

Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme

Lars Grüne
Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Bayreuth
95440 Bayreuth
lars.gruene@uni-bayreuth.de
www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/

Vorlesungsskript
Wintersemester 2002/2003

Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2002/2003 an der Universität Bayreuth gehalten habe.

Da sich die Vorlesung an Studentinnen und Studenten ab dem 3. Semester richtete, wurde im Allgemeinen auf eine elementare Darstellung des Stoffes Wert gelegt. In einigen Passagen dieses Skriptes wurden die Bücher [1, 2, 3] — auch ohne besonderen Hinweis im Text — benutzt.

Eine elektronische Version dieses Skripts sowie die zu dieser Vorlesung gehörigen Übungsaufgaben und ihre Lösungen als MAPLE-Worksheets finden sich im WWW auf der Seite <http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/> unter dem Link “Lehrveranstaltungen”.

Bayreuth, Februar 2003

LARS GRÜNE

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen	1
1.1 Definition	1
1.2 Anfangswertprobleme	3
2 Die Matrix-Exponentialfunktion	5
2.1 Definition	5
2.2 Eigenschaften	6
2.3 Jordan'sche Normalform	8
3 Eigenschaften der Lösungen	11
3.1 Existenz- und Eindeutigkeit	11
3.2 Weitere Eigenschaften	13
4 Stabilität	17
4.1 Ein Beispiel	17
4.2 Definition	20
4.3 Stabilität linearer homogener Differentialgleichungen	21
5 Stabilität und Störung	29
5.1 Stabile Matrizen	29
5.2 Exponentiell stabile Matrizen	30
6 Ljapunov Funktionen	35
6.1 Quadratische Ljapunov Funktionen	35
6.2 Bilineare Ljapunov Funktionen	37

7	Linearisierung	43
7.1	Die linearisierte Differentialgleichung	43
7.2	Approximation der Lösungstrajektorien	44
7.3	Stabilität und Linearisierung	46
8	Lineare Kontrollsysteme	51
8.1	Zustandsfeedback	52
8.2	Linearisierung von Kontrollsystemen	54
9	Lösung des Stabilisierungsproblems	57
9.1	Kontrollierbarkeit	57
9.2	Das Charakteristische Polynom	58
9.3	Koordinatentransformationen	58
9.4	Stabilisierung mit eindimensionaler Kontrolle	61
9.5	Stabilisierung mit mehrdimensionaler Kontrolle	63
	Literaturverzeichnis	67
	Index	68

Kapitel 1

Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir die grundlegenden Systeme definieren, mit denen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen wollen. Am Beispiel der eindimensionalen autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen werden wir einen ersten einfachen Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen, den wir später auf höhere Dimensionen verallgemeinern werden.

1.1 Definition

Eine gewöhnliche Differentialgleichung setzt die Ableitung einer Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach ihrem (eindimensionalen) Argument mit der Funktion selbst in Beziehung. Formal beschreibt dies die folgende Definition.

Definition 1.1 Ein *gewöhnliche Differentialgleichung* (DGL) im \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist und *Vektorfeld* genannt wird.

Eine *Lösung* von (1.1) ist eine stetig differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die (1.1) erfüllt. \square

Einige Anmerkungen zur Notation bzw. Sprechweise:

- Die unabhängige Variable t werden wir üblicherweise als Zeit interpretieren, obwohl (abhängig vom modellierten Sachverhalt) gelegentlich auch andere Interpretationen möglich sind.
- Statt $\frac{d}{dt}x(t)$ schreiben wir oft kurz $\dot{x}(t)$.
- Die Lösungsfunktion $x(t)$ nennen wir auch *Lösungskurve* oder *(Lösungs-)Trajektorie*.

Die folgende Definition beschreibt die Klasse von Differentialgleichungen, die wir im ersten Teil dieser Vorlesung genauer untersuchen wollen.

Definition 1.2 Eine gewöhnliche Differentialgleichung (1.1) heißt *lineare autonome gewöhnliche Differentialgleichung*, falls f nicht von t abhängt und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\alpha(x + y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y).$$

In diesem Fall ist aus der linearen Algebra bekannt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$f(x) = Ax.$$

□

Man spricht von einem *System* linearer DGL, falls $n > 1$.

In diesem ersten Kapitel wollen wir zunächst den Fall $n = 1$ genauer betrachten. In diesem Fall reduziert sich (1.1) zu

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \tag{1.2}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Trotz ihrer Einfachheit kann diese DGL zur Beschreibung einfacher realer Phänomene verwendet werden.

Beispiel 1.3 (i) **Radioaktiver Zerfall:** Sei x die Masse einer radioaktiven Substanz. Nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz ist die Abnahme der radioaktiven Substanz proportional zu ihrer Menge, also

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \text{ für ein } \lambda < 0.$$

(ii) **Populationswachstum:** Sei x die „Menge“ einer Population, gemessen in einer reellen Größe (z.B. Biomasse). Setzt man voraus, dass der Population unbegrenzte Nahrung und unbegrenzter Lebensraum zur Verfügung stehen und keine natürlichen Feinde existieren, so ist das Wachstum der Population proportional zur vorhandenen Menge, also

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \text{ für ein } \lambda > 0.$$

□

Bemerkung 1.4 Die zwei Beispiele zeigen auch einen interessanten Aspekt der mathematischen Modellbildung: Während (i) das reale Phänomen recht exakt beschreibt, ist (ii) nur unter stark vereinfachenden Annahmen gültig. □

Das folgende Lemma beschreibt, wie Lösungsfunktionen von (1.2) aussehen.

Lemma 1.5 Für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ löst die Funktion

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

die DGL (1.2).

Beweis: Es gilt

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}Ce^{\lambda t} = C\lambda e^{\lambda t} = \lambda x(t)$$

und damit erfüllt $x(t)$ die DGL (1.2). \square

Dieses Lemma zeigt, dass es unendlich viele Lösungen gibt, die durch die reelle Konstante C parametrisiert sind.

1.2 Anfangswertprobleme

Um eindeutige Lösungen zu erhalten, müssen wir eine weitere Bedingung festlegen. Dies geschieht in der folgenden Definition, die wir für allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen der Form (1.1) formulieren.

Definition 1.6 Ein *Anfangswertproblem* für die gewöhnliche Differentialgleichung (1.1) besteht darin, zu gegebenem $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösungsfunktion $x(t)$ zu finden, die (1.1) erfüllt und für die darüberhinaus die Gleichung

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

gilt. \square

Notation und Sprechweisen:

- Für die Lösung $x(t)$, die (1.1) und (1.3) erfüllt, schreiben wir $x(t; t_0, x_0)$. Im Spezialfall $t_0 = 0$ schreiben wir kurz $x(t; x_0)$.
- Die Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir als *Anfangszeit*, den Wert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ als *Anfangswert*. Das Paar $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nennen wir *Anfangsbedingung*.

Zurück zu unserer speziellen DGL (1.2). Hier gilt der folgende Satz.

Satz 1.7 Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung (1.2) für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es für jede Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x(t; t_0, x_0)$ des Anfangswertproblems (1.2), (1.3). Diese ist gegeben durch

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t}.$$

Beweis: Offenbar gilt $x(t; t_0, x_0) = Ce^{\lambda t}$ für $C = x_0 e^{-\lambda t_0}$. Also wird nach Lemma 1.5 die DGL (1.2) gelöst. Außerdem gilt

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0 e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t_0} = x_0 e^{\lambda t_0 - \lambda t_0} = x_0 e^0 = x_0,$$

womit $x(t; t_0, x_0)$ die Gleichung (1.3) erfüllt. Also ist $x(t; t_0, x_0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (1.2), (1.3).

Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Sei dazu $y(t)$ eine beliebige Lösung von (1.2), (1.3) für eine Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $e^{-\lambda(t-t_0)}y(t)$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{-\lambda(t-t_0)}y(t) &= -\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}y(t) + e^{-\lambda(t-t_0)} \underbrace{\frac{d}{dt}y(t)}_{=\lambda y(t)} \\ &= -\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}y(t) + \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}y(t) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $e^{-\lambda(t-t_0)}y(t)$ konstant in t , d.h. es existiert ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $e^{-\lambda(t-t_0)}y(t) = \beta$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = x_0$ folgt

$$\beta = e^{-\lambda(t_0-t_0)}y(t_0) = e^0 y(t_0) = x_0,$$

also $\beta = x_0$ und damit

$$y(t) = e^{\lambda(t-t_0)}x_0 = e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t} x(t; t_0, x_0).$$

Jede Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems stimmt also mit $x(t; t_0, x_0)$ aus der Behauptung überein, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. \square

Unser Ziel im nächsten Kapitel ist es, dieses Resultat auf höhere Dimensionen $n > 1$ zu verallgemeinern. Im Wesentlichen müssen wir dafür die Exponentialfunktion e^λ auf matrixwertige Argumente $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verallgemeinern, d.h. wir müssen eine sinnvolle Definition für e^A , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ finden.

Kapitel 2

Die Matrix–Exponentialfunktion

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass sich die Lösungen der eindimensionalen linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ durch die Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ vollständig beschreiben lassen. Um ein analoges Resultat für höhere Dimensionen zu erhalten, müssen wir diese Funktion auf matrixwertige Argumente verallgemeinern. Obwohl wir hier nur Differentialgleichungen mit reellen Matrizen betrachten wollen, wird es sich als nützlich herausstellen, die Matrix–Exponentialfunktion für Matrizen über den komplexen Zahlen \mathbb{C} zu definieren.

2.1 Definition

Zunächst wiederholen wir einige grundlegende Begriffe. Für eine komplexe Zahl $c = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, definieren wir die konjugiert komplexe Zahl $\bar{c} = a - ib$ und den Betrag als $|c| = \sqrt{c\bar{c}}$. Für einen (Spalten–) Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

die euklidische Norm. Für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

verwenden wir die zugehörige induzierte Matrixnorm

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Beachte, dass $|a_{i,j}| \leq \|A\|$ für $i, j = 1, \dots, n$ gilt und $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, wobei A^k die k -fache Matrixmultiplikation von A mit sich selbst bezeichnet. Mit „Id“ bezeichnen wir die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$ und wir verwenden die Konvention $A^0 = \text{Id}$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt Blockdiagonalmatrix, falls quadratische Matrizen A_1, \dots, A_d existieren, so dass

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d) := \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_d \end{pmatrix}$$

gilt.

Wir erinnern uns an die Reihendarstellung

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!}$$

der Exponentialfunktion, die aus der Analysis bekannt ist. Diese Darstellung verwenden wir zur Definition der Matrix-Exponentialfunktion.

Definition 2.1 Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

□

Die Summe in dieser Definition ist hierbei komponentenweise zu verstehen: Schreiben wir

$$A^k = B_k = \begin{pmatrix} \beta_{k;1,1} & \cdots & \beta_{k;1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k;1,n} & \cdots & \beta_{k;n,n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1}(t) & \cdots & \varepsilon_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{1,n}(t) & \cdots & \varepsilon_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

so gilt

$$\varepsilon_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k;i,j}. \quad (2.1)$$

Aus der Ungleichung $|\beta_{k;i,j}| \leq \|A\|^k$ ergibt sich somit $|\varepsilon_{i,j}(t)| \leq e^{\|A\|t}$. Darüberhinaus folgt, dass die Reihe (2.1) für alle $i, j = 1, \dots, n$ konvergent (sogar absolut konvergent) für alle $t \in \mathbb{R}$ und gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall $[-T, T]$ für $T \in \mathbb{R}$ ist, weswegen wir diese Reihe (und damit auch die Reihe aus Definition 2.1) gliedweise differenzieren, multiplizieren etc. dürfen. Dies nutzen wir im nun folgenden Abschnitt aus, um einige wesentliche Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion zu beweisen.

2.2 Eigenschaften

Wir beginnen mit der Eigenschaft, die wesentlich dafür ist, dass wir e^{At} zur Bestimmung von Lösungen linearer Differentialgleichungen verwenden können.

Satz 2.2 Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Matrix-Exponentialfunktion e^{At} stetig differenzierbar in t und es gilt

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A.$$

Beweis: Wie oben beobachtet, dürfen wir die Reihe gliedweise multiplizieren und differenzieren. Durch gliedweise Multiplikation mit A sieht man sofort, dass $A e^{At} = e^{At} A$ gilt. Es bleibt also die erste Gleichung zu zeigen. Aus (2.1) folgt durch gliedweises Differenzieren

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} \beta_{k;i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \beta_{k;i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k+1;i,j}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \varepsilon_{1,1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} \varepsilon_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} \varepsilon_{n,1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} \varepsilon_{n,n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k+1;1,1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k+1;1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k+1;n,1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \beta_{k+1;n,n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{At}. \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma fasst einige weitere Eigenschaften von e^{At} zusammen.

Lemma 2.3 Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

- (i) $e^{A0} = \text{Id}$
- (ii) $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$
- (iii) die Matrix e^{At} ist invertierbar mit $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- (iv) für jede invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $e^{(C^{-1}AC)t} = C^{-1} e^{At} C$
- (v) für Blockdiagonalmatrizen gilt $e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_d)t} = \text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_d t})$.

Beweis: (i) Dies folgt direkt aus der Reihendarstellung wegen $A^0 = \text{Id}$.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann ergeben für $j = 0, \dots, k$ die Produkte der Summanden aus den Reihendarstellungen von e^{At} für j und e^{As} für $k-j$ gerade die Summanden der Produktreihe von $e^{At} e^{As}$ für k . Mit dem binomischen Lehrsatz ergibt sich nun

$$\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} A^j \frac{s^{k-j}}{(k-j)!} A^{k-j} = A^k \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} \frac{s^{k-j}}{(k-j)!} = A^k \frac{(t+s)^k}{k!},$$

also der Summand für A^k in der Reihe für $e^{A(t+s)}$. Damit folgt die Behauptung.

(iii) Aus (ii) und (i) folgt für $s = -t$ die Gleichung

$$e^{At} e^{-At} = e^{A0} = \text{Id}$$

und daraus die Behauptung.

(iv) Diese Gleichung folgt durch gliedweises Multiplizieren der Reihe aus der Gleichung

$$(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC.$$

(v) Diese Eigenschaft folgt aus der Gleichung $\text{diag}(A_1, \dots, A_d)^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_d^k)$. \square

Mit diesem Lemma können wir den folgenden „Eindeutigkeitssatz“ formulieren.

Satz 2.4 Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit den zwei Eigenschaften

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t) \quad \text{und} \quad F(0) = \text{Id}.$$

Dann gilt $F(t) = e^{At}$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 1.7, wobei wir λ durch A und t_0 durch 0 ersetzen: Betrachte die Funktion $e^{-At}F(t)$. Diese erfüllt

$$\frac{d}{dt}e^{-At}F(t) = -e^{At}AF(t) + e^{At}AF(t) = 0,$$

demnach ist $e^{-At}F(t)$ konstant in t , und wegen $e^{-A0}F(0) = \text{Id}$ folgt

$$e^{-At}F(t) = \text{Id}.$$

Multiplikation von links mit e^{At} liefert die Behauptung. \square

2.3 Jordan'sche Normalform

Bekanntlich definiert eine invertierbare Matrix C mittels $y = C^{-1}x$ eine Koordinatentransformation im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n , wobei die Spalten von C gerade die neuen Basisvektoren dargestellt in der alten Basis sind, oder, äquivalent dazu, die Spalten von C^{-1} gerade die alten Basisvektoren dargestellt in der neuen Basis sind. Eine lineare Abbildung, die in der alten Basis durch eine Matrix A repräsentiert wird, wird dann in der neuen Basis durch die Matrix $B = C^{-1}AC$ dargestellt. Die Eigenschaft (v) aus Lemma 2.3 zeigt mit anderen Worten, dass man den Koordinatenwechsel und die Auswertung von e^{At} vertauschen kann.

Wir werden dies ausnutzen, um e^{At} leicht berechnen zu können. Nehmen wir an, dass C einen Koordinatenwechsel beschreibt, so dass $B = C^{-1}AC$ in den neuen Koordinaten eine „schöne“ Gestalt annimmt, in der e^{Bt} leicht zu berechnen ist. Mittels $e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1}$ können wir dann die gewünschte Matrixexponentialfunktion leichter bestimmen.

Wir wollen dieses Vorgehen zunächst an einem Beispiel erläutern.

Beispiel 2.5 Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Schon bei diesem einfachen zweidimensionalen Beispiel stellt man fest, dass eine direkte Berechnung von e^{At} über die Reihendarstellung aus Definition 2.1 recht aufwändig ist.

Man kann aber ausnutzen, dass für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

die Gleichung $C^{-1}AC = \text{diag}((1), (2))$ gilt. Die 1×1 Matrizen (1) und (2) können hierbei als reelle Zahlen aufgefasst werden; für diese ist die Matrixexponentialfunktion natürlich nichts anderes als die übliche reelle Exponentialfunktion und mit Lemma 2.3(v) ergibt sich

$$e^{\text{diag}(1,2)t} = \text{diag}(e^t, e^{2t}).$$

Zurücktransformiert erhalten wir so

$$e^{At} = C \text{diag}(e^t, e^{2t}) C^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 3e^{2t} - 3e^t & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

□

Dieses Verfahren lässt sich auch anwenden, wenn die gegebene Matrix nicht diagonalisierbar ist. Wir erinnern dazu an den folgenden Satz aus der linearen Algebra.

Satz 2.6 (Jordan'sche Normalform) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Matrix. Dann gibt es eine (möglicherweise komplexe) Koordinatentransformationsmatrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass

$$C^{-1}AC = \text{diag}(J_1, \dots, J_d)$$

gilt, wobei die Matrizen J_l , $l = 1, \dots, d$, sogenannte Jordan-Blöcke der Form

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_l & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

sind. Die Werte $\lambda_l \in \mathbb{C}$ sind dabei die Eigenwerte der Matrix A .

Aus Lemma 2.3(iv) und (v) erhalten wir somit leicht das folgende Korollar.

Korollar 2.7 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$e^{At} = C \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_d t}) C^{-1}$$

für die Jordan-Darstellung von A aus Satz 2.6.

Um Korollar 2.7 zur Berechnung von e^{At} auszunutzen, müssen wir nur noch klären, wie $e^{J_l t}$ aussieht. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 2.8 Für einen Jordan-Block $J_l \in \mathbb{C}^{m \times m}$ der Form (2.2) gilt

$$e^{J_l t} = e^{\lambda_l t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Wegen Satz 2.4 reicht es, nachprüfen, dass für

$$F(t) = e^{\lambda_l t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\frac{d}{dt} F(t) = J_l F(t)$$

gilt. Wegen $\frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= \lambda_l F(t) + e^{\lambda_l t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_l & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_l & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix} F(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} F(t) = J_l F(t), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Die Darstellung von e^{At} mittels der Jordan'schen Normalform ist nicht nur zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion nützlich. Wie wir später sehen werden, ist sie auch ein wesentliches Hilfsmittel, um die Stabilität der Lösungen linearer Differentialgleichungen zu untersuchen.

Kapitel 3

Eigenschaften der Lösungen

In diesem Kapitel wollen wir die Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen und einige Ihrer Eigenschaften untersuchen. Wir beschäftigen uns zunächst mit Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.1)$$

sowie dem zugehörigen Anfangswertproblem (3.1), (1.3).

3.1 Existenz– und Eindeutigkeit

Zunächst zeigen wir, dass wir mittels der Matrix–Exponentialfunktion e^{At} die Lösung des Anfangswertproblems (3.1), (1.3) eindeutig beschreiben können.

Satz 3.1 Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung (3.1) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gibt es für jede Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x(t; t_0, x_0)$ des Anfangswertproblems (3.1), (1.3). Diese ist gegeben durch

$$x(t, t_0, x_0) = e^{-At_0} e^{At} x_0.$$

Beweis: Aus Satz 2.2 erhalten wir

$$\frac{d}{dt} x(t; t_0, x_0) = \frac{d}{dt} e^{-At_0} e^{At} x_0 = A e^{-At_0} e^{At} x_0 = Ax(t; t_0, x_0).$$

Aus Lemma 2.3(iv) folgt außerdem

$$x(t_0; t_0, x_0) = e^{-At_0} e^{At_0} x_0 = \text{Id} x_0 = x_0,$$

also ist $x(t; t_0, x_0)$ tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (3.1), (1.3).

Zum Beweis der Eindeutigkeit verfahren wir wie im Beweis von Satz 2.4: Sei $y(t)$ eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung (t_0, x_0) . Aus der Produktregel ergibt sich

$$\frac{d}{dt} e^{-A(t-t_0)} y(t) = -e^{-A(t-t_0)} Ay(t) + e^{-A(t-t_0)} Ay(t) = 0,$$

demnach ist $e^{-A(t-t_0)}y(t)$ konstant in t , und wegen $e^{-A(t_0-t_0)}y(t_0) = x_0$ folgt also

$$e^{-A(t-t_0)}y(t_0) = x_0.$$

Multiplikation von links mit $e^{A(t-t_0)}$ liefert dann $y(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = x(t; t_0, x_0)$ und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.2 Die Matrix $\Phi(t) = e^{At}$ wird auch *Fundamentalmatrix* der Gleichung (3.1) genannt, da sich aus ihr mittels

$$x(t; t_0, x_0) = \Phi(-t_0)\Phi(t_0)x_0$$

alle Lösungen der Gleichung (3.1) berechnen lassen. Aus Satz 2.4 wissen wir bereits, dass $\Phi(t)$ die eindeutige Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(0) = \text{Id}$$

ist. \square

Da es für spätere Anwendungen nützlich sein wird, wollen wir die Klasse von Differentialgleichungen (3.1) etwas verallgemeinern. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die *inhomogene* lineare gewöhnliche Differentialgleichung gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t). \quad (3.2)$$

Beachte, dass die Gleichung (3.1) (die auch *homogen* genannt wird) ein Spezialfall von (3.2) für $g \equiv 0$ ist.

Der folgende Satz beschreibt, wie die Lösungen eines Anfangswertproblems (3.2), (1.3) aussehen. Hierbei verwenden wir die übliche Konvention

$$\int_{t^2}^{t^1} h(s)ds = - \int_{t^1}^{t^2} h(s)ds$$

für Zeiten $t^1, t^2 \in \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Satz 3.3 Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung (3.2) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gibt es für jede Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x(t; t_0, x_0)$ des Anfangswertproblems (3.1), (1.3). Diese ist gegeben durch

$$x(t, t_0, x_0) = e^{-At_0} e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s) ds.$$

Beweis: Beachte, dass für eine beliebige stetige und im ersten Argument stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t h(t, s) ds = h(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} h(t, s) ds.$$

gilt. Mit $h(t, s) = e^{A(t-s)}g(s)$ folgt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t, t_0, x_0) &= \frac{d}{dt}e^{-At_0} e^{At}x_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= Ae^{-At_0} e^{At}x_0 + e^{A(t-t)}g(t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= Ae^{-At_0} e^{At}x_0 + e^{A(t-t)}g(t) + \int_{t_0}^t Ae^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= A \left(e^{-At_0} e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(s)ds \right) + g(t) = Ax(t; t_0, x_0) + g(t), \end{aligned}$$

womit $x(t; t_0, x_0)$ also die Differentialgleichung (3.2) erfüllt. Wegen

$$e^{-At_0} e^{At_0}x_0 = x_0 \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t_0} e^{A(t-s)}g(s)ds = 0$$

ist offenbar auch die Anfangsbedingung erfüllt.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien dazu $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zwei Lösungen von (3.2), (1.3) zur Anfangsbedingung (t_0, x_0) . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(y_1(t) - y_2(t)) = Ay_1(t) + g(t) - Ay_2(t) - g(t) = A(y_1(t) - y_2(t)).$$

Die Funktion $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ löst also das Anfangswertproblem

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(t_0) = y_1(t_0) - y_2(t_0) = x_0 - x_0 = 0,$$

dessen eindeutige Lösung gerade durch $z(t) = e^{-A(t-t_0)}e^{At_0}0 = 0$ gegeben ist. Es gilt also $y_1(t) - y_2(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $y_1(t) = y_2(t)$, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. \square

3.2 Weitere Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden wir einige weitere Eigenschaften der Lösung betrachten, die wir in unseren folgenden Betrachtungen benötigen werden.

Das folgende Lemma ist eine Konsequenz aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz 3.3.

Lemma 3.4 Für eine Anfangsbedingung (t_0, x_0) und beliebige Zeiten $t^1, t^2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$x(t^2; t_0, x_0) = x(t^2; t^1, x(t^1; t_0, x_0)).$$

Beweis: Offenbar ist $x(t; t_0, x_0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3.2), (1.3) mit Anfangsbedingung $(t^1, x(t^1; t_0, x_0))$. Die Funktion $x(t; t^1, x(t^1; t_0, x_0))$ löst aber gerade dieses Anfangswertproblem, also müssen, wegen der Eindeutigkeit der Lösung, $x(t; t^1, x(t^1; t_0, x_0))$ und $x(t; t_0, x_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ übereinstimmen, insbesondere also für $t = t^2$. \square

Bemerkung 3.5 Diese Eigenschaft der Lösungsfunktionen wird oft als *Kozykluseigenschaft* bezeichnet. \square

Wir wollen nun die Abhängigkeit der Lösungsfunktionen $x(t; t_0, x_0)$ von (3.2), (1.3) von ihren Parametern betrachten. Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma.

Lemma 3.6 Für die Matrix-Exponentialfunktion e^{At} gilt die Abschätzung

$$\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}.$$

Beweis: Dies folgt durch Abschätzen der einzelnen Glieder der definierenden Reihe mittels

$$\|e^{At}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\||t|}.$$

\square

Zunächst beweisen wir eine Schranke für $\|x(t; t_0, x_0)\|$ im homogenen Fall.

Lemma 3.7 Die Lösungsfunktion $x(t; t_0, x_0)$ des homogenen Anfangswertproblems (3.1), (1.3) erfüllt die Abschätzungen

$$e^{-\|A\||t-t_0|} \|x_0\| \leq \|x(t; t_0, x_0)\| \leq e^{\|A\||t-t_0|} \|x_0\|.$$

Beweis: Die zweite Ungleichung folgt direkt aus der Darstellung der Lösung als

$$x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0 \tag{3.3}$$

unter Verwendung von Lemma 3.6. Die erste folgt, indem man die Gleichung (3.3) von links mit $e^{-A(t-t_0)}$ multipliziert, Lemma 3.6 auf die so entstehende Gleichung

$$x_0 = e^{-A(t-t_0)} x(t; t_0, x_0)$$

anwendet und die sich ergebende Ungleichung

$$\|x_0\| \leq e^{\|A\||t-t_0|} \|x(t; t_0, x_0)\|$$

nach $\|x(t; t_0, x_0)\|$ umstellt. \square

Das folgende Lemma beschreibt die Abhängigkeit von $x(t; t_0, x_0)$ im inhomogenen Fall von den Parametern.

Lemma 3.8 Die Lösungsfunktion $x(t; t_0, x_0)$ des inhomogenen Anfangswertproblems (3.2), (1.3) ist stetig differenzierbar (also insbesondere stetig) in all ihren Parametern. Insbesondere gilt

$$(i) \frac{d}{dt}x(t; t_0, x_0) = Ax(t; t_0, x_0) + g(t), \quad (ii) \frac{d}{dt_0}x(t; t_0, x_0) = -Ae^{A(t-t_0)}x_0 - e^{A(t-t_0)}g(t_0)$$

und

$$(iii) \frac{d}{dx_0}x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)},$$

wobei die rechten Seiten jeweils als lineare Abbildungen von \mathbb{R} (im Fall (i) und (ii)) bzw. \mathbb{R}^n (im Fall (iii)) nach \mathbb{R}^n aufzufassen sind.

Darüberhinaus ist die Funktion für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ global Lipschitz stetig in x_0 ; genauer gilt für beliebige $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_1)\| \leq e^{\|A\| |t-t_0|} \|x_0 - x_1\|. \quad (3.4)$$

Beweis: Die Ableitung nach t ergibt sich sofort aus (3.2), die Ableitungen nach Anfangszeit t_0 und Anfangswert x_0 erhält man direkt durch Differenzieren der allgemeinen Lösung aus Satz 3.3.

Zum Beweis der Abschätzung (3.4) verwenden wir, dass aus dieser Darstellung folgt

$$x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_1) = e^{-At_0} e^{At} x_0 - e^{-At_0} e^{At} x_1 = e^{A(t-t_0)}(x_0 - x_1),$$

also

$$\|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_1)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|x_0 - x_1\|,$$

woraus sich die gewünschte Abschätzung mit Lemma 3.6 ergibt. \square

Bemerkung 3.9 Die Abschätzung (3.4) zeigt insbesondere, dass für jedes $T > t_0$ und für jede Folge $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ die Konvergenzeigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_0, T]} \|x(t; t_0, x_n) - x(t; t_0, x_0)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\|A\| |T-t_0|} \|x_n - x_0\| = 0$$

gilt. In Allgemeinen gilt dies aber nicht für unendliche Zeitintervalle: Z.B. gilt bereits im eindimensionalen Fall für die Lösungen $x(t; x_0) = e^t x_0$ der Gleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ die Gleichung

$$|x(t; x_0) - x(t; x_1)| = e^t |x_0 - x_1|.$$

Für eine Folge $x_n \rightarrow x_0$ mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} |x(t; x_n) - x(t; x_0)| = \sup_{t \in [t_0, \infty)} e^t |x_n - x_0| = \infty$$

und damit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_0, \infty)} |x(t; x_n) - x(t; x_0)| = \infty,$$

d.h. „im Unendlichen“ gilt die Stetigkeit im Allgemeinen nicht. Die Konzepte der „Stabilität“ und der „asymptotischen Stabilität“, die wir im nächsten Kapitel einführen werden, können als Stetigkeitsbedingungen „im Unendlichen“, bzw. auf unendlichen Zeitintervallen aufgefasst werden, und wir werden einfache algebraische Kriterien für die Matrix A kennen lernen, unter denen diese Bedingungen erfüllt sind. \square

Kapitel 4

Stabilität

In diesem Kapitel wollen wir damit beginnen, uns mit dem Hauptthema dieser Vorlesung zu beschäftigen. Am Schluss des letzten Kapitels hatten wir bereits erwähnt, dass wir Stabilität als eine Stetigkeitsbedingung auf dem unendlichen Zeitintervall $[0, \infty)$ verstanden werden kann, wir werden auf diese Interpretation am Ende dieses Kapitels zurück kommen. Es gibt darüberhinaus viele weitere Interpretationen von Stabilität, die wir nach und nach kennen lernen werden. Hier betrachten wir zunächst ein Beispiel bevor wir im Anschluss daran die formale Definition geben und verschiedene Kriterien für Stabilität einführen und beweisen.

Stabilität kann man für viele verschiedene Lösungstrajektorien und sogar für Mengen von Lösungskurven definieren. Wir wollen hier nur den einfachsten (aber trotzdem für viele Anwendungen interessantesten) Fall behandeln, bei dem wir die Stabilität von Gleichgewichtslösungen betrachten. Wir werden uns dabei auf Lösungen zur Anfangszeit $t_0 = 0$ beschränken.

Definition 4.1 Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage* oder *Equilibrium*) einer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1), falls für die zugehörige Lösung

$$x(t; x^*) = x^* \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. □

Es ist leicht zu sehen, dass ein Punkt genau dann ein Gleichgewicht der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ist, wenn $f(x^*) = 0$ gilt. Insbesondere ist für die homogene lineare Gleichung der Punkt $x^* = 0$ immer ein Gleichgewicht.

4.1 Ein Beispiel

Um den Begriff der Stabilität zu illustrieren, beginnen wir mit einem kleinen Beispiel. Wir betrachten ein Pendel, das in unserem (idealisierten) Modell aus einer masselosen starren Stange und einem daran befestigten Massepunkt besteht. Bezeichnen wir die Winkelposition des Pendels mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und die Geschwindigkeit der Masse auf ihrer kreisförmigen

Bahn mit $v \in \mathbb{R}$, so ergeben sich (nach geeigneter Normierung der Konstanten) die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\varphi(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

(eine schöne Herleitung dieser Gleichungen findet sich in B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1997, Beispiel 1.3.3) Hierbei ist $k \geq 0$ eine Konstante, die die Reibung beschreibt. In diesen Gleichungen entspricht $\varphi = 0$ dem senkrecht nach unten hängenden Pendel und $\varphi = \pi$ dem aufrecht stehenden Pendel. Die Punkte $(\varphi, v) = (0, 0)$ und $(\varphi, v) = (\pi, 0)$ sind die zwei einzigen Gleichgewichte dieser Gleichung. Sie beschreiben gerade das ruhig nach unten hängende und das (in der Praxis schwer zu realisierende) ruhig aufrecht stehende Pendel. Setzen wir $\vartheta = \varphi - \pi$, so ändern sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\vartheta(t) + \pi).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Die Gleichungen beschreiben die selben Bewegungen wie zuvor, allerdings entspricht $\vartheta = 0$ nun dem aufrecht stehenden Pendel und $\vartheta = -\pi$ dem senkrecht nach unten hängenden Pendel.

Offenbar sind die Gleichungen (4.1) und (4.2) nicht linear, da auf der rechten Seite ein Sinus auftaucht. Wir können aber lineare Systeme herleiten, die das Verhalten des Systems in den Ruhelagen zumindest approximieren. Wir nutzen dazu zunächst aus, dass für φ nahe 0 für den Sinus

$$\sin(\varphi) \approx \varphi\tag{4.3}$$

und für ϑ nahe 0 approximativ die Gleichung

$$\sin(\vartheta + \pi) \approx -\vartheta\tag{4.4}$$

gilt. Schreiben wir $x_1 = \varphi$, $x_2 = v$, so erhalten wir aus (4.1) mit (4.3)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - kx_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\tag{4.5}$$

und für $y_1 = \vartheta$, $y_2 = v$ erhalten wir aus (4.2) mit (4.4)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_1(t) - ky_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.\tag{4.6}$$

Wegen (4.3) und (4.4) können wir erwarten, dass diese linearen Gleichungen das Verhalten der nichtlinearen Gleichungen in einer kleinen Umgebung der Gleichgewichte gut beschreiben.¹

Betrachten wir nun die physikalische Interpretation der Gleichungen (4.1) bzw. (4.2): Was würden wir erwarten, wenn sich das Pendel in einer der beiden Ruhelagen befindet, und wir

¹Dieses Verfahren nennt man *Linearisierung* und wir werden in einem späteren Kapitel sehen, dass diese Erwartung mathematisch gerechtfertigt ist.

es durch leichtes Anstoßen aus dem Gleichgewicht bringen? Im Fall des herabhängenden Pendels, d.h. für $(\varphi, v) = (0, 0)$, würden wir sicherlich erwarten, dass das Pendel in der Nähe der Ruhelage schwingt, sich aber nicht weiter von ihm entfernt. Falls Reibung auf das Pendel wirkt (d.h. falls $k > 0$ ist) würden wir sogar erwarten, dass das Pendel sich wieder der Ruhelage nähert. (In der Praxis würde man sogar erwarten, dass das Pendel nach einiger Zeit wieder ruhig nach unten hängt; dieser Effekt wird aber durch die Haftreibung bewirkt, die wir in unserem Modell vernachlässigt haben.)

Im Fall des aufrecht stehenden Pendels, d.h. für $(\varphi, v) = (\pi, 0)$ bzw. $(\vartheta, v) = (0, 0)$, wird man nicht erwarten, dass das Pendel nach einem Stoß in der Nähe der Ruhelage bleibt, sondern dass es umfällt, um dann, je nachdem ob Reibung vorhanden ist oder nicht, entweder nach einiger Zeit gegen die hängenden Ruhelage zu konvergieren, oder für alle zukünftigen Zeiten mit gleicher Stärke weiter zu pendeln.

Die folgenden Grafiken stellen Lösungen der linearen Gleichungen (4.5) und (4.6) in der (x_1, x_2) bzw. (y_1, y_2) -Ebene dar. Das „Anstoßen“ des Pendels modellieren wir dadurch, dass wir einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ wählen, der nicht genau auf dem Gleichgewicht $x^* = (0, 0)^T$ liegt sondern nur in der Nähe, nämlich $x_0 = (1/10, 0)^T$.

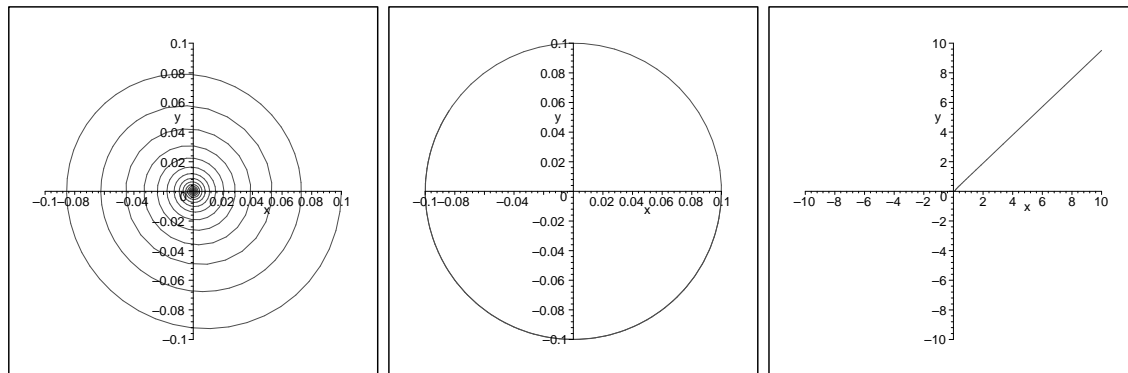


Abbildung 4.1: Lösung von (4.5) für $k = 1/10$ und $k = 0$, Lösung von (4.6) für $k = 1/10$ (von links nach rechts)

Die Simulationen von (4.5) zeigen gerade das oben diskutierte Verhalten: Für $k > 0$ konvergiert die Lösung gegen das Gleichgewicht, für $k = 0$ beschreibt das Pendel eine periodische Bewegung um das Gleichgewicht, entfernt sich dabei aber nie weiter als zum Anfangszeitpunkt.

Das Verhalten von (4.6) hingegen entspricht nicht ganz unseren Erwartungen: Zwar entfernt sich die Lösung vom Gleichgewicht, die Konvergenz zur hängenden Position ist allerdings nicht zu beobachten, stattdessen wächst die Lösung unbeschränkt. Der Grund liegt darin, dass sich das lineare System nur in einer kleinen Umgebung von $(0, 0)^T$ ähnlich wie das nichtlineare System verhält, diese ist jedoch zu klein, um das zweite Gleichgewicht zu enthalten (tatsächlich sieht man leicht, dass (4.6) überhaupt kein zweites Gleichgewicht besitzt). Es bleibt jedoch festzuhalten, dass das „Weglaufen“ vom Gleichgewichtspunkt korrekt wiedergegeben wird.

Es ist nun aus der Anschauung naheliegend, das Gleichgewicht des Systems (4.5) als *stabil* zu bezeichnen (nach leichtem Anstoßen bleibt die Lösung für alle Zeiten in der Nähe

des Gleichgewichts), das Gleichgewicht des Systems (4.6) hingegen als *instabil* (durch beliebig leichtes Anstoßen entfernt sich das System weit vom Gleichgewicht). Im folgenden Abschnitt werden wir dies mathematisch exakt formulieren.

4.2 Definition

Wir wollen nun Stabilität formal definieren. Wir machen dies etwas allgemeiner, als wir dies für unsere linearen Gleichungen benötigen und werden später zeigen, dass einige der verschiedenen Definitionen hier für lineare Systeme äquivalent sind.

Definition 4.2 Sei x^* ein Gleichgewicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

(i) Das Gleichgewicht x^* heißt *stabil*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Ungleichung

$$\|x(t; x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0$$

für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ erfüllt ist.

(ii) Das Gleichgewicht x^* heißt *lokal asymptotisch stabil*, falls es stabil ist und darüberhinaus eine Umgebung U von x_0 existiert, so dass die Lösungen mit Anfangswerten $x_0 \in U$ im folgenden Sinne gleichmäßig gegen x^* konvergieren: Für jedes $\delta > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $T > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|x(t; x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq T$$

für alle $x_0 \in U$ mit $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ erfüllt ist.

(iii) Das Gleichgewicht x^* heißt *global asymptotisch stabil*, falls (ii) mit $U = \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

(iv) Das Gleichgewicht x^* heißt *lokal bzw. global exponentiell stabil*, falls Konstanten $c, \sigma > 0$ existieren, so dass die Ungleichung

$$\|x(t; x_0) - x^*\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - x^*\| \text{ für alle } t \geq 0$$

für alle x_0 aus einer Umgebung U von x^* (mit $U = \mathbb{R}^n$ im globalen Fall) erfüllt ist. \square

Bemerkung 4.3 Die Stabilität aus (i) wird auch „Stabilität im Sinne von Ljapunov“ genannt, da dieses Konzept Ende des 19. Jahrhunderts vom russischen Mathematiker Alexander M. Ljapunov eingeführt wurde. Beachte, dass aus den Definitionen die Implikationen

$$(\text{lokal/global}) \text{ exponentiell stabil} \Rightarrow (\text{lokal/global}) \text{ asymptotisch stabil} \Rightarrow \text{stabil}$$

folgen. Die zweite Implikation ergibt sich direkt aus der Definition. Dass aus exponentieller Stabilität die asymptotische Stabilität folgt, sieht man folgendermaßen:

Für ein gegebenes ε folgt (i) mit $\delta = \varepsilon/c$, denn damit gilt für $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ die Ungleichung $\|x(t; x_0) - x^*\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - x^*\| \leq c \|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$. Zum Beweis von (ii) setzen wir für gegebene ε und $\delta > 0$ die Zeit $T = -\frac{1}{\sigma} \ln \frac{\varepsilon}{\delta c}$. Damit folgt für $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ und $t \geq T$

$$\|x(t; x_0) - x^*\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - x^*\| \leq ce^{-\sigma T} \|x_0 - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon,$$

also (ii). \square

Ein Gleichgewicht, das nicht stabil ist, nennen wir instabil. Formal lässt sich das so beschreiben.

Definition 4.4 Das Gleichgewicht x^* heißt *instabil*, falls es nicht stabil ist, d.h., falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ und ein $T > 0$ existiert, so dass

$$\|x(T; x_0) - x^*\| \geq \varepsilon$$

gilt. □

Die Lösungen in Abbildung 4.1 legen nahe, dass das Gleichgewicht $x^* = 0$ für die Gleichung (4.5) stabil ist, und sogar asymptotisch stabil für $k > 0$. Ebenfalls kann man vermuten, dass das Gleichgewicht $x^* = 0$ für die Gleichung (4.6) instabil ist. Um dies formal zu beweisen, könnte man die Gesamtheit der Lösungen für alle möglichen Anfangswerte nahe x^* betrachten, was in der Praxis aber nicht unbedingt praktikabel ist. Wir werden daher nun ein einfaches Kriterium herleiten, an dem man sehen kann, ob das Gleichgewicht $x^* = 0$ einer linearen homogenen Differentialgleichung stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

4.3 Stabilität linearer homogener Differentialgleichungen

Wir betrachten nun wieder die lineare homogene Differentialgleichung (3.1) gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für eine Gleichung dieser Form hängt das Stabilitätsverhalten offenbar nur von der Matrix A ab. Wir werden daher auch von Stabilität, exponentieller Stabilität bzw. Instabilität der Matrix A sprechen.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Stabilität des Gleichgewichts $x^* = 0$ für (3.1) nicht von der gewählten Basis abhängt. Mit anderen Worten zeigen wir, dass sich die Stabilitätseigenschaften unter Koordinatentransformationen nicht verändern.

Lemma 4.5 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und sei $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt: Das Gleichgewicht $x^* = 0$ der Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{4.7}$$

hat die gleichen Stabilitätseigenschaften wie das Gleichgewicht $y^* = 0$ der Gleichung

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}y(t) \tag{4.8}$$

mit der transformierten Matrix $\tilde{A} = C^{-1}AC$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, wie die Lösungen $x(t; x_0)$ und $y(t; y_0)$ der Gleichungen (4.7) und (4.8) mit Anfangsbedingung (1.3) zusammenhängen. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x(t; x_0) = Cy(t; C^{-1}x_0). \tag{4.9}$$

Zum Beweis von (4.9) genügt es zu zeigen, dass die Funktion $Cy(t; C^{-1}x_0)$ das Anfangswertproblem (4.7), (1.3) löst, da dann der Eindeigkeitssatz 3.1 die Gleichheit (4.9) liefert. Die Anfangsbedingung (1.3) ist wegen

$$Cy(0; C^{-1}x_0) = CC^{-1}x_0 = x_0$$

offenbar erfüllt. Dass auch die Differentialgleichung (4.7) erfüllt ist, folgt aus

$$\frac{d}{dt}Cy(t; C^{-1}x_0) = C\tilde{A}y(t; C^{-1}x_0) = CC^{-1}ACy(t; C^{-1}x_0) = A(Cy(t; C^{-1}x_0)).$$

Aus (4.9) folgt nun sofort die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| \leq \|C\| \|y(t; C^{-1}x_0)\|. \quad (4.10)$$

Wir zeigen die Aussage des Lemmas zunächst für die Stabilität aus Definition 4.2(i). Sei y^* stabil für (4.8) und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es für $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\|C\|$ ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass für $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \leq \tilde{\delta}$ die Ungleichung

$$\|y(t; y_0)\| \leq \tilde{\varepsilon} \text{ für alle } t \geq 0$$

gilt. Folglich gilt für $\delta = \tilde{\delta}/\|C^{-1}\|$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| \leq \delta$ und $y_0 = Cx_0$ wegen $\|y_0\| = \|C^{-1}x_0\| \leq \|C^{-1}\| \|x_0\| \leq \tilde{\delta}$ und (4.10) die Ungleichung

$$\|x(t; x_0)\| \leq \|C\| \|y(t; y_0)\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0,$$

womit die Stabilität gezeigt ist.

Mit der gleichen Beweistechnik sieht man, dass sich asymptotische Stabilität und Instabilität von (4.8) auf (4.7) überträgt.

Falls (4.8) exponentiell stabil ist, erhalten wir

$$\|x(t; x_0)\| \leq \|C\| \|y(t; C^{-1}x_0)\| \leq \|C\| ce^{-\sigma t} \|C^{-1}\| \|x_0\|,$$

d.h., exponentielle Stabilität für (4.7) mit gleichem σ und $\tilde{c} = \|C\| \|C^{-1}\| c$. Beachte hierbei, dass $\|C\|^{-1} \neq \|C^{-1}\|$. \square

Wir können die Stabilität also bestimmen, indem wir uns die Matrix A mittels einer geeigneten Koordinatentransformation in eine „schöne“ Form bringen, womit wir den folgenden Satz beweisen können. Wir erinnern dazu an die Jordan'sche Normalform in der Form von Satz 2.6.

Satz 4.6 Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung (3.1) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, $\lambda_l = a_l + ib_l$, die Eigenwerte der Matrix A , die hier so angeordnet seien, dass jedem Eigenwert λ_l ein Jordan-Block J_l in der Jordan'schen Normalform entspricht. Dann gilt:

(i) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte λ_l nichtpositiven Realteil $a_l \leq 0$ besitzen und für alle Eigenwerte mit Realteil $a_l = 0$ der entsprechende Jordan-Block J_l eindimensional ist.

(ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist instabil genau dann, wenn es einen Eigenwert λ_l gibt, dessen Realteil entweder $a_l > 0$ erfüllt, oder dessen Realteil $a_l = 0$ erfüllt und dessen Jordan-Block J_l mindestens die Dimension 2×2 besitzt.

(iii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist lokal asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte λ_l negativen Realteil $a_l < 0$ besitzen.

Beweis: Wegen Lemma 4.5 reicht es, die Stabilitätseigenschaften für die Jordan'sche Normalform J der Matrix A zu beweisen. Wir bezeichnen die zu $\dot{x}(t) = Jx(t)$ gehörigen Lösungen wiederum mit $x(t; x_0)$.

Zuerst einige Vorüberlegungen. Bezeichnen wir mit e_k , $k = 1, \dots, n$, die Standard-Basisvektoren, so lässt sich jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist Be_j gerade die j -te Spalte von B , also

$$Be_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})^T = \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k.$$

Für die Norm $\|Bx\|$ gilt die Abschätzung

$$\|Bx\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|Be_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) \max_{k=1, \dots, n} \|Be_k\| \leq \sqrt{n} \|x\| \max_{k=1, \dots, n} \|Be_k\|. \quad (4.11)$$

Im Folgenden werden wir außerdem verwenden, dass für eine komplexe Zahl $\lambda = a + ib$ und jedes reelle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $|e^{\lambda t}| = e^{at}$ gilt.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Eigenwert-Bedingungen in (i) bzw. (ii) die behauptete Stabilität bzw. Instabilität impliziert und beginnen mit (i).

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus der Darstellung der Lösung aus Satz 3.1 und der Form von e^{Jt} für Jordan-Matrizen aus Satz 2.8 folgt mit den obigen Überlegungen

$$e^{Jt} e_k = e^{\lambda_l t} \left(e_k + t e_{k-1} + \dots + \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} e_{k-m_k+1} \right),$$

wobei l und m_k von k abhängen und $m_k \leq m$ für die Dimension m des zu λ_l gehörigen Jordan-Blocks J_l ist, vgl. Satz 2.8. Falls $\lambda_l = a_l + ib_l$ mit $a_l = 0$ gilt, ist der zugehörige Jordan-Block nach Annahme eindimensional, es gilt also $m_k = m = 1$ und damit

$$e^{Jt} e_k = e^{\lambda_l t} e_k$$

woraus

$$\|e^{Jt} e_k\| = e^{a_l t} \|e_k\| = e^0 1 = 1$$

folgt. In diesem Fall setzen wir $c_k = 1$. Im Fall $a_l < 0$ erhalten wir

$$\|e^{Jt} e_k\| \leq |e^{\lambda_l t}| \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m_k-1)}}{(m_k-1)!^2}} = e^{a_l t} \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m_k-1)}}{(m_k-1)!^2}}.$$

Für jedes negative $a < 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt nun aber $e^{at}t^k \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also gibt es eine Konstante $c_k > 0$, so dass die Abschätzung

$$\|e^{Jt}e_k\| \leq e^{at} \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m_k-1)}}{(m_k-1)!^2}} \leq c_k$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Damit folgt für beliebige Anfangswerte $x \in \mathbb{R}^n$ aus (4.11) die Abschätzung

$$\|x(t; x)\| = \|e^{Jt}x\| \leq \sqrt{n}\|x\| \max_{k=1, \dots, n} \|e^{Jt}e_k\| \leq \sqrt{n}\|x\| \max_{k=1, \dots, n} c_k \text{ für alle } t \geq 0.$$

Also folgt die Ungleichung der Stabilitätseigenschaft (i) mit $\delta = \varepsilon/(\sqrt{n} \max_{k=1, \dots, n} c_k)$.

Nun zeigen wir, dass die Eigenwert-Bedingung aus (ii) Instabilität von x^* impliziert. Sei dazu zuerst $\lambda_l = a_l + ib_l$ ein Eigenwert mit $a_k > 0$. Dann gibt es einen Vektor e_k , so dass $e^{Jt}e_k = e^{\lambda_l t}e_k$ gilt, und damit für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|e^{Jt}(\varepsilon e_k)\| = |e^{\lambda_l t}| \varepsilon = e^{a_l t} \varepsilon \rightarrow \infty$$

für $t \rightarrow \infty$, woraus die Instabilität folgt, denn $\|\varepsilon e_k\| = \varepsilon$. Wenn kein Eigenwert λ_l mit positivem Realteil $a_l > 0$ existiert, so garantiert die Bedingung in (ii) die Existenz eines Eigenwerts λ_l mit Realteil $a_l = 0$ und mindestens 2×2 -dimensionalem Jordan-Block. In diesem Fall finden wir einen Basisvektor e_k mit

$$e^{Jt}e_k = e^{\lambda_l t}(e_k + te_{k-1}),$$

woraus für jedes $\varepsilon > 0$ folgt

$$\|e^{Jt}(\varepsilon e_k)\| = |e^{\lambda_l t}| \varepsilon \sqrt{1 + t^2} = \varepsilon \sqrt{1 + t^2} \rightarrow \infty$$

für $t \rightarrow \infty$, womit wiederum die Instabilität folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass die (In-)Stabilitätseigenschaften in (i) und (ii) die Eigenwertbedingungen implizieren. Nehmen wir an, x^* sei stabil, damit ist x^* nicht instabil und somit kann die Eigenwertbedingung aus (ii) nicht gelten. Die Eigenwertbedingung in (i) ist aber gerade die Umkehrung der Bedingung aus (ii), also muss sie gelten. Analog schließt man für (ii), womit die Äquivalenzen in (i) und (ii) gezeigt sind.

Es bleibt (iii) zu zeigen. Sei dazu x^* lokal asymptotisch stabil. Wir nehmen an, es gebe einen Eigenwert λ_l mit $a_l \geq 0$. Dann gibt es einen Basisvektor e_k mit $e^{Jt}e_k = e^{\lambda_l t}e_k$ und damit folgt für alle $\varepsilon > 0$ die Gleichung

$$\|e^{Jt}(\varepsilon e_k)\| = |e^{\lambda_l t}| \varepsilon = \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0,$$

d.h. für beliebig kleine Anfangswerte εe_k , $\varepsilon > 0$, finden wir Lösungen, die nicht gegen 0 konvergieren. Dies widerspricht der asymptotischen Stabilität.

Sei umgekehrt die Eigenwertbedingung aus (iii) erfüllt. Wie im Fall (i) für $a_l < 0$ erhalten wir für jeden Basisvektor e_k die Abschätzung

$$\|e^{Jt}e_k\| \leq |e^{\lambda_l t}| \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m_k-1)}}{(m_k-1)!^2}} = e^{a_l t} \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m_k-1)}}{(m_k-1)!^2}}.$$

Wählen wir nun ein beliebiges $\eta \in (0, 1)$, so existiert ein $c_k > 0$, so dass

$$e^{(1-\eta)a_l t} \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m-1)}}{(m-1)!^2}} \leq c_k \text{ für alle } t \geq 0$$

gilt. Damit erhalten wir

$$e^{a_l t} \sqrt{1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2(m-1)}}{(m-1)!^2}} \leq e^{\eta a_l t} c_k$$

und somit mit (4.11)

$$\|x(t; x)\| = \|e^{Jt} x\| \leq \sqrt{n} \|x\| \max_{k=1, \dots, n} \|e^{Jt} e_k\| \leq \sqrt{n} \|x\| e^{-\sigma t} \max_{k=1, \dots, n} c_k = c e^{-\sigma t} \|x\|$$

für alle $t \geq 0$, $c = \sqrt{n} \max_{k=1, \dots, n} c_k$ und $\sigma = -\eta \max_{l=1, \dots, d} a_l > 0$. Dies zeigt globale exponentielle Stabilität, also nach Bemerkung 4.3 insbesondere globale asymptotische Stabilität und damit auch lokale asymptotische Stabilität. \square

Der Beweis von (iii) zeigt tatsächlich globale exponentielle Stabilität. Die Konsequenz dieser Tatsache formulieren wir explizit in dem folgenden Satz.

Satz 4.7 Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung (3.1) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, $\lambda_l = a_l + ib_l$, die Eigenwerte der Matrix A . Dann sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent.

- (i) Alle Eigenwerte λ_l besitzen negativen Realteil $a_l < 0$.
- (ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist lokal asymptotisch stabil.
- (iii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist global exponentiell stabil, wobei die Konstante $\sigma > 0$ aus Definition 4.2(iv) beliebig aus dem Intervall $(0, -\max_{l=1, \dots, d} a_l)$ gewählt werden kann.

Beweis: (iii) \Rightarrow (ii) folgt mit Bemerkung 4.3, (ii) \Rightarrow (i) folgt aus Satz 4.6(iii) und (i) \Rightarrow (iii) wurde im Beweis von Satz 4.6(iii) gezeigt. \square

Wir wollen nun einige Folgerungen aus den zwei bewiesenen Sätzen formulieren und beweisen. Zunächst beweisen wir eine obere Schranke für die Matrix-Norm der Matrix-Exponentialfunktion einer stabilen bzw. exponentiall stabilen Matrix.

Lemma 4.8 (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stabile Matrix. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|e^{At}\| \leq c \text{ für alle } t \geq 0.$$

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine exponentiell stabile Matrix mit $c, \sigma > 0$. Dann gilt

$$\|e^{At}\| \leq c e^{-\sigma t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis: (i) Nehmen wir an, die Konstante c existiere nicht. Dann gibt es eine Folge von Werten $c_k \rightarrow \infty$ und eine Folge von Zeiten $t_k > 0$, so dass $\|e^{At_k}\| > c_k$. Aus der Definition der Matrix-Norm folgt dann die Existenz von Anfangswerten $x_k \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\|x(t_k; x_k)\| > c_k \|x_k\|. \quad (4.12)$$

Indem wir x_k durch $x_k/(\sqrt{c_k}\|x_k\|)$ ersetzen (beachte, dass (4.12) gültig bleibt), können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\|x_k\| \rightarrow 0$ aber $c_k\|x_k\| \rightarrow \infty$. Damit gibt es also für beliebige $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ einen Punkt x_k mit $\|x_k\| \leq \delta$ und eine Zeit $t_k > 0$ mit $\|x(t_k; x_k)\| > \varepsilon$. Dies aber ist ein Widerspruch zur Stabilität von $x^* = 0$.

(ii) Dies folgt sofort aus der Definition von exponentieller Stabilität und der Definition der Matrix-Exponentialfunktion. \square

Das folgende Lemma zeigt, dass man der Norm der Matrix-Exponentialfunktion die exponentielle Stabilität ansehen kann.

Lemma 4.9 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Falls ein $T > 0$ existiert mit $\|e^{AT}\| < 1$, so ist A exponentiell stabil.

Beweis: Sei $a = \ln(\|e^{AT}\|)/T$, also $\|e^{AT}\| = e^{aT}$. Wegen $\|e^{AT}\| < 1$ folgt $a < 0$. Wir behaupten nun, dass für alle $t \geq 0$ die Abschätzung

$$\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|T} e^{-at} e^{at} \quad (4.13)$$

gilt. Sei dazu $t > 0$ beliebig, und $k \geq 0$ die größte ganze Zahl mit $kT \leq t$. Dann gilt $kT \geq t - T$ und $t - kT \leq T$ und damit

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &= \|e^{A(t-kT)} e^{AkT}\| \leq \|e^{A(t-kT)}\| \|e^{AkT}\| \leq e^{\|A\|T} \|e^{AT}\|^k \\ &= e^{\|A\|T} e^{akT} \leq e^{\|A\|T} e^{a(t-T)} = e^{\|A\|T} e^{-aT} e^{at}, \end{aligned}$$

also (4.13). Aus (4.13) folgt nun für $c = e^{\|A\|T} e^{-aT}$ und $\sigma = -a$ die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| = \|e^{At} x_0\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0\|,$$

also gerade die behauptete exponentielle Stabilität. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir nun die Bemerkung, dass die Stabilität als Stetigkeit auf unendlichen Zeitintervallen verstanden werden kann, mathematisch präzisieren.

Lemma 4.10 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann stabil, wenn die Lösungen $x(t; x_0)$ der zugehörigen linearen Differentialgleichung (3.1) mit Anfangsbedingung (1.3) Lipschitzstetig in x_0 gleichmäßig für alle $t \geq 0$ sind, d.h., wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt so dass

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis: Sei A stabil. Wegen Lemma 4.8 gibt es ein $c > 0$ so dass $\|e^{At}\| \leq c$ für alle $t \geq 0$. Also folgt

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| = \|e^{At}x_1 - e^{At}x_2\| \leq \|e^{At}\| \|x_1 - x_2\| \leq c\|x_1 - x_2\|,$$

d.h. die Behauptung mit $L = c$.

Sei umgekehrt $x(t; x_0)$ Lipschitz. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\|x(t; x_0) - 0\| = \|x(t; x_0) - x(t; 0)\| \leq L\|x_0 - 0\| \text{ für alle } t \geq 0,$$

woraus die Stabilitätseigenschaft von $x^* = 0$ mit $\delta = \varepsilon/L$ folgt. □

Kapitel 5

Stabilität und Störung

Wir haben die Konzepte der Stabilität eingeführt, indem wir uns überlegt haben, wie sich das Pendel in den zwei verschiedenen Ruhelagen nach einem leichten Anstoßen verhält. Dieses „Anstoßen“ wiederum haben wir modelliert, indem wir einen Anfangswert nahe dem Gleichgewicht gewählt haben.

Tatsächlich ist es aber eine sehr idealisierte Annahme, dass eine Störung (wie eben der Stoß) nur zur Anfangszeit—also bevor das System sich bewegt—wirkt. Realistischer ist es, anzunehmen, dass eine Störung permanent auf das System wirkt. Eine Möglichkeit, dies zu modellieren, besteht darin, die zu einer gegebenen homogenen Gleichung (3.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

gehörige inhomogene Gleichung (3.2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t)$$

zu betrachten, und die Funktion g als Störung aufzufassen. Wir werden nun untersuchen, wie sich die Lösungen von (3.2) unter Stabilitätsannahmen an A verhalten.

5.1 Stabile Matrizen

Wir wollen dies zunächst für stabile Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durchführen. Wir erinnern daran, dass aus Lemma 4.8(i) folgt, dass für stabile Matrizen der Wert $c := \sup_{t \geq 0} \|e^{At}\|$ eine endliche reelle Zahl ist.

Satz 5.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stabile Matrix und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Sei $c := \sup_{t \geq 0} \|e^{At}\|$. Dann gilt für die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.2) die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| \leq c \left(\|x_0\| + \int_0^t \|g(s)\| ds \right).$$

Insbesondere folgt, dass alle Lösungen auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ beschränkt sind, falls das Integral

$$\int_0^{\infty} \|g(s)\| ds$$

existiert.

Beweis: Aus der allgemeinen Form der Lösung aus Satz 3.3 folgt

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0)\| &= \left\| e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds \right\| \\ &\leq \|e^{At}x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}g(s)\| ds \\ &\leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|g(s)\| ds \\ &\leq c\|x_0\| + c \int_0^t \|g(s)\| ds, \end{aligned}$$

also die gewünschte Abschätzung. \square

Mit anderen Worten können wir Beschränktheit der Lösung nur dann garantieren, wenn das Integral von 0 bis ∞ über g existiert.

Beispiel 5.2 Ein einfaches Beispiel dafür, dass man die Lösungen einer stabilen homogenen linearen Differentialgleichung tatsächlich mit beliebig kleinen Störungen unbeschränkt wachsen lassen kann, liefert die offensichtlich stabile Gleichung

$$\dot{x}(t) = 0$$

mit Inhomogenität

$$g(t) \equiv \varepsilon > 0.$$

Hier erhält man die Lösungen

$$x(t; x_0) = x_0 + \varepsilon t,$$

die offenbar für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und beliebige Anfangswerte x_0 gegen unendlich streben. \square

5.2 Exponentiell stabile Matrizen

Unter der Annahme asymptotischer (d.h. für unsere linearen Systeme also exponentieller) Stabilität können wir deutlich stärkere Aussagen machen.

Satz 5.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine exponentiell stabile Matrix mit $c, \sigma > 0$ und sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

(i) Falls $\|g(t)\| \leq M$ gilt für ein $M > 0$ und alle $t \geq 0$, so gilt für die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.2) die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\| + \frac{cM}{\sigma}.$$

(ii) Falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t)\| = 0$ ist, so gilt für die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.2) die Konvergenz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0)\| = 0.$$

Beweis: (i) Analog zur Abschätzung im Beweis von Satz 5.1 erhalten wir

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| + c \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds. \quad (5.1)$$

Wegen

$$\int_0^t e^{-\sigma(t-s)} ds = \int_0^t e^{-\sigma s} ds \leq \int_0^\infty e^{-\sigma s} ds = \frac{1}{\sigma}$$

erhalten wir die gewünschte Schranke.

(ii) Wegen (5.1) genügt es, zu zeigen, dass aus $\|g(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ die Konvergenz

$$\int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow \infty$ folgt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $T > 0$ so groß, dass $\|g(t)\| \leq \sigma\varepsilon/2$ für alle $t \geq T$ ist. Damit folgt für $t \geq T$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds &= \int_0^T e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds + \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds \\ &\leq e^{-\sigma t} \underbrace{\int_0^T e^{\sigma s} \|g(s)\| ds}_{=: b < \infty} + \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} \frac{\sigma\varepsilon}{2} ds \\ &\leq e^{-\sigma t} b + \int_0^\infty e^{-\sigma s} \frac{\sigma\varepsilon}{2} ds \\ &= e^{-\sigma t} b + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Für alle hinreichend großen $t > 0$ gilt aber $e^{-\sigma t} b \leq \varepsilon/2$ und damit auch

$$\int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \|g(s)\| ds \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gewünschte Konvergenz gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung 5.4 Ein weiterer Aspekt im Fall (i) von Satz 5.3 ist, wie stark die Störung g die Lösung im Vergleich mit der zugehörigen homogenen Lösung verändert. Aus der Darstellung der allgemeinen Lösung und der Abschätzung des Integrals in (5.1) folgt, dass diese Differenz durch den Term cM/σ abgeschätzt werden kann, die Norm M der Störung wird also durch den Faktor c/σ verstärkt. Will man also eine Matrix A konstruieren, für die der Einfluss von g auf die Lösung möglichst klein ist, so ist es im Allgemeinen nicht ratsam, nur auf möglichst schnelles exponentielles Abklingen zu achten (d.h., auf möglichst großes σ). Stattdessen sollte die Matrix A so konstruiert werden, dass der Quotient c/σ klein wird. \square

Im Fall (i) von Satz 5.3 können wir im Allgemeinen nicht annehmen, dass die Lösungen gegen 0 konvergieren. Wir können aber zumindest zeigen, dass das Limesverhalten nicht vom Anfangswert x_0 abhängt, d.h., dass alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegeneinander konvergieren, auch wenn g unbeschränkt ist. Ist g periodisch, so gibt es sogar eine eindeutige periodische Limes-Kurve.

Satz 5.5 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine exponentiell stabile Matrix mit $c, \sigma > 0$ und sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

(i) Für alle Anfangswerte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.2) gilt die Abschätzung

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_1 - x_2\|.$$

(ii) Falls g periodisch ist, d.h., falls ein $T > 0$ existiert mit $g(t+T) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so existiert eine periodische Kurve $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Periode T , so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\|x(t; x_0) - G(t)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - G(0)\|$$

gilt. Diese Kurve ist gegeben durch

$$G(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} g(s) ds.$$

(iii) Falls $g(t) \equiv g_0$ konstant ist, so ist auch die Kurve $G(t)$ aus (ii) konstant und es gilt $G(t) = G_0 = -A^{-1}g_0$. In diesem Fall ist G_0 ein exponentiell stabiles Gleichgewicht der inhomogenen Gleichung.

Beweis: (i) Die Eigenschaft folgt sofort aus der Tatsache, dass die Funktion $z(t) = x(t; x_1) - x(t; x_2)$ die Lösung der homogenen Gleichung

$$\dot{z}(t) = Az(t)$$

zum Anfangswert $z(0) = x_1 - x_2$ ist.

(ii) Da die Funktion g stetig und periodisch ist, ist sie insbesondere beschränkt, d.h. es gibt $M > 0$ mit $\|g(t)\| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also folgt

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} g(s) ds \right\| \leq \int_{-\infty}^t ce^{-\sigma(t-s)} M ds \leq \frac{cM}{\sigma},$$

weswegen das Integral in der Definition von $G(t)$ existiert. Aus

$$\begin{aligned} G(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-s)} g(s) ds = \int_{-\infty}^t e^{A(t+T-(s+T))} g(s+T) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} g(s) ds = G(t) \end{aligned}$$

folgt, dass G periodisch mit Periode T ist. Wegen

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{A(t-s)}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= e^{At} \int_{-\infty}^0 e^{A(-s)}g(s) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= e^{At}G(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds \end{aligned}$$

ist $G(t)$ gerade die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zur Anfangsbedingung $(t_0, x_0) = (0, G(0))$, vgl. Satz 3.3. Also folgt die Konvergenz aus (i).

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}g(s)ds \\ &= e^{At} \int_{-\infty}^t e^{-As} ds g_0 \\ &= e^{At} \left[-e^{-As} A^{-1} \right]_{s=-\infty}^t g_0 = A^{-1}g_0, \end{aligned}$$

denn

$$\frac{d}{dt}(-e^{-At}A^{-1}) = -e^{-At}(-A)A^{-1} = e^{-At} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-At} = 0.$$

Da $G(t) \equiv G_0$ konstant und eine Lösung der Gleichung ist, ist G_0 offenbar ein Gleichgewicht. Die exponentielle Stabilität folgt nun sofort aus (i). \square

Bemerkung 5.6 Dass $G_0 = -A^{-1}g_0$ ein Gleichgewicht von (3.2) ist, kann man auch direkt aus

$$\begin{aligned} x^* &\text{ ist Gleichgewicht von (3.2)} \\ \iff Ax^* + g_0 &= 0 \\ \iff Ax^* &= -g_0 \\ \iff x^* &= -A^{-1}g_0 \end{aligned}$$

sehen. Beachte, dass diese Aussage nur richtig ist, falls A invertierbar ist, was für exponentiell stabile A immer gilt, da kein Eigenwert gleich Null sein kann. Für allgemeine A muss (3.2) mit konstantem g kein Gleichgewicht haben, vgl. Beispiel 5.2. \square

Kapitel 6

Ljapunov Funktionen

In diesem Kapitel werden wir ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung asymptotisch stabiler Differentialgleichungen behandeln, nämlich die sogenannten Ljapunov Funktionen. Asymptotische (und auch exponentielle Stabilität) verlangen nur, dass die Norm $\|x(t)\|$ einer Lösung für $t \rightarrow \infty$ abnimmt. Für viele Anwendungen wäre es aber viel einfacher, wenn die Norm streng monoton in t fallen würde. Dies ist natürlich im Allgemeinen nicht zu erwarten. Wir können die strenge Monotonie aber erhalten, wenn wir die euklidische Norm $\|x(t)\|$ durch eine allgemeinere Funktion, nämlich gerade die Ljapunov Funktion, ersetzen.

6.1 Quadratische Ljapunov Funktionen

Für lineare Systeme können wir uns auf sogenannte quadratische Ljapunov Funktionen beschränken, wie sie durch die folgende Definition gegeben sind.

Definition 6.1 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $x(t; x_0)$ die Lösungen des zugehörigen homogenen Anfangswertproblems (3.1), (1.3). Eine stetig differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt (*quadratische*) *Ljapunov Funktion*, falls positive reelle Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(x(t; x_0)) \leq -c_3 \|x_0\|^2$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gelten. □

Der folgende Satz zeigt, dass die Existenz einer Ljapunov Funktion exponentielle Stabilität der zugehörigen Differentialgleichung impliziert.

Satz 6.2 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $x(t; x_0)$ die Lösungen des zugehörigen homogenen Anfangswertproblems (3.1), (1.3). Dann gilt: Falls eine quadratische Ljapunov

Funktion mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ existiert, so erfüllen alle Lösungen die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0\|$$

für $\sigma = c_3/2c_2$ und $c = \sqrt{c_2/c_1}$, d.h. die Matrix A ist exponentiell stabil.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Ableitungsbedingung in $t = 0$ die Ungleichung

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} V(x(t; x_0)) \leq -c_3 \|x(\tau; x_0)\|^2$$

für alle $\tau \geq 0$ impliziert. Wegen $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1; x(t_2; x_0))$ gilt für $t_1 = t - \tau$ und $t_2 = \tau$ nämlich

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} V(x(t; x_0)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} V(x(t - \tau; x(\tau; x_0))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(x(t; x(\tau; x_0))) \\ &\leq -c_3 \|x(\tau; x_0)\|^2. \end{aligned}$$

Wegen $-\|x\|^2 \leq -V(x)/c_2$ folgt nun für $\lambda = c_3/c_2$ die Ungleichung

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} V(x(t; x_0)) \leq -\lambda V(x(t; x_0)). \quad (6.1)$$

Die Behauptung ist nun, dass hieraus die Ungleichung

$$V(x(t; x_0)) \leq e^{-\lambda t} V(x_0) \quad (6.2)$$

folgt. Offenbar ist (6.2) für $t = 0$ erfüllt. Wir nehmen nun an, es gebe ein $t_2 > 0$, so dass (6.2) nicht erfüllt ist, also

$$V(x(t_2; x_0)) > e^{-\lambda t_2} V(x_0) \quad (6.3)$$

Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Ausdrücke in (6.2) ein $t_1 \in [0, t_2)$, so dass

$$V(x(t_1; x_0)) = e^{-\lambda t_1} V(x_0) \quad (6.4)$$

und

$$V(x(t; x_0)) > e^{-\lambda t} V(x_0) \quad (6.5)$$

für alle $t \in (t_1, t_2]$. Aus (6.1), (6.4) und (6.5) folgt nun

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tilde{t}} (V(x(t; x_0)) - e^{-\lambda t} V(x_0)) \leq -\lambda V(x(t; x_0)) + \lambda e^{-\lambda t} V(x_0) \leq 0 \quad (6.6)$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass ein $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$ existiert mit

$$\begin{aligned} V(x(t_2; x_0)) - e^{-\lambda t_2} V(x_0) &= V(x(t_1; x_0)) - e^{-\lambda t_1} V(x_0) \\ &\quad + (t_2 - t_1) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tilde{t}} (V(x(t; x_0)) - e^{-\lambda t} V(x_0)). \end{aligned}$$

Aus (6.4) und (6.6) folgt aber nun

$$V(x(t_1; x_0)) - e^{-\lambda t_1} V(x_0) + (t_2 - t_1) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\bar{t}} (V(x(t; x_0)) - e^{-\lambda t} V(x_0)) \leq 0$$

und damit

$$V(x(t_2; x_0)) \leq e^{-\lambda t_2} V(x_0),$$

was ein Widerspruch zu (6.3) ist. Also folgt (6.2).

Mit den Abschätzungen für $V(x)$ erhalten wir nun aus (6.2)

$$\|x(t; x_0)\|^2 \leq \frac{1}{c_1} e^{-\lambda t} V(x_0) \leq \frac{c_2}{c_1} e^{-\lambda t} \|x_0\|^2$$

und damit durch Ziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten die Ungleichung

$$\|x(t; x_0)\| \leq c e^{-\sigma t} \|x_0\|$$

für $c = \sqrt{c_2/c_1}$ und $\sigma = \lambda/2$. □

6.2 Bilineare Ljapunov Funktionen

Wir wollen uns nun mit einer speziellen Klasse von Ljapunov Funktionen beschäftigen, bei denen V durch eine Bilinearform der Form $x^T B x$ dargestellt wird, wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Wir erinnern daran, dass eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *positiv definit* heißt, falls $x^T B x > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Das folgende Lemma fasst zwei Eigenschaften bilinearer Abbildungen zusammen.

Lemma 6.3 Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: (i) Es existiert eine Konstante $c_2 > 0$, so dass

$$-c_2 \|x\|^2 \leq x^T B x \leq c_2 \|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) B ist positiv definit genau dann, wenn eine Konstante $c_1 > 0$ existiert mit

$$c_1 \|x\|^2 \leq x^T B x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Aus der Bilinearität folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und $y = x/\|x\|$ die Gleichung

$$x^T B x = \|x\|^2 y^T B y. \tag{6.7}$$

Da $y^T B y$ eine stetige Abbildung in $y \in \mathbb{R}^n$ ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$ ein Maximum c_{\max} und ein Minimum c_{\min} an.

(i) Die Ungleichung (i) folgt nun aus (6.7) mit $c_2 = \max\{c_{\max}, -c_{\min}\}$.

(ii) Falls B positiv definit ist, ist $c_{\min} > 0$, und (ii) folgt mit $c_1 = c_{\min}$. Andererseits folgt die positive Definitheit von B sofort aus (ii), also erhalten wir die behauptete Äquivalenz. □

Als sofortige Folgerung aus Lemma 6.3 erhalten wir die folgende Aussage.

Lemma 6.4 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c_3 > 0$ so, dass die Funktion $V(x) = x^T B x$ für die Lösungen $x(t; x_0)$ der homogenen Gleichung (3.1) mit Matrix A die Bedingung

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(x(t; x_0)) \leq -c_3 \|x_0\|^2$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dann gilt: Falls B positiv definit ist, so ist V eine quadratische Ljapunov Funktion. Insbesondere ist A exponentiell stabil.

Das folgende Lemma zeigt, dass, falls die Ableitungsbedingung erfüllt ist, die positive Definitheit von B sogar äquivalent zur exponentiellen Stabilität von A ist.

Lemma 6.5 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c_3 > 0$ so, dass die Funktion $V(x) = x^T B x$ für die Lösungen $x(t; x_0)$ der homogenen Gleichung (3.1) mit Matrix A die Bedingung

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(x(t; x_0)) \leq -c_3 \|x_0\|^2$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dann gilt: B ist positiv definit genau dann, wenn A exponentiell stabil ist.

Beweis: Sei B positiv definit. Dann folgt die exponentielle Stabilität von A sofort aus Lemma 6.4.

Sei nun B nicht positiv definit. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \neq 0$ und $V(x_0) \leq 0$. Aus der Ableitungsbedingung folgt (da die Lösung $x(t; x_0)$ mit $x_0 \neq 0$ nach Lemma 3.7 niemals 0 werden kann), dass $V(x(t; x_0))$ streng monoton fällt. Insbesondere gibt es also ein $c > 0$, so dass $V(x(t; x_0)) \leq -c$ für alle $t \geq 1$. Mit der ersten Abschätzung aus Lemma 6.3(i) folgt dann

$$\|x(t; x_0)\|^2 \geq c/c_2 > 0 \text{ für alle } t \geq 1.$$

Also konvergiert $x(t; x_0)$ nicht gegen den Nullpunkt, weswegen A nicht exponentiell stabil ist. \square

Wir können das Ableitungskriterium vereinfachen, indem wir die explizite Verwendung der Lösungen vermeiden. Das folgende Lemma gibt solche Kriterien.

Lemma 6.6 Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Seien $x(t; x_0)$ die Lösungen der zu A gehörigen homogenen linearen Differentialgleichung (3.1). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- (i) $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(x(t; x_0)) \leq -c_3 \|x_0\|^2$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $c_3 > 0$
- (ii) $DV(x)Ax \leq -c_3 \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $c_3 > 0$, wobei $DV(x) \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von V (geschrieben als Zeilenvektor) nach x bezeichnet

Ist V von der Form $V(x) = x^T B x$ für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so sind (i) und (ii) auch äquivalent zu

- (iii) Die Matrix $C = -A^T B - B A$ ist positiv definit.

Beweis: Zum Beweis der behaupteten Äquivalenzen schreiben wir kurz $x(t) = x(t; x_0)$. Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) folgt dann durch Verwendung der Kettenregel und Ausnutzung der Differentialgleichung (3.1), nach welcher gilt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = DV(x(t))\frac{d}{dt}x(t) = DV(x(t))Ax(t).$$

Zum Beweis der Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (iii) erhalten wir mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{d}{dt}(x(t)^T Bx(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^T Bx(t) + x(t)^T B\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \\ &= (Ax(t))^T Bx(t) + x(t)^T B Ax(t) \\ &= x(t)^T (A^T B + BA)x(t) = -x(t)^T Cx(t). \end{aligned}$$

Bedingung (i) ist also äquivalent zu

$$x^T Cx \geq c_3 \|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen Lemma 6.3 (ii) ist diese Bedingung genau dann für ein $c_3 > 0$ erfüllbar, wenn C positiv definit ist. \square

Die Gleichung in Lemma 6.6 (iii) wird auch *Ljapunov Gleichung* genannt. Es liegt nun nahe, diese Gleichung zur Konstruktion von Ljapunov Funktionen zu verwenden. Die Frage ist, wann kann man zu einer gegebenen Matrix A und einer gegebenen positiv definiten Matrix C eine Matrix B finden, so dass $A^T B + BA = -C$ gilt? Das folgende Lemma beantwortet diese Frage.

Lemma 6.7 Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Ljapunov Gleichung

$$A^T B + BA = -C \tag{6.8}$$

genau dann eine (sogar eindeutige) positiv definite Lösung $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn A exponentiell stabil ist, d.h., falls die Realteile aller Eigenwerte λ_i von A negativ sind.

Beweis: Falls eine positiv definite Lösung B von (6.8) existiert, erfüllt die Funktion $V(x) = x^T Bx$ wegen Lemma 6.6 die Ableitungsbedingung aus Lemma 6.6 (i). Nach Lemma 6.4 ist V damit eine quadratische Ljapunov Funktion und A exponentiell stabil.

Sei umgekehrt A exponentiell stabil und C positiv definit. Wir zeigen zunächst, dass (6.8) lösbar ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass A in Jordan'scher Normalform vorliegt, denn für $\tilde{A} = P^{-1}AP$ sieht man leicht, dass B (6.8) genau dann löst, wenn $\hat{B} = (P^{-1})^T B P^{-1}$ die Gleichung

$$\tilde{A}^T \hat{B} + \hat{B} \tilde{A} = -(P^{-1})^T C P^{-1}$$

löst. Wir können also annehmen, dass A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

ist, wobei die α_i gerade Eigenwerte von A sind und die β_i entweder 0 oder 1 sind. Schreibt man die Spalten von B untereinander in einen Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^{n^2}$, und macht das gleiche für die Matrix C und einen Vektor c , so ist (6.8) äquivalent zu einem Gleichungssystem

$$\bar{A}b = c,$$

mit einer geeigneten Matrix $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$. Falls A in der Form (6.9) ist, sieht man durch Nachrechnen der Koeffizienten, dass \bar{A} eine untere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \bar{\alpha}_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bar{\alpha}_{n-1} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & \bar{\alpha}_n \end{pmatrix},$$

wobei $*$ beliebige Werte bezeichnet, und die $\bar{\alpha}_i$ von der Form $\bar{\alpha}_i = \lambda_j + \lambda_k$ für Eigenwerte der Matrix A sind. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass

- (i) bei einer Dreiecksmatrix die Elemente auf der Diagonalen gerade die Eigenwerte sind
- (ii) eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Eigenwerte ungleich Null sind.

Da alle λ_i negativen Realteil haben, sind die $\bar{\alpha}_i$ alle ungleich Null, also ist die Matrix \bar{A} wegen (i) und (ii) invertierbar. Demnach gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems $\bar{A}b = c$ und damit genau eine Lösung B der Ljapunov Gleichung (6.8).

Es bleibt zu zeigen, dass diese Lösung B positiv definit ist. Dies könnte man auf algebraische Weise zeigen, kürzer und eleganter geht es allerdings mit Lemma 6.5: Wegen Lemma 6.6 erfüllt B alle Voraussetzungen dieses Lemmas. Da A zudem exponentiell stabil ist, muss B also positiv definit sein. \square

Der folgende Satz fasst das Hauptresultat dieses Kapitels zusammen.

Satz 6.8 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: Eine quadratische Ljapunov Funktion für die homogene Differentialgleichung (3.1) existiert genau dann, wenn die Matrix A exponentiell stabil ist.

Beweis: Sei eine quadratische Ljapunov Funktion V gegeben. Dann ist A nach Satz 6.2 exponentiell stabil.

Sei A umgekehrt exponentiell stabil. Dann existiert nach Lemma 6.7 eine positiv definite Matrix B , die die Ljapunov Gleichung (6.8) für eine positiv definite Matrix C löst.

Wegen Lemma 6.6 und Lemma 6.4 ist $V(x) = x^T Bx$ dann eine quadratische Ljapunov Funktion. \square

Die Existenz einer quadratischen Ljapunov Funktion ist also eine notwendige und hinreichende Bedingung für die exponentielle Stabilität von A und liefert damit eine Charakterisierung, die äquivalent zu der Eigenwertbedingung aus Satz 4.7 ist.

Kapitel 7

Linearisierung

Im Beispiel in Abschnitt 4.1 haben wir zunächst eine nichtlineare Differentialgleichung für das Pendelmodell hergeleitet und dann mit heuristischen Argumenten lineare Modelle abgeleitet, für die wir dann die Stabilität untersucht haben. In diesem Kapitel werden wir dieses Verfahren mathematisch begründen. Wir werden uns dabei auf einige wesentliche Eigenschaften beschränken, die für unsere Stabilitätsanalyse wichtig sind. Tatsächlich kann man für Linearisierungen viel mehr beweisen, worauf wir aus Zeitgründen allerdings verzichten müssen.

7.1 Die linearisierte Differentialgleichung

Wir betrachten nun eine allgemeine autonome (d.h. nicht zeitabhängige) nichtlineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \quad (7.1)$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung ist. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass für jeden Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y(t; y_0)$ existiert, die (7.1) sowie die Anfangsbedingung $y(0; y_0) = y_0$ (1.3) erfüllt. Im Gegensatz zu unserer linearen Gleichung (3.1) muss diese aber nicht für alle positiven Zeiten $t > 0$ existieren, sondern es kann sein, dass die Lösung nur auf einem beschränkten Zeitintervall existiert (siehe z.B. Abschnitt 2.4 in B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997).

Wir erinnern an die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siehe z.B. O. Forster, *Analysis II*.

Definition 7.1 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt $y^* \in \mathbb{R}^n$, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, so dass für alle y aus einer Umgebung N der 0 gilt

$$f(y^* + y) = f(y^*) + Ay + \varphi(y),$$

wobei $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion ist mit

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{\|y\|} \rightarrow 0.$$

Die Abbildung A heißt die *Ableitung* von f in y^* und wird auch mit $Df(y^*)$ bezeichnet. Die zugehörige Matrix wird *Jacobi-Matrix* genannt. \square

Sei nun $y^* \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewichtspunkt der Gleichung (7.1) gemäß Definition 4.1. Für y^* gilt dann $f(y^*) = 0$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $y^* = 0$ gilt, andernfalls können wir die rechte Seite $f(y)$ durch $f(y + y^*)$ ersetzen (die Lösungskurven werden dadurch nur „verschoben“).

Falls f nun in $y^* = 0$ differenzierbar ist, so existiert nach Definition 7.1 eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung N von $y^* = 0$ mit

$$f(y) = Ay + \varphi(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{\|y\|} \rightarrow 0.$$

Die Abbildung A fassen wir im Folgenden stets als Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf, womit die Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{7.2}$$

eine lineare Differentialgleichung vom Typ (3.1) ist. Die Gleichung (7.2) wird als *Linearisierung* von (7.1) im Punkt $y^* = 0$ bezeichnet.

7.2 Approximation der Lösungstrajektorien

Unser Ziel ist es nun, die Differentialgleichung (7.1) mit ihrer Linearisierung (7.2) zu vergleichen, natürlich in der Hoffnung, dass die Lösungen $x(t; y_0)$ von (7.2) die Lösungen $y(t; y_0)$ von (7.1) in geeigneter Weise approximieren. Der folgende Satz zeigt, dass dies in einer Umgebung von $y^* = 0$ tatsächlich der Fall ist.

Satz 7.2 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (7.1) mit Gleichgewicht $y^* = 0$ und ihre Linearisierung (7.2). Bezeichne die zugehörigen Lösungen mit $y(t; y_0)$ und $x(t; y_0)$. Seien $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jeden Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|y(t; y_0) - x(t; y_0)\| \leq \varepsilon \|y_0\|$$

gilt für alle $t \in [0, T]$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die folgende Eigenschaft der Lösungen von (7.1):

$$\begin{aligned} &\text{Für jedes } T > 0 \text{ existieren ein } \delta > 0 \text{ und ein } \alpha > 0, \text{ so dass } \|y(t; y_0)\| \leq \alpha \|y_0\| \\ &\text{gilt für alle Anfangswerte } y_0 \text{ mit } \|y_0\| \leq \delta \text{ und alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (7.3) beachte, dass aus der Lipschitz Stetigkeit von f die Abschätzung

$$\|f(y)\| \leq L \|y\| \tag{7.4}$$

folgt für eine geeignete Konstante $L > 0$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| \leq 1$. Zu dem gegebenen $T > 0$ setzen wir nun $\delta = e^{-LT}$. Die Behauptung ist nun, dass für dieses $\delta > 0$ die

Eigenschaft (7.3) erfüllt ist. Wähle dazu einen Anfangswert y_0 mit $\|y_0\| \leq \delta$. Sei $t_0 > 0$ die minimale Zeit mit $y(t_0; y_0) \geq 1$. Wir zeigen zunächst, dass $t_0 \geq T$ gilt. Für $t \in [0, t_0]$ gilt die Ungleichung

$$\left\| \frac{d}{dt} y(t; y_0) \right\| = \|f(y(t; y_0))\| \leq L \|y(t; y_0)\|,$$

also gilt wegen $|x^T y| \leq \|x\| \|y\|$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt} \|y(t; y_0)\|^2 = 2y(t; y_0)^T f(y(t; y_0)) \leq 2L \|y(t; y_0)\|^2.$$

Analog zum Beweis von Satz 6.2 folgt damit die Abschätzung

$$\|y(t; y_0)\| \leq e^{Lt} \|y_0\|, \quad (7.5)$$

und daraus nach Wahl von t_0

$$1 \leq \|y(t_0; y_0)\| \leq e^{Lt_0} \|y_0\| \leq e^{Lt_0} \delta \leq e^{Lt_0} e^{-LT} = e^{L(t_0 - T)},$$

also $e^{L(t_0 - T)} \geq 1$. Da $L > 0$ ist, muss $t_0 \geq T$ sein, was zu zeigen war. Die behauptete Eigenschaft (7.3) folgt nun sofort aus (7.5) mit $\alpha = e^{LT}$.

Wir beweisen nun die Aussage des Satzes und wählen dazu $\varepsilon > 0$ und $T > 0$. Sei $D = \max_{t \in [0, T]} \|e^{At}\|$ und seien $\delta > 0$ und $\alpha > 0$ aus Eigenschaft (7.3), d.h. es gelte

$$\|y(t; y_0)\| \leq \alpha \|y_0\|$$

für alle $\|y_0\| \leq \delta$ und alle $t \in [0, T]$. Aus der Eigenschaft von φ folgt, dass ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert mit

$$\|\varphi(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \|y\|$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| \leq \tilde{\delta}$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\delta \leq \tilde{\delta}$ und $\delta \leq \tilde{\delta}/\alpha$. Wir wählen nun einen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \leq \delta$. Setzen wir $g(t) = \varphi(y(t; y_0))$, so erfüllt die zugehörige Lösung $y(t; y_0)$ von (7.1) für $t \in [0, T]$ offenbar die nichtautonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t).$$

Mit der allgemeinen Form der Lösung dieser Gleichung aus Satz 3.3 gilt

$$y(t; y_0) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s) ds = x(t; y_0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \varphi(y(s; y_0)) ds.$$

Also folgt

$$\|x(t; y_0) - y(t; y_0)\| \leq \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} \varphi(y(s; y_0)) ds \right\|$$

für alle $t \in [0, T]$. Dieser Integraalausdruck lässt sich abschätzen mittels

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} \varphi(y(s; y_0)) ds \right\| &\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)} \varphi(y(s; y_0))\| ds \\ &\leq DT \sup_{s \in [0, T]} \varphi(\underbrace{y(s; y_0)}_{\|\cdot\| \leq \alpha \|y_0\| \leq \tilde{\delta}}) \leq DT \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \alpha \|y_0\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

was die Behauptung liefert. \square

7.3 Stabilität und Linearisierung

Leider liefert Satz 7.2 keine Möglichkeit, direkt Stabilitätseigenschaften zu untersuchen, da die Menge der Anfangswerte, für die er gilt, von der gewählten Zeit T abhängt. Eine Aussage für $T \rightarrow \infty$ ist also nicht so ohne weiteres zu erhalten.

Um Aussagen über Stabilität zu erhalten, müssen wir nun andere Techniken verwenden. Wir werden dabei wiederum das Konzept der Ljapunov-Funktion verwenden.

Definition 7.3 Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $y(t; x_0)$ die Lösungen des zugehörigen nichtlinearen Anfangswertproblems (7.1), (1.3). Eine stetig differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt *lokale (quadratische) Ljapunov Funktion*, falls positive reelle Konstanten $\gamma, c_1, c_2, c_3 > 0$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(y(t; y_0)) \leq -c_3 \|y_0\|^2$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $V(y_0) \leq \gamma$ gelten. □

Analog zum linearen Fall können wir zeigen, dass die Existenz einer lokalen quadratischen Ljapunov Funktion lokale exponentielle Stabilität impliziert.

Satz 7.4 Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $y(t; x_0)$ die Lösungen des zugehörigen nichtlinearen Anfangswertproblems (7.1), (1.3). Dann gilt: Falls eine lokale quadratische Ljapunov Funktion mit Konstanten $\gamma, c_1, c_2, c_3 > 0$ existiert, so erfüllen alle Lösungen die Abschätzung

$$\|y(t; y_0)\| \leq ce^{-\sigma t} \|y_0\|$$

für $\sigma = c_3/2c_2$ und $c = \sqrt{c_2/c_1}$, und alle Anfangswerte y_0 mit $V(y_0) \leq \gamma$, d.h. das Gleichgewicht $y^* = 0$ ist lokal exponentiell stabil.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 6.2 sieht man, dass die Ableitungsbedingung in Definition (7.3) die Ungleichung

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} V(y(t; y_0)) \leq -c_3 \|y(t_0, y_0)\|^2 \tag{7.6}$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t_0 \geq 0$ mit $\|y(t_0, y_0)\| \leq \gamma$ impliziert.

Wir zeigen nun zunächst, dass alle Trajektorien $y(t; y_0)$ mit Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $V(y_0) \leq \gamma$ für alle positiven Zeiten die Bedingung $V(y(t; y_0)) \leq \gamma$ erfüllen. Wir nehmen an, dass es eine Zeit T gibt, so dass $V(y(T; y_0)) > \gamma$ ist. Dann gibt es eine Zeit $t_0 \geq 0$ mit $V(y(t_0; y_0)) = \gamma$ und $V(y(t; y_0)) > \gamma$ für alle $t \in (t_0, T]$. Also folgt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} V(y(t; y_0)) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{V(y(t_0 + h; y_0)) - V(y(t_0; y_0))}{h} \geq 0,$$

was aber (7.6) widerspricht, da $y(t_0; y_0)$ wegen $V(y(t_0; y_0)) = \gamma > 0$ nicht gleich 0 ist.

Für alle y_0 mit $V(y_0) \leq \gamma$ erhalten wir somit für $\lambda = c_3/c_2$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}V(y(t; y_0)) \leq -\lambda V(y(t; y_0))$$

und die exponentielle Stabilität ergibt sich genau wie im Beweis von Satz 6.2. \square

Der folgende Satz zeigt die Beziehung zwischen der exponentiellen Stabilität der nichtlinearen Gleichung (7.1) in $y^* = 0$ und ihrer Linearisierung (7.2).

Satz 7.5 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (7.1) mit Gleichgewicht $y^* = 0$ und ihre Linearisierung (7.2). Dann ist das Gleichgewicht $y^* = 0$ lokal exponentiell stabil für Gleichung (7.1) genau dann, wenn es global exponentiell stabil für Gleichung (7.2) ist.

Beweis: Sei Gleichung (7.2) exponentiell stabil. Aus Satz 6.8 folgt dann die Existenz einer bilinearen Ljapunov Funktion $V(x) = x^T Bx$. Sei nun $y(t; y_0)$ die Lösung der nichtlinearen Gleichung (7.1). Dann gilt wegen $f(y) = Ay + \varphi(y)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} V(y(t; y_0)) \right|_{t=0} &= y(t; y_0)^T B f(y(t; y_0)) + f(y(t; y_0))^T B y(t; y_0) \Big|_{t=0} \\ &= y_0^T B f(y_0) + f(y_0)^T B y_0 \\ &= y_0^T B A y_0 + y_0^T A^T B y_0 + y_0^T B \varphi(y_0) + \varphi(y_0)^T B y_0 \\ &\leq -c_3 \|y_0\|^2 + c_4 \|\varphi(y_0)\| \|y_0\| \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $c_4 > 0$ und alle hinreichend kleinen $y \in \mathbb{R}^n$. Aus der Differenzierbarkeitseigenschaft folgt, dass $\|\varphi(y)\| \leq \frac{c_3}{2c_4} \|y\|$ ist, ebenfalls für alle hinreichend kleinen $y \in \mathbb{R}^n$. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \leq \delta$ die Ungleichung

$$\left. \frac{d}{dt} V(y(t; y_0)) \right|_{t=0} \leq -\frac{c_3}{2} \|y_0\|^2 \quad (7.7)$$

gilt. Da V die Normabschätzungen einer Ljapunov Funktion erfüllt, gibt es $c_1 > 0$ mit $c_1 \|x\|^2 \leq V(x)$. Mit $\gamma = c_1 \delta^2$ erhalten wir also die Implikation $V(x) \leq \gamma \Rightarrow \|x\| \leq \sqrt{V(x)/c_1} \leq \delta$. Folglich gilt (7.7), falls $V(y_0) \leq \gamma$. Somit ist V eine lokale Ljapunov Funktion für (7.1) und die exponentielle Stabilität folgt aus Satz 7.4.

Sei umgekehrt Gleichung (7.1) exponentiell stabil. Dann gibt es insbesondere ein $T > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für alle $\|y_0\| \leq \delta$ die Ungleichung

$$\|y(T; y_0)\| \leq \frac{1}{2} \|y_0\|$$

gilt. Aus Satz 7.2 angewendet mit $\varepsilon = 1/4$ folgt nun, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Lösungen der linearen Gleichung (7.1) für alle Anfangswerte y_0 mit $\|y_0\| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|x(T; y_0)\| \leq \frac{3}{4} \|y_0\|$$

erfüllen. Beachte, dass für jedes $\alpha > 0$ die Gleichung

$$\|e^{At}\| = \sup_{\|x\|=\alpha} \frac{\|e^{At}x\|}{\alpha}$$

gilt. Also folgt für $\alpha = \delta$

$$\|e^{At}\| = \sup_{\|x\|=\delta} \frac{\|e^{At}x\|}{\delta} \leq \frac{3}{4}.$$

Aus Lemma 4.9 folgt damit die exponentielle Stabilität der linearen Gleichung. \square

Wir formulieren zwei Korollare, die sich aus den Ergebnissen ergeben.

Korollar 7.6 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (7.1) mit Gleichgewicht $y^* = 0$. Dann ist $y^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ negativen Realteil haben.

Beweis: Nach Satz 7.5 ist $y^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil, wenn die Linearisierung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $A = Df(0)$ exponentiell stabil ist. Nach Satz 4.7 ist dies genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil besitzen. \square

Korollar 7.7 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (7.1) mit Gleichgewicht $y^* = 0$. Dann ist $y^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil, wenn eine lokale quadratische Ljapunov Funktion existiert.

Beweis: Nach Satz 7.4 impliziert die Existenz einer lokalen quadratischen Ljapunov Funktion die lokale exponentielle Stabilität.

Falls umgekehrt $y^* = 0$ lokal exponentiell stabil ist, ist die Linearisierung exponentiell stabil, und nach Satz 6.8 existiert eine bilineare (also insbesondere quadratische) Ljapunov Funktion für (7.2). Aus dem ersten Teil des Beweises von Satz 7.5 folgt, dass dies eine lokale quadratische Ljapunov Funktion für (7.1) in $y^* = 0$ ist. \square

Für lineare Systeme wissen wir, dass exponentielle und asymptotische Stabilität äquivalent sind. Für nichtlineare Systeme ist das nicht der Fall. Insbesondere gilt Satz 7.5 nicht, falls wir für das nichtlineare System (7.1) nur asymptotische Stabilität voraussetzen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 7.8 Betrachte die nichtlineare eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -y(t)^3.$$

Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass die Lösungen dieser Gleichung gegeben sind durch

$$y(t; y_0) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}} \text{ falls } y_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad y(t; y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}} \text{ falls } y_0 \leq 0.$$

Man sieht leicht, dass das Gleichgewicht $y^* = 0$ tatsächlich asymptotisch stabil ist (sogar global asymptotisch stabil).

Die Linearisierung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = 0$$

und offenbar ist diese Gleichung zwar stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil. \square

Kapitel 8

Lineare Kontrollsysteme

Wir wollen nun unsere lineare Differentialgleichung (3.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem sogenannten *linearen Kontrollsystem* erweitern. Dieses ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8.1}$$

mit A und $x(t)$ wie oben und $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Der Ausdruck „Kontrollsystem“ hat sich für diese Art Gleichungen im deutschen Sprachgebrauch etabliert, obwohl er eine eher schlechte Übersetzung des englischen Begriffs „control system“ ist. Tatsächlich geht es hier um Kontrolle im Sinn von Steuerung oder Regelung und nicht im Sinne von Überwachung. Oftmals—vor allem in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur—wird daher auch der Begriff Regelungssystem, manchmal auch Steuersystem verwendet. Wir wollen hier aber trotzdem bei dem in der mathematischen Theorie üblichen Begriff Kontrollsystem bleiben.

Zunächst einmal stellt (8.1) nichts anderes als eine nichtautomone lineare Differentialgleichung vom Typ (3.2) dar, allerdings mit der speziellen Struktur $g(t) = Bu(t)$. Nach Satz 3.3 sind die Lösungen des zugehörigen Anfangswertproblems (8.1), (1.3) gegeben durch

$$x(t, t_0, x_0, u) = e^{-At_0} e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds. \tag{8.2}$$

Der Ausdruck „Kontrollsystem“ erklärt sich nun dadurch, dass die Funktion u in (8.1) als Kontroll- oder Steuerfunktion aufgefasst wird, die von außen frei vorgegeben werden kann und durch deren Wahl man das Verhalten der Lösungskurven von (8.1) beeinflussen kann. Deswegen wird diese Funktion—wie in (8.2)—üblicherweise explizit als Parameter der Lösungskurve angeben. In dieser Vorlesung wollen wir uns in den nächsten Wochen mit dem Stabilisierungsproblem beschäftigen, d.h., wir wollen u so wählen, dass das gesteuerte System asymptotisch stabil wird.

In der Analyse inhomogener gewöhnlicher Differentialgleichungen hatten wir angenommen, dass $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist. Um einen brauchbaren Lösungsbegriff für das System (8.1) zu bekommen, ist diese Einschränkung nicht unbedingt notwendig. Tatsächlich

reicht es, die Funktion u so zu wählen, dass das Integral in (8.2) (im Sinne von Lebesgue) existiert. Im Allgemeinen wählt man deswegen für Kontrollsysteme die Funktion u als lokal integrierbare Funktion. Man kann dann beweisen, dass (8.2) auch für diese allgemeinere Klasse von Funktionen u die Lösungen beschreibt. Für uns ist die Frage der Struktur von u aber zweitrangig, weil wir uns für unser Stabilisierungsproblem auf eine ganz andere Form der Kontrollfunktion konzentrieren wollen, wie sie im nun folgenden Abschnitt eingeführt wird.

8.1 Zustandsfeedback

In der Praxis ist man oft nicht daran interessiert, eine Steuerfunktion u abhängig von der Zeit zu berechnen. Der Hauptgrund dafür liegt beim Stabilisierungsproblem darin, dass das Problem für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ gelöst werden muss. Kleine Fehler in der Berechnung von u (die z.B. auftreten können, weil die mathematische Gleichung (8.1) das „echte“ Modell nur annäherungsweise beschreibt) können sich aufsummieren oder sogar aufschaukeln, so dass das tatsächliche Verhalten für große t mit dem vorausgerechneten Verhalten nur schlecht oder überhaupt nicht übereinstimmt.

Statt eine Funktion $u(t)$ zu berechnen, versucht man daher, eine Kontroll- oder Regelstrategie zu entwerfen, die den Kontrollwert $u(t)$ zur Zeit t abhängig vom aktuellen Zustand $x(t)$ bestimmt. Formal konstruiert man dazu eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und setzt $u(t) = F(x(t))$. Aus dem Kontrollsystem (8.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

erhält man so die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BF(x(t)). \quad (8.3)$$

Gleichung (8.3) wird als *rückgekoppeltes* oder *closed-loop* System bezeichnet, die Abbildung F wird *Zustandsfeedback* genannt. In der Praxis kann diese Abbildung z.B. durch eine elektronische Schaltung oder durch eine Computersteuerung realisiert werden.

Es stellt sich nun die Frage, aus welcher Funktionsklasse die Funktion F gewählt werden soll. Im Prinzip hat man dabei viele verschiedene Möglichkeiten. Für unser lineares Kontrollsystem (8.1) liegt es nahe, auch die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als lineare Abbildung zu wählen. Fassen wir F als Matrix auf, so erhalten wir

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) = (A + BF)x(t)$$

Dass dies nicht nur intuitiv naheliegend ist, sondern auch gute mathematische Gründe hat, werden wir im Abschnitt 8.2 sehen.

Das Stabilisierungsproblem, mit dem wir uns im Folgenden befassen werden, lässt sich damit wie folgt formulieren.

Definition 8.1 Gegeben sei ein lineares Kontrollsystem (8.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Das (*Feedback-*) *Stabilisierungsproblem* für (8.1) besteht darin, eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. die dazugehörige Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$) zu finden, so dass die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

asymptotisch stabil ist. □

Aus unseren Kriterien für asymptotische Stabilität kann man leicht das folgende Lemma ableiten.

Lemma 8.2 Gegeben seien zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann löst die Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ das Stabilisierungsproblem, falls alle Eigenwerte der Matrix $A + BF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ negativen Realteil haben.

Wir werden uns im weiteren Verlauf vor allem mit der Frage beschäftigen, wann—zu gegebenen Matrizen A und B —eine solche Matrix F existiert.

Beispiel 8.3 Als erstes Beispiel für ein Kontrollsystem betrachten wir ein (sehr einfaches) Modell für eine Heizungsregelung. Nehmen wir an, dass wir die Temperatur x_1 in einem Raum an einem festgelegten Messpunkt regeln wollen. Der Einfachheit halber sei die gewünschte Temperatur auf $x_1^* = 0$ normiert. In dem Raum befindet sich ein Heizkörper mit Temperatur x_2 , auf die wir mit der Kontrolle u Einfluss nehmen können. Die Veränderung von x_2 sei durch die Differentialgleichung $\dot{x}_2(t) = u(t)$ beschrieben, d.h. die Kontrolle u regelt die Zunahme (falls $u > 0$) bzw. Abnahme (falls $u < 0$) der Temperatur. Für die Temperatur x_1 im Messpunkt nehmen wir an, dass sie der Differentialgleichung $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$ genügt, d.h. für konstante Heiztemperatur x_2 ergibt sich

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + (1 - e^{-t})x_2.$$

Mit anderen Worten nehmen wir an, dass die Raumtemperatur x_1 im Messpunkt exponentiell gegen die Temperatur des Heizkörpers konvergiert.

Aus diesem Modell erhalten wir das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Eine naheliegende Regelstrategie ergibt sich nun wie folgt: Falls $x_1 > x_1^* = 0$ ist, so vermindern wir die Temperatur in x_2 , d.h., wir wählen $u < 0$. Im umgekehrten Fall, d.h. falls $x_1 < x_1^* = 0$ ist, erhöhen wir die Temperatur und setzen $u > 0$. Da unser Feedback linear sein soll, lässt sich dies durch die Wahl $F(x) = -\lambda x_1$ für ein $\lambda > 0$ erreichen, oder, in Matrix-Schreibweise $F = (-\lambda, 0)$ (beachte, dass hier $n = 2$ und $m = 1$ ist, F also eine 1×2 -Matrix bzw. ein 2-dimensionaler Zeilenvektor ist). Damit erhalten wir das rückgekoppelte System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Berechnet man die Eigenwerte für $\lambda > 0$, so sieht man, dass alle Realteile negativ sind. Wir haben also (ohne es zu wollen) das Stabilisierungsproblem gelöst und folglich konvergieren $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für alle beliebige Anfangswerte exponentiell schnell gegen 0, insbesondere konvergiert x_1 exponentiell schnell gegen die gewünschte Temperatur $x_1^* = 0$. Damit haben wir bewiesen, dass unser von Hand konstruierter Regler tatsächlich das gewünschte Ergebnis erzielt.

Falls wir die Temperatur x_2 am Heizkörper messen können, so können wir auch $F(x) = -\lambda x_2$, bzw. in Matrix-Schreibweise $F = (0, -\lambda)$ setzen. Wiederum sieht man durch Betrachtung der Eigenwerte, dass das rückgekoppelte System für alle $\lambda > 0$ exponentiell stabil ist und damit das gewünschte Verhalten erzielt wird. Das Verhalten dieses Systems mit den zwei verschiedenen Feedbacks ist allerdings recht unterschiedlich. Wir werden dies in den Übungen genauer untersuchen. \square

Bemerkung 8.4 In der Praxis ist der Zustand $x(t)$ eines Systems oft nicht direkt messbar, stattdessen hat man nur Zugriff auf einen Ausgangsvektor $y = Cx$ für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$. In diesem Fall kann ein Feedback F nur vom Ausgangsvektor y abhängen, man spricht von einem *Ausgangsfeedback*. Das Stabilisierungsproblem besteht dann darin, eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times d}$ zu finden, so dass die Matrix $A + BFC$ asymptotisch stabil ist.

Tatsächlich haben wir im obigen Beispiel so etwas Ähnliches gemacht, indem wir zur Konstruktion von F nur die „Information“ aus der Variablen x_1 bzw. x_2 verwendet haben. Aus Zeitmangel können wir auf diesen allgemeineren Fall in der folgenden mathematischen Behandlung des Problems nicht näher eingehen. \square

8.2 Linearisierung von Kontrollsystemen

Bevor wir uns eingehender mit der Lösbarkeit des Stabilisierungsproblem aus Definition 8.1 befassen, wollen wir uns noch kurz mit der Struktur der Feedback-Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ befassen. Genauer werden wir begründen, warum die Wahl von F als lineare Abbildung sinnvoll ist.

Wir haben in Satz 7.5 gesehen, dass das Gleichgewicht $y^* = 0$ einer nichtlinearen Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t))$$

genau dann lokal exponentiell stabil ist, wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ ihrer Linearisierung

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = Df(0)$$

global exponentiell stabil ist.

Ein allgemeines nichtlineares Kontrollsystem ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \tag{8.4}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass für $u = 0$ der Punkt $y^* = 0$ ein Gleichgewicht ist, d.h. $f(0, 0) = 0$. Nehmen wir weiterhin an, dass die Abbildung f in $(y^*, u^*) = (0, 0)$

sowohl nach y als auch nach u differenzierbar ist, so können wir die Linearisierung von (8.4) definieren als

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.5)$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u) \quad \text{und} \quad B = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u).$$

Das folgende Lemma zeigt, wie diese Linearisierungen für lineares Feedback F zusammenhängen.

Lemma 8.5 Betrachte ein nichtlineares Kontrollsystem (8.4) und seine Linearisierung (8.5). Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

ist die Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t), Fy(t))$$

in $y^* = 0$ im Sinne von Abschnitt 7.1.

Beweis: Wir müssen nachweisen, dass

$$\left. \frac{d}{dy} \right|_{y=0} f(y, Fy) = A + BF$$

gilt. Sei dazu $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gegeben durch $G(y) = (y, Fy)$, wobei wir (y, Fy) als $(n + m)$ -dimensionalen Spaltenvektor interpretieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dy} f(y, Fy) \right|_{y=0} &= \left. \frac{d}{dy} f(G(y)) \right|_{y=0} \\ &= \left. \frac{d}{d(y, u)} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) \left. \frac{d}{dy} G(y) \right|_{y=0} \\ &= \left(\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) \quad \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) \right) \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ F \end{pmatrix} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) + \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) F \end{aligned}$$

Für $y = 0$ erhalten wir $G(y) = (0, 0)$, also

$$\left. \frac{d}{dy} \right|_{y=0} f(y, Fy) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u) + \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u) F = A + BF,$$

was zu zeigen war. □

Der folgende Satz folgt direkt aus Lemma 8.5 und Satz 7.5.

Satz 8.6 Ein nichtlineares Kontrollsystem (8.4) ist lokal exponentiell stabilisierbar durch ein lineares Feedback genau dann, wenn seine Linearisierung (8.5) global exponentiell stabilisierbar durch ein lineares Feedback ist. Darüberhinaus ist das Gleichgewicht $y^* = 0$ der Gleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t), Fy(t))$$

lokal exponentiell stabil für jedes lineare Feedback F , das das (lineare) Stabilisierungsproblem aus Definition 8.1 löst.

Mit Hilfe der linearen Struktur des Feedbacks F ergibt sich also, dass wir nichtlineare Stabilisierungsprobleme lokal lösen können, indem wir lineare Stabilisierungsprobleme lösen.

Kapitel 9

Lösung des Stabilisierungsproblems

In diesem Kapitel werden wir Bedingungen untersuchen, unter denen wir eine Lösung für das Stabilisierungsproblems aus Definition 8.1 finden können. Insbesondere werden wir eine hinreichende und notwendige Bedingung an die Matrizen A und B in (8.1) angeben, unter der das Problem lösbar ist. Die einzelnen Schritte der Herleitung liefern dabei ein konstruktives Verfahren zur Berechnung eines stabilisierenden Feedbacks.

9.1 Kontrollierbarkeit

Wir definieren nun einen zentralen Begriff der linearen Kontrolltheorie.

Definition 9.1 Betrachte ein lineares Kontrollsystem (8.1) mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Das System (bzw. das Matrizenpaar (A, B)) heißt *kontrollierbar*, falls die $n \times nm$ -Matrix

$$R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$$

den Rang n hat. □

Bemerkung 9.2 Der Begriff „kontrollierbar“ kommt daher, dass die Bedingung aus Definition 9.1 äquivalent zu der Eigenschaft ist, dass man für zwei beliebige Punkte $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und zu beliebigem $t > 0$ eine lokal integrierbare Funktion u findet, so dass

$$x(t; x_0, u) = x_1$$

gilt, d.h., das System kann von jedem beliebigen Anfangswert zu jedem beliebigen anderen Punkt „kontrolliert“ werden. Leider können wir auf diesen Aspekt aus Zeitgründen nicht näher eingehen. □

9.2 Das Charakteristische Polynom

In diesem Abschnitt wollen wir einige Fakten über das charakteristische Polynom einer Matrix kurz wiederholen.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dieses definiert durch

$$\chi_A(z) := \det(z\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - A).$$

Als Konvention schreiben wir

$$\chi_A(z) = z^n - \alpha_n z^{n-1} - \dots - \alpha_2 z - \alpha_1$$

für reelle Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Die folgenden Tatsachen werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels benötigen:

- (i) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A sind gerade die Eigenwerte der Matrix A .
- (ii) Es gilt die Gleichung

$$A^n = \alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_2 A + \alpha_1 \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

(Satz von Cayley–Hamilton).

Für die Beweise siehe z.B. G. Fischer, Lineare Algebra, Vieweg Verlag, Satz 5.2.5 und Satz 5.5.1.

9.3 Koordinatentransformationen

Wir werden nun zwei nützliche Koordinatentransformationen für Kontrollsysteme betrachten. Beachte, dass für eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das zu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{9.1}$$

gehörige transformierte System

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \tag{9.2}$$

durch $\tilde{A} = T^{-1}AT$ und $\tilde{B} = T^{-1}B$ gegeben ist. Ein Feedback F für (9.1) wird mittels $\tilde{F} = FT$ in eines für (9.2) transformiert (dies folgt sofort aus der Bedingung $T^{-1}(A + BF)T = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$). Aus R aus Definition 9.1 für (9.1) erhält man \tilde{R} für (9.2) mittels $\tilde{R} = T^{-1}R$. Insbesondere hat R den selben Rang wie \tilde{R} , also ist Kontrollierbarkeit invariant unter Koordinatentransformationen.

Für beliebige Matrix–Paare (A, B) kann man Kontrollierbarkeit im Allgemeinen nicht erwarten. Man kann durch eine geeignete Koordinatentransformation allerdings erreichen, dass das System in einen kontrollierbaren und einen nicht–kontrollierbaren Anteil „zerlegt“ wird. Dies zeigt das folgende Lemma.

Lemma 9.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und sei $d = \text{rk}R < n$ für R aus Definition 9.1, d.h., das Paar (A, B) sei nicht kontrollierbar. Dann gibt es eine Koordinatentransformation T , so dass

$$\tilde{A} := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{B} := T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{d \times m}$ ist und das Paar (A_1, B_1) kontrollierbar ist.

Beweis: Unter der Voraussetzung an den Rang $\text{rk}R$ ist das Bild $V := \text{im}R$ ein echter Unterraum des \mathbb{R}^n mit $\dim V = d < n$. Offenbar ist das Bild $\text{im}B$ von B in V enthalten.

Wir zeigen zunächst, dass V A -invariant ist, d.h., dass $Av \in V$ gilt für jeden Vektor $v \in V$. Aus der Form von R folgt, dass die Vektoren $v \in V$ gerade von der Form $v = B\tilde{v}_1 + \dots + A^{n-1}\tilde{v}_n$ für geeignete Vektoren $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n \in \mathbb{R}^m$ sind. Sei nun $v \in V$ gegeben. Mit obiger Darstellung von v gilt dann $Av = AB\tilde{v}_1 + \dots + A^n\tilde{v}_n$. Aus dem Satz von Cayley–Hamilton folgt, dass $A^n = \alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_1 \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Also ist Av von der Form $Av = B\bar{v}_1 + \dots + A^{n-1}\bar{v}_n$ für geeignete Vektoren $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^n$ und damit wieder in V .

Sei nun v_1, \dots, v_d eine Basis von V die wir mit Vektoren w_1, \dots, w_{n-d} zu einer Basis von \mathbb{R}^n ergänzen. Die Behauptung ist, dass die Matrix $T = (v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_{n-d})$ die gewünschte Transformationsmatrix ist. Zum Beweis dieser Behauptung seien e_1, \dots, e_n die Standard-Basisvektoren des \mathbb{R}^n . Dann gilt $T\langle e_1, \dots, e_d \rangle = V$ und $T^{-1}V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle$. Damit folgt die Struktur von \tilde{A} aus der Invarianz von V :

Falls $[\tilde{A}]_{i,j} \neq 0$ ist für ein $i > d$ und ein $j \leq d$, so folgt

$$\tilde{A}e_j = [\tilde{A}]_{i,j}e_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [\tilde{A}]_{k,j}e_k \notin \langle e_1, \dots, e_d \rangle$$

und damit

$$\tilde{A}\langle e_1, \dots, e_d \rangle \not\subseteq \langle e_1, \dots, e_d \rangle,$$

also

$$AV = T\tilde{A}T^{-1}V = T\tilde{A}\langle e_1, \dots, e_d \rangle \not\subseteq T\langle e_1, \dots, e_d \rangle = V,$$

was der A -Invarianz von V widerspricht.

Die Struktur von \tilde{B} folgt aus der Tatsache, dass $\text{im}B \subseteq V$ gilt, also $\text{im}\tilde{B} \subseteq T^{-1}V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle$, weswegen die letzten $n - d$ Zeilen von \tilde{B} gleich Null sein müssen.

Dass (A_1, B_1) kontrollierbar ist, folgt schließlich aus der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} \dim \text{im}(B_1 A_1 B_1 \dots A_1^{d-1} B_1) &= \dim \text{im}(B_1 A_1 B_1 \dots A_1^{n-1} B_1) \\ &= \dim \text{im}(\tilde{B} \tilde{A} \tilde{B} \dots \tilde{A}^{n-1} \tilde{B}) \\ &= \dim \text{im}T^{-1}R = \dim T^{-1}\text{im}R \\ &= \dim T^{-1}V = \dim \mathbb{R}^d = d \end{aligned}$$

ist, wobei wir in der ersten Gleichung wiederum den Satz von Cayley–Hamilton ausgenutzt haben und die zweite aus der Struktur der Matrizen \tilde{A} und \tilde{B} folgt. Der Rang von $(B_1 A_1 B_1 \dots A_1^{d-1} B_1)$ ist also gleich d , was zu zeigen war. \square

Die zweite Koordinatentransformation, die wir betrachten wollen, gilt für kontrollierbare Systeme, bei denen u eindimensional ist. In diesem Fall haben wir $m = 1$, also $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. die Matrix B ist ein n -dimensionaler Spaltenvektor.

Lemma 9.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann gilt: Das Paar (A, B) ist kontrollierbar genau dann, wenn es eine Koordinatentransformation S gibt, so dass

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{B} = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Werte $\alpha_i \in \mathbb{R}$ gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von A sind, d.h. $\chi_A(z) = z^n - \alpha_n z^{n-1} - \cdots - \alpha_2 z - \alpha_1$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass für Matrizen \tilde{A} der angegebenen Form die α_i gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind. Dies folgt durch Induktion über n : Für $n = 1$ ist die Behauptung sofort klar. Für den Induktionsschritt sei $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von der Form des Satzes und $A_{n+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ gegeben durch

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ \alpha_0 & & & \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir nun $\det(z\text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}} - A_{n+1})$ nach der ersten Spalte, so ergibt sich

$$\chi_{A_{n+1}} = z\chi_{A_n}(z) - \alpha_0 = z^n - \alpha_{n-1}z^{n-1} - \cdots - \alpha_1 z - \alpha_0,$$

also nach Umnummerierung der α_i gerade der gewünschte Ausdruck.

Nehmen wir nun an, dass S existiert. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass

$$\tilde{R} = (\tilde{B} \tilde{A} \tilde{B} \cdots \tilde{A}^{n-1} \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

gilt, wobei $*$ beliebige Werte bezeichnet. Diese Matrix hat vollen Rang, denn durch Umordnung der Zeilen (dies ändert den Rang nicht) erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen, welche offenbar invertierbar ist, also vollen Rang besitzt. Daher ist (\tilde{A}, \tilde{B}) kontrollierbar und da Kontrollierbarkeit unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt, ist auch das Paar (A, B) kontrollierbar.

Sei umgekehrt (A, B) kontrollierbar. Dann ist die Matrix $R = (B \ A \ B \ \dots \ A^{n-1} B)$ invertierbar, folglich existiert R^{-1} . Wir zeigen nun zunächst, dass $R^{-1}AR = \tilde{A}^T$ ist. Dazu

reicht es zu zeigen, dass $AR = R\tilde{A}^T$ ist. Dies folgt (unter Verwendung des Satzes von Cayley–Hamilton) aus der Rechnung

$$\begin{aligned} AR &= A(BAB \dots A^{n-1}B) = (AB A^2B \dots A^{n-1}B A^n B) \\ &= (AB A^2B \dots A^{n-1}B \quad \alpha_n A^{n-1}B + \dots + \alpha_1 B) \\ &= (BAB \dots A^{n-1}B) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix} = R\tilde{A}^T \end{aligned}$$

Mit \tilde{R} aus (9.3) folgt mit analoger Rechnung die Gleichung $\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{R} = \tilde{A}^T$ und damit

$$\tilde{A} = \tilde{R}\tilde{A}^T\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}R^{-1}AR\tilde{R}^{-1}.$$

Aus den Definitionen von R und \tilde{R} folgt $R(1, 0, \dots, 0)^T = B$ und $\tilde{R}(1, 0, \dots, 0)^T = \tilde{B}$, also $R\tilde{R}^{-1}\tilde{B} = B$. Damit ergibt sich $S = R\tilde{R}^{-1}$ als die gesuchte Transformation. \square

Die durch Lemma 9.4 gegebene Form der Matrizen A und B wird auch *Regelungsnormalform* genannt.

9.4 Stabilisierung mit eindimensionaler Kontrolle

In diesem Abschnitt werden wir die Lösbarkeit des Stabilisierungsproblems für $u(t) \in \mathbb{R}$, also $m = 1$ angeben. Der Grund dafür, diesen Fall zuerst separat zu betrachten, liegt in Lemma 9.4, das ja gerade eine Aussage für eindimensionale Kontrollen macht.

Zunächst drücken wir das Stabilisierungsproblem mit Hilfe des charakteristischen Polynoms aus. Dies können wir für beliebige Kontrolldimensionen machen.

Definition 9.5 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ein Polynom χ heißt *vorgebbar* für das Kontrollsystem, falls ein lineares Feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, so dass $\chi = \chi_{A+BF}$ ist für das charakteristische Polynom χ_{A+BF} der Matrix $A + BF$. \square

Da wir wissen, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gerade die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind, erhalten wir aus Lemma 8.2 sofort die folgende Charakterisierung.

Lemma 9.6 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, falls ein vorgegbares Polynom existiert, dessen Nullstellen über \mathbb{C} alle negativen Realteil haben.

Wir betrachten nun den angekündigten Spezialfall eindimensionaler Kontrollwerte $u(t)$. Der folgende Satz zeigt die Beziehung zwischen der Kontrollierbarkeitsbedingung aus Definition 9.1 und der Vorgebbarkeit von Polynomen.

Satz 9.7 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. mit eindimensionaler Kontrolle. Dann sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent.

- (i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom der Form $\chi(z) = z^n - \beta_n z^{n-1} - \dots - \beta_2 z - \beta_1$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ ist vorgebbar.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und sei S die Koordinatentransformation aus Lemma 9.4. Wir setzen

$$\tilde{F} = (\beta_1 - \alpha_1 \quad \beta_2 - \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_n - \alpha_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_1 - \alpha_1 \quad \beta_2 - \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_n - \alpha_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \cdots & \beta_n - \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Aussage von Lemma 9.4 folgt, dass $\chi_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}} = \chi$ ist. Also ist, nach Rücktransformation, $F = \tilde{F}S^{-1}$ die gesuchte Feedback Matrix, da das charakteristische Polynom einer Matrix invariant unter Koordinatentransformationen ist.

(ii) \Rightarrow (i): Wir zeigen die Implikation „nicht (i) \Rightarrow nicht (ii)“:

Sei (A, B) nicht kontrollierbar. Sei T die Koordinatentransformation aus Lemma 9.3. Dann ergibt sich für jedes beliebige Feedback $\tilde{F} = (F_1 \quad F_2)$

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_2 + B_1 F_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} =: \tilde{D}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix gilt

$$\chi_{\tilde{D}} = \chi_{A_1 + B_1 F_1} \chi_{A_3},$$

daher sind (beachte, dass (A_1, B_1) kontrollierbar ist) die vorgebbaren Polynome gerade von der Form $\chi = \chi_k \chi_u$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d ist und $\chi_u = \chi_{A_3}$ ist. Dies sind sicherlich weniger als die in (ii) angegebenen Polynome, weshalb (ii) nicht gelten kann. \square

Natürlich ist es zur Stabilisierung nicht notwendig, dass jedes Polynom vorgebbar ist, wir brauchen lediglich eines zu finden, dessen Nullstellen nur negative Realteile haben. Der Beweis von Satz 9.7 lässt bereits erahnen, wann dies möglich ist.

Satz 9.8 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. mit eindimensionaler Kontrolle. Seien $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ die Matrizen aus Lemma 9.3 mit der Konvention, dass $A_1 = A$ und $B_1 = B$ ist, falls (A, B) kontrollierbar ist.

Dann sind die vorgebbaren Polynome von (8.1) gerade die Polynome der Form $\chi = \chi_k \chi_u$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d und χ_u das charakteristische Polynom der Matrix A_3 ist, mit der Konvention $\chi_u = 1$ falls $d = n$.

Insbesondere gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von A_3 negativen Realteil haben.

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus dem zweiten Teil des Beweises von Satz 9.7. Die Aussage über das Stabilisierungsproblem folgt dann sofort aus Lemma 9.6. \square

9.5 Stabilisierung mit mehrdimensionaler Kontrolle

Die Resultate für mehrdimensionale Kontrolle $m > 1$ sind völlig analog zu denen für eindimensionale Kontrolle, lediglich die Beweise sind etwas aufwändiger, da wir nicht direkt auf Lemma 9.4 zurückgreifen können. Trotzdem können wir die Beweise auf den Fall $m = 1$ zurückführen, indem wir das folgende Lemma verwenden, das als *Heymanns Lemma* bezeichnet wird.

Lemma 9.9 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Das Paar (A, B) sei kontrollierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $\bar{B} = Bv \neq 0$. Dann gibt es eine Matrix $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = (A + B\bar{F})x(t) + \bar{B}\bar{u}(t)$$

mit eindimensionaler Kontrolle $\bar{u}(t)$ kontrollierbar ist.

Beweis: Mittels einer rekursiven Vorschrift konstruieren wir uns zunächst linear unabhängige Vektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $l \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$Ax_i \in V_l \text{ für } i = 1, \dots, l-1 \text{ mit } V_l = \langle x_1, \dots, x_l \rangle. \quad (9.4)$$

Setze $x_1 = \bar{B}$ (wir können die $n \times 1$ Matrix \bar{B} als Spaltenvektor auffassen) und beachte, dass die Eigenschaft (9.4) für $l = 1$ und jedes $x_1 \neq 0$ trivialerweise erfüllt ist.

Für $k \in 1, \dots, n-1$ und gegebene linear unabhängige Vektoren x_1, \dots, x_k , die (9.4) für $l \in \{1, \dots, k\}$ erfüllen, konstruieren wir nun wie folgt einen Vektor x_{k+1} , so dass x_1, \dots, x_k, x_{k+1} linear unabhängig sind und (9.4) für $l \in \{1, \dots, k+1\}$ erfüllen:

1. Fall: $Ax_k \notin V_k$: Setze $u_k := 0 \in \mathbb{R}^m$ und $x_{k+1} = Ax_k$.
2. Fall: $Ax_k \in V_k$: Wegen (9.4) folgt dann, dass V_k A -invariant ist. Im Beweis von Lemma 9.3 haben wir bereits gesehen, dass $V := \text{im}R$ für R aus Definition 9.1 A -invariant ist und das Bild $\text{im}B$ enthält. Tatsächlich ist V der kleinste A -invariante Unterraum des \mathbb{R}^n , der das Bild von B enthält, denn: Sei \tilde{V} ein beliebiger A -invarianter Unterraum, der das Bild

von B enthält. Dann muss \tilde{V} alle Vektoren der Form $A^p B y$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{N}_0$ enthalten, also insbesondere alle Vektoren aus $V = \text{im} R$. Also ist $\tilde{V} \subseteq V$, und da \tilde{V} beliebig war ist V also der kleinste A -invariante Unterraum des \mathbb{R}^n , der das Bild von B enthält. Aus der Kontrollierbarkeit von (A, B) folgt nun $\dim V = n$. Weil V_k ein A -invarianter Unterraum mit $\dim V_k = k < n$ ist, kann dieser das Bild von B nicht enthalten. Also gibt es ein $u_k \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax_k + Bu_k \notin V_k$ und wir setzen $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.

Wir konstruieren nun die gesuchte Abbildung \bar{F} aus den Vektoren x_1, \dots, x_n . Da die x_i linear unabhängig sind, ist die Matrix $X = (x_1 \dots x_n)$ invertierbar, und wir können $\bar{F} := UX^{-1}$ für $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren, wobei die u_i für $i = 1, \dots, n-1$ die in der obigen Rekursion verwendeten Kontrollvektoren sind und wir $u_n := 0 \in \mathbb{R}^m$ setzen. Damit gilt $\bar{F}x_i = u_i$ und deswegen $(A + B\bar{F})x_i = x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wegen $\bar{B} = x_1$ folgt somit

$$(\bar{B} (A + B\bar{F})\bar{B} \dots (A + B\bar{F})^{n-1}\bar{B}) = X,$$

also hat $(\bar{B} (A + B\bar{F})\bar{B} \dots (A + B\bar{F})^{n-1}\bar{B})$ den Rang n , weswegen das Paar $(A + B\bar{F}, \bar{B})$ kontrollierbar ist. \square

Mit diesem Resultat lassen sich nun die Sätze 9.7 and 9.8 leicht auf beliebige Kontrolldimensionen verallgemeinern.

Satz 9.10 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent.

- (i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom der Form $\chi(z) = z^n - \beta_n z^{n-1} - \dots - \beta_2 z - \beta_1$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ ist vorgebbar.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und χ gegeben. Seien $\bar{F} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Matrizen aus Lemma 9.9 für ein $v \in \mathbb{R}^m$ mit $Bv \neq 0$ (beachte, dass solch ein $v \in \mathbb{R}^m$ existiert, da (A, B) kontrollierbar ist, also $B \neq 0$ ist). Dann ist das Paar $(A + B\bar{F}, \bar{B})$ kontrollierbar und aus Satz 9.7 folgt die Existenz eines Feedbacks $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, so dass

$$\chi_{A+B\bar{F}+\bar{B}F_1} = \chi$$

ist. Wegen

$$A + B\bar{F} + \bar{B}F_1 = A + B\bar{F} + BvF_1 = A + B(\bar{F} + vF_1)$$

ist also $F = \bar{F} + vF_1$ das gesuchte Feedback.

(ii) \Rightarrow (i): Völlig analog zum Beweis von Satz 9.7. \square

Satz 9.11 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Seien $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{d \times m}$ die Matrizen aus Lemma 9.3 mit der Konvention, dass $A_1 = A$ und $B_1 = B$ ist, falls (A, B) kontrollierbar ist.

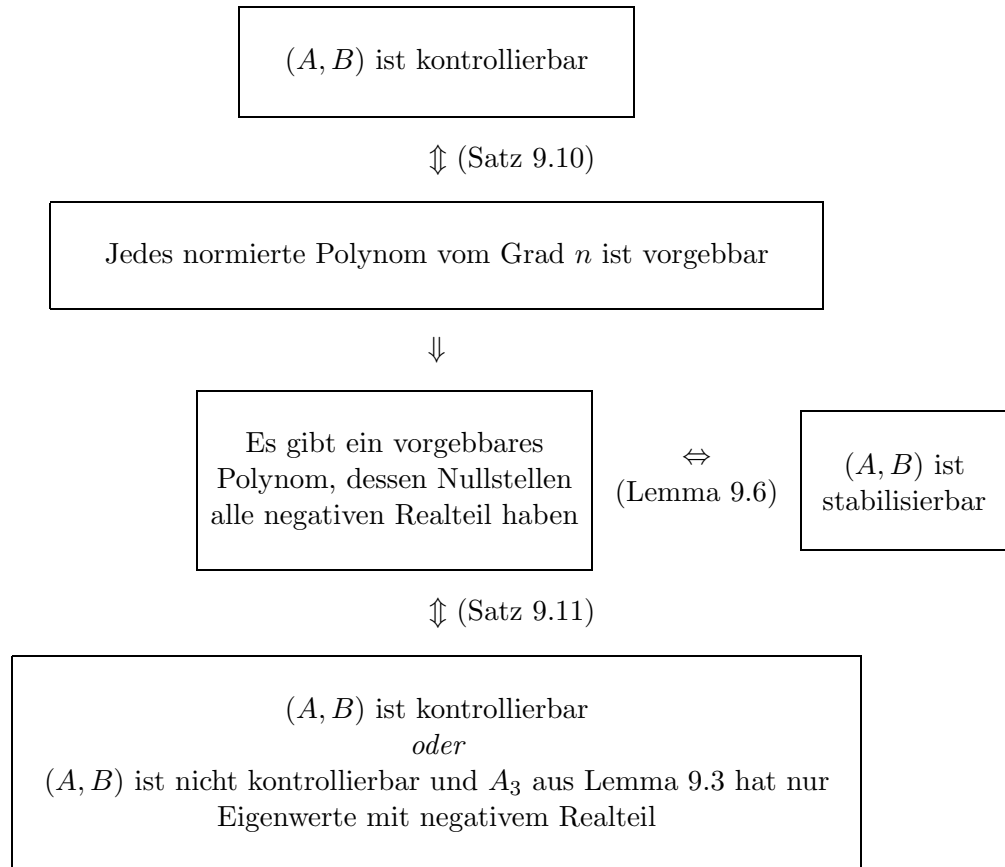
Dann sind die vorgebbaren Polynome von (8.1) gerade die Polynome der Form $\chi = \chi_k \chi_u$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d und χ_u das charakteristische Polynom der Matrix A_3 ist, mit der Konvention $\chi_u = 1$ falls $d = n$.

Insbesondere gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von A_3 negativen Realteil haben.

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Satz 9.8. □

Bemerkung 9.12 Satz 9.11 wird oft als *Polverschiebungssatz* bezeichnet, da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in der Kontrolltheorie auch als “Pole“ bezeichnet werden (dies hat seine Wurzeln in alternativen Darstellungen linearer Kontrollsystems über sogenannte „Übergangsabbildungen“) und dieser Satz gerade angibt wie man diese Nullstellen durch geeignete Wahl des Feedbacks „verschieben“ kann. □

Wir können die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels wie folgt schematisch darstellen:



Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997.
- [2] F. COLONIUS, *Einführung in die Steuerungstheorie*, Vorlesungsskript, Universität Augsburg, 1992.
- [3] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 1998.

Index

- Anfangsbedingung, 3
- Anfangswert, 3
- Anfangswertproblem, 3
- Anfangszeit, 3
- Ausgangsfeedback, 54

- Bilinearform, 37
- Blockdiagonalmatrix, 6

- Cayley–Hamilton, 58
- charakteristisches Polynom, 58
- closed–loop System, 52

- Differentialgleichung, 1
 - gewöhnlich, 1
 - homogen, 12
 - inhomogen, 12
 - linear, 2
 - Linearisierung, 44
- Differenzierbarkeit, 43

- Eigenwertkriterium für Stabilität, 22, 25
- Eindeutigkeitssatz
 - eindimensional, 3
 - mehrdimensional, 11
 - inhomogen, 12
- euklidische Norm, 5

- Feedback Stabilisierung, 52
- Fundamentalmatrix, 12

- gewöhnliche Differentialgleichung, 1
- Grenzkurve, 32

- Heizungsregelung, 53

- Instabilität, 21

- Jacobi–Matrix, 43
- Jordan’sche Normalform, 9
- konjugiert komplexe Zahl, 5

- Kontrollierbarkeit, 57
- Kontrollsystem, 51
- Koordinatentransformation, 8, 58
- Kozykluseigenschaft, 13

- Lösungskurve, 1
- Lösungstrajektorie, 1
- Limeskurve, 32
- lineare Differentialgleichung, 2
- Linearisierung, 44, 55
 - Stabilität, 47
 - Trajektorien, 44
- Ljapunov Funktion, 35, 46
 - bilinear, 37
 - hinreichendes Kriterium, 35, 46
 - hinreichendes und notwendiges Kriterium, 40, 48
- Ljapunov Gleichung, 39

- mathematisches Pendel, 17
- Matrix–Exponentialfunktion, 6
- Matrixnorm, 5
- Matrixnormkriterium für Stabilität, 26

- Parameterabhängigkeit, 14
- Pendel, 17
- Polverschiebungssatz, 65
- Populationswachstum, 2

- rückgekoppeltes System, 52
- Rückkopplung, 52
- radioaktiver Zerfall, 2
- Regelungsnormalform, 61

- Störungseinfluss
 - auf exponentiell stabile Systeme, 30
 - auf stabile Systeme, 29
- Stabilisierungsproblem, 52
 - Lösung, 62, 64
- Stabilität, 20

- asymptotisch
 - global, 20
 - lokal, 20
- Eigenwertkriterium, 22, 25, 48
- exponentiell, 20
- im Sinne von Ljapunov, 20
- Ljapunov Funktionen Kriterium, 40, 48
- Matrixnormkriterium, 26
- Stetigkeitskriterium, 26
- Stabilität unter Linearisierung, 47
- Stetigkeitskriterium für Stabilität, 26

- Trajektorie, 1
- Trajektorien unter Linearisierung, 44

- Vektorfeld, 1
- vorgebbares Polynom, 61
- Vorgebbarkeit und Stabilisierbarkeit, 61

- Zustandsfeedback, 52