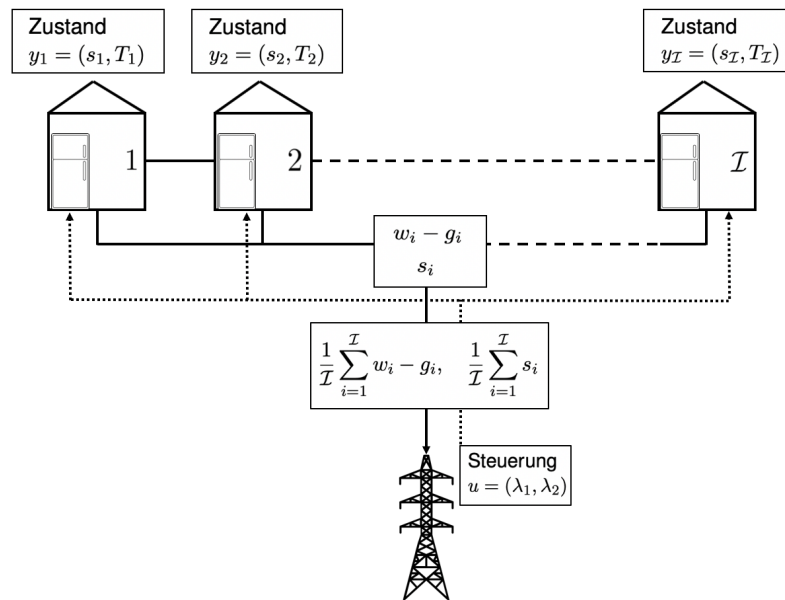


Abbildung 5.6: erweiterter Modellaufbau

Jeder Haushalt besitzt nun seinen eigenen Zustand $y_i, i \in \mathcal{I}$, bestehend aus seinem Schaltzustand s_i und der Temperatur T_i . Die Haushalte senden ihren tatsächlichen Verbrauch und ihren Zustand s_i zur zentralen Einheit, die daraufhin analog zu Algorithmus 5.1 eine optimale Steuerung berechnet und diese zurück an die Haushalte sendet. Darauf basierend können die Haushalte ihre Kühlschränke regeln und den neuen Zustand ermitteln. Durch die Erweiterung des Modells müssen wir zunächst eine geeignete Kontrollstrategie der Kühlschränke finden und geeignete Größen zur Bestimmung der einzelnen Zustände. Anschließend wollen wir die neuen Daten der Haushalte so aufbereiten, dass wir Algorithmus 5.1 weiterhin verwenden können.

5.2.1 Zufallssteuerung der Kühlschränke

Im Folgenden soll eine stochastische Regelung der einzelnen Kühlschränke formuliert werden, die auf der optimalen Steuerungsgröße u der zentralen Einheit basiert. Die Steuerung der Geräte wählen wir probabilistisch, um dadurch unerwünschten Überschwingungen des Stromverbrauchs entgegenzuwirken. Zudem können wir so vermeiden, dass bei einer großen Menge an verfügbarem Strom alle ausgeschalteten Kühlschränke gleichzeitig anschalten und umgekehrt. Zur Modellierung der Kontrollstrategie der Kühlschränke verwenden wir die in dem zugrundeliegenden Paper [1] vorgestellte Regelung und modifizieren sie so, dass sie zu unserer zentralen Steuerung passt. Zu Beginn stellen wir fest, dass die Kühlschränke dezentralisiert und zufällig geregelt werden sollen. Insbesondere bedeutet dies, dass die Steuerung lokal für jedes Gerät durchführbar sein muss. Aus diesem Grund genügt es die Vorgehensweise für einen Haushalt $i \in \mathcal{I}$ zu betrachten.

Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, besitzt jeder Haushaltskühlschrank zwei mögliche Zustände. Diese Schaltzustände fassen wir in der Zustandsfunktion

$$s_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{AN-Zustand} \\ 0, & \text{AUS-Zustand} \end{cases},$$

eines Haushaltes $i \in \mathcal{I}$ zu einem Zeitpunkt $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$, wobei \mathcal{N} die Anzahl der Optimierungsschritte ist, zusammen.

Die Regelung des Gerätes ist vorerst nur abhängig von der zentralen optimalen Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$. Nach [1] muss die Steuerungsgröße $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ zu einem Zeitpunkt $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$ in die richtige Größeneinheit gebracht werden. Da wir allerdings die Steuerungsgröße direkt vorliegen haben und die Steuerung in jedem Schritt eine Konstante ist, genügt es die Komponenten der Kontrolle $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ zu betrachten. Zusätzlich ordnen wir jedem der zwei möglichen Zustände eine Kontrollkomponente zu und fassen diese Zuordnung für jeden Optimierungsschritt k und jeden Haushalt $i \in \mathcal{I}$ in der Hilfsfunktion

$$q_i(k) = \begin{cases} \lambda_1(k), & \text{falls } s_i(k) = 1, \\ \lambda_2(k), & \text{falls } s_i(k) = 0 \end{cases}$$

zusammen. Zudem führen wir die gleichverteilte Zufallszahl $r = rnd$ aus dem Intervall $[0, 1]$ ein. Die Zahl dient zur probabilistischen Regelung des Kühlschranks, da damit die gewählte Kontrollkomponente verglichen wird. Des Weiteren ist dieser Wert in jedem Optimierungsschritt und für jedes betrachtete Gerät unterschiedlich, sodass dadurch eine zufällige Kontrollstrategie entsteht. Mit Verwendung der Zufallszahl r erstellen wir also eine Vergleichsgröße für die Komponenten der optimalen Steuerung. In jedem Optimierungsschritt wird die Zahl r zufällig generiert. Anschließend wird

5.2 Erweitertes Gesamtmodell

abhängig von dem derzeitigen Schaltzustand $s(k)$ die erste oder zweite Komponente der zentralen Steuerung u ausgewählt und mit der Größe r abgeglichen. Ist der Steuerungsteil λ_1 oder λ_2 größer als die Zahl r , so wird der Zustand des Gerätes im nächsten Schritt geändert. In Algorithmus 5.2 ist die probabilistische Regelung eines Kühlschranks zusammenfassend beschrieben.

Algorithmus 5.2 Zufallsregelung eines Kühlschranks i

```
for  $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$ :
  Generiere  $r = rnd$ 
  if  $s_i(k) == 1$ 
    if  $\lambda_1 \geq r$ 
       $s_i(k + 1) = 0$ 
  else
    if  $\lambda_2 \geq r$ 
       $s_i(k + 1) = 1$ 
```

Jedoch berücksichtigt diese Steuerung die Kühlschranktemperatur nicht. Da wir allerdings eine angemessene und durchgehende Kühlung garantieren wollen, nehmen wir eine Modifizierung an Algorithmus 5.2 vor, sodass die Regelung auch von der Kühlschranktemperatur abhängig ist. Die Veränderung von Algorithmus 5.2 ist in dem Algorithmus 5.3 zusammengefasst.

Algorithmus 5.3 Erweiterte Zufallsregelung eines Kühlschranks i

Input: Vorgabe eines Temperaturbereichs $[\underline{T}, \overline{T}]$

```
for  $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$ :
  Generiere  $r = rnd$ 
  if  $s_i(k) == 1$ 
    if  $\lambda_1 \geq r$ 
       $s_i(k + 1) = 0$ 
  else
    if  $\lambda_2 \geq r$ 
       $s_i(k + 1) = 1$ 

  if  $T_i(k) \leq \underline{T}$ 
     $s_i(k + 1) = 0$ 
  else if  $T_i(k) \geq \overline{T}$ 
     $s_i(k + 1) = 1$ 
```

Zur Bestimmung der Temperatur verwenden wir die in Kapitel 3 vorgestellten Differentialgleichungen. Je nach Schaltzustand erwärmt sich der Kühlschrank oder kühlt ab. Daraus erhalten wir die Kühlschranktemperatur $T_i(k)$ eines Haushaltes zu einem Zeitpunkt $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$ und können überprüfen, ob diese in einem vorgegebenen Bereich $[\underline{T}, \bar{T}]$ liegt. Sollte die Temperatur außerhalb dieses Intervalls liegen, so wird eine erneute Anpassung des Schaltzustandes im nächsten Schritt vorgenommen. Wird das Gerät beispielsweise zu warm, so wird der Kompressor unabhängig von der Regelung durch die zentrale Steuerung angeschaltet. Damit erreichen wir, dass die Kühlung der Lebensmittel weiterhin garantiert werden kann.

Anschließend setzen wir nun die zeitlichen Temperaturveränderungen und die Regelung der einzelnen Kühlschränke in Abhängigkeit der zentralen Steuerung zusammen. Basierend auf der zentralen Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ und der aktuellen Temperatur $T_i(k)$ eines Kühlschranks wird der Schaltzustand des Gerätes $s_i(k)$ zu einem Zeitpunkt k ermittelt. Des Weiteren sendet jeder Haushalt seinen aktuellen Zustand $y_i = (s_i, T_i)$ und seinen tatsächlichen Verbrauch $w_i - g_i$ an die zentrale Einheit. Wir betrachten hierbei ein einzelnes Gerät, wobei die verwendeten Größen immer zu diesem zugehörig sind. Daraus ergibt sich Algorithmus 5.4, der für jeden Haushalt unabhängig durchgeführt wird.

Algorithmus 5.4 Vorgehen der RES

Input: Starttemperatur $T_i(0)$, Startschaltzustand $s_i(0)$

for $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$:

1. Erhalte die zentrale optimale Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$.
2. Regle den Kühlschrank gemäß Algorithmus 5.3.
3. Setze $T_i(k) = T_0$ und berechne die Temperatur T_i abhängig von dem Schaltzustand mittels

$$\begin{aligned} T_i(k+1) &= -\alpha(T_i(k) - T_{AN}), & \text{für } s_i(k) &= 1 \\ T_i(k+1) &= -\alpha(T_i(k) - T_{AUS}), & \text{für } s_i(k) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

4. Sende den aktuellen Zustand $y_i(k) = (s_i(k), T_i(k))$ und den tatsächlichen Verbrauch $w_i(k) - g_i(k)$ an die CE.
-

Bemerkung 5.1

Die zentrale optimale Steuerung $u = (\lambda_1, \lambda_2)$ ist für alle Haushalte gleich. Sie verändert sich lediglich in Abhängigkeit der Zeit.

Bemerkung 5.2

Die Konstanten T_{AN} , T_{AUS} und α in Gleichung (5.5) können für jeden Haushalt unterschiedlich sein. Diese Größen hängen von der Größe, dem Hersteller, dem Baujahr und der Umgebungstemperatur des Kühlschranks ab.

5.2.2 Zusammenschluss von Haushalten und zentraler Steuerung

Abschließend wollen wir die zentrale Steuerung mit der dezentralen zufälligen Regelung der Kühlschränke verbinden. Dabei gehen wir wie bereits in Abbildung 5.6 beschrieben vor. Zunächst misst jeder Haushalt seinen Zustand $y_i = (s_i, T_i)$ sowie seinen aktuellen Stromverbrauch und seine Erzeugung. Diese Daten werden von allen Haushalten an die zentrale Einheit übermittelt. Damit wir das Gesamtmodell der Kühlschränke als Basis für den modellprädiktiven Regler verwenden können, benötigen wir noch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit π_{AN} . Diese Größe können wir bei einem großen Bestand an Geräten, wie in Bemerkung 4.6 beschrieben, aus dem Anteil der angeschalteten Kühlschränke berechnen und verwenden somit den prozentualen Anteil der angeschalteten Geräte

$$\pi_{AN}(k) = \frac{1}{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} s_i(k)$$

zu einem Zeitpunkt $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$.

Aus dem tatsächlichen Verbrauch der Haushalte und dem Anteil der angeschalteten Kühlschränke π_{AN} bilden wir die Stromnachfrage der Haushalte $z(k)$ zu einem Zeitpunkt $k + j$. Insbesondere benötigt die zentrale Einheit auch bei diesem Vorgehen nur gemittelte Werte und keine individuellen Angaben der Haushalte, womit der Schutz der Daten weiterhin gewährleistet ist. Die Startwerte für die erwartete Temperatur $T_+ + T_-$ und die Varianz v erhalten wir weiterhin durch Anwendung des Feedbacks μ_N auf die Systemdynamik. Aus diesen Größen können wir anschließend den Zustand des Kühlschrankverbundes x zusammensetzen. Nun haben wir die Ausgangssituation wie in Kapitel 5.1.4 erreicht und können das optimale Steuerungsproblem wie in Algorithmus 5.1 lösen. Daraufhin wird der erste Eintrag der optimalen Kontrollfolge u^* als Feedback $\mu_N(x(k))$ an die Haushalte gesendet. Diese können darauf basierend ihren Schaltzustand des Kühlschranks und somit ihren neuen Zustand y_i bestimmen. In Algorithmus 5.5 ist das genaue Vorgehen beschrieben.

Algorithmus 5.5 MPC mit Unsicherheiten

Input: Anzahl der Optimierungsschritte $\mathcal{N} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, MPC-Horizont $N \in \mathbb{N}$, Anzahl der RES $\mathcal{I} \in \mathbb{N}$, Startzustände $y_i(0) = (s_i(0), T_i(0))$, Startzustand $x(0) \in \mathbb{X}$.

for $k = 0, \dots, \mathcal{N} - 1$:

RES $i, i \in \mathcal{I}$

1. Bestimme den Zustand $y_i(k) = (s_i(k), T_i(k))$ des Kühlschranks mit Hilfe von Algorithmus 5.4.
2. Sende den tatsächlichen Stromverbrauch $w_i(k) - g_i(k)$ des RES und den Zustand $y_i(k)$ an die CE.

CE

3. Messe den Zustand $x(k)$ des Kühlschranksverbundes und setze $x(0) := x(k)$.
 4. Setze den Startanteil $x_1(0) = \pi_{AN}(0) = \frac{1}{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} s_i(k)$.
 5. Löse das optimale Steuerungsproblem (5.3) und erhalte die optimale Kontrollfolge $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}^N(x_0)$.
 5. Setze $\mu_N(x(k)) := u^*(0) \in \mathbb{U}$ und sende das Feedback $\mu_N(x(k))$ an die RES.
-

Durch die Aufbereitung der Daten der Haushalte können wir erreichen, dass wir den Zustand des Kühlschranksverbundes x weiterhin verwenden können. Zudem ist der gesamte Zustand $x \in \mathbb{X}$ zulässig, sodass Algorithmus 5.1 anwendbar ist. Wir haben also den bereits bestehenden Algorithmus um die stochastische Kontrollstrategie der einzelnen Kühlschränke erweitern können. Durch die probabilistische Regelung entstehen zwar zunächst Unsicherheiten, die jedoch von dem modellprädiktiven Regler ausgeglichen werden können. Insbesondere bedeutet dies, dass der Regler trotz kleiner Störungen durch die Haushalte ihren tatsächlichen Verbrauch stabilisieren kann. Diese Aussage wollen wir im nächsten Abschnitt numerisch überprüfen. Weiter wollen wir analysieren, wie sich die direkte Reaktion der Haushaltskühlschränke auf die aktuelle Stromnachfrage auf das Gesamtmodell auswirkt.

5.2.3 Numerische Resultate

Auch Algorithmus 5.5 soll durch Simulationen veranschaulicht werden. Zu diesem Zweck nutzen wir erneut das Matlab-Programm, das wir bereits in Kapitel 5.1.5 vorgestellt haben, und erweitern das Optimierungsproblem um Kontrollalgorithmus 5.3. In jedem Optimierungsschritt wird für jeden Kühlschrank mittels einer zusätzlichen for-Schleife Algorithmus 5.3 durchgeführt. Zudem wird in jedem Schritt innerhalb der Schleife gezählt, wie viele Kühlschränke angeschaltet sind, um daraus den neuen Startwert für π_{AN} zu berechnen. Die neuen Startwerte für die restlichen Komponenten T_+ , T_- , v des Zustands x ergeben sich aus Anwendung des Feedbackwerts des vorherigen Optimierungsschrittes. Insbesondere muss neben der zusätzlichen Schleife zur Regelung der einzelnen Geräte auch die Initialisierung des neuen Startzustandes $x(0)$ anders implementiert werden.

```

% get the percentage from the refrigerators
[y0, S, Te, e1, e2] = KS_nmpc(input, umin, k,S, Te, r, r1, r2);

% new start points
w0 = xs(end,:).';
x0(1) = y0;
x0(2:4) = w0(2:4);

```

Abbildung 5.7: Initialisierung des neuen Startzustands $x(0)$

Dies ist in Abbildung 5.7 beschrieben. Der Anteil der angeschalteten Kühlschränke wird durch die Funktion KS_nmpc generiert. Die restlichen Startwerte $w0$ erhalten wir aus Anwendung des Feedbacks auf die Systemdynamik. Aus diesen Werten wird ein neuer Startvektor $x0$ zusammengesetzt.

Zur Vergleichbarkeit von Algorithmus 5.1 und Algorithmus 5.5 verwenden wir die gleiche Ausgangssituation, die in Tabelle 5.1 aus Abschnitt 5.1.5 zusammengefasst ist. Im Folgenden sollen die Ergebnisse beschrieben werden, die durch die zusätzliche individuelle Steuerung der Kühlschränke hervorgerufen werden. Zur Umsetzung dieser Regelung wollen wir möglichst realistische Annahmen treffen. Dafür gehen wir davon aus, dass jeder Haushalt andere Rahmenbedingungen hat. Das heißt die Kühlschränke unterscheiden sich im Hersteller, in der Größe und im Baujahr. Des Weiteren herrschen verschiedene Umgebungstemperaturen in den Räumen. Zur Umsetzung dieser Gegebenheiten initialisieren wir jedes Gerät mit einer zufällig gewählten Abweichung, die maximal 15% betragen darf [1]. Das bedeutet, dass der Verteilungskoeffizient α und die Temperaturen T_{AN} und T_{AUS} wie in Bemerkung 5.2 für jeden Kühlschrank verschieden sind. Zudem wählen wir den Startschaltzustand $s_i(0)$ jedes Gerätes $i \in \mathcal{I}$ zufällig. Damit stellen wir realistische Anforderungen an das Vorgehen und können somit die theoretischen Ergebnisse verifizieren. Für den Startwert des Anteils der Kühlschränke,

die angeschaltet sind, zählen wir in jedem Optimierungsschritt die Geräte, die nach Algorithmus 5.3 angeschaltet sind und berechnen deren prozentualen Anteil. Die restlichen Werte des Startzustands in jedem Optimierungsschritt erhalten wir durch Anwendung des zuvor berechneten Feedbacks, wie in Abbildung 5.7 dargestellt.

Wir betrachten zuerst den Zustand x des Verbunds der Kühlschränke in Abbildung 5.8, das heißt den Anteil der angeschalteten Geräte π_{AN} , ihre erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ und deren Varianz v . Der Anteil der angeschalteten Kühlschränke π_{AN} verändert sich

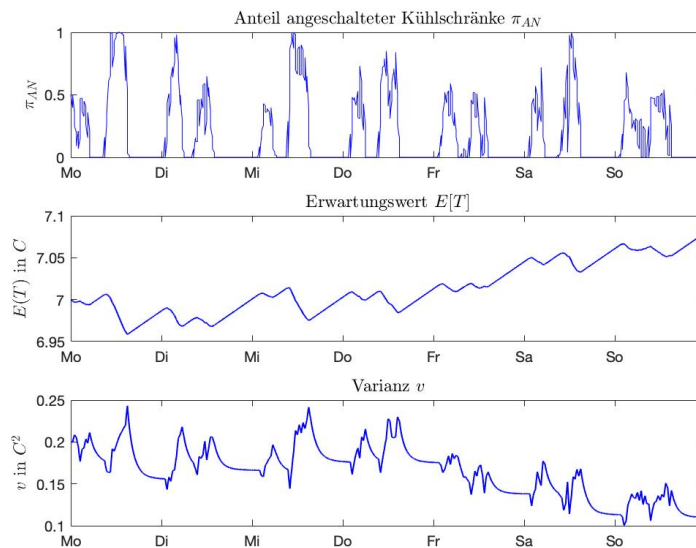


Abbildung 5.8: Zustand des Kühlschranksverbunds im erweiterten Modell

mit dem verfügbaren Strom, allerdings unterliegt diese Größe leichten Schwankungen, die aus der stochastischen Steuerung der einzelnen Kühlschränke resultiert. Die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$ sinkt genau dann, wenn die Größe π_{AN} steigt und verhält sich stabil gegenüber den kleinen Störungen. Die Varianz hingegen schwankt etwas mehr unter den Störungen. Die Varianz verhält sich qualitativ wie der Anteil der angeschalteten Kühlschränke. Das bedeutet, dass bei viel verfügbarem Strom und damit einem hohen Anteil an angeschalteten Geräten, die mögliche Abweichung der Kühlschranktemperatur von der mittleren Temperatur steigt. Diese Schwankungen sind jedoch sehr klein und innerhalb des zulässigen Bereichs. Aus Erwartungswert $\mathbb{E}[T]$ und Varianz v ergibt sich der Temperaturbereich, in dem sich die Kühlschränke des Verbunds befinden. Dieser Bereich schwankt leicht um die empfohlene Kühlschranktemperatur von 7°C . Auch die Kontrollkomponenten λ_1 und λ_2 verhalten sich qualitativ identisch zu der Steuerung des deterministischen Reglers, was in Abbildung 5.9 dargestellt ist.

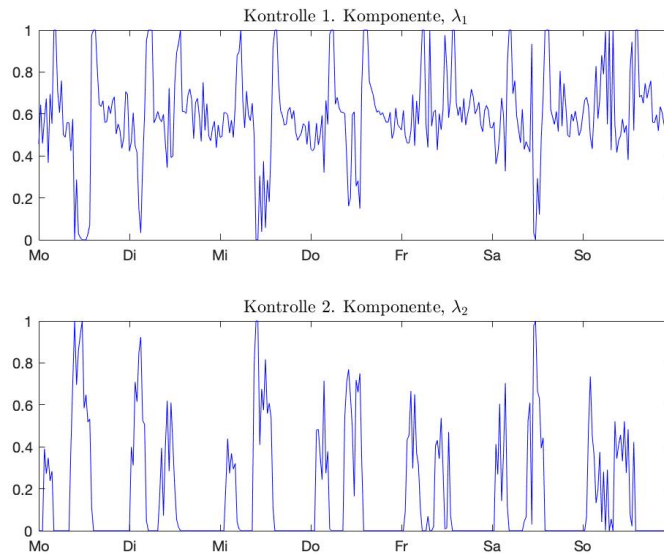


Abbildung 5.9: Steuerung im erweiterten Modell

Die Kontrollgrößen unterliegen hier kleinen Schwankungen, die jedoch keine Auswirkung auf das Verhalten des Reglers haben. Die Übergangsrate λ_1 steigt um den Anteil der ausgeschaltete Kühlschränke zu erhöhen. Entsprechend nimmt die Wahrscheinlichkeit λ_2 zu, damit der Anteil der angeschalteten Geräte erhöht wird.

Des Weiteren wollen wir den Effekt des erweiterten modellprädiktiven Reglers untersuchen. Dazu betrachten wir Abbildung 5.10. Hier ist die zu regulierende Größe z , die Zielgröße ζ und der gemittelte tatsächliche Verbrauch der Haushalte $w - g$ dargestellt. Aus der Grafik 5.10 können wir schließen, dass Algorithmus 5.5 ebenfalls regulierend wirkt. An der graphischen Darstellungen des Zustands x , der Kontrolle u sowie des tatsächlichen Verbrauchs der Haushalte mit dem Verbrauch der Kühlschränke ist zu erkennen, dass die modellprädiktive Regelung des Smart Grids auch unter Störungen und Unsicherheiten, die durch die stochastische Steuerung der Haushaltskühlschränke hervorgerufen werden, sehr robust und stabil ist.

Abschließend wollen wir die unterschiedlichen Regelansätze miteinander vergleichen und analysieren, welche Auswirkung das Einbinden der individuellen Kühlschrankregelung auf das Gesamtmodell hat. Wir haben bereits in Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9 gesehen, dass die Komponenten des Zustands x weiterhin zulässig und stabil trotz kleiner Schwankungen sind. Auch die Kontrolle u verhält sich wie bei der Regelung ohne Gerätesteuerung, welche wir in Abschnitt 5.1.5 numerisch untersucht haben. Wir sind also vor allem an der Wirkung auf den gemittelten tatsächlichen Verbrauch der Haushalte interessiert. Durch Abbildung 5.10 konnten wir die regulierende Wirkung des modellprädiktiven Reglers mit Unsicherheiten verifizieren. Nun vergleichen wir die

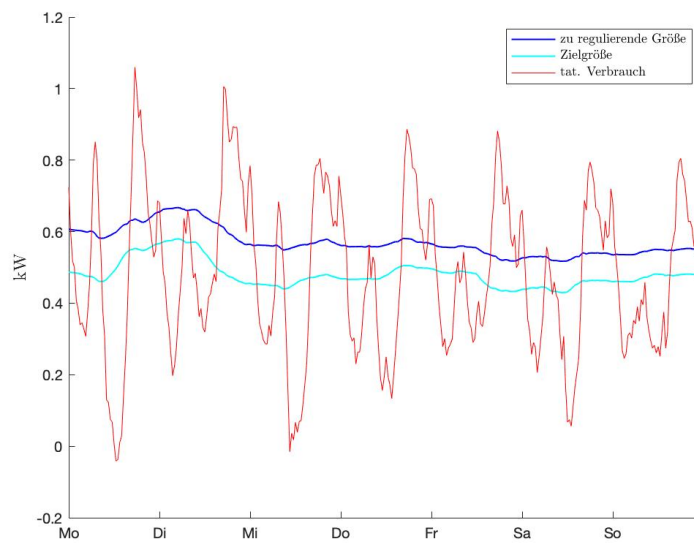


Abbildung 5.10: Wirkung der modellprädiktiven Regelung im erweiterten Modell

Wirkungen der beiden Regelansätze. Dazu betrachten wir Abbildung 5.11, in der die zu regulierende Größe z des Gesamtmodells nach Algorithmus 5.1 (blauer Graph), die zu regulierende Größe z des erweiterten Modells nach Algorithmus 5.5 (grüner Graph) und die Zielgröße ζ (hellblauer Graph) dargestellt sind. In Abbildung 5.11 ist kein



Abbildung 5.11: Vergleich der zu regulierenden Größen z

Unterschied zwischen den verschiedenen Regelarten in ihrer Wirkung zu erkennen. Dies resultiert daraus, dass die Abweichungen kleiner als 0.0031% sind. Damit können wir folgern, dass die zusätzliche individuelle stochastische Steuerung der Kühlschränke keine Auswirkung auf den regulierenden Effekt des modellprädiktiven Reglers hat. Insbesondere stützt Abbildung 5.11 das Resultat, dass unser Regler für das Gesamtmodell unanfällig gegenüber Störungen und Schwankungen ist.

Mit Algorithmus 5.6 haben wir einen Algorithmus gefunden, der die Haushaltskühlschränke individuell und stochastisch steuert und auf Basis der gemittelten Daten der Haushalte im Smart Grid das Netz modellprädiktiv regeln kann. Damit können wir möglichen Schwankungen im tatsächlichen Verbrauch der Haushalte entgegenwirken und das Netz stabilisieren. Zudem konnten wir einen Teil des Regulierungsaufwands in die Nachfrageseite schieben und die Regelung abhängig von dem vorhandenen Strom zum jeweiligen Zeitpunkt machen.

6 Ausblick und Fazit

Die Energiewende stellt sowohl die Forschung und die Technik als auch die Akzeptanz der Bevölkerung vor immer größere Herausforderungen. Für eine umweltfreundliche Energieversorgung müssen eine oder mehrere Lösungen für unser Stromnetz gefunden werden. Die Regelleistung des Stromnetzes muss an die zeitabhängige Stromerzeugung durch Sonnen- und Windenergie angepasst werden.

In dieser Arbeit haben wir gesehen, dass jeder Haushalt mit seinem Kühlschrank einen Beitrag dazu liefern kann. Zusammen mit der intelligenten und stochastischen Regelung der Geräte und der modellprädiktiven Steuerung des Smart Grids kann eine Stabilisierung der Stromnachfrage erreicht werden. Diese regulierende Wirkung bleibt zudem auch unter kleinen Störungen erhalten. Zur Berechnung einer optimalen Steuerung ist eine gute Datengrundlage wichtig. Dazu gehören die genaue Wettervorhersage für die Stromerzeugung durch erneuerbare Energien und möglichst exakte Verbrauchsprognosen. Da allerdings der Optimierungsalgorithmus nur den aggregierten Verbrauch benötigt und nicht die Prognosen der einzelnen Haushalte, erreichen wir zusätzliche Genauigkeit durch diese Mittelung. Insbesondere bedeutet dies, dass die Exaktheit der Prognose und die Auswirkung umso besser wird, je mehr Haushalte sich beteiligen, was wir durch die Simulationsergebnisse verifizieren konnten. Zudem werden nur der gemittelte tatsächliche Verbrauch der Haushalte sowie der prozentuale Anteil der angeschalteten Kühlschränke im gesamten Verbund an die zentrale Einheit gesendet. Damit bleiben der individuelle Stromverbrauch und die Erzeugung anonym und die Daten geschützt. Es können nur Rückschlüsse auf das Stromverhalten des kompletten Verbundes gezogen werden und nicht auf das Verhalten einzelner Haushalte.

Wir haben in dieser Arbeit eine Möglichkeit gezeigt, wie mit bereits vorhandenen Haushaltskühlschränken ein Teil des Regulierungsaufwandes getragen werden kann. Dennoch ist die technische Umsetzung in absehbarer Zeit nicht zu erwarten, da sehr viele teilnehmende Haushalte nötig wären. Der Stromverbrauch der Kühlschränke wurde seit Einführung der Energieeffizienzklassen Anfang der 90er Jahre [11] zunehmend verbessert, sodass der Strombedarf weniger Geräte zu gering ist, um Schwankungen im tatsächlichen Verbrauch auszugleichen. Des Weiteren besteht für private Haushalte kein Anreiz mit ihren Haushaltsgeräten an einem gesteuerten Smart Grid teilzunehmen. Die Anreizsetzung ist vor allem die Aufgabe der Netzbetreiber und des Gesetzgebers. Zwar gibt es bereits zeitvariable Stromtarife für Privathaushalte [20], jedoch sind diese sehr beschränkt und verschaffen den Verbrauchern kaum einen finanziellen Vorteil.

Wären diese Rahmenbedingungen gegeben, so könnte der vorgestellte Optimierungsalgorithmus nicht nur für Kühlschränke, sondern auch für vergleichbare Geräte, wie beispielsweise Gefriertruhen, umgesetzt werden. Zudem wäre die Einbindung weiterer Haushaltsgeräte, die sich für eine externe Steuerung eignen, wie beispielsweise Spül- und Waschmaschinen, interessant. Hier würde sich die Frage stellen, ob zunächst eine lokale Optimierung der Haushalte und eine anschließend globale Regelung des Netzes durch die zentrale Einheit sinnvoll wäre.

Durch die Verschiebung von Teilen des Regulierungsaufwandes in Haushaltsgeräte ist eine einfache Möglichkeit für Haushalte geschaffen, ihren eigenen Strom aus Photovoltaikanlagen in ihren bereits vorhandenen Geräten zu speichern. Dadurch könnten sie im Rahmen eines Smart Grids Netzschwankungen reduzieren und einen Teil zur Energiewende beitragen.

A Implementierung des MPC in Matlab

Für alle Simulationen dieser Masterarbeit wurde ein selbstgeschriebenes Matlab-Programm verwendet. Da Teile dieser Arbeit auf der Dissertation von Braun [5] basieren, wurde das Programm auch hieran angelehnt. Vor allem die Aufbereitung der Netzdaten wurde in dem Matlab-Programm übernommen. Die Implementierung des MPC nutzt die Matlab-Routine `fmincon` und zur Lösung und Diskretisierung des Differentialgleichungssystems wird die Routine `ode45` genutzt. Zur Verwendung dieser Funktion wurde das Programm so aufgebaut, dass alle notwendigen Informationen zur Verfügung stehen. Die individuelle Regelung der Kühlschränke wird über ein `for`-Schleife realisiert, die den neuen Startwert für π_{AN} in jedem Optimierungsschritt liefert. Das Programm und die verwendeten Daten befinden sich auf dem beigelegten USB-Stick.

A.1 Bestandteile

Das Programm setzt sich aus mehreren Funktionsaufrufen zusammen. Diese sind in den folgenden Dateien zu finden:

- *main.m* ist das Hauptprogramm, in dem verschiedene Einstellungen zur Simulation vorgenommen und die Simulation gestartet werden können.
- *loadLG.m* ist eine Subroutine, die die Verbrauchs- und Erzeugungsdaten aus den gegebenen Datensatz lädt.
- *nmpc.m* ist die Hauptroutine für die Regelung des Gesamtverbunds, die die MPC-Schleife enthält und die Daten speichert.
- *KS_nmpc.m* ist die Hauptroutine, die die individuelle Regelung der Kühlschränke einbindet, die MPC-Schleife enthält und die Daten speichert.
- *KS_stoch.m* ist die Funktion, die die Schleife zur Steuerung der einzelnen Haushalte enthält.
- *solver.m* ist eine Subroutine die das optimale Steuerungsproblem innerhalb eines Optimierungsschrittes löst.

- *f.c.m* ist die Funktion, die die Systemdynamik enthält.
- *lin_constraints.m* enthält die linearen Nebenbedingung an den Erwartungswert.
- *bounds.m* ist eine Funktion, die die Komponenten der Optimierungsvariablen z beschränkt.
- *non_constraints.m* enthält die nicht-linearen Bedingungen des Optimierungsproblems.
- *objective.m* ist die Kostenfunktion.
- *stagecost.m* beschreibt die Stufenkosten, die über die Kostenfunktion aufgerufen werden.
- *plots.m* ist eine Funktion, die den generierten Output plottet.
- *LGData.mat* ist der Datensatz, der die Daten zu Stromerzeugung und -verbrauch der Haushalte enthält.

A.2 Initialisierung der Simulation

Bevor die Simulation gestartet werden kann, müssen zunächst in *main.m* einige Einstellungen vorgenommen werden. Diese werden in einem Struct gespeichert, dessen Dateiname das Datum und das Präfix *in* enthält. Zunächst müssen die Basiseinstellungen gewählt werden. Die Länge eines Diskretisierungsintervalls T in Stunden ist durch die Daten auf 0.5 gesetzt. Die Länge des MPC-Horizonts N und die Anzahl der ganzen Tage *wholedays* können frei gewählt werden. Aus den Anzahl der Tagen berechnet sich die Anzahl der Optimierungsschritte \mathcal{N} . Anschließend werden die genauen Daten der Haushalte festgelegt. Zu Beginn werden die Anzahl der RES (*systems*) und der durchschnittliche Verbrauch eines Kühlschranks (*vks*) angegeben. Danach können noch die technischen Daten eines Kühlschranks α , T_{AN} , T_{AUS} eingegeben werden. Wir halten uns dabei zunächst an die Vorgaben aus [1].

Die Beschränkungen für die Kontrolle u , den prozentualen Anteil der angeschalteten Kühlschränke π_{AN} , der erwarteten Temperatur $T_+ + T_-$ und die Varianz v können danach gesetzt werden. Hier sind zunächst alle Werte möglich, jedoch macht ein negativer prozentualer Anteil und $\pi_{AN} > 1$ anschaulich keinen Sinn. Auch kann die Varianz nach Definition nicht negativ sein. Im nächsten Abschnitt werden die Startwerte für den Zustand, die Kontrolle und dem Zeitpunkt gewählt. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass der Startzustand x_0 und die Startkontrolle u_0 zulässig sind, das heißt, dass sie in den zuvor bestimmten Bereichen liegen.

Des Weiteren können die Toleranzwerte für die numerische Lösung von Differentialgleichungen und für die Optimierung mit der Matlab-Routine `fmincon` angepasst werden. Für die Erstanwendung empfiehlt sich allerdings die voreingestellten Werte zu übernehmen. Abschließend kann noch ausgewählt werden, welcher Regler simuliert werden soll. Es kann die individuelle Regelung der Kühltürsche ($b = 2$) berücksichtigt werden oder nicht ($b = 1$). Wird hier eine falsche Angabe gemacht, so bricht das Programm ab und startet keine MPC-Routine.

A.3 Start der Simulation und Ausgabe

Nachdem alle Einstellungen und Anpassungen vorgenommen wurden, muss lediglich die Datei `main.m` ausgeführt werden. Das Programm startet automatisch die gewählte MPC-Routine. Zudem wird ein *parallel pool* der *Parallel Computing Toolbox* aufgerufen, sofern diese vorhanden ist, um die Lösung des optimalen Steuerungsproblems zu beschleunigen. Im Command Window wird eine Tabelle zur Übersicht der aktuellen Werte ausgegeben. Hier kann live überprüft werden, wie sich Zustand, Kontrolle und Kostenfunktion verhalten.

k	u_1(k)	u_2(k)	x_1(k)	E(T)	x_4(k)	J_N	flag
0	+0.387232	+0.000010	+0.200000	+7.000000	+0.200000	+0.119378	+1.000000
1	+0.341943	+0.000030	+0.164798	+7.000288	+0.173250	+0.078469	+1.000000
2	+0.534126	+0.000026	+0.138911	+7.000788	+0.150979	+0.166926	+1.000000
3	+0.616778	+0.324061	+0.106364	+7.001495	+0.133068	+0.285690	+1.000000
4	+0.600527	+0.283696	+0.195704	+7.001974	+0.120606	+0.344258	+1.000000
5	+0.536844	+0.493559	+0.240419	+7.001996	+0.112723	+0.324294	+1.000000
6	+0.597020	+0.319705	+0.336475	+7.001510	+0.107830	+0.297738	+1.000000
7	+0.529672	+0.462135	+0.340987	+7.000698	+0.104838	+0.291164	+1.000000
8	+0.829334	+0.205501	+0.389846	+6.999688	+0.102987	+0.297525	+1.000000
9	+0.999967	+0.000009	+0.312587	+6.998814	+0.101800	+0.333905	+1.000000
10	+0.786293	+0.000004	+0.189599	+6.998653	+0.101220	+0.349884	+1.000000

(a) Regelung des Gesamtmodells

k	u_1(k)	u_2(k)	x_1(k)	E(T)	x_4(k)	flag	zu kalt	zu warm
0	+0.429906	+0.000007	+0.500000	+7.000000	+0.200000	+1.000000	+0.000000	+0.000000
1	+0.526985	+0.000027	+0.500000	+6.998412	+0.199963	+1.000000	+0.000000	+0.000000
2	+0.527839	+0.000034	+0.220000	+6.996898	+0.208269	+1.000000	+0.000000	+0.000000
3	+0.477350	+0.312949	+0.070000	+6.997105	+0.200527	+1.000000	+0.000000	+0.000000
4	+0.667460	+0.301302	+0.030000	+6.997779	+0.136934	+1.000000	+0.000000	+0.000000
5	+0.419221	+0.438985	+0.310000	+6.998722	+0.166784	+1.000000	+0.000000	+0.000000
6	+0.497093	+0.260180	+0.260000	+6.997850	+0.167753	+1.000000	+0.000000	+0.000000
7	+0.563864	+0.484553	+0.390000	+6.997493	+0.158597	+1.000000	+0.000000	+0.000000
8	+0.840317	+0.211558	+0.310000	+6.996213	+0.160639	+1.000000	+0.000000	+0.000000
9	+0.999967	+0.000009	+0.430000	+6.995774	+0.153517	+1.000000	+0.000000	+0.000000
10	+0.616805	+0.000003	+0.230000	+6.994967	+0.161933	+1.000000	+0.000000	+0.000000
11	+0.528949	+0.000003	+0.000000	+6.995143	+0.164920	+1.000000	+0.000000	+0.000000

(b) Regelung der erweiterten Modells

Abbildung A.1: Beispiel der Übersichten der Simulationen

Wurde in den Einstellungen der Regler ohne Berücksichtigung der individuellen Kühltürsche-Regelung gewählt, so wird der aktuelle Optimierungsschritt k , die Kontrollkomponenten u_1 , u_2 , der Anteil der angeschalteten Geräte x_1 , die erwartete Temperatur $\mathbb{E}[T]$, die Varianz x_4 , der Wert der Kostenfunktion J_N und die Variable `exitflag`

ausgegeben. Die Größe *exitflag* muss stets den Wert 1 haben, da ansonsten kein optimales Minimum gefunden wurde. Für den Regler mit Berücksichtigung der einzelnen Kühlschränke wird zusätzlich für jeden Optimierungsschritt die Anzahl der Geräte, die zu warm beziehungsweise zu kalt waren, und deshalb wie in Algorithmus 5.3 beschrieben zusätzlich geregelt werden müssen, angegeben. Die generierten Übersichten sind beispielhaft in Abbildung A.1 dargestellt.

Nachdem alle Optimierungsschritte durchlaufen wurden, werden alle relevanten Daten in einem Struct, dessen Dateiname das Datum und das Präfix *out* enthält, gespeichert. Auf Basis dieser Daten werden anschließend Plots des Zustandes, der Kontrolle, der zu regulierender Größe im Vergleich zur Zielgröße und die Netzdaten geplottet. Diese Grafiken zeigen die wichtigsten Daten. Für eine weitere Visualisierung können die gespeicherten Structs verwendet werden, die alle generierten Daten beinhalten.

Verzeichnis der Algorithmen

2.1	Basis MPC-Algorithmus	16
5.1	MPC-Algorithmus	49
5.2	Zufallsregelung eines Kühlschranks i	58
5.3	Erweiterte Zufallsregelung eines Kühlschranks i	58
5.4	Vorgehen der RES	59
5.5	MPC mit Unsicherheiten	61

Abbildungsverzeichnis

2.1	graphische Darstellung der Wettervorhersage	8
2.2	Zustand x und Kontrolle u aus Beispiel 2.26	18
4.1	Illustration der Markov-Kette	27
5.1	Gesamtmodell Aufbau	42
5.2	Netzdaten	43
5.3	Zustand des Kühlschranksverbands	52
5.4	Kontrollkomponenten des Reglers	53
5.5	Wirkung der modellprädiktiven Regelung	54
5.6	erweiterter Modellaufbau	56
5.7	Initialisierung des neuen Startzustands $x(0)$	62
5.8	Zustand des Kühlschranksverbands im erweiterten Modell	63
5.9	Steuerung im erweiterten Modell	64
5.10	Wirkung der modellprädiktiven Regelung im erweiterten Modell	65
5.11	Vergleich der zu regulierenden Größen z	65
A.1	Beispiel der Übersichten der Simulationen	71

Literaturverzeichnis

- [1] ANGELI, D. ; KOUNTOURITOTIS, P.-A. : A Stochastic Approach to „Dynamic-Demand“ Refrigerator Control. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 20 (2012), May, Nr. 3, 581-592. <https://ieeexplore.ieee.org/document/5764847>
- [2] AUSGRID: *Solar home electricity data*. <https://www.ausgrid.com.au/Industry/Innovation-and-research/Data-to-share/Solar-home-electricity-data>, Abruf: 27.09.19
- [3] BAUER, H. : *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4., völlig überarb. u. neugestaltete Aufl. Berlin [u.a.] : de Gruyter, 1991 (De-Gruyter-Lehrbuch)
- [4] BR: *Was ist die perfekte Kühlschrantemperatur?* <https://www.br.de/radio/bayern1/inhalt/experten-tipps/umweltkommissar/kuehlschrantemperatur-energie-verbrauch-umweltkommissar-100.html>, Abruf: 16.10.2019
- [5] BRAUN, P. : *Hierarchical distributed optimization and predictive control of a smart grid*, Universität Bayreuth, Diss., 2016
- [6] BUNDESMINISTERIUM FÜR WIRTSCHAFT UND ENERGIE: *Systemintegration erneuerbarer Energien*. <https://www.erneuerbare-energien.de/EE/Navigation/DE/Technologien/Systemintegration-Erneuerbarer-Energien/systemintegration.html>, Abruf: 14.10.2019
- [7] BUNDESNETZAGENTUR: *Warum brauchen wir den Netzausbau?* <https://www.netzausbau.de/wissenswertes/warum/de.html>, Abruf: 14.10.2019
- [8] BUNDESVERBAND DER ENERGIE- UND WASSERWIRTSCHAFT: *Stromverbrauch der Haushalte*. <https://www.bdew.de/service/daten-und-grafiken/stromverbrauch-der-haushalte/>, Abruf: 14.10.2019
- [9] CHRISTOFIDES, P. D.: *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems*. Boston [u.a.] : Birkhäuser, 2001 (Systems & control)

- [10] DEUFLHARD, P. ; BORNEMAN, F. : *De Gruyter : Studium. Bd. 2: Numerische Mathematik.* 4., [durchges. und erg.] Aufl. Berlin [u.a.] : de Gruyter, 2013. – ISBN 9783110316339
- [11] FINANZTIPP: *Energielabel A+ reicht nicht immer aus.* <https://www.finanztip.de/energieeffizienzklasse/>, Abruf: 14.10.2019
- [12] FORSCHUNGSSTELLE FÜR ENERGIEWIRTSCHAFT E.V.: *Demand Side Management in Haushalten als Netzoptimierende Maßnahme.* <https://www.ffe.de/publikationen/veroeffentlichungen/649-demand-side-management-in-haushalten-als-netzoptimierende-massnahme>, Abruf: 14.10.2019
- [13] GRIGULL, U. : Newton's temperature scale and the law of cooling. In: *Wärme - und Stoffübertragung* 18 (1984), Februar, S. 195–199. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01007129>. – DOI 10.1007/BF01007129
- [14] GRÜNE, L. : *Mathematische Kontrolltheorie.* http://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/Gruene_Lars/lecture_notes/index.html. Version: 2018. – Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 5. Auflage
- [15] GRÜNE, L. ; JUNGE, O. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2., aktualisierte Auflage. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2016 (Springer Studium Mathematik - Bachelor)
- [16] GRÜNE, L. ; PANNEK, J. : *Nonlinear Model Predictive Control.* Second Edition. Cham : Springer, 2016 (Communications and control engineering)
- [17] KEERTHI, G. ; GILBERT, E. : An existence theorem for discrete-time infinite horizon optimal control problems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 9, S. 907–909. <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1985.1104084>. – DOI 10.1109/TAC.1985.1104084
- [18] MEYN, S. P. ; TWEEDIE, R. L.: *Markov Chains and Stochastic Stability.* 3. printing. London u.a. : Springer, 1996 (Communications and control engineering)
- [19] RATNAM, E. L. ; WELLER, S. R. ; KELLETT, C. M. ; MURRAY, A. T.: Residential load and rooftop PV generation: an Australian distribution network dataset. In: *International Journal of Sustainable Energy* 36 (2017), Nr. 8, S. 787–806. <http://dx.doi.org/10.1080/14786451.2015.1100196>. – DOI 10.1080/14786451.2015.1100196
- [20] SOLARAUTONOMIE: *Zeitvariable Stromtarife – Die Stromtarife der Zukunft?* <https://www.solarautonomie.de/zeitvariable-stromtarife/>, Abruf: 14.10.2019

- [21] SONTAG, E. D.: *Mathematical Control Theory*. 2. ed. New York, NY [u.a.] : Springer-Verlag, 1998 (Texts in applied mathematics)
- [22] STROOCK, D. W.: *An Introduction to Markov Processes*. 2. ed. Berlin [u.a.] : Springer, 2014 (Graduate texts in mathematics)
- [23] TAPPE, S. : *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin [u.a.] : Springer Spektrum, 2013
- [24] TENNET: *SuedLink - Die Windstromleitung*. <https://www.tennet.eu/de/unser-netz/onshore-projekte-deutschland/suedlink/>, Abruf: 14.10.2019
- [25] WIRTSCHAFTSWOCHE: *Ökostrom-Anteil in Deutschland steigt auf Rekordwert*. https://www.wiwo.de/politik/deutschland/erneuerbare-energie-oekostrom-anteil-in-deutschland-steigt-auf-rekordwert/25153980.html?xing_share=news, Abruf: 26.10.2019

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, ganz oder in Teilen noch nicht als Prüfungsleistung vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Sämtliche Stellen der Arbeit, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich durch Quellenangaben kenntlich gemacht. Dies gilt auch für Zeichnungen, Skizzen, bildliche Darstellungen und dergleichen sowie für Quellen aus dem Internet.

Mir ist bewusst, dass jedes Zuwiderhandeln als Täuschungsversuch zu gelten hat und zu einer Bewertung der Arbeit mit „nicht ausreichend“ führt.

Bayreuth, 22.11.2019,

Lisa Krügel