

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Beobachter für die Wärmeleitungsgleichung: Grundlagen und numerische Simulation

Bachelorarbeit

von

Andreas Bittner

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 2. Januar 2020

Betreuung:
Prof. Dr. L. Grüne

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	II
1 Einführung	1
2 Theorie	2
2.1 Stark stetige Halbgruppen	3
2.2 Eingang und Ausgang	7
2.3 Exponentielle Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit	8
2.4 Luenberger-Beobachter	14
2.5 Luenberger-Beobachter im closed-loop system	16
3 Implementierung	17
3.1 Finite Differenzen	17
3.1.1 Behandlung der Wärmeleitungsgleichung	17
3.1.2 Behandlung der Randbedingungen	19
3.1.3 Behandlung des Luenberger-Beobachters	19
3.2 Finite Elemente	20
3.2.1 Die vertikale Linienmethode	20
3.2.2 Behandlung der Wärmeleitungsgleichung	23
3.2.3 Behandlung des Luenberger-Beobachters	23
3.3 Vergleich der Verfahren	24
4 Ergebnisse der numerischen Simulation	26
Literaturverzeichnis	35

Abbildungsverzeichnis

1	Veranschaulichung des gegebenen Problems	1
2	Lage der ersten fünf Eigenwerte in der komplexen Ebene	6
3	Veranschaulichung des Ein- und Ausgangs	8
4	Trennung des Spektrums durch $\beta = -2$	11
5	Lage der Kurve Γ	12
6	Lösung des Luenberger-Beobachters	25
7	Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger- Beobachter für $u(t) = 0.2$	26
8	Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger- Beobachter für $u(t) = \frac{1}{25}t^2$	27
9	Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger- Beobachter für $u(t) = 1.2 \cdot \sin(5 \cdot \cos(t)) \cdot \exp(-0.6 \cdot t)$, $z_0(x) =$ $1 + 0.4 \cdot x + 0.1 \cdot \sin(2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot x))$	27
10	Fehler des Luenberger-Beobachters zur Wärmeleitungsgleichung .	28
11	Eigenwerte von A_{FE}	29
12	Differenz der EW von A_{FE} von Wärmeleitungsgleichung zu Luenberger- Beobachter	30
13	Fehler des Luenberger-Beobachters für verschiedene ν bei an ν angepassten Gitterpunkten	31
14	Fehler bei verschobenem Sensor x_S	32
15	$\ z(t)\ $ im closed-loop system für verschiedene Werte von κ	33
16	Stabilisierungsproblem	34

1 Einführung

Bei der Einflussnahme auf ein System, das durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben wird, ist es oft wichtig den Zustand desselben in seiner Gesamtheit zu kennen. Unter der Annahme, dass nur in einem Teilgebiet Daten gemessen werden können und somit nur partielle Informationen vorliegen, ist dies jedoch nicht möglich. In diesem Fall besteht die Frage nach einem Werkzeug, das den Zustand trotz großer Fehler in den Anfangsbedingungen rekonstruieren kann. Ein solches Werkzeug wird auch *Beobachter* genannt. Ziel von Kapitel 2 ist es, einen solchen Beobachter herzuleiten und zu untersuchen. Dies geschieht immer in Bezug auf die folgende Problemstellung (siehe [1, Example 2.1.1]):

Gegeben sei ein Metallstab der Länge Eins. Von Interesse ist die Wärmeleitung durch diesen bis zum Zeitpunkt T . Dafür beschreibe $u : (0, 1) \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ Wärmequellen im Stab, $z_0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ die Anfangstemperatur und die *Wärmeleitungsgleichung* sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht ist die Funktion $z : (0, 1) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $z(x, t)$ als *Zustand* bezeichnet wird, der die Temperatur am Ort x zum Zeitpunkt t beschreibt.

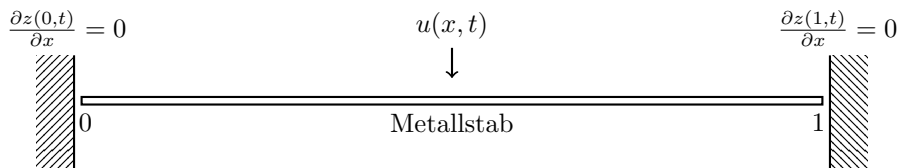


Abbildung 1: Veranschaulichung des gegebenen Problems

Die Existenz von Lösungen kann, wie später gezeigt, mithilfe eines Separationsansatzes gewonnen werden. Des Weiteren kann man zeigen, dass eine solche Lösung eindeutig ist und kleine Störungen der Anfangsbedingung nur kleine Störungen der Lösung nach sich ziehen (siehe [4, Kapitel 2.4]). Im Verlauf von Abschnitt 2.2 wird zudem formal ein Sensor definiert und Abbildung 1 um diesen erweitert, wobei der Sensor das zuvor erwähnte Messen von Daten möglich macht. Aufbauend auf diesen Daten wiederum erstellt man dann den Beobachter.

Anschließend werden in Kapitel 3 zwei mögliche Implementierungen des Beobachters mit Konvergenzaussagen vorgestellt, woraufhin die Ergebnisse dieser Simulationen in Kapitel 4 dargestellt und beschrieben werden.

2 Theorie

In Vorbereitung auf Kapitel 2.2 wird es das erste Ziel sein, Gleichung (1) durch eine abstrakte Formulierung der Form

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \quad (2)$$

auf einem separablen, komplexen Hilbertraum Z darzustellen (siehe [1, Example 2.1.1]).

Hierfür sei $Z = L_2(0, 1)$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über $[0, 1]$, sowie die Operatoren A und B auf Z definiert als

$$\begin{aligned} Ah &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{mit} \\ \mathcal{D}(A) &= \left\{ h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{\partial h}{\partial x} \text{ sind stetig,} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L_2(0, 1) \text{ und } \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(1) \right\}, \\ B &= I. \end{aligned} \quad (3)$$

Um die Lösung dieser abstrakten Differentialgleichung zu erhalten, benötigt man zuerst die Lösung von (1). Diese kann durch einen Separationsansatz gewonnen werden und hat für genügend glatte Funktionen $u(\cdot, t)$ und z_0 , unter Erfüllung der Randbedingungen, die Form

$$z(x, t) = \int_0^1 g(t, x, y) z_0(y) dy + \int_0^t \int_0^1 g(t-s, x, y) u(y, s) dy ds. \quad (4)$$

Dabei steht $g(t, x, y)$ für die Greensche Funktion

$$g(t, x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2 t} \cos(n\pi x) \cos(n\pi y).$$

Um nun von (4) zu einer abstrakten Variante auf Z überzugehen, wird der beschränkte lineare Operator

$$z(t) = T(t)z_0$$

auf $L_2(0, 1)$ betrachtet. Dafür sei $T(t) \in \mathcal{L}(L_2(0, 1))$ definiert als

$$T(t)z_0(x) = \int_0^1 g(t, x, y) z_0(y) dy \quad \forall t \geq 0, \quad (5)$$

wobei $\mathcal{L}(X, Y)$ der Raum der beschränkten, linearen Operatoren sei, die von X nach Y abbilden. Abkürzend wird auch $\mathcal{L}(X)$ verwendet werden, falls $X = Y$. Entsprechend lautet mit (5) die abstrakte Formulierung von (4) auf Z

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)u(s)ds. \quad (6)$$

Letztendlich hat man eine Formulierung als abstrakte Differentialgleichung (2) auf $Z = L_2(0, 1)$ erhalten, mit A als unbeschränkter Operator auf Z nach (3), B als die Identität auf Z , z_0 und $u(\cdot, t)$ Funktionen auf Z und der Lösung (6).

2.1 Stark stetige Halbgruppen

Für die lineare, gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0 \quad (7)$$

mit $A \in \mathcal{L}(Z)$, $z(t) \in Z$, ist die Lösung gegeben durch

$$z(t) = e^{At} z_0, \quad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}.$$

Im homogenen Fall von (2), der sich von (7) nur dadurch unterscheidet, dass der Operator A aus (3) unbeschränkt ist, wäre die Lösung wiederum gegeben durch

$$z(t) = T(t)z_0.$$

Daher stellt sich die Frage, welche Verbindung zwischen der Matrixexponentialfunktion und dem oben definierten $T(t)$ besteht. Die Antwort darauf bietet die Klasse der folgenden Operatoren (siehe [1, Definition 2.1.2]):

Definition 2.1.1. Eine *stark stetige Halbgruppe* ist eine operatorwertige Funktion $T(t)$ von \mathbb{R}^+ nach $\mathcal{L}(Z)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0 \quad (8)$$

$$T(0) = I \quad (9)$$

$$\|T(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+ \quad \forall z_0 \in Z. \quad (10)$$

Im Folgenden wird der Begriff *C_0 -Halbgruppe* für eine stark stetige Halbgruppe verwendet. ♣

Tatsächlich kann man zeigen, dass für einen beliebigen linearen Operator $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf $Z = \mathbb{R}^n$ die Matrixexponentialfunktion eine C_0 -Halbgruppe ist (siehe [1, Example 2.1.3]). Die nächste Frage ist dementsprechend, ob es außerdem noch weitere C_0 -Halbgruppen gibt. Das folgende Beispiel geht auf Operatoren der Form (11) ein und zeigt so, wie eine C_0 -Halbgruppe aussehen kann (siehe [1, Example 2.1.5]):

Beispiel 2.1.2. Sei $\{\phi_n, n \geq 1\}$ eine Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraums und $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ eine Folge von reellen Zahlen. Dann ist

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \quad (11)$$

ein beschränkter, linearer Operator genau dann, wenn $\{e^{\lambda_n t}, n \geq 1\}$ eine beschränkte Folge ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn

$$\sup_{n \geq 1} \lambda_n < \infty.$$

Setzt man dies voraus, gilt nun:

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle T(s)z, \phi_n \rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m s} \phi_m \langle z, \phi_m \rangle, \phi_n \right\rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} e^{\lambda_n s} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (t+s)} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \\
&= T(t+s)z.
\end{aligned}$$

Also ist (8) erfüllt. Da $\{\phi_n, n \geq 1\}$ eine Orthonormalbasis ist und daher gilt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n = z$, ist auch (9) erfüllt. Für (10) betrachte für $t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|T(t)z - z\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \\
&\leq \sup_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \sum_{n=1}^N |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + K \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2, \\
K &:= \sup_{0 \leq t \leq 1, n \geq 1} |e^{\lambda_n t} - 1|^2.
\end{aligned}$$

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2 < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Hierbei kann man nun $t \leq 1$ so wählen, dass

$$\sup_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\|T(t)z - z\|^2 &\leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^N |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + K \frac{\epsilon}{2K} \leq \epsilon \\
&\Rightarrow (10).
\end{aligned}$$

Damit definiert (11) also eine C_0 -Halbgruppe, falls $\sup_{n \geq 1} \lambda_n < \infty$. □

Betrachte nun wieder (7). Die lösende Exponentialfunktion wird ausschließlich durch die Matrix A erzeugt. Wünschenswert wäre dies auch für den Operator $Ah = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, definiert in (3). Dieser ist jedoch unbeschränkt, im Gegensatz zur Definition von e^{At} , wofür $A \in \mathcal{L}(Z)$ gefordert ist. Es ist also von Interesse einen solchen Erzeuger zu verallgemeinern (siehe [1, Definition 2.1.8]):

Definition 2.1.3. A heißt der *infinitesimale Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe* auf einem Hilbertraum Z , falls gilt:

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)z,$$

sofern der Limes existiert. Die Definitionsmenge $\mathcal{D}(A)$ ist definiert als die Menge der Elemente in Z , für die der Limes existiert. ♣

Bei dieser Definition erzeugt $A \in \mathcal{L}(Z)$ stets die C_0 -Halbgruppe e^{At} (siehe [1, Example 2.1.9]). Betrachtet man wiederum die C_0 -Halbgruppe (11), so kann man zeigen, dass der zugehörige infinitesimale Erzeuger die Form

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \quad (12)$$

hat. Die Halbgruppe (5) wiederum hat die Form von (11), mit $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\phi_n(x) = \sqrt{2} \cos(n\pi x)$ für $n \geq 1$, $\lambda_0 = 0$, $\phi_0(x) = 1$ und dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathcal{L}_2(0,1)$. Nach Beispiel 2.1.2 definiert (5) also eine C_0 -Halbgruppe. Außerdem gilt (siehe [6, Theorem 1.4]):

Satz 2.1.4. Ein infinitesimaler Erzeuger beschreibt eine C_0 -Halbgruppe eindeutig.

Beweis. siehe [6, Theorem 1.4] □

Damit wird (5) also eindeutig durch (12) bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass der Operator A aus (3) genau dieser infinitesimale Erzeuger ist. Wie später gezeigt wird, gehört A zur Klasse der Riesz-spektralen Operatoren. Dafür benötigt man jedoch zuerst diese Definition (siehe [1, Definition 2.3.1]):

Definition 2.1.5. Eine Folge von Vektoren $\{\phi_n, n \geq 1\}$ in einem Hilbertraum Z bildet eine *Riesz Basis* von Z , wenn gilt:

- $\overline{\text{span}_{n \geq 1} \{\phi_n\}} = Z$
- $\exists m, M > 0$, sodass für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und beliebige Skalare $\alpha_n, n = 1, \dots, N$ gilt:

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2. \quad (13)$$

♣

Eine Riesz Basis fordert also zusätzlich zur Basiseigenschaft eine zweite Eigenschaft, wie etwa bei Orthogonalbasen. Wie gleich definiert, erfüllen die Eigenvektoren eines entsprechenden Operators diese Forderung (siehe [1, Definition 2.3.4]):

Definition 2.1.6. Sei A ein linearer, abgeschlossener Operator auf einem Hilbertraum Z und habe einfache Eigenwerte $\{\lambda_n, n \geq 1\}$. Außerdem seien die Eigenvektoren derart, dass sie eine Riesz Basis von Z bilden. Dann nennt man A einen *Riesz-spektralen Operator*, wenn der Abschluss von $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ total unzusammenhängend ist, es also keine zusammenhängenden Teilmengen gibt. ♣

Betrachte man nun wieder den zu Beginn definierten Operator A auf $Z = L_2(0, 1)$ (siehe [1, Example 2.3.7]):

$$Ah = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \text{ mit}$$

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{\partial h}{\partial x} \text{ sind stetig,} \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L_2(0, 1) \text{ und } \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(1) \right\}.$$

Man kann zeigen, dass A abgeschlossen ist. Zudem hat A die Eigenwerte $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n \geq 0$, dargestellt in Abbildung 2, sowie die entsprechenden Eigenvektoren $\phi_n(x) = \sqrt{2} \cos(n\pi x)$, $n \geq 1$, $\phi_0 = 1$, die wiederum eine Orthonormalbasis des $L_2(0, 1)$ bilden.

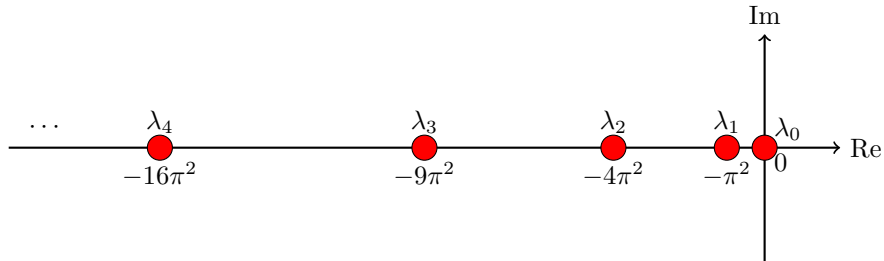


Abbildung 2: Lage der ersten fünf Eigenwerte in der komplexen Ebene

Also entspricht A dem Riesz-spektralen Operator:

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 \langle z, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \forall z \in \mathcal{D}(A),$$

wobei

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ z \in L_2(0, 1) \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \pi^4 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Somit hat A die Form von (12) und ist damit der infinitesimale Erzeuger der C_0 -Halbgruppe

$$T(t)z_0 = \langle z_0, 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2 t} \langle z_0(\cdot), \cos(n\pi\cdot) \rangle \cos(n\pi\cdot).$$

Mit anderen Worten ist demnach A aus (3) der Erzeuger der in (5) definierten Halbgruppe $T(t)$. Insbesondere ist die Klasse der C_0 -Halbgruppen eine echte Verallgemeinerung der Matrixexponentialfunktion.

2.2 Eingang und Ausgang

Zu Beginn wurde erläutert, dass in der Praxis oft nur partielle Informationen über den Zustand eines beobachteten Systems verfügbar sind. Im vorliegenden linearen Fall wird gewöhnlicherweise die Annahme gemacht (siehe [5, Kapitel 8.1]), dass diese Informationen eine Linearkombination des Zustands und des Eingangs sind. Da dieser Ausgang allein durch das Ursprungsproblem entsteht, ist es sinnvoll, beide in einem System zusammenzuführen (siehe [1, Definition 4.1.1]):

Definition 2.2.1. Seien Z, Y, U jeweils Hilberträume. Sei A der infinitesimale Erzeuger der C_0 -Halbgruppe $T(t)$ auf Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$, $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$, und D ein beschränkter Operator von U nach Y . Ein lineares Kontrollsystem mit Eingang u und Ausgang y ist gegeben durch

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \quad (14)$$

$$y(t) = Cz(t) + Du(t). \quad (15)$$

Abkürzend für (14) und (15) wird auch $\Sigma(A, B, C, D)$ geschrieben, bzw. $\Sigma(A, B, C)$ wenn $D = 0$, $\Sigma(A, B, -)$ wenn $C = D = 0$, oder auch $\Sigma(A, -, C)$ wenn $B = D = 0$. ♣

Aufbauend auf dieser Definition, soll nun die behandelte Wärmeleitungsgleichung in diese Form gebracht werden (siehe [1, Example 4.1.2]):

Es sei wieder der Metallstab gegeben, dessen Temperaturverlauf durch (1) beschrieben wurde. Nun soll in einer Umgebung der Stelle x_A eine Wärmequelle angebracht, sowie die durchschnittliche Temperatur zu allen Zeitpunkten in einer Umgebung des Punktes x_S erfasst werden. Dementsprechend wird Gleichung (1) angepasst zu:

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + b(x)u(t), \quad z(x, 0) = z_0(x), \quad (16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t),$$

$$y(t) = \int_0^1 c(x)z(x, t)dx. \quad (17)$$

Dabei sind b und c Indikatorfunktionen, die nur in einer Umgebung der Punkte x_A , bzw. x_S nicht null sind:

$$b(x) = \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x),$$

$$c(x) = \frac{1}{2\nu} 1_{[x_S - \nu, x_S + \nu]}(x),$$

mit

$$1_{[\alpha, \beta]}(x) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für feste, positive und hinreichend kleine Konstanten ν, ϵ sind b und c Elemente von $L_2(0, 1)$. Da bereits gezeigt wurde, dass A der infinitesimale Generator einer C_0 -Halbgruppe auf $Z = L_2(0, 1)$ ist, kann man also (16) mit $Z = L_2(0, 1), U = \mathbb{C}$ und

$$Bu := b(x)u$$

in Form von (14) schreiben. Ebenso kann (17) wie in (15) mit $Y = \mathbb{C}, D = 0$ geschrieben werden, wobei C gegeben ist durch

$$Cz := \int_0^1 c(x)z(x)dx.$$

Cz ist also die einzige Information, die über die Lösung der Differentialgleichung verfügbar ist.

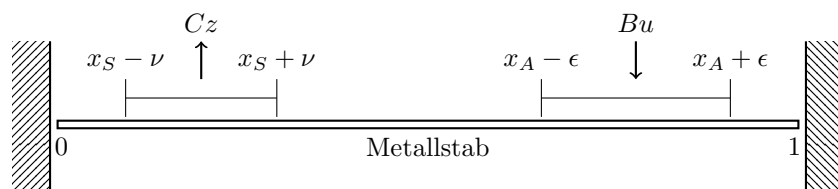


Abbildung 3: Veranschaulichung des Ein- und Ausgangs

2.3 Exponentielle Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit

Ein weiterer wichtiger Begriff für die Theorie dieser Arbeit ist die exponentielle Stabilisierbarkeit. Dafür wird jedoch zuerst die exponentielle Stabilität benötigt (siehe [1, Definition 5.1.1]):

Definition 2.3.1. Eine C_0 -Halbgruppe $T(t)$ auf einem Hilbertraum Z ist *exponentiell stabil*, wenn es positive Konstanten M und α gibt, sodass gilt:

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Des Weiteren wird $T(t)$ *β -exponentiell stabil* genannt, wenn $-\alpha < \beta$. ♣

Zusätzlich zum Begriff der exponentiellen Stabilisierbarkeit, werden in der nachstehenden Definition zwei neue Operatoren F und L eingeführt, die später für die Erzeugung des Beobachters vonnöten sind (siehe [1, Definition 5.2.1]):

Definition 2.3.2. Seien U und Z zwei Hilberträume, sei A der infinitesimale Erzeuger der C_0 -Halbgruppe $T(t)$ auf Z und sei $B \in \mathcal{L}(U, Z)$. $\Sigma(A, B, -)$ ist *exponentiell stabilisierbar*, wenn ein $F \in \mathcal{L}(Z, U)$ existiert, sodass $A + BF$ eine exponentiell stabile C_0 -Halbgruppe $T_{BF}(t)$ erzeugt. Wenn $T_{BF}(t)$ β -exponentiell stabil ist, dann wird $\Sigma(A, B, -)$ auch entsprechend *β -exponentiell stabilisierbar* genannt. Ein solches $F \in \mathcal{L}(Z, U)$ heißt dann *Feedback Operator*.

Sei Y ein Hilbertraum, $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ und es existiere ein $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$, sodass $A + LC$ eine exponentiell stabile C_0 -Halbgruppe $T_{LC}(t)$ erzeugt. Dann definiert man $\Sigma(A, -, C)$ als *exponentiell entdeckbar*. Wenn $T_{LC}(t)$ β -exponentiell stabil ist, dann sei $\Sigma(A, -, C)$ wiederum definiert als *β -exponentiell entdeckbar*. ♣

Als nächstes ist von Interesse, wann ein lineares Kontrollsystem $\Sigma(A, B, -)$ β -exponentiell stabilisierbar ist. Für das entsprechende Theorem müssen jedoch vorher noch einige Begriffe geklärt werden (siehe [2, Definition 2.1, 2.7, Korollar 2.13], bzw. [1, Definition 1.2.2, (5.24), (5.25), Definition 5.2.5]):

Definition 2.3.3. Es sei ein endlich-dimensionales System $\Sigma(A, B, -)$ gegeben. Der Zustand $z_0 \in \mathbb{R}^n$ ist *kontrollierbar* zu einem Zustand $z_1 \in \mathbb{R}^n$ zum Zeitpunkt $t_1 > 0$, falls ein $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow U$ existiert mit

$$z_1 = z(t_1),$$

wobei z die Lösung von $\Sigma(A, B, -)$ mit Anfangsbedingung z_0 und Eingang u ist. $\Sigma(A, B, -)$ heißt *kontrollierbar*, wenn jedes $z_0 \in \mathbb{R}^n$ zu jedem beliebigen $z_1 \in \mathbb{R}^n$ kontrollierbar ist. ♣

Satz 2.3.4. (Kalman-Kriterium) Das endlich-dimensionale System $\Sigma(A, B, -)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist genau dann kontrollierbar, wenn gilt:

$$\text{rg}(BAB \dots A^{n-1}B) = n.$$

Beweis. (siehe [2, Korollar 2.13]) □

Definition 2.3.5. Eine Kurve Γ in der komplexen Ebene heißt *rektifizierbar*, falls eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ existiert, sodass $\Gamma = \gamma([a, b])$ gilt.

Eine solche rektifizierbare Kurve wird *einfach* genannt, wenn $\gamma(x) \neq \gamma(y) \forall x, y \in (a, b)$, $x \neq y$ gilt.

Gilt zusätzlich $\gamma(a) = \gamma(b)$ so nennt man sie *geschlossen*. ♣

Definition 2.3.6. Sei A der infinitesimale Erzeuger der C_0 -Halbgruppe $T(t)$ auf dem Hilbertraum Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ und $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Für ein gegebenes reelles β sei das Spektrum von A wie folgt auf zwei Teile der komplexen Ebene aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta^+(A) &:= \sigma(A) \cap \overline{\mathbb{C}_\beta^+}; \quad \mathbb{C}_\beta^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Re}(\lambda) > \beta\}, \\ \sigma_\beta^-(A) &:= \sigma(A) \cap \mathbb{C}_\beta^-; \quad \mathbb{C}_\beta^- := \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Re}(\lambda) < \beta\}. \end{aligned}$$

A erfüllt die *spectrum decomposition assumption* bei β , wenn $\sigma_\beta^+(A)$ beschränkt ist und derart von $\sigma_\beta^-(A)$ getrennt, dass eine rektifizierbare, einfache, geschlossene Kurve Γ gezeichnet werden kann, die eine offene Menge einschließt, welche wiederum $\sigma_\beta^+(A)$ in ihrem Inneren und $\sigma_\beta^-(A)$ in ihrem Äußeren enthält. ♣

Zudem kann gezeigt werden, dass eine derartige Zerlegung eine entsprechende Zerlegung des Hilbertraums Z , sowie des Operators A nach sich zieht (siehe [1, Lemma 2.5.7]). Dafür definiert man die Spektralprojektion P_β durch:

$$P_\beta z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} z d\lambda,$$

mit der imaginären Einheit i . Dementsprechend erhält man die folgende Zerlegung:

$$Z = Z_\beta^+ \oplus Z_\beta^-, \quad \text{wobei } Z_\beta^+ := P_\beta Z \text{ und } Z_\beta^- := (I - P_\beta)Z.$$

Infolgedessen verwendet man für gewöhnlich die folgende Notation:

$$A = \begin{pmatrix} A_\beta^+ & 0 \\ 0 & A_\beta^- \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} T_\beta^+(t) & 0 \\ 0 & T_\beta^-(t) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_\beta^+ \\ B_\beta^- \end{pmatrix}, \quad C = (C_\beta^+ \quad C_\beta^-).$$

Dabei gilt, dass A_β^+ die Einschränkung von A auf Z_β^+ und analog A_β^- die Einschränkung von A auf Z_β^- ist und $B_\beta^+ = P_\beta B \in \mathcal{L}(U, Z_\beta^+)$, $B_\beta^- = (I - P_\beta)B \in \mathcal{L}(U, Z_\beta^-)$, $C_\beta^+ = CP_\beta \in \mathcal{L}(Z_\beta^+, Y)$, $C_\beta^- = C(I - P_\beta) \in \mathcal{L}(Z_\beta^-, Y)$. Damit wurde das System $\Sigma(A, B, C)$ zerlegt in die Vektorsumme zweier Untersysteme: $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, C_\beta^+)$ auf Z_β^+ und $\Sigma(A_\beta^-, B_\beta^-, C_\beta^-)$ auf Z_β^- .

Dies führt nun auf das gewünschte Resultat, das aufzeigt wann ein System $\Sigma(A, B, -)$ β -exponentiell stabilisierbar ist (siehe [1, Theorem 5.2.6]):

Theorem 2.3.7. Wenn das lineare Kontrollsystem $\Sigma(A, B, -)$ auf dem Hilbertraum Z derartiger Gestalt ist, dass B endlichen Rang hat, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a. $\Sigma(A, B, -)$ ist β -exponentiell stabilisierbar;
- b. $\Sigma(A, B, -)$ genügt der spectrum decomposition assumption bei β , Z_β^+ ist endlich-dimensional, $T_\beta^-(t)$ ist β -exponentiell stabil und das endlich-dimensionale System $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, -)$ ist kontrollierbar.

Wenn $\Sigma(A, B, -)$ β -exponentiell stabilisierbar ist, dann ist ein β -stabilisierender Feedback Operator gegeben durch $F = F_0 P_\beta$, wobei wiederum F_0 ein β -stabilisierender Feedback Operator für $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, -)$ ist.

Beweis. siehe [1, Theorem 5.2.6] □

Schlussendlich kann man diese Aussage nun benutzen, um den Feedback Operator der behandelten Wärmeleitungsgleichung zu bestimmen (siehe [1, Example 5.2.8]). Es wurde bereits gezeigt, dass man sie durch

$$\begin{aligned}
Ah &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{mit} \\
\mathcal{D}(A) &= \left\{ h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{\partial h}{\partial x} \text{ sind stetig,} \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L_2(0, 1) \text{ und } \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(1) \right\}, \\
Bu &= bu, \quad b(x) = \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x), \\
Ch &= \langle h, c \rangle, \quad c(x) = \frac{1}{2\nu} 1_{[x_S - \nu, x_S + \nu]}(x),
\end{aligned}$$

in der Form eines linearen Kontrollsystems $\Sigma(A, B, C)$ auf $Z = L_2(0, 1)$ schreiben kann. A hat die Eigenwerte $-n^2\pi^2, n \geq 0$ und genügt somit der spectrum decomposition assumption für jedes β . Wählt man nun $\beta = -2$, so gilt $\sigma_\beta^+(A) = \{0\}$, $\sigma_\beta^-(A) = \{-n^2\pi^2, n \leq 1\}$.

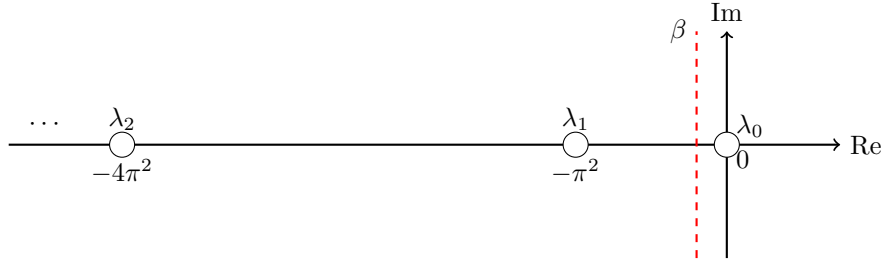


Abbildung 4: Trennung des Spektrums durch $\beta = -2$

Für die weiteren Kriterien von Theorem 2.3.7 b. ist es notwendig, mit der Projektion P_β sinnvoll rechnen zu können. Betrachte hierfür die folgenden Sätze (siehe [1, Theorem 2.3.5 a.] bzw. siehe [7, Kapitel IV Satz 18]):

Satz 2.3.8. Sei A ein Riesz-spektraler Operator mit einfachen Eigenwerten $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ und entsprechenden Eigenvektoren $\{\phi_n, n \geq 0\}$. Seien außerdem $\{\psi_n, n \geq 0\}$ die Eigenvektoren von A^* , mit $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$. A^* wiederum sei definiert als der adjungierte Operator von A . Dann gilt für alle $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{n \geq 0} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Beweis. siehe [1, Theorem 2.3.5 a.] □

Satz 2.3.9. Sei $f(z)$ holomorph in einem Gebiet \mathcal{G} , d.h. $f(z)$ ist in jedem Punkt $z \in \mathcal{G}$ komplex differenzierbar (siehe [7, Kapitel III Definition 3]). Für jeden in \mathcal{G} nullhomologen Zykel γ (d.h. Umlaufzahl $n_U(\gamma, a) = 0 \forall a \notin \mathcal{G}$ (siehe [7, Kapitel IV Definition 1])), der den Punkt $z_0 \in \mathcal{G}$ nicht enthält, gilt:

$$n_U(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis. siehe [7, Kapitel IV Satz 18] □

Mit diesem Wissen kann man jetzt die Spektralprojektion P_{β} berechnen. Sei dafür Γ der einfach, positiv durchlaufene Einheitskreis. Für diesen gilt

$$n_U(\gamma, a) = \begin{cases} 1, & |a| < 1 \\ 0, & |a| > 1 \end{cases}.$$



Abbildung 5: Lage der Kurve Γ

Dann folgt:

$$\begin{aligned} P_{\beta}z &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I - A)^{-1} z d\lambda \\ (\text{Satz 2.3.8}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n d\lambda \\ (\text{Satz 2.3.9}) &= \sum_{n=0}^{\infty} n_U(\gamma, \lambda_n) \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ liegt λ_n außerhalb von Γ , daher ist $n_U(\gamma, \lambda_n) = 0 \forall n \geq 1$. Dagegen liegt $\lambda_0 = 0$ innerhalb von Γ und somit ist $n_U(\gamma, \lambda_0) = 1$. Zudem gilt, dass $A = A^*$ (siehe [1, Example 2.1.13]) und damit $\phi_0 = \psi_0 = 1$. Demnach vereinfacht sich dies noch einmal zu:

$$P_{\beta}z = \langle z, \phi_0 \rangle \phi_0 = \langle z, 1 \rangle.$$

Angewendet auf $Z = L_2(0, 1)$ ergibt sich, dass Z_{β}^+ der Raum aller konstanten Funktionen auf $(0, 1)$ ist und damit die endliche Dimension 1 hat.

Schränkt man A auf Z_β^+ ein, dann gilt $A_\beta^+ z = 0$, denn z muss konstant sein und A entspricht der zweiten Ableitung nach x . Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} B_\beta^+ u &= P_\beta B u = \langle B u, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x) u \, dx \stackrel{u \in \mathbb{C}}{=} \\ &= u \cdot \frac{1}{2\epsilon} \int_0^1 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x) \, dx = u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_\beta^+ z &= C P_\beta z = \langle c, \langle z, 1 \rangle \rangle = \int_0^1 c(x) \int_0^1 z \, dy \, dx \stackrel{z \in Z_\beta^+}{=} \\ &= z \cdot \frac{1}{2\nu} \int_0^1 1_{[x_S - \nu, x_S + \nu]}(x) \, dx = z \end{aligned}$$

Somit ist nach Satz 2.3.4 das endlich-dimensionale Untersystem $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, C_\beta^+) = \Sigma(0, 1, 1)$ kontrollierbar, da

$$\text{rg}(B A B \dots A^{n-1} B) \stackrel{n=1}{=} \text{rg}(B) = \text{rg}(1) = 1 = n.$$

Zuletzt ist nachzuweisen, dass $T_\beta^-(t)$ β -exponentiell stabil ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\omega_0 := \inf \{ \omega \in \mathbb{R} \mid \exists M \geq 1 : \|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \forall t \geq 0 \}$$

echt negativ ist (siehe [6, Kapitel 1 Definition 5.6]). Diese sogenannte *growth bound* ω_0 ist stark mit dem größten Eigenwert von A verknüpft. Dafür wird das Folgende benötigt (siehe [6, Kapitel V Lemma 1.9]):

Satz 2.3.10. Wenn für die stark stetige Halbgruppe $T(t)$ und den zugehörigen infinitesimalen Erzeuger A

$$\sigma(T(t)) \cup \{0\} = \overline{\{e^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}} \cup \{0\} \quad \forall t \geq 0$$

gilt, dann folgt:

$$s(A) := \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = \omega_0.$$

Beweis. siehe [6, Kapitel V Lemma 1.9] □

Die Eigenwerte von $T_\beta^-(t)$ sind gerade $e^{t\lambda}$ mit $\lambda \in \sigma(A_\beta^-)$. Zusammen mit der Lage der Eigenwerte folgt daraus:

$$\sigma(T(t)) \cup \{0\} = \{e^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \cup \{0\} = \overline{\{e^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}} \cup \{0\} \quad \forall t \geq 0.$$

Da zudem $s(A_\beta^-) = -\pi^2$ gilt, ist $T_\beta^-(t)$ mit Satz 2.3.10 β -exponentiell stabil.

Demzufolge ist nach Theorem 2.3.7 das System $\Sigma(A, B, -)$ β -exponentiell stabilisierbar. Für

$$u := F_0 z := -3z \tag{18}$$

ist $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, -)$ gegeben durch $z'(t) = -3z(t)$ und $A_\beta^+ + B_\beta^+ F_0 = -3$. Daraus folgt, dass $T_{B_\beta^+ F_0}(t) = e^{-3t}$ die durch $A_\beta^+ + B_\beta^+ F_0$ generierte C_0 -Halbgruppe ist. Offensichtlich ist diese β -exponentiell stabil für $\beta = -2$, also ist F_0 ein Feedback Operator zu $\Sigma(A_\beta^+, B_\beta^+, -)$. Somit gilt mit Theorem 2.3.7: $Fz = F_0 P_\beta z = -3\langle z, 1 \rangle$. Ähnlich kann man zeigen, dass $\Sigma(A, -, C)$ exponentiell entdeckbar ist, mit $L = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ly = -3y\phi_0 = -3y1$. Außerdem sind die durch $A + BF$ und $A + LC$ generierten C_0 -Halbgruppen exponentiell stabil.

2.4 Luenberger-Beobachter

An dieser Stelle soll der Beobachter konstruiert und untersucht werden. Definiertes Ziel des Beobachters ist es, den Zustand des Ursprungsproblems zu approximieren und dabei höchstens die wenigen zur Verfügung stehenden Informationen des Ausgangs zu nutzen. Ein trivialer Ansatz wäre es, eine Kopie des Systems zu erstellen (siehe [5, Kapitel 8.10]). Beispielsweise hätte für Gleichung (16) ein solcher trivialer Beobachter die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x)u(t), \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(1, t), \quad \hat{z}(x, 0) = \hat{z}_0(x). \end{aligned}$$

Diese Konstruktion erfüllt natürlicherweise die erste wünschenswerte Eigenschaft, dass aus der Kenntnis der Anfangsbedingung (also $z_0 = \hat{z}_0$)

$$z(t) = \hat{z}(t) \quad \forall t \geq 0$$

folgt. Im Allgemeinen konvergiert $\hat{z}(t) - z(t)$ für $z_0 \neq \hat{z}_0$ jedoch nicht gegen 0. Diese zweite Forderung wird durch den nun definierten Luenberger-Beobachter unter bestimmten Voraussetzungen erfüllt (siehe [1, Definition 5.3.1]):

Definition 2.4.1. Betrachte das lineare Kontrollsystem $\Sigma(A, B, C)$ auf dem Hilbertraum Z . Ein *Luenberger-Beobachter* zu diesem System ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + Bu(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{z}(t), \end{aligned} \tag{19}$$

mit $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$. ♣

Für den Fall $z_0 = \hat{z}_0$ gilt:

$$L(\hat{y}(0) - y(0)) = L(C\hat{z}(0) - Cz(0)) = LC(\hat{z}_0 - z_0) = 0.$$

Damit entspricht der Luenberger-Beobachter dem trivialen Beobachter und $z(t) = \hat{z}(t) \quad \forall t \geq 0$. Zudem kann man eine Aussage beweisen, nach der die Lösung von (19) unabhängig von der Anfangsbedingung gegen die Lösung des Ursprungsproblems konvergiert (siehe [1, Lemma 5.3.2]):

Satz 2.4.2. Es seien ein lineares Kontrollsystem $\Sigma(A, B, C)$ und ein zugehöriger Luenberger-Beobachter gegeben. Wenn L derart ist, dass $A+LC$ eine exponentiell stabile C_0 -Halbgruppe generiert, dann konvergiert der Approximationsfehler $e(t) := \hat{z}(t) - z(t)$ exponentiell gegen 0 für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Schreibt man y aus mit $y = Cz$, so ist die Lösung von (19) gegeben durch:

$$\hat{z}(t) = T_{LC}(t)\hat{z}_0 + \int_0^t T_{LC}(t-s)Bu(s)ds - \int_0^t T_{LC}(t-s)LCz(s)ds. \quad (20)$$

Für die Lösung von $\Sigma(A, B, C)$ kann man zudem zeigen (siehe [1, (5.56)]):

$$z(t) = T_{LC}(t)z_0 + \int_0^t T_{LC}(t-s)Bu(s)ds - \int_0^t T_{LC}(t-\alpha)LCz(\alpha)d\alpha. \quad (21)$$

Bildet man nun die Differenz aus (20) und (21), erhält man den Fehler:

$$e(t) = \hat{z}(t) - z(t) = T_{LC}(t)(\hat{z}_0 - z_0).$$

Da T_{LC} eine exponentiell stabile C_0 -Halbgruppe ist, konvergiert $e(t)$ exponentiell gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung 2.4.3. Anhand des Beweises wird deutlich, dass die Konvergenzgeschwindigkeit der C_0 -Halbgruppe $T_{LC}(t)$ gegen 0 maßgeblich die Konvergenzgeschwindigkeit des Approximationsfehlers bestimmt. In (18) wird $F_0z = -3z$ festgelegt und entsprechend auch L_0 . Dies geschieht entsprechend der Vorlage [1]. Tatsächlich ist im Beweis jedoch auch jeder andere Wert $F_0z = \kappa z$ mit $\kappa < \beta$ möglich. Obige Theorie wurde für ein β entwickelt, das zwischen λ_0 und λ_1 liegt. Die beste Wahl für κ ist demnach ein Wert möglichst nahe an $-\pi^2$. Wählt man nun aber $\kappa < \lambda_1$, so hätte man genauso $\kappa < \beta < \lambda_1$ wählen können. Für diesen Fall wurden jedoch keine Aussagen bewiesen und das Verhalten ist demnach unklar. Es sei an dieser Stelle für weitere Analysen dieses Falls auf Kapitel 4 verwiesen. \clubsuit

Um einen Luenberger-Beobachter aufzustellen, für den \hat{z} eine gute Approximation von z liefert, muss also die Voraussetzung von Satz 2.4.2 erfüllt werden. Das Ursprungsproblem ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A-\epsilon, x_A+\epsilon]}(x)u(t), \\ z(x, 0) &= z_0(x), \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t), \\ y(t) &= \frac{1}{2\nu} \int_{x_S-\nu}^{x_S+\nu} z(x, t)dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Wie bereits gezeigt, ist die durch $A + LC$ generierte C_0 -Halbgruppe mit $Ly = -3y$ exponentiell stabil. Ein sinnvoller Luenberger-Beobachter ist also gegeben durch:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{2\epsilon} 1_{[x_A - \epsilon, x_A + \epsilon]}(x)u(t) \\ &\quad - 3 \frac{1}{2\nu} \int_{x_S - \nu}^{x_S + \nu} \hat{z}(x, t) dx + 3y(t), \\ \hat{z}(x, 0) &= \hat{z}_0(x), \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(1, t).\end{aligned}\tag{23}$$

Speist man die gewonnenen Informationen des Ausgangs in (23) ein, so wird die Lösung \hat{z} dieser Gleichung laut Satz 2.4.2 exponentiell gegen die Lösung z von (22) konvergieren.

2.5 Luenberger-Beobachter im closed-loop system

Der große Vorteil des so konzipierten Beobachters ist, dass allein mit der Kenntnis eines Teiles der gesamte Zustand approximiert werden kann. Gerade das Wissen über diesen ist jedoch wichtig bei Stabilisierungsproblemen. Nützlich wäre hier die Verwendung des Luenberger-Beobachters, um allein mit Teilm Informationen in der Lage zu sein, das System zu stabilisieren. Entsprechend versucht man in jedem Zeitschritt zusätzlich eine zweite Gleichung zu lösen, die mithilfe der Aussagen über den Luenberger-Beobachter aus wenig Information ein stabilisierendes Feedback entwirft. So ein System wird auch *closed-loop system* genannt und die zweite Gleichung heißt dabei *Kompensator*. Dass dieses Vorhaben gelingen kann, zeigt folgendes Theorem (siehe [1, Theorem 5.3.3]):

Theorem 2.5.1. Gegeben sei das lineare Kontrollsystem $\Sigma(A, B, C)$, welches exponentiell stabilisierbar und exponentiell entdeckbar sei. Seien außerdem $F \in \mathcal{L}(Z, U)$ und $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$ so konstruiert, dass $A + BF$ und $A + LC$ exponentiell stabile Halbgruppen generieren. Dann stabilisiert $u = F\hat{z}$ das closed-loop system, wobei \hat{z} das Ergebnis des Luenberger-Beobachters unter L ist. Der Kompensator ist demnach gegeben durch:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= (A + LC)\hat{z}(t) + Bu(t) - Ly(t) \\ u(t) &= F\hat{z}(t)\end{aligned}$$

Beweis. siehe [1, Theorem 5.3.3] □

Im Beispiel der behandelten Wärmeleitungsgleichung ergibt sich der Kompensator also aus (23), indem der bisher verwendete Temperatureinfluss u ersetzt wird durch $u(t) = F\hat{z} = -3 \int_0^1 \hat{z}(x, t) dx$. Anschließend wird das so gewonnene $u(t)$ in (22) eingesetzt.

3 Implementierung

Die Theorie gibt zwei zu lösende partielle Differentialgleichungen vor, die auf unterschiedliche Weisen numerisch gelöst werden können. Im Folgenden wird dafür zuerst das Verfahren der finiten Differenzen im vorliegenden Fall vorgestellt. Wie sich zeigen wird, löst dieses die Gleichungen bereits zufriedenstellend. Um jedoch auszuschließen, dass aufgrund der Lösungsmethode bestimmte Effekte auftreten, bzw. nicht auftreten, bietet es sich an, ein zweites Verfahren auszuprobieren und die gewonnenen Werte miteinander zu vergleichen. Hierfür wird das Verfahren der finiten Elemente vorgestellt. Beide Vorgehensweisen sind hauptsächlich der Quelle [3, Kapitel 6], sowie zu geringen Teilen aus Quelle [4, Kapitel 2.4] entnommen.

3.1 Finite Differenzen

3.1.1 Behandlung der Wärmeleitungsgleichung

Betrachtet wird zuerst das System (22) - die Gleichung für (23) geht direkt aus Ersterer hervor.

Es gelte $x_i := ih$, $i = 0, \dots, N$, $t^j := j\tau$, $j = 0, \dots, M$, $h := \frac{1}{N}$ und $\tau := \frac{T}{M}$ bezeichnen die jeweiligen Schrittweiten, z_i^k sei der Näherungswert der exakten Lösung in (x_i, t^k) und u_i^k eine Approximation des Wertes von u in (x_i, t^k) . Der maximal berechnete Zeitpunkt T und die, die Anzahl der Gitterpunkte bestimmenden, Variablen N und M sind dabei entsprechend den Anforderungen zu wählen.

Zu Beginn werden die Ableitungsausdrücke durch Differenzenapproximationen ersetzt, die nur die expliziten Werte der Funktion enthalten. Hierfür seien definiert:

$$\partial^+ z(x) := \frac{z(x+h) - z(x)}{h}, \quad (24)$$

$$\partial^0 z(x) := \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} \quad (25)$$

als Approximationen der ersten Ableitung, sowie für die zweite Ableitung der folgende Ausdruck:

$$\partial^+ \partial^- z(x) := \frac{z(x-h) - 2z(x) + z(x+h)}{h^2}. \quad (26)$$

Die vorliegende erste Ableitung nach der Zeit kann als einfachste Möglichkeit mithilfe der Vorwärtsdifferenz (24) behandelt werden. In x -Richtung dagegen muss mindestens der beschriebene Ausdruck (26) genutzt werden. Da dabei noch offen bleibt, ob zum Zeitpunkt t^k oder t^{k+1} diskretisiert wird, verwendet man den Parameter σ wie folgt:

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \partial_x^+ \partial_x^- (\sigma z_i^{k+1} + (1-\sigma)z_i^k) + u_i^k, \\ i = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, M.$$

Daraus ergibt sich (für die inneren Punkte) das folgende Gleichungssystem:

$$(I + \sigma A_{FD})z^{k+1} = (I - (1 - \sigma)A_{FD})z^k + \tau u^k, \quad (27)$$

mit

$$z^k := \begin{bmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_{N-1}^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad u^k := \begin{bmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1},$$

$$u_i^k := \begin{cases} \frac{u(x_i, t^k)}{2\epsilon} & x_i \in [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon], \sigma \neq \frac{1}{2} \\ \frac{u(x_i, t^k + \frac{\tau}{2})}{2\epsilon} & x_i \in [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon], \sigma = \frac{1}{2}, \\ 0 & x_i \notin [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon] \end{cases}$$

$$A_{FD} := \begin{bmatrix} 2\gamma & -\gamma & & & \\ -\gamma & 2\gamma & -\gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\gamma & 2\gamma & -\gamma \\ & & & -\gamma & 2\gamma \end{bmatrix}, \quad A_{FD} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}, \quad \gamma := \frac{\tau}{h^2}.$$

Zu beachten ist, dass hier die Randbedingungen noch nicht berücksichtigt wurden (siehe dafür Abschnitt 3.1.2). Mit der Wahl $\sigma = 0$, $u_i^k = u(x_i, t^k)$ erhält man das *explizite Euler-Verfahren*, für $\sigma = 1$, $u_i^k = u(x_i, t^k)$ das *implizite*. Wählt man wiederum $\sigma = 0.5$, $u_i^k = u(x_i, t^k + \frac{\tau}{2})$, so nennt man es das *Crank-Nicolson-Verfahren*.

Für die Konvergenz der jeweiligen Verfahren braucht man noch die Voraussetzungen des folgenden Satzes (siehe [3, Satz 6.4]):

Satz 3.1.1. Sei $Q = (0, 1) \times (0, T)$ und $C^{l,k}(\overline{Q})$ entspreche dem Raum der Funktionen $f : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, die in x l -mal stetig differenzierbar und in t k -mal stetig differenzierbar sind.

Es seien $(1 - \sigma)\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ und $z \in C^{4,2}(\overline{Q})$. Dann gilt:

$$\max_{i,k} |z(x_i, t^k) - z_i^k| \leq O(h^2 + \tau).$$

Für das Crank-Nicolson-Verfahren gilt speziell für $\frac{\tau}{h^2} \leq 1$ und $z \in C^{4,3}(\overline{Q})$:

$$\max_{i,k} |z(x_i, t^k) - z_i^k| \leq O(h^2 + \tau^2).$$

Beweis. siehe [3, Satz 6.4] □

3.1.2 Behandlung der Randbedingungen

Abgesehen von der Wahl des Verfahrens für die Differentialgleichung, müssen noch die Randbedingungen beachtet werden. Im Gegensatz zu Dirichletschen Randbedingungen, die im Term u^k der rechten Seite behandelt würden, benötigen die Neumannschen Randbedingungen eine weitere Diskretisierung. Um die potentiell quadratische Konvergenz des Crank-Nicolson-Verfahrens am Rand nicht zu zerstören, wird dazu anstelle der Vorwärtsdifferenz (24) die zentrale Differenz (25) verwendet, die von zweiter Ordnung ist. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\partial_x^0 z_0^k &= \frac{z_1^k - z_{-1}^k}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^k = z_{-1}^k, \quad \text{sowie} \\ \partial_x^0 z_N^k &= \frac{z_{N+1}^k - z_{N-1}^k}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{N+1}^k = z_{N-1}^k,\end{aligned}$$

mit den Hilfspunkten $x_{-1} = -\frac{1}{N}$ und $x_{N+1} = 1 + \frac{1}{N}$. Um die Punkte x_0 und x_N in der Diskretisierungsgleichung zu beachten, wird sie erweitert zu:

$$\begin{aligned}z^k &:= \begin{bmatrix} z_0^k \\ \vdots \\ z_N^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad u^k := \begin{bmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_N^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \\ A_{FD} &:= \begin{bmatrix} 2\gamma & -2\gamma & & & \\ -\gamma & 2\gamma & -\gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\gamma & 2\gamma & -\gamma \\ & & & -2\gamma & 2\gamma \end{bmatrix}, \quad A_{FD} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad \gamma := \frac{\tau}{h^2}.\end{aligned}$$

Die vormals erwähnten Punkte x_{-1} und x_{N+1} gehen in die Matrix A_{FD} durch den doppelten Eintrag der Felder mit den Indizes $(0, 1)$ und $(N + 1, N)$ ein.

3.1.3 Behandlung des Luenberger-Beobachters

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt wurde, kann nun die Diskretisierung mit nur kleinen Änderungen an Gleichung (23) angepasst werden. Hierbei gibt es zwei zu bearbeitende Terme:

$$3 \frac{1}{2\nu} \int_{x_S - \nu}^{x_S + \nu} \hat{z}(x, t) dx \quad (28)$$

$$\text{und } 3y(t). \quad (29)$$

Der Output (29) hängt nur von t ab und wird somit zur rechten Seite u^k addiert. Das Integral (28) wiederum kann als dreifacher Mittelwert über alle diskreten Werte von $\hat{z}(x, t)$ im Bereich $[x_S - \nu, x_S + \nu]$ interpretiert werden. Damit ändert sich die Gleichung (27) zu:

$$(I + \sigma(A_{FD} + B_{FD}))\hat{z}^{k+1} = (I - (1 - \sigma)(A_{FD} + B_{FD}))\hat{z}^k + \tau u^k,$$

mit

$$u_i^k := \begin{cases} 3y(t) + \frac{u(x_i, t^k)}{2\epsilon} & x_i \in [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon], \sigma \neq \frac{1}{2} \\ 3y(t) + \frac{u(x_i, t^k + \frac{\tau}{2})}{2\epsilon} & x_i \in [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon], \sigma = \frac{1}{2} \\ 3y(t) & x_i \notin [x_A - \epsilon, x_A + \epsilon] \end{cases},$$

$$(b_{lm}) = B_{FD} \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1},$$

$$b_{lm} := \begin{cases} \frac{3\tau}{S} & x_l \in [x_S - \nu, x_S + \nu] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad S = \#\{x_l | x_l \in [x_S - \nu, x_S + \nu]\}.$$

Zusammen mit der bereits bekannten Matrix A_{FD} kann man auf diese Weise schließlich beide Differentialgleichungen lösen.

3.2 Finite Elemente

3.2.1 Die vertikale Linienmethode

Definition 3.2.1. Für diesen Abschnitt sei zuerst definiert (siehe [3, Kapitel 3.2, 3.3 und 6.1]):

C_0^∞ : Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger

$W_p^l(\Omega)$: *Sobolev-Raum*; Menge der Funktionen aus $L_p(\Omega)$, die alle verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung l besitzen, wobei diese ebenfalls zu $L_p(\Omega)$ gehören.

$H^l(\Omega)$: $= W_2^l(\Omega)$

$L_2(0, T; X)$: Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen $u : (0, T) \rightarrow X$, X Banachraum

$W_2^1(0, T; V, H)$: Raum aller $u \in L_2(0, T; V)$ mit Ableitungen $u' \in L_2(0, T; V^*)$

V-Elliptizität: Eine Abbildung $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Hilbertraum V heißt *V-elliptisch*, wenn gilt:

$$\exists \gamma > 0 : a(u, u) \geq \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in V$$



Bei der Behandlung der vorliegenden parabolischen Differentialgleichung wird die vertikale Linienmethode angewandt. Konkret wird zuerst bezüglich der räumlichen Variable mittels finiter Elemente diskretisiert und im Anschluss bezüglich der Zeit mittels des impliziten Euler-Verfahrens. Ausgangspunkt für

den ersten Schritt ist die schwache Formulierung des Problems. Um diese zu erhalten, wird

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

zuerst mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ multipliziert und mittels Integration über Ω in die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z(x, t)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

gebracht. Da nur erste Ableitungen von z vorkommen, wird $V = H^1(\Omega)$ gewählt. Dies führt auf die Problemformulierung:

Es sei $V = H^1(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$ und $z_0 \in H$. Gesucht ist $z \in W_2^1(0, T; V, H)$ mit $z(0) = z_0$, sodass

$$\frac{\partial}{\partial t}(z(t), v) + a(z(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in V \quad (30)$$

bei gegebenem $f \in L_2(0, T; V^*)$ und einer beschränkten, V -elliptischen Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ auf $V \times V$ gilt.

Zu (30) gehört ein semidiskretes Analogon, gegeben durch:

Es sei $V_h \subset V$ ein Finite-Elemente-Raum. Gesucht ist $z_h(t) \in V_h$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t}(z_h(t), v_h) + a(z_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \quad (31)$$

bei der Anfangsbedingung $z_h(0) = z_h^0 \in V_h$; z_h^0 ist eine Approximation von z_0 in V_h .

Wie in [3, Kapitel 4.2] soll nun eine Zerlegung von $\Omega = (0, 1)$ durch ein Gitter $\{x_i\}_{i=0}^M$ mit $M + 1$ Gitterpunkten wie folgt beschrieben werden:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = 1, \quad \Omega_i := (x_{i-1}, x_i).$$

Hier seien die Stellen x_i vorerst äquidistant gewählt und somit $h := \frac{1}{M} = h_{i-1} := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, M$. Zudem soll $V_h = \langle \phi_i \rangle$, $i = 0, \dots, M$ gelten, mit

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} & x \in \Omega_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i} & x \in \Omega_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mithilfe von [3, Lemma 4.1] kann man zeigen, dass $\phi_i \in H^1(\Omega)$ und damit $V_h \subset V$. Da per Definition $\{\phi_i | i = 1, \dots, M\}$ eine Basis von V_h ist, kann man z_h darstellen durch:

$$z_h(x, t) = \sum_{i=1}^M z_i(t)\phi_i(x).$$

Setzt man dies in (31) ein und löst anstatt für alle $v_h \in V_h$ analog nur für alle ϕ_i , erhält man:

$$\sum_{i=1}^M z'_i(t) \langle \phi_i, \phi_j \rangle + \sum_{i=1}^M z_i(t) a(\phi_i, \phi_j) = \langle f(t), \phi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, M$$

In Matrixform hat das System dann die folgende Form:

$$D_{FE}(\hat{z}(t))' + A_{FE}\hat{z}(t) = \hat{f}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} D_{FE} &= (d_{ij}), & d_{ij} &= \langle \phi_j, \phi_i \rangle, \\ A_{FE} &= (a_{ij}), & a_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i), \\ \hat{f}(t) &= (f_j(t)), & f_j(t) &= \langle f(t), \phi_j \rangle, & \hat{z}(t) &= (z_i). \end{aligned}$$

Letztlich bleibt noch die Zeitdiskretisierung dieser Gleichung, die, wie bereits angekündigt, durch das implizite Euler-Verfahren realisiert wird. Hierfür sei τ erneut die Schrittweite in der Zeit und Z^k eine Approximation von $z(t)$ zur Zeit $t^k = k\tau$ in V_h . Durch Diskretisieren des Ableitungsausdrucks in (31) entsteht:

$$\left(\frac{Z^{k+1} - Z^k}{\tau}, v_h \right) + a(Z^{k+1}, v_h) = \langle f^{k+1}, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h$$

mit $Z^0 = z_h^0$.

Wie zuvor kann man dies auch in Matrixform schreiben:

$$(D_{FE} + \tau A_{FE})Z^{k+1} = D_{FE}Z^k + \tau \hat{f}^{k+1} \quad (32)$$

mit

$$\hat{f}^k = (f_j^k), \quad f_j^k = \langle f(x_j, k\tau), \phi_j \rangle, \quad \hat{Z}^k = (Z_i^k).$$

Die Linienmethode hat unter anderem den Nutzen, dass hinsichtlich einer Fehleranalyse beide Teilschritte einzeln untersucht werden können. Diese Analyse führt auf folgenden Konvergenzsatz (siehe [3, Satz 6.7]):

Satz 3.2.2. Bei entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen an die exakte Lösung gilt für den Fehler der vorgestellten Diskretisierung:

$$\|z(t^k) - Z^k\| \leq \|z_h^0 - z_0\| + Ch^2(\|z_0\|_2 + \int_0^{t^k} \|z_t\|_2 ds) + \tau \int_0^{t^k} \|z_{tt}\| ds.$$

Beweis. siehe [3, Satz 6.7] □

das alte $a(\cdot, \cdot)$ wie zuvor handhaben und $\hat{b}(\cdot, \cdot)$ nachbehandeln. Durch Ersetzen von z und v mit Ausdrücken der $\{\phi_j\}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M z_i(t) \int_{\Omega} 3 \frac{1}{2\nu} \int_{x_S-\nu}^{x_S+\nu} \phi_i(s) ds \phi_j(x) dx &= \sum_{i=1}^M z_i(t) \hat{b}(\phi_i, \phi_j) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^M z'_i(t) (\phi_i \phi_j) + \sum_{i=1}^M z_i(t) a(\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=1}^M z_i(t) \hat{b}(\phi_i, \phi_j) &= \langle f(t), \phi_j \rangle, \\ \text{bzw. } \sum_{i=1}^M z'_i(t) (\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=1}^M z_i(t) \hat{a}(\phi_i, \phi_j) &= \langle f(t), \phi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

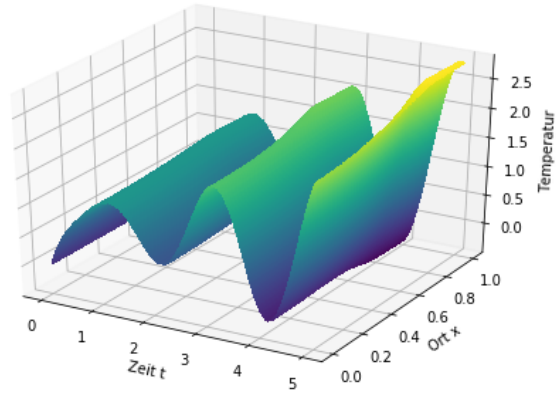
Dies führt dazu, dass man (32) zu

$$\begin{aligned} (D_{FE} + \tau \hat{A}_{FE}) Z^{k+1} &= D_{FE} Z^k + \tau \hat{f}^{k+1}, \quad \hat{A}_{FE} := A_{FE} + B_{FE}, \\ B_{FE} &= (b_{ij}), \quad b_{ij} = \hat{b}(\phi_j, \phi_i) \end{aligned}$$

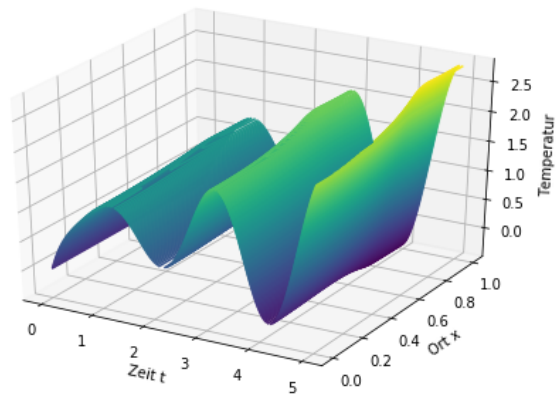
anpassen muss. Erwähnenswert ist noch, dass B_{FD} von der Methode der finiten Differenzen gerade wie B_{FE} nur Einträge in Spalten i hat, sodass x_i in der Nähe von x_S liegt.

3.3 Vergleich der Verfahren

Beide Verfahren erzeugen eine sehr ähnliche Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Von Interesse ist an dieser Stelle jedoch die jeweilige Lösung des Luenberger-Beobachters. Dafür wird bei beiden Methoden dieselbe Anzahl an Gitterpunkten verwendet, sowie $x_A = 0.75$, $x_S = 0.25$, $\epsilon = \nu = 0.05$ und $\sigma = 1$. Abbildung 6 zeigt die beiden Lösungen des Beobachters, wenn für die Wärmeleitungsgleichung $u(t) = t \cdot \sin(t \cdot \pi)$ galt:



(a) Finite Differenzen



(b) Finite Elemente

Abbildung 6: Lösung des Luenberger-Beobachters

Hierbei sind die maximalen Abweichungen der Lösungsfunktionen zu einander in der Größenordnung 10^{-4} . Selbst für diverse andere Konstellationen der oben festgelegten Variablen bleiben die Unterschiede im vernachlässigbaren Rahmen. Damit ist sichergestellt, dass es sich um sinnvolle Ergebnisse handelt.

4 Ergebnisse der numerischen Simulation

Verwendet man bei beiden Herangehensweisen das implizite Euler-Verfahren, unterscheiden sie sich, wie bereits behandelt, nur gering. So wird, wenn nicht anders angegeben, nur das Ergebnis der Methode der finiten Elemente behandelt, und die freien Variablen werden wie folgt gewählt: Gitter mit $M = 100$ Stützstellen, maximaler Zeitpunkt $T = 5$ mit Zeitschrittweite $\tau = 0.02$, $x_A = 0.75$, $\epsilon = 0.05$, $x_S = 0.25$, $\nu = 0.05$, Temperatur $u(t) = 1$, Startwert für die Wärmeleitungsgleichung $z_0(x) = 1$ und Startwert für den Luenberger-Beobachter $\hat{z}_0(x) = 0$. Um einen ersten Eindruck zu bekommen, wie sich der Luenberger-Beobachter in der Praxis verhält, seien hier ein paar Beispiele für verschiedene $u(t)$ aufgeführt. Hierfür wurden, in Bezug auf die Zeit, eine konstante (Abbildung 7), eine quadratische (Abbildung 8) und eine exponentiell verschwindende (Abbildung 9) Temperaturquelle gewählt. Dabei ist der Graph der Wärmeleitungsgleichung durch einen Farbverlauf von Blau (niedrige Temperatur) zu Rot (hohe Temperatur) dargestellt und der zugehörige Luenberger-Beobachter in Grün.

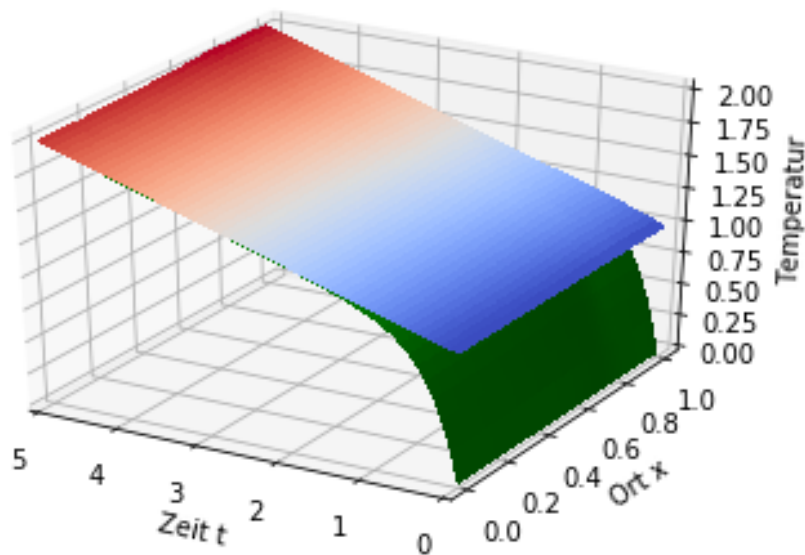


Abbildung 7: Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger-Beobachter für $u(t) = 0.2$

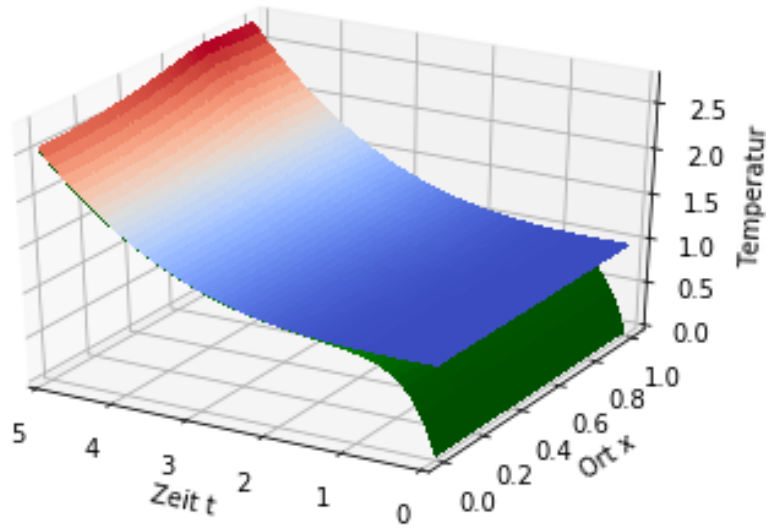


Abbildung 8: Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger-Beobachter für $u(t) = \frac{1}{25}t^2$

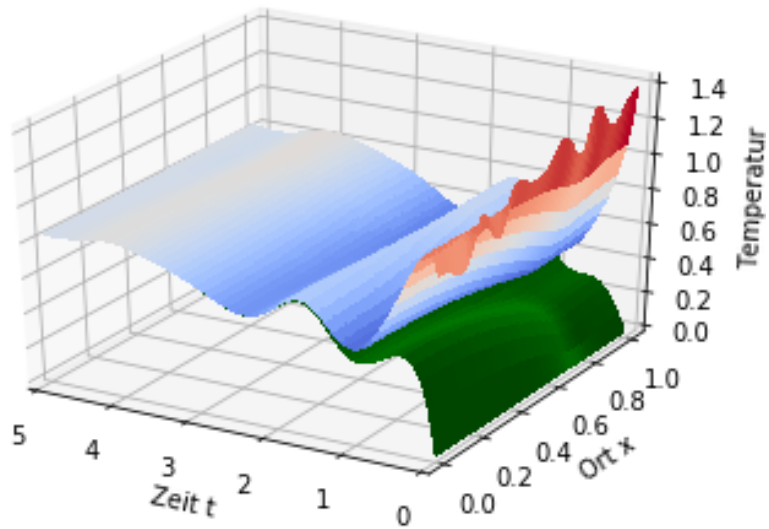


Abbildung 9: Lösung von Wärmeleitungsgleichung und zugehörigem Luenberger-Beobachter für $u(t) = 1.2 \cdot \sin(5 \cdot \cos(t)) \cdot \exp(-0.6 \cdot t)$, $z_0(x) = 1 + 0.4 \cdot x + 0.1 \cdot \sin(2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot x))$

Von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit ist die Konvergenz des Luenberger-Beobachters nach Satz 2.4.2. In den meisten Fällen konvergiert der Fehler wie erwartet exponentiell gegen 0. Ist der Temperaturanstieg jedoch zu hoch, so scheint der Fehler mit zunehmendem Temperaturfluss nicht mehr gegen 0 zu konvergieren. Durch die hohen Temperaturwerte wird der Fehler deutlich größer, was sich jedoch durch die hohen Werte des Zustands relativiert. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, wird von nun an nur noch der normierte Fehler

$$\frac{\|z(t) - \hat{z}(t)\|_{L_2}}{\|z(t)\|_{L_2}}$$

betrachtet. Dieser konvergiert wie in Abbildung 10 für alle Quellterme $u(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Erwähnenswert ist hierbei, dass der blaue Graph den Approximationsfehler für $\kappa = -3$ darstellt (siehe Bemerkung 2.4.3). Orange ist der Plot für $\kappa = -9$ und $\kappa = -50$ ist in rot gezeigt. Selbst für beliebig kleineres κ verbessert sich die Konvergenzgeschwindigkeit noch weiter, wobei jedoch die Matrix \hat{A}_{FE} für sehr kleine Werte von κ fast singulär und somit die Kondition zu hoch wird (dies war erst ab $\kappa < -10^{15}$ der Fall). Zudem kann durch Halbierung von τ eine Halbierung des Fehlers zum Zeitpunkt t erreicht werden. Eine deutliche Verbesserung erzielt man außerdem mit dem Crank-Nicolson-Verfahren.

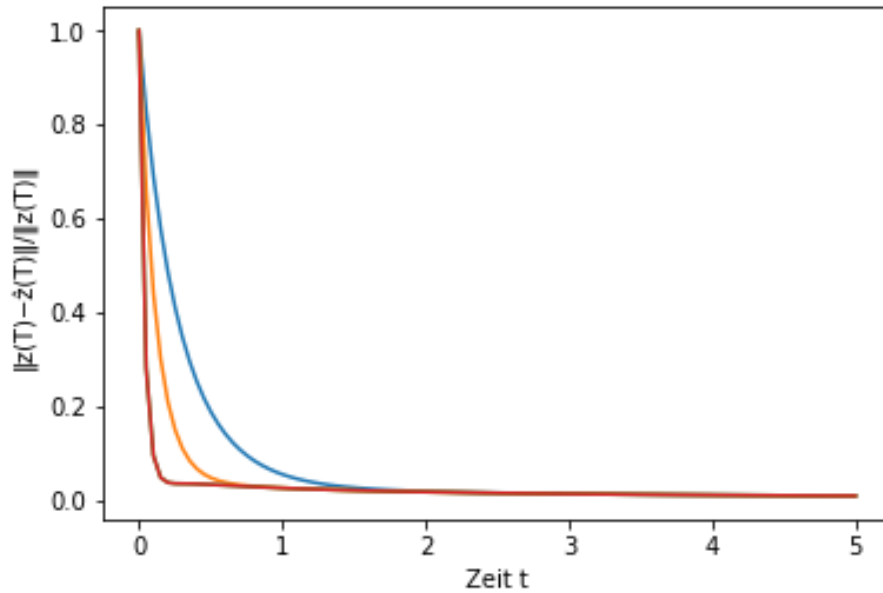


Abbildung 10: Fehler des Luenberger-Beobachters zur Wärmeleitungsgleichung

Aus der Theorie geht hervor, dass der Operator A , definiert in (3), einen Eigenwert gleich 0, keinen positiven Eigenwert und unendlich viele negative Eigenwerte besitzt (siehe Kapitel 2.3). Dementsprechend müsste die Matrix A_{FE} (bzw. A_{FD}) mit $A_{FE}z \approx -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ einen Eigenwert bei 0 und sonst nur positive Eigenwerte haben. Dass dem so ist, zeigt Abbildung 11, wobei nur $M = 25$ Stützstellen verwendet wurden.

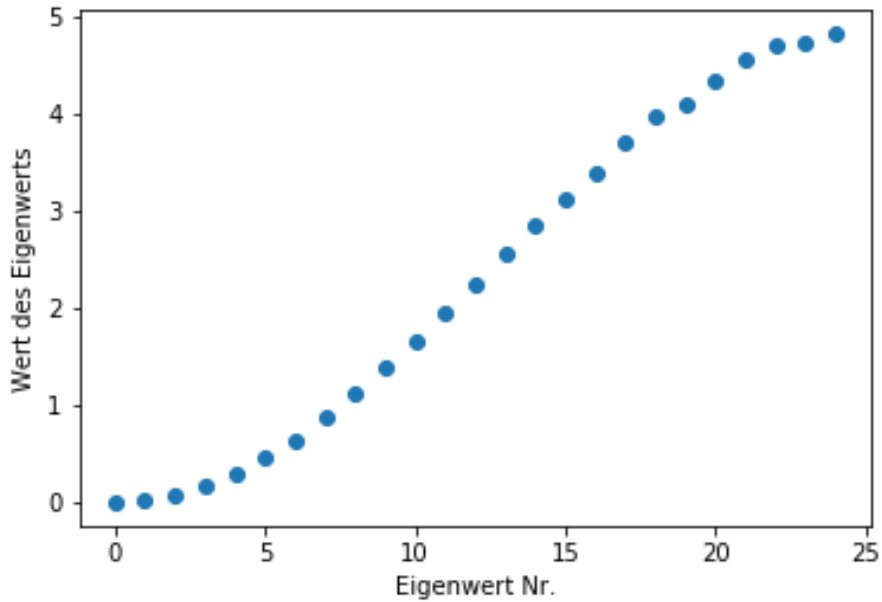


Abbildung 11: Eigenwerte von A_{FE}

Das Anpassen von A_{FE} für den Luenberger-Beobachter führt dazu, dass ausnahmslos alle Eigenwerte positiv sind. Es ergibt sich jedoch augenscheinlich dasselbe Bild wie in Abbildung 11, weswegen es nicht noch einmal gezeigt wird. Stattdessen sei in Abbildung 12 die Differenz der Eigenwerte im Betrag betrachtet. Es zeigt sich, dass \hat{A}_{FE} (die für den Luenberger-Beobachter aktualisierte Version von A_{FE}) hauptsächlich den Null-Eigenwert beeinflusst und die Übrigen größtenteils unverändert lässt. Weiterhin bewirkt eine Wahl von $\kappa \ll \lambda_2$, dass auch der Eigenwert λ_2 ähnlich stark wie λ_1 beeinflusst wird, usw. für $\kappa \ll \lambda_n$.

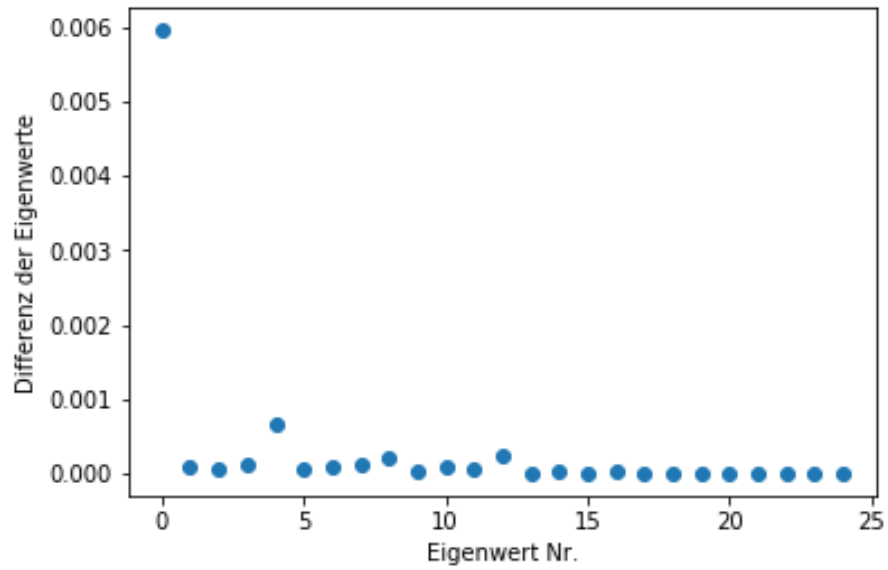


Abbildung 12: Differenz der EW von A_{FE} von Wärmeleitungsgleichung zu Luenberger-Beobachter

Aus den letzten beiden Beobachtungen ergibt sich, dass sich die Ergebnisse von Kapitel 2.3 auch für $\beta < \lambda_1$ fortsetzen, was jedoch noch formal zu zeigen ist. Daher wird der Fall $\kappa < \lambda_1$ im Folgenden nicht weiter behandelt. Es wird ab sofort, wenn nicht anders angegeben, $\kappa = -9$ verwendet.

Bevor weitere Größen analysiert werden, ist es an dieser Stelle wichtig, den Bereich der Beobachtung $[x_S - \nu, x_S + \nu]$ zu untersuchen. Dazu wird der Fehler der beiden Lösungen zum Zeitpunkt T für verschiedene ν betrachtet. Allerdings sind derartige Abbildungen im Allgemeinen aufgrund von vielen Sprüngen nicht verwertbar. Diese sind wohl auf die Lage der Gitterpunkte im Bezug auf den Beobachtungsbereich zurückzuführen. Wählt man die Gitterpunkte allerdings derart, dass immer ein Punkt auf $x_S - \nu$ und einer auf $x_S + \nu$ liegt, so ergibt sich Abbildung 13.

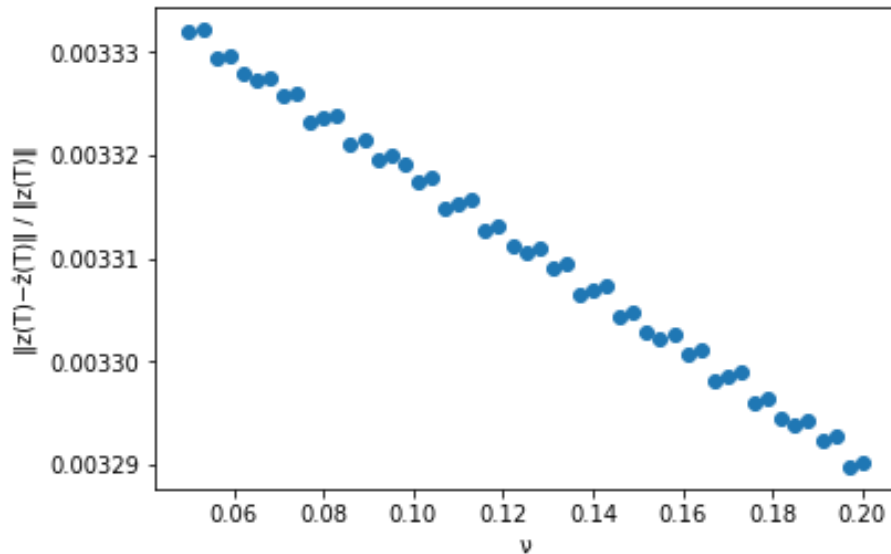


Abbildung 13: Fehler des Luenberger-Beobachters für verschiedene ν bei an ν angepassten Gitterpunkten

Ersichtlich ist ein linearer Abwärtstrend für größer werdendes ν . Da kein äquidistantes Gitter mehr verwendet wurde, schwankt die Genauigkeit in entsprechenden Bereichen minimal, wodurch auch die geringen Abweichungen von einer geraden Linie zu erklären sind. Weil sich dieser Effekt auch auf die kommenden Ergebnisse auswirken würde, wird eine derartige Wahl der Gitterpunkte von nun an immer verwendet. Zwar würden jene Ergebnisse nur minimal gestört werden, es entstehen jedoch erneut Sprünge, die eine Interpretation erschweren. Letztendlich ist festzuhalten, dass eine Vergrößerung von ν zwar eine lineare Verbesserung des Fehlers nach sich zieht. Dies geschieht jedoch in einem derart geringen Maß, dass die Größe des Bereichs um x_S zu vernachlässigen ist.

Zur Analyse dieses Intervalls gehört auch das Verändern der Variable x_S . In Abbildung 14 wird der normierte Fehler für verschiedene $x_S \in [\nu, 1 - \nu]$ betrachtet.

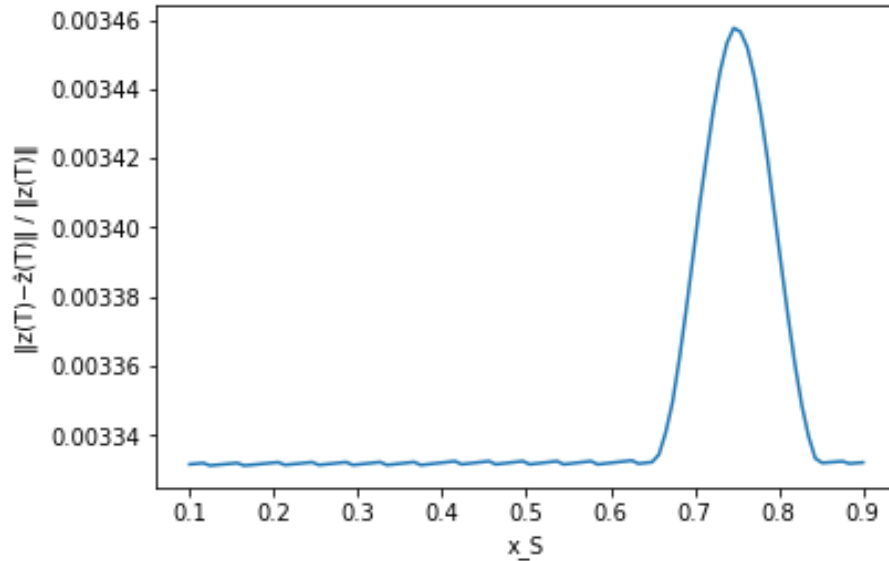


Abbildung 14: Fehler bei verschobenem Sensor x_S

Ersichtlich ist, dass nur für x_S nahe bei x_A größere Fehler auftreten. Auch für andere Werte von x_A ergibt sich das entsprechende Bild. Der Unterschied liegt jedoch in einem vernachlässigbaren Rahmen. Bei der Untersuchung der konkreten Werte können bei frei gewähltem t höchstens Schwankungen im Bereich 10^{-4} beobachtet werden. Dementsprechend wird im Folgenden davon ausgegangen, dass der Fehler $\frac{\|z(t)-\hat{z}(t)\|_{L_2}}{\|z(t)\|_{L_2}}$ nicht von der Lage der Punkte x_S und x_A abhängt.

Die Untersuchung des Bereichs um x_A bedarf keiner weiteren Abbildung, da die Veränderung von x_A gerade eben mitbehandelt wurde und eine Änderung von ϵ keine nennenswerte Änderung nach sich zieht. Bei der Wahl der Startwerte ist der Luenberger-Beobachter keinen größeren Schwankungen ausgesetzt. Lediglich die Zeit, die benötigt wird, bis der Fehler annähernd 0 ist, erhöht sich mit dem Abstand der beiden Startwerte, was aber zu erwarten ist.

Schlussendlich bleibt das angesprochene Stabilisierungsproblem (Kapitel 2.5) zu analysieren. Entsprechend den vorherigen Überlegungen wird das Gitter wieder an den Sensor angepasst. Erwartungsgemäß sollte $\|z(t)\|_{L_2}$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

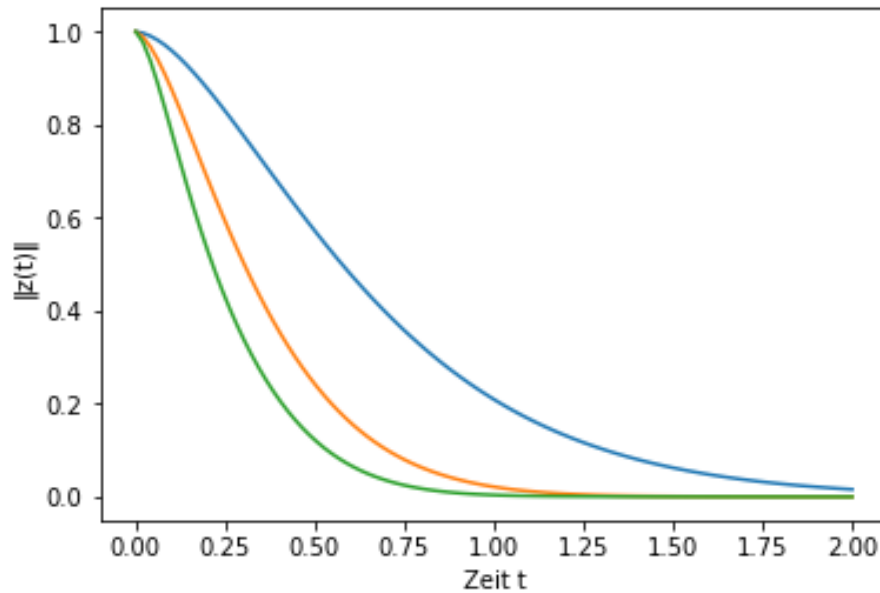


Abbildung 15: $\|z(t)\|$ im closed-loop system für verschiedene Werte von κ

Abbildung 15 zeigt die Kurven für $\kappa = -3$ (blau), $\kappa = -6$ (orange) und $\kappa = -9$ (grün). Ab $\kappa < \lambda_1$ wird, im Gegensatz zu den Beobachtungen beim Luenberger-Beobachter, allgemein keine wesentliche Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit mehr erzielt. Die freie Wahl von x_S , ν , x_A und ϵ ist jedoch auch hierbei möglich. Wählt man dementsprechend $\kappa = -9$, $z_0(x) = 1 + 0.6 \cdot (1 - x) + 0.1 \cdot \sin(2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot x))$ und $\hat{z}_0(x) = 1.2$, so ergibt sich das folgende Bild:

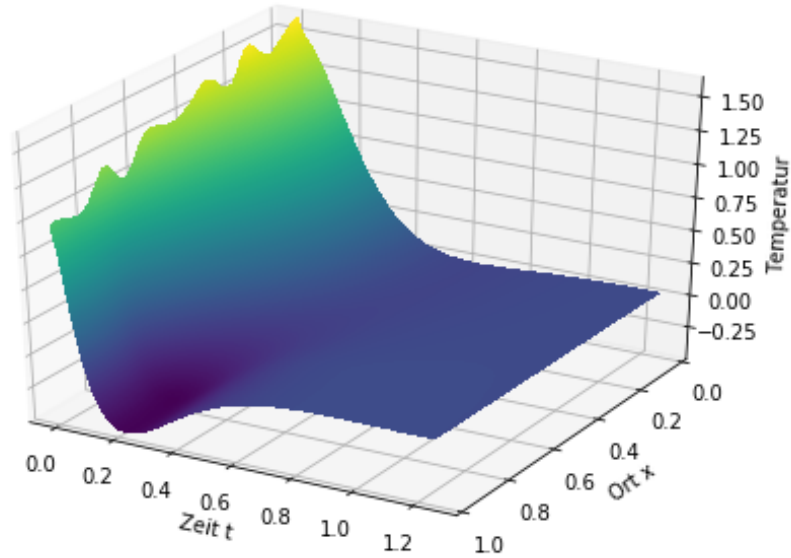


Abbildung 16: Stabilisierungsproblem

Zusammengefasst ermöglicht der Luenberger-Beobachter für einen beliebig gesetzten Sensor x_S und Aktuator x_A die Rekonstruktion des Gesamtzustandes aus den gemessenen Daten trotz Unkenntnis des Anfangszustands. Dabei ist die Konvergenzgeschwindigkeit durch die Wahl von κ fast beliebig anpassbar. Ebenso sollte die Lage der Gitterpunkte, wie zuvor beschrieben, beachtet werden.

Das durch den Luenberger-Beobachter realisierte closed-loop system ist für beliebig gesetzte x_S und x_A mit beliebigen Intervallgrößen ν und ϵ eine Möglichkeit, die Wärmeleitungsgleichung mit Eingang und Ausgang zu stabilisieren. Die Konvergenzgeschwindigkeit gegen 0 wird wieder maßgeblich durch $\kappa \in]0, -\pi^2[$ bestimmt, wobei für $\kappa \rightarrow -\pi^2$ die besten Ergebnisse erzielt werden.

Literatur

- [1] R.F.Curtain, H.J.Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional-Systems Theory*; Springer-Verlag, 1995
- [2] L.Grüne, *Mathematische Kontrolltheorie*, Vorlesungsskript, 5. Auflage; Universität Bayreuth, 2018
- [3] C.Großmann, H.-G.Roos, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, 2. Auflage; Teubner, Stuttgart, 1994
- [4] M.Bebendorf, *Numerische Methoden für Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript; Universität Bayreuth, 2019
- [5] D.G.Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models and Applications*; John Wiley & Sons, 1979
- [6] K.-J.Engel, R.Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*; Springer, 2000
- [7] E.Peschl, *Funktionentheorie*, 2. Auflage; Bibliographisches Institut AG, Zürich, 1983

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift