

UNIVERSITÄT
BAYREUTH

GERICHTETE POLYTOPE: ARITHMETISCHE
OPERATIONEN UND VISUALISIERUNG
MITTELS CGAL

Gilbert Perria

Diplomarbeit

Fakultät für Mathematik und Physik

Februar 2003

Betreuer: **Prof. Dr. Frank Lempio**
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Universität Bayreuth
D 95440 Bayreuth

Dr. Robert Baier
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Universität Bayreuth
D 95440 Bayreuth

Danksagung

Für die Aufnahme am mathematischen Institut der Fakultät für Mathematik und Physik an der Universität Bayreuth möchte ich mich bei den verantwortlichen Personen herzlich bedanken, da mir dadurch der Aufenthalt in Deutschland und damit eine der schönsten Lebenserfahrungen zuteil wurde.

Dann möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, denen ich die Möglichkeit dieses Studiums verdanke. Liebe Eltern: *Nonostante questi anni di lontananza, ho costantemente avvertito la vostra vicinanza ed il vostro affetto.*

Weiterhin möchte ich mich an dieser Stelle vor allem bei Herrn Prof. Dr. F. Lempio für die Betreuung meiner Arbeit bedanken, sowie bei Herrn Dr. R. Baier für den fachlichen Beistand und die gute Zusammenarbeit.

Abschließend ein herzliches „Dankeschön“ an: Anke, Matthias, Thorsten, Annika, Michael, Birgit, Oliver, Andre. Für Eure Hilfe und Geduld danke ich Euch.

Zusammenfassung

Auf die Menge $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ aller kompakten konvexen Mengen kann die Minkowski-Summe definiert werden. Es gibt aber keine Inverse zur Minkowski-Summe bezüglich der diese Menge abgeschlossen ist. Der Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$ der *gerichteten Mengen* wird eingeführt, um über eine wohldefinierte Arithmetik von kompakten konvexen Mengen zu verfügen. Im Raume $\vec{\mathcal{D}}^n$ lassen sich die kompakten konvexen Mengen des \mathbb{R}^n einbetten.

Die Bildung der linearen Hülle aller eingebetteter kompakten konvexen Polytopen des \mathbb{R}^n liefert die Menge aller *gerichteten Polytope*. Die *reduzierte Darstellung* von solchen Elementen wird definiert und untersucht: Sie stellt ein Analogon zur Eckendarstellung von Polytopen dar.

Die *reduzierte Darstellung* ermöglicht die Darstellung und die Abspeicherung im Rechner von *gerichteten Polytopen* ohne Diskretisierungen zu erfordern und die Durchführung von arithmetischen Operationen.

Eine Implementierung der *gerichteten Polytope* der Dimension eins und zwei wird präsentiert und beschrieben. Ihre Anwendung lässt Berechnungen durchführen und liefert Bilder der *Visualisierung* von *gerichteten Polytopen*.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	vii
Symbolverzeichnis	xi
Einleitung	xv
1 Hilfsmittel	1
1.1 Polytope : Grundbegriffe	1
1.2 Problematik der Mengenoperationen im \mathbb{R}^n	6
1.3 Eigenschaften und Arithmetik der Stützfunktionen und Stützmengen.	8
1.3.1 Stützfunktionen	8
1.3.2 Stützpunkte	11
1.3.3 Stützfunktion und Stützmengen von Polytopen	13
1.4 Operationen auf konvexe kompakte Mengen des \mathbb{R}^n	17
2 Gerichtete Mengen	23
2.1 Der Raum der gerichteten Mengen	24
2.2 Die Strukturen des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$	28
2.3 Die Projektion $\Pi_{a_n}^l$ und die Antiprojektion ${}^*\Pi_{a_n}^l$	28
2.3.1 Spezialfall: Dimension 2	30
2.4 Die Visualisierung gerichteter Mengen	32
3 Eingebettete Mengen	37
3.1 Einbettung von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$	38
3.2 Differenz eingebetteter kompakter konvexer Mengen	42
3.3 Eingebettete Intervalle	44

3.3.1	Die Einbettung	44
3.3.2	Die Visualisierung	47
3.4	Linearität der Einbettung J_n	49
3.5	Operationen mit eingebetteten Polytopen des \mathbb{R}^n	52
3.6	Eingebettete Polytope des \mathbb{R}^2	56
3.6.1	Die Einbettung	56
3.6.2	Summe zweier eingebetteter Polytope	59
4	Gerichtete Polytope	63
4.1	Gerichtete Polytope und deren reduzierte Darstellung	64
4.1.1	Eigenschaften und Berechnung reduzierter Darstellungen	68
4.2	Arithmetische Operationen mittels der reduzierten Darstellung	76
4.3	Der ein- und zweidimensionale Fall	83
4.3.1	Der eindimensionale Fall	83
4.3.2	Der zweidimensionale Fall	84
4.4	Ausblick	87
5	Anwendungsbeispiele	95
5.1	Punkt und Strecke	96
5.2	Summe und Differenz zweier eingebetteter Strecken	97
5.3	Strecke und Quadrat	100
5.4	Summe und Differenz eines Quadrates mit einem Dreieck	102
5.5	Parameterabhängige arithmetische Operationen	102
5.5.1	Ein erstes Beispiel	102
5.5.2	Ein zweites Beispiel	117
A	Implementierung	131
	Literaturverzeichnis	157
	Index	158
	CD-Rom mit dem Quellcode und der elektronischen Dokumentation	163

Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung	Seite
$\vec{\mathcal{D}}^n$	der Raum der gerichteten Mengen der Dimension n	24
$\vec{\mathcal{C}}^n$	die Menge aller eingebetteten gerichteten Mengen	38
$\vec{\mathcal{P}}^n$	die gerichteten Polytope der Dimension n	65
$\vec{\mathcal{P}}_0^n$	die gerichteten Punkte in Dimension n	52
\vec{A}	eine gerichtete Menge aus $\vec{\mathcal{D}}^n$	24
$\vec{A}(l)$	der Wert von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ in die Richtung $l \in S^{n-1}$	24
$A_{n-1}(l)$	die erste Komponente von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	24
$a_n(l)$	die zweite Komponente von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	24
$J_n(\cdot)$	die Einbettung von kompakten konvexen Mengen in $\vec{\mathcal{D}}^n$	38
$P_n(\vec{A})$	der positive Teil der Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	32
$N_n(\vec{A})$	der negative Teil der Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	32
$M_n(\vec{A})$	der gemischte Teil der Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	33
$B_n(\vec{A})$	der Rand der Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	32
$B_n^l(\vec{A})$	der Rand von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ in die Richtung $l \in S^{n-1}$	65
$V_n(\vec{A})$	die Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	33
$O_n(\cdot, \vec{A})$	das Orientierungsbündel von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	34
$d(l, \vec{A})$	die Dimension eines $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ in die Richtung $l \in S^{n-1}$	66
$d\max(\mathbf{A})$	die maximale Dimension eines $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$	67
$[\vec{P} I_P]$	die reduzierte Darstellung von $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ zum Index I_P	67
$\tau_{a_n}^l$	Verschiebung in die Richtung $l \in S^{n-1}$ zum Koeffizient a_n	29

$\rho_{a_n}^l$	Drehung zur Richtung $l \in S^{n-1}$	29
$\Pi_{a_n}^l$	die Projektion in die Richtung $l \in S^{n-1}$ zum Koeffizient a_n	29
$^*\Pi_{a_n}^l$	die Antiprojektion in die Richtung $l \in S^{n-1}$ zum Koeffizient a_n	30

$\mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$	die Menge aller Teilmengen des \mathbb{R}^n	
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$	die Menge der konvexen kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n	
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	die Menge der konvexen kompakten Polytope des \mathbb{R}^n	
$\text{vert}(P)$	die Menge der Ecken eines $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	5
$\text{co}\{\cdot\}$	die konvexe Hülle einer Menge	
$\text{lin}(\cdot)$	die lineare Hülle einer Menge	
$l^\perp, {}^\perp l$	die normalen Richtungen zu $l \in S^{n-1}$	30,31
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	das (standard) Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$	

\oplus	die Minkowski-Summe zweier Mengen	6
\ominus	die algebraische punktweise Differenz zweier Mengen	18
$\#$	die partielle Addition zweier Mengen	18
$*$	die Minkowski-Differenz zweier Mengen	20
$\dot{-}$	die Demynov-Differenz zweier Mengen	20
$\lambda \cdot A$	das Produkt einer reellen Zahl mit einer Menge	6

$\delta^*(\cdot, A)$	die Stützfunktion einer Menge A des \mathbb{R}^n	8
∂A	der Rand einer Menge A des \mathbb{R}^n	
Y_A^l	die Menge aller Stützpunkte einer Menge A in die Richtung l	11
y_A^l	ein Punkt aus Y_A^l	11

Einleitung

Die Motivation

Die Einführung einer Arithmetik (kompakter) konvexer Mengen findet viele wichtige Anwendungen: Man denke an die Verallgemeinerung punktwertiger reeller Funktionen:

$$f : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

auf mengenwertige Funktionen:

$$F : [t_0, T] \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$$

Bei den ersten sind Berechnungen wie numerische Integrationen:

$$\int_I f(t) dt \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (f(t_i) - f(t_{i+1}))$$

oder numerische Interpolationen:

$$p(t) = \frac{t_{i+1} - t}{h} f(t_i) + \frac{t - t_i}{h} f(t_{i+1})$$

üblich (Man beachte, dass dabei die Gewichte in den Formeln negativ sein können). Um sie auch auf Funktionen der Art $F : [t_0, T] \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ verallgemeinern zu können, muss man zu erst über wohl definierte Operationen mit Mengen verfügen, da zum Beispiel in den Formeln nicht nur positive Gewichte auftauchen, sondern auch negative Gewichte zugelassen sind. Wesentlich ist die Konstruktion einer Summe und einer Differenz (Inverse der Summe). Man betrachtet, insbesondere aus praktische Gründen, die Menge $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ der konvexen Mengen auf \mathbb{R}^n . In dieser Arbeit wird weiterhin die Kompaktheit der betrachteten Mengen angenommen, um bei vielen Definitionen die Unendlichkeit von Werten auszuschließen.

Eine weitere Motivation für eine Einführung einer Arithmetik auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ wäre beispielweise, Rechnungen mit (kompakten) konvexen Mengen durchführen zu können, wie bei den folgenden Aufgaben:

- Berechnung so genannter erreichbarer Mengen (aller möglichen Lösungen) von Differentialinklusionen (eine Verallgemeinerung von DGL), beziehungsweise Kontrollproblemen. Bei linearen Problemen dieser Art lässt sich dies etwa in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} x'(t) &\in A(t)x(t) + B(t)U \quad (t \in [t_0, T]) \\ x(t_0) &\in X_0 \\ X_0 &\subset \mathbb{R}^n \quad \text{konvex, kompakt, nicht leer} \\ U &\subset \mathbb{R}^m \quad \text{konvex, kompakt, nicht leer} \\ B(t) &\in \mathbb{R}^{n \times m} \\ A(t) &\in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

Man muss dann ein mengenwertiges Integral der Art:

$$\mathcal{R}(T, t_0, X_0) = \Phi(T, t_0)X_0 + \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau)B(\tau)U \, d\tau$$

berechnen. Dieses kann mit Quadraturverfahren (Newton-Cots) oder Rekursionsformeln (Romberg-Integrale hohen Grades) gelöst werden. Dabei tauchen aber negative Gewichte auf.

- Bei der Interpolation mindestens quadratischen Polynomgrad hat man negative Gewichte.
- Ableitungsbegriffe mengenwertiger Funktionen.
- Numerischen Verfahren mit Differenzen konvexer Mengen.

Zur Lösung dieser Probleme muss man selbstverständlich über eine Arithmetik auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ verfügen: Dazu erweist sich als geeignete Summe die *Minkowski-Summe*:

$$A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$$

Schwierig ist aber die Aufgabe eine günstige und geeignete Inverse zur *Minkowski-Summe* zu definieren. Die Menge $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit der *Minkowski-Summe* und einer der zahlreichen möglichen Differenzen wird nicht zu einem \mathbb{R} -Vektorraum.

Eine Möglichkeit diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht darin, einen zweckmäßigen \mathbb{R} -Vektorraum festzulegen und $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ dort einzubetten. In dem Vektorraum erhält man so die benötigten Werkzeuge, um solche Berechnungen durchzuführen. Ein Nachteil bleibt aber leider unüberwunden. Einem Element aus dem \mathbb{R} -Vektorraum kann man eine Teilmenge des \mathbb{R}^n zuordnen (eine so genannte *Visualisierung* vom Element). Für eine eingebettete Menge (d.h. ein Element des Vektorraumes, das durch Einbettung von einer Menge aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ stammt) ist diese *Visualisierung* eine konvexe Menge, also wieder eine Menge aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$; für die Differenz zweier eingebetteter Elemente ist sie nicht mehr unbedingt konvex.

In dieser Arbeit wird der Raum der *gerichteten Mengen* betrachtet: Innerhalb dieses Raumes werden dann die *gerichteten Polytope* eingeführt, die den Kern der Arbeit und einen weiteren Schritt in die Entwicklung der Theorie der *gerichteten Mengen* darstellen. Der Raum der *gerichteten Mengen*, der als eine Erweiterung von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ angesehen werden kann, besitzt folgende Strukturen:

1. Halbgeordnete Menge bezüglich der „inklusionsähnlichen“ Anordnung \leq
2. \mathbb{R} -Vektorraum bezüglich der Summe und des Produkts mit einer reellen Zahl
3. normierter Raum
4. Banach-Raum
5. Riesz-Raum

Das Thema

In vielen Verfahren und Rechnungen tauchen Polytope auf. Eine Verallgemeinerung dieses Begriffes ist auch in $\vec{\mathcal{D}}^n$ wünschenswert. Also ist eine konsistente Definition dafür anzugeben: Man kommt so zu den *gerichteten Polytopen*.

Weil unendlich viele Richtungen in der Definition einer gerichteten Menge im Spiel kommen, braucht man außerdem eine zur Eckendarstellung eines Polytops

analoge Darstellung eines gerichteten Polytops, die nur die Betrachtung einer Menge von endlich vielen Richtungen erfordert. Sonst ist es zum Beispiel nicht möglich, Rechnungen am Rechner durchzuführen: Die *reduzierte Darstellung* ergibt sich aus dieser Problematik.

Gerichtete Polytope, reduzierte Darstellung, arithmetische Operationen

Eine *gerichtete Menge* $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ der Dimension n ist im Wesentlichen eine Funktion

$$\vec{A} : S^{n-1} \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

rekursiv definiert bezüglich der Dimension n . Eine solche Abbildung besteht aus zwei Komponenten: Die erste ist eine $(n - 1)$ -dimensionale gerichtete Menge und die zweite ist eine reelle Zahl. Man schreibt auch:

$$\vec{A} = (\overline{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$$

Bei der Definition eines Elements aus $\vec{\mathcal{D}}^n$ werden unendlich viele Richtungen $l \in S^{n-1}$ berücksichtigt.

Die *gerichteten Mengen* bilden einen normierten und halbgeordneten Vektorraum $\vec{\mathcal{D}}^n$ auf dem Körper \mathbb{R} . Das Konus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ aller nichtleeren (kompakten) konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n kann mittels der positiv-linear ordnungserhaltenden isometrischen Abbildung

$$J_n : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^n$$

in diesem Vektorraum eingebettet werden. Zu den konvexen (kompakten) Mengen zählen die konvexen (kompakten) Polytope $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Polytope spielen eine wichtige Rolle bei den Anwendungen: Eine konvexe (kompakte) Menge $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich durch Polytope approximieren. Es ist so möglich, viele numerische Verfahren am Rechner zu benutzen. Man möchte ein Analogon zu Polytopen in dem Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$ schaffen. Man betrachtet aus diesem Grund die Einbettung von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{\mathcal{D}}^n$. Um einen Abschluss bezüglich der Summe und der Differenz zu erreichen, bildet man die lineare Hülle dieses Abbilds.

Die Polytope in \mathbb{R}^n können durch ihre Ecken (Eckendarstellung) oder durch Lineargleichungssysteme dargestellt werden. Beide Darstellungen erfordern die

Berücksichtigung von nur einer endlichen Anzahl von Elementen bzw. Bedingungen. Um Rechnungen mit den Elementen des Raumes $\vec{\mathcal{P}}^n$ durchführen zu können (insbesondere am Rechner), ist es zweckmäßig analoge Darstellungen der Elemente aus $\vec{\mathcal{P}}^n$ zu gewinnen. Der Begriff der *reduzierten Darstellung* wird eingeführt. Eine solche Darstellung *gerichteter Polytope* enthält all die wesentliche Information und vermeidet, dass man alle Richtungen l aus S^{n-1} betrachten muss. Gleichzeitig ist man aber in der Lage zu einer beliebigen Richtung den Wert der zwei Komponenten zu berechnen. Dies ist sehr wichtig, wenn man Summen oder Differenzen von *gerichteten Polytopen* in *reduzierten Darstellungen* ermitteln will. Folgendes Beispiel erklärt dies. Man habe zwei *gerichtete Polytope* in *reduzierten Darstellung*, etwa:

$$\begin{aligned}\vec{A} &\longleftrightarrow (\overrightarrow{A_{n-1}(l_i)}, a_n(l_i)) \quad \text{mit} \quad l_i \in I_A \subset S^{n-1} \\ \vec{B} &\longleftrightarrow (\overrightarrow{B_{n-1}(l_i)}, b_n(l_i)) \quad \text{mit} \quad l_i \in I_B \subset S^{n-1}\end{aligned}$$

und wolle deren Summe berechnen. Der Definition der Summe nach ist:

$$\vec{A} + \vec{B} := (\overrightarrow{A_{n-1}(l)} + \overrightarrow{B_{n-1}(l)}, a_n(l) + b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$$

d.h. man summiert komponentenweise für alle $l \in S^{n-1}$. Es wird gezeigt, dass es zu diesem Zweck ausreichend ist, sich auf die Vereinigung $I_C := I_A \cup I_B$ der zwei Indizen zu beschränken. Betrachtet man aber ein $l_j \in I_C \setminus I_B$ bzw. $l_j \in I_C \setminus I_A$ braucht man den entsprechenden Wert der zwei Komponenten von \vec{B} bzw. \vec{A} . Die „Zurückgewinnung“ dieses Werts muss deswegen aus der *reduzierten Darstellung* möglich sein. Abgesehen von dieser theoretischen Option, ist es aber keine leichte Aufgabe, einen Algorithmus zur Berechnung der fehlenden Werten zu entwickeln. Verfahren dazu sind insbesondere für die Implementierung der Arithmetik der *gerichteten Polytope* nötig.

Die der *reduzierten Darstellung* zugrundeliegenden Idee besteht darin, die Werte der zwei Komponenten eines $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ nur für bestimmten Richtungen l abzuspeichern. Welche Richtungen auszuwählen sind, kann man aus Betrachtungen über die so genannte *Visualisierung* $V_n(\vec{A})$ vermuten. Diese ist für ein eingebettetes Polytop $J_n(P)$ ein Polytop P und man nimmt die Normalen zu den Kanten.

Um die Vollständigkeit und die Konsistenz der Definition der *reduzierten Darstellung* zu bestätigen, sind folgende Fragen zu beantworten: Enthält die *reduzierte Darstellung* die wesentliche Information? Kann man mittels der *reduzierten Darstellung* rechnen?

Die Implementierung und CGAL

Neben der Entwicklung der *gerichteten Polytope*, ist es Aufgabe dieser Arbeit, die *reduzierte Darstellung* von *gerichteten Polytopen* am Rechner zu implementieren. Ursprünglich war geplant, eine Software zu schreiben, die es ermöglicht, mit beliebigen gerichteten Polytopen der Dimension eins, zwei, und drei mittels der *reduzierten Darstellung* zu rechnen. Es zeigte sich aber, dass einige Aspekte der Theorie noch zu untersuchen bleiben. Die Überwindung solcher Probleme geht aber über die Arbeit hinaus. Die Hauptschwierigkeit bei der Entwicklung von Algorithmen zur Gewinnung der „fehlenden“ Wertepaare besteht darin, feststellen zu können, ob eine Richtung eine „äußere Normale“ oder eine „innere Normale“ für eine *Visualisierung* ist. Anschaulich ist dies intuitiv leicht zu verstehen, aber weder leicht mathematisch zu formalisieren, noch durch Verfahren deterministisch zu erkennen. Außerdem ist eine gewisse Anordnung der Kante der *Visualisierungen* zu schaffen. Diese ist für *eingebettete gerichtete Polytope* oder ihre Inverse gleichbedeutend mit der Anordnung der Richtungen nach Winkeln, was leicht zu realisieren ist. Im Allgemeinen ist es leider nicht so. Die Entdeckung dieser Probleme hat zur Verfeinerung von den in dieser Arbeit eingeführten Begriffen geführt und gezeigt, dass auch nur die *gerichteten Polytopen* der Dimension zwei in der *reduzierten Darstellung* ein ziemlich kompliziertes Thema sind. Aus diesen Gründen beschränkt sich diese Arbeit auf die Dimensionen eins und zwei.

Drei wesentliche Aspekte wurden bei der Implementierung getrennt: Die Darstellung und Abspeicherung der Elemente aus dem Raum $\vec{\mathcal{P}}^n$ durch die *reduzierte Darstellung*, die *Visualisierung* solcher Elemente und schließlich die Erzeugung von Bildern der *Visualisierungen*. Dabei bieten die für diese Arbeit entwickelten Klassen die Möglichkeit:

- Kompakte konvexe Intervalle des \mathbb{R} bzw. kompakte konvexe Polytope des \mathbb{R}^2 einzubetten und allgemeine *gerichtete Polytopen* der Dimension eins und zwei in *reduzierten Darstellung* abzuspeichern;
- Die zugehörigen Operationen durchzuführen (aber auf bestimmte Kategorien begrenzt);
- Die entsprechende *Visualisierung* zu berechnen;

- Hilfsmittel zum tatsächlichen Zeichnen der erhaltenen *Visualisierungen* auf Ausgabegeräte und/oder Dateien

Gerichtete Polytope können durch Einbettung oder durch direkte Zuordnung einer diskreten Wertpaarenfolge $(\overrightarrow{A_{n-1}(l_i)}, a_n(l_i))$ erzeugt werden.

CGAL bezeichnet eine Software-Bibliothek. Der Name *CGAL* steht für *Computational Geometry Algorithms Library*. Die Bibliothek *CGAL* stellt Lösungen zu grundlegenden geometrischen Probleme im Rahmen der computationalen Geometrie zur Verfügung. Sie ist in der objektorientierten Programmierungssprache C++ geschrieben und wird von einem Konsortium weiterentwickelt, an dem berühmte Institutionen beteiligt sind. Für weitere und detaillierte Informationen über *CGAL* verweise ich auf die WWW-Seite des *CGAL*-Konsortiums: **www.cgal.org**

CGAL ist eine sehr geeignete und günstige Wahl für die Implementierung mathematischer Objekte, denn sie bietet unter anderem:

- Unterstützung für die Bibliotheken *LEDA*, *GMP*, *CORE*, *CLN* für robustes Rechnen mit beliebiger Genauigkeit;
- viele Datentypen zur Darstellung mathematischer Objekte und Strukturen, wie zum Beispiel Richtungen, Vektoren (nicht mit der Vorstellung von reinen Behältern wie in *STL*), Segmenten, Linien, Polygonen;
- Implementierung von Algorithmen zur Triangulation, Berechnung konvexer Hüllen, Vereinigung von Polyedern;
- geometrische Optimierung;
- Ermöglichung von graphischen Ausgaben vieler mathematischen Strukturen;

Meine Klassensammlung habe ich in C++ implementiert. Sie stützen sich auf die *CGAL* Bibliothek und auf die *STL*¹ Bibliothek. Bei der Programmierung habe ich mich der Herausforderung angenommen, einen möglichst wiederverwendbaren Code zu schreiben. Dazu habe ich oft so gennante *Patterns* eingesetzt (siehe [Gam96]). Zur Beschreibung der Klassen und deren Funktion habe ich *UML*² Regeln verfolgt (siehe [SP00]). Für die Überwachung der Entwicklungsphasen haben

¹*Standard Template Library*

²*Universal Modelling Language*

sich *CASE*-Tools, wie *UMLStudio*, als unverzichtbare Werkzeuge bewiesen. Es ist zusätzlich mein Ziel gewesen *cross-platform*³ Code zu schreiben.

Um eine Vorstellung des Aufwands zu vermitteln, möchte ich erwähnen, dass meine Sammlung aus 25 Klassen besteht, verteilt auf 30 Quelldateien, zu insgesamt circa 3000 Zeilen Code.

Gliederung der Arbeit

Es soll nun noch ein kurzer Überblick über den Aufbau dieser Arbeit gegeben werden. Die Arbeit besteht aus fünf Kapiteln und einem Anhang.

Das erste Kapitel dient einer Einführung in das Thema der Mengenoperationen auf konvexen (kompakten) Mengen. Es werden dabei die *Minkowski-Summe* und einige Differenzen definiert, erklärt welche Schwierigkeiten die Einführung einer Arithmetik auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ bereitet und einige Grundbegriffe behandelt. Daneben sind die Definitionen von Polytopen und Stützfunktionen angegeben, die wichtig für die nachkommende Kapitel sind.

Das zweite Kapitel liefert die Grundlagen der Theorie der *gerichteten Mengen*, auf welchen diese Arbeit aufbaut. Der \mathbb{R} -Vektorraum $\vec{\mathcal{D}}^n$ der *gerichtet Mengen* der Dimension n wird gebildet, die *Visualisierung* der Elementen aus $\vec{\mathcal{D}}^n$ definiert und andere wichtige Bausteine der kommenden Theorie vorgestellt.

Im dritten Kapitel wird zunächst die Einbettung J_n von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{\mathcal{D}}^n$ definiert, und dann die eingebetteten Mengen behandelt: Eigenschaften solcher Mengen und deren *Visualisierung*. Besondere Aufmerksamkeit bekommt dann die Differenz eingebetteter konvexer kompakter Mengen und die Summe von *eingebetteten Polytopen*. Der ein-dimensionale und zwei-dimensionale Fall werden näher betrachtet, bevor in den darauffolgenden Abschnitten, auf diesen zurückgegriffen wird, um die Grundidee der *reduzierten Darstellung* zu präsentieren.

Das vierte Kapitel dient der Einführung der *gerichteten Polytopen* und des Begriffes *reduzierte Darstellung*. Diese zwei Argumente stellen das Kernstück dieser Arbeit dar. Es wird das Rechnen mit gerichteten Polytopen mittels der *reduzierten Darstellung* untersucht. Dies ist ein sehr zentrales Thema, da das Ziel der Arbeit darin besteht, eine Darstellung von *gerichteten Polytope* bezüglich einer endli-

³Die Quelldateien sollen auf *Windows*- und *Linux*-Systeme compilieren.

chen Anzahl von Richtungen analog zur Eckendarstellung der Polytopen des \mathbb{R}^n zur Verfügung zu stellen, mittels der Rechnungen möglich sind. Es soll an dieser Stelle bemerkt werden, dass sich die Entwicklung einer zweckmäßigen konsistenten Definition vom Begriff *reduzierten Darstellung* als besonders schwierige Aufgabe erwiesen hat.

Das letzte Kapitel schließt nach dem vorausgegangenen theoretischen Teile die Lücke zur praktischen Anwendung und präsentiert Beispiele, die mit dem zuvor entwickelten Verfahren und der Software erstellt wurden. Polytope des \mathbb{R}^2 werden eingebettet, Operationen durchgeführt und schließlich werden die entsprechenden *Visualisierungen* erzeugt und gezeigt. Jedes Beispiel besteht aus: Mathematischer Aufgabe, Bilder der erzeugten *Visualisierungen*, dem Quellcode des einprogrammierten Beispiels.

Im Anhang wird die Implementierung der *gerichteten Polytopen* vorgestellt. Die *reduzierte Darstellung* ermöglicht es, diese am Rechner darzustellen und abzuspeichern. Für diese Arbeit wurde eine Software, genauer eine Sammlung von Klassen, für den ein- und zwei-dimensionalen Fall entwickelt. Hintergründe zu dieser Problematik werden beschrieben. Algorithmen zur Einbettung, Operationenberechnung und Visualisierung, werden hier vorgestellt und erklärt. Für eine ausführliche technische Beschreibung der Implementierung, des Quellcodes und der Diagramme, verweise ich auf die elektronische Dokumentation auf der mitgelieferten CD-Rom (Sie ist als Bestandteil dieser Arbeit zu betrachten).

Kapitel 1

Hilfsmittel

Dieses Kapitel dient der Einführung in das Thema der Mengenoperationen auf \mathbb{R}^n . Im Raume \mathbb{R}^n ist es möglich, Operationen auf Teilmengen zu konstruieren, wie beispielweise eine Summe zweier Teilmengen und ein Produkt einer Menge mit einem Skalar. Das Problem besteht dabei darin, eine Arithmetik auf die Teilmengen des \mathbb{R}^n zu entwickeln. Schwierigkeiten bereitet vor allem die Definition einer Differenz. Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Operationen anzugeben. Allerdings ergibt keine davon eine Inverse zur *Minkoski-Summe*. Insbesondere ist $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, die Menge aller kompakten konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n , bezüglich dieser Differenzen nicht geschlossen. Diese Tatsache lässt sich nicht leicht umgehen und begrenzt die Möglichkeiten beim Rechnen mit Teilmengen. In diesem Kapitel werden außerdem die für die später vorgestellte Theorie benötigten Hilfsmittel behandelt, unter anderem, Züge aus der Theorie der Polytope und der *Stützfunktionen*. Insbesondere diese Letzte werden häufig gebraucht, denn Mengenoperationen beziehen sich auf solche Funktionen oder sind sogar mittels ihrer durchführbar.

1.1 Polytope : Grundbegriffe

Zur späteren Behandlung der so genannten *gerichteten Polytope* ist die Darstellung einiger Grundlagen der Theorie der Polytope erforderlich. In folgendem Abschnitt werden die zu diesem Zweck benötigten Definitionen angegeben und einige Eigenschaften der Polytope zusammengestellt.

1.1.1 Definition (affine Dimension) Die Dimension eines affinen Teilraumes ist die Dimension des entsprechenden Vektorraumes (siehe [Ser89]).

Jeder affine Teilraum kann beschrieben werden als Durchschnitt von affinen Hyperebenen oder als konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten (d.h., als Durchschnitt aller affinen Teilräumen, die die Menge enthalten).

1.1.2 Definition (affine Unabhängigkeit) Eine Menge von $n \geq 0$ Punkten heißt affin unabhängig, falls ihre konvexe Hülle der Dimension $n - 1$ ist, d.h., falls jede echte Teilmenge eine kleinere konvexe Hülle hat.

Im kommenden Text werden alle konvexen Polytope einfach als Polytope bezeichnet. Nun folgen zwei mathematisch (aber nicht algorithmisch) äquivalente Definitionen für Polytope.

1.1.3 Definition (\mathcal{V} -Polytope) Ein \mathcal{V} -Polytop ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten aus \mathbb{R}^d .

1.1.4 Definition (\mathcal{H} -Polyhedron) Ein \mathcal{H} -Polyhedron ist der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen, die beschränkt sind, d.h. die keinen Strahl enthalten $\{\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid t \geq 0\}$ für ein $\mathbf{y} \neq 0$.

Die oben angegebenen Definitionen dienen der folgenden Angabe des Begriffes eines Polytops:

1.1.5 Definition (Polytop) Ein Polytop ist eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^d$, die als \mathcal{V} -Polytop oder als \mathcal{H} -Polytop darstellbar ist. Die Dimension von P ist die Dimension seiner konvexen Hülle. Ein d -Polytop ist ein Polytop der Dimension d in einem \mathbb{R}^e mit $e \geq d$.

Die folgenden Definitionen liefern Beispiele zu Polytopen und Methode zu deren Konstruktion.

1.1.6 Definition (d-Simplex) Mit d -Simplex bezeichnet man die konvexe Hülle $d + 1$ affin unabhängiger Punkte in einem \mathbb{R}^n mit $n \geq d$. Folgt, dass ein d -Simplex ein d -Polytop mit genau $d + 1$ Ecken ist.

1.1.7 Beispiel (Standard d -Simplex) Der Standard d -Polytop ist gegeben durch:

$$\Delta_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = 1, x_i \geq 0\} = \text{co}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\}$$

1.1.8 Definition (Produkt von Polytopen) Seien $P \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ Polytope. Dann ist deren Produkt definiert durch:

$$P \times Q := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mid \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q \right\}$$

Es entsteht so ein Polytop der Dimension $\dim(p) + \dim(Q)$.

1.1.9 Bemerkung (Projektion) Die konvexe Hülle $\text{co}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ einer endlichen Menge von Punkten kann als die Abbildung der standard Simplex $\Delta_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung:

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{x}_i$$

interpretiert werden. Geometrisch gesehen, wird diese als eine Projektion von Polytopen interpretiert.

Die folgende Definition der *Minkowski-Summe* wird für weitere Definitionen gebraucht.

1.1.10 Definition (Minkowski-Summe) Man definiert die Minkowski-Summe zweier Teilmengen $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ durch:

$$P \oplus Q := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\}$$

Aus der Kenntnis der Ecken der beteiligten Polytope lässt sich die Minkowski-Summe bestimmen. Folgendes Lemma stellt ein sehr nützliches Hilfsmittel für theoretische Betrachtungen dar. Allerdings ist es für die praktische Berechnung ungeeignet.

1.1.11 Lemma Seien P und Q zwei Polytope im \mathbb{R}^n mit den Ecken $V(P) := \{p_1, \dots, p_k\}$ beziehungsweise $V(Q) := \{q_1, \dots, q_{k'}\}$. Dann gilt:

$$P \oplus Q = \text{co}\{p_1 + q_1, \dots, p_k + q_{k'}\}$$

Beweis: Vergleiche [Zie95]. □

Mit dem folgenden Begriff des Konus lässt sich die Definition des Polytops für theoretische Zwecke umformulieren.

1.1.12 Definition (Konus) *Ein Konus ist eine nichtleere Menge von Vektoren aus dem \mathbb{R}^d , die alle endlichen Teilmengen von Vektoren und alle ihre linearen Kombinationen mit nicht-negativ Koeffizienten enthält. Zu einer Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ definiert man die konische Hülle $\text{cone}(Y)$ als Durchschnitt aller Y enthaltenden Konen des \mathbb{R}^d . Es ergibt sich:*

$$\text{cone}(Y) = \{ \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{y}_k \mid \{ \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \} \subseteq Y, \lambda_i \geq 0 \}$$

Wenn $Y = \{ \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge ist, dann wird die obige Definition zu:

$$\text{cone}(Y) = \{ \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{y}_k \mid \lambda_i \geq 0 \}$$

1.1.13 Definition (\mathcal{H} -Polyhedron) *Ein \mathcal{H} -Polyhedron P ist der Durchschnitt abgeschlossener Halbräume, also eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}^d$, darstellbar in der Form*

$$P = P(\mathbf{A}, \mathbf{z}) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{z}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \}$$

1.1.14 Definition (\mathcal{V} -Polyhedron) *Ein \mathcal{V} -Polyhedron bezeichnet eine endlich erzeugte konvex konische Kombination: Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^d$, gegeben in der Form*

$$P = \text{co}(V) \oplus \text{cone}(Y)$$

mit $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ und $Y \in \mathbb{R}^{d \times m}$. Ein \mathcal{V} -Polyhedron ist damit die Minkowski-Summe einer konvexen Hülle endlich vieler Punkten und eines von einer endlichen Menge von Vektoren erzeugten Konus.

Die beiden letzten Definitionen stellen eine Umformulierung der Definitionen 1.1.3 und 1.1.14 dar: Insbesondere wird in 1.1.14 der oben eingeführte Begriff des Konus benutzt.

1.1.15 Definition (\mathcal{H} -Polytop, \mathcal{V} -Polytop) *Ein \mathcal{H} -Polytop ist ein beschränktes \mathcal{H} -Polyhedron. Unter einem \mathcal{V} -Polytop versteht man ein beschränktes \mathcal{V} -Polyhedron.*

1.1.16 Satz (Hauptsatz für Polytope) Eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten (\mathcal{V} -Polytop):

$$P = \text{co}(V) \quad \text{mit} \quad V \in \mathbb{R}^{d \times n}$$

genau dann, wenn sie ein beschränkter Durchschnitt von Halbräumen (\mathcal{H} -Polytop) ist

$$P = P(\mathbf{A}, \mathbf{z}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$$

Beweis: Vergleiche [Zie95] □

Ein Polytop kann in Untermengen gemäß der nächsten Definition „zerlegt“ werden:

1.1.17 Definition (gültige Gleichung, Seite, Ecke, Facette) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexes Polytop. Eine lineare Ungleichung $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq c_0$ ist gültig für P , falls alle Punkte von P ihr genügen:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq c_0 \quad \forall \mathbf{x} \in P$$

Eine Menge der Form:

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = c_0\}$$

wobei $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq c_0$ eine gültige Ungleichung für P ist, nennt man eine Seite von P . Man ordnet einer Seite eine Dimension zu, durch:

$$\dim(F) := \dim \text{aff}(F)$$

Die Ungleichung $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ ist stets gültig. Daraus folgt, dass P selbst eine Seite ist. Alle andere Seiten werden echte Seiten genannt. Da $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} \leq -1$ eine gültige Ungleichung für P ist, folgt, dass \emptyset stets eine Seite von P ist. Die Seiten der Dimension 0 werden Ecke genannt, die der Dimension 1 Kanten. Die Seiten der Dimension $\dim(P) - 1$ heißen Facetten. Die Menge aller Ecken eines Polytops P wird als

$$\text{vert}(P)$$

oder auch gegebenenfalls als $V(P)$ bezeichnet.

Mit dem folgenden Satz enden die Darstellungen zur Theorie der Polytope.

1.1.18 Satz Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop. Dann gilt

1. Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken:

$$P = \text{co}(\text{vert}(P))$$

2. Kann ein Polytop als konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten beschrieben werden, dann enthält diese Menge alle Ecken des Polytops:

$$P = \text{co}(V) \Rightarrow \text{vert}(P) \subseteq V$$

3. Sei F eine Seite von P . Dann ist F ein Polytop mit $\text{vert}(F) = F \cap \text{vert}(P)$.

Beweis: Für den Beweis wird auf [Zie95] verwiesen. □

1.2 Problematik der Mengenoperationen im \mathbb{R}^n

Bevor man sich mit Operationen auf konvexe kompakte Mengen beschäftigt, ist es zweckmäßig einen Überblick über Operationen mit allgemeinen Teilmengen zu verschaffen.

Im folgenden Abschnitt werden außerdem einige rechnentechnische Schwierigkeiten vorgestellt, welche der Versuch, \mathbb{R}^n mit einer Arithmetik auf Teilmengen zu versehen, bereitet.

Eine Möglichkeit Mengenoperationen zu definieren, besteht darin, eine Summe zweier Teilmengen des \mathbb{R}^n und ein Produkt eines Skalars $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einer Teilmenge zu betrachten, etwa:

$$\begin{aligned} A \oplus B &:= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ \lambda \cdot A &:= \{\lambda a \mid a \in A\} \end{aligned}$$

mit $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig. Dabei ergibt sich als neutrales Element $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ bzw. $1 \in \mathbb{R}$. Die oben definierte Summe heißt **Minkowski-Summe**. Diese Operationen besitzen

die im Folgenden aufgelisteten Eigenschaften (Vgl. [Bai95], Kap. 0):

$$\begin{aligned} A \oplus B &= B \oplus A \\ (A \oplus B) \oplus C &= A \oplus (B \oplus C) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot A) &= (\lambda\mu) \cdot A \\ \lambda \cdot (A \oplus B) &= \lambda \cdot A \oplus \lambda \cdot B \end{aligned}$$

Besondere Beachtung verdient die Tatsache, dass die Menge $\mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit den oben definierten Operationen aber nicht alle Bedingungen eines \mathbb{R} -Vektorraumes erfüllt. Denn, zu einem ist keine Inverse zur Summe vorhanden und zum anderen ist das Distributivgesetz nicht vollständig erfüllt:

1.2.1 Satz (fehlende Inverse) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann existieren λ und $\mu \in \mathbb{R}$, so dass:

1. $A \ominus A := A \oplus ((-1) \cdot A) \supset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
2. $(\lambda + \mu) \cdot A \subset \lambda \cdot A \oplus \mu \cdot B$
3. für $A := B(0, 1)$ gibt es keine Inverse bezüglich der Addition.

Beweis: Vergleiche [Bai95], S. 2. □

1.2.2 Bemerkung

1. Für A und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B := \{b\}$ entspricht die Addition $A \oplus B$ der Verschiebung der Menge A zum Vektor b , denn $A \oplus B \equiv \{b + a \mid a \in A\}$
2. Seien $A, B, A', B' \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leere Teilmengen mit $A \subset A'$ und $B \subset B'$, dann gilt $A \oplus B \subset A' \oplus B'$.

Besonders für konvexe bzw. kompakte Mengen gelten folgende Eigenschaften (Vgl. [Bai95], Kap. 0):

$$\begin{aligned} C_1 \oplus C_2 &\text{ ist konvex bzw. kompakt} \\ \lambda \cdot C &\text{ ist konvex bzw. kompakt} \quad \lambda \geq 0 \\ (\lambda + \mu) \cdot C &= \lambda \cdot C \oplus \mu \cdot C \quad \lambda, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Konvexe Mengen lassen sich auch durch:

$$\lambda \cdot C \oplus (1 - \lambda) \cdot C = C \quad \lambda \in [0, 1]$$

charakterisieren.

Operationen auf konvexe kompakte Mengen werden im nächsten Abschnitt tiefer behandelt. Zu diesem Zweck werden einige Eigenschaften der Stützfunktionen benötigt.

1.3 Eigenschaften und Arithmetik der Stützfunktionen und Stützmengen.

1.3.1 Stützfunktionen

In diesem Abschnitt wird die so genannte *Stützfunktion* einer Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert, und ihre wichtigsten Eigenschaften vorgestellt. Diese Stützfunktionen sind mit *Stützmengen* verknüpft und durch diese ist es möglich, eine Menge darzustellen. Außerdem spielen diese beide „Objekte“ eine wichtige Rolle bei den, in den kommenden Kapiteln beschriebenen, in dem Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$ eingebetteten Mengen. Es wird gezeigt, wie diese sich anhand der Stützfunktionen der entsprechenden, einzubettenden kompakten konvexen Mengen beschreiben lassen. Auch die in dem Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$ definierten Operationen auf eingebetteten kompakten konvexen Mengen lassen sich auf die „Arithmetik“ der Stützfunktionen zurückführen.

1.3.1 Definition (Stützfunktion) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im \mathbb{R}^n . Dann heißt die Funktion

$$\delta^*(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad l \mapsto \sup_{x \in A} \langle l, x \rangle$$

Stützfunktion der Menge A . Falls $A = \emptyset$, setzt man $\delta^*(\cdot, A) = -\infty$.

Für den späteren Gebrauch ist anzumerken, dass die Stützfunktion einer konvexen kompakten Menge $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ zu

$$\delta^*(\cdot, C) = \max_{c \in C} \langle \cdot, c \rangle$$

wird.

Mit Hilfe der Kenntnis der Stützfunktion einer konvexen, abgeschlossenen Menge in alle Richtungen kann, wie im folgenden Satz dargestellt wird, die Menge rekonstruiert werden. Außerdem wird gezeigt, wie sich Mengenoperationen auf algebraische Operationen von Stützfunktionen übertragen und welche Eigenschaften die Stützfunktion besitzt.

1.3.2 Satz Seien $A, A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere Teilmengen, so folgt:

1. (a) $\overline{\text{co}}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq \delta^*(l, A) \quad \forall l \in \mathbb{R}^n\}$

(b) ist A zusätzlich abgeschlossen und konvex, dann folgt:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq \delta^*(l, A) \quad \forall l \in S^{n-1}\}$$

2. $\delta^*(\cdot, \cdot)$ ist positiv homogen und sublinear im ersten Argument:

(a) $\delta^*(\cdot, A_1 \oplus A_2) = \delta^*(\cdot, A_1) + \delta^*(\cdot, A_2)$

(b) $\delta^*(\cdot, \lambda \cdot A_1) = \lambda \cdot \delta^*(\cdot, A_1) \quad \forall \lambda \geq 0$

Beweis: Für den Beweis vergleiche [Bai95], Seiten 9-10. □

Man kann zudem das Innere und den Rand einer konvexen Menge mit Hilfe der Stützfunktion charakterisieren.

1.3.3 Satz Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann lässt sich der Rand von C mit Hilfe der Stützfunktion folgendermaßen charakterisieren:

$$\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq \delta^*(l, C) \quad \forall l \in S^{n-1}, \exists l_0 \in S^{n-1} \mid \langle l_0, x \rangle = \delta^*(l_0, C)\}$$

Die erste Bedingung drückt $x \in C$ aus, die zweite $x \in \partial C$.

Beweis: Vergleiche [Bai95], Seite 11. □

Wie der nächste Hilfssatz zeigt, ist die Stützfunktion $\delta^*(\cdot, \cdot)$ nicht nur positiv homogen und sublinear bezüglich ihres ersten Arguments, sondern sie überführt zudem die Ordnungsrelation „ \subset “ auf Mengen in die Ordnung „ \leq “ bezüglich reellwertiger Funktionen.

1.3.4 Satz Seien $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene, konvexe Mengen. Dann gilt:

$$C_1 \subseteq C_2 \iff \delta^*(\cdot, C_1) \leq \delta^*(\cdot, C_2)$$

Beweis: Siehe [Bai95], Seite 12. □

Die Stützfunktion ändert sich nicht, wenn man zur konvexen Hülle beziehungsweise abgeschlossen konvexen Hülle übergeht, wie im nächsten Satz gezeigt:

1.3.5 Satz Sei $l \in S^{n-1}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Dann folgt:

$$\delta^*(l, A) = \delta^*(l, \text{co}A) = \delta^*(l, \overline{\text{co}A})$$

Beweis: Vergleiche [Bai95]. □

Man kann die Menge aller kompakten konvexen nichtleeren Mengen ordnungserhaltend in einen \mathbb{R} -Vektorraum einbetten (Sätze 1.3.2, 1.3.3), der aus allen positiv homogenen, auf \mathbb{R} stetigen Funktionalen besteht.

Die Sätze 1.3.2 und 1.3.3 bedeuten, dass jede konvexe, abgeschlossene Menge als unendlicher Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen dargestellt werden kann:

$$C = \bigcap_{l \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq \delta^*(l, U)\}$$

Anstatt mit der Menge selbst bzw. der charakteristischen Funktion zu rechnen, kann man auch mit den Stützfunktionen operieren und zum Schluß die Menge mittels des Satzes 1.3.2 wieder rekonstruieren. Die direkte Behandlung der Mengenoperationen wird so durch das Rechnen vieler Stützfunktionen ersetzt. Ein entscheidender Nachteil dabei ist, dass nicht für jede Richtung l diese Rechnung durchgeführt werden kann, sondern nur für eine Auswahl endlich vieler Richtungen. Man gelangt so zu einer Approximation:

$$C_N = \bigcap_1^N \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq \delta^*(l, U)\}$$

der Menge.

Die obige Ausführung unterliegt dem Begriff der *gerichteten Polytope*: Man gelingt zur *reduzierten Darstellung* solcher gerichteten Mengen, um die Anzahl der zu betrachtenden Richtungen zu beschränken.

1.3.2 Stützpunkte

1.3.6 Definition (Stützpunkt) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Ein Punkt $a_0 \in A$ ist ein Stützpunkt (bezüglich des Funktional $\langle \cdot \rangle_l := \langle l, \cdot \rangle$ für $l \in S^{n-1}$), falls:

$$\sup_{a \in A} \langle a \rangle_l = \langle a_0 \rangle_l$$

Die Menge aller Stützpunkte (bezüglich des Funktional $\langle \cdot \rangle_l$) von A wird mit Y_A^l bezeichnet, und Menge aller Stützpunkten von A in die Richtung l benannt. Die Vereinigung der Stützpunkt Mengen in aller Richtungen l bezeichnet man mit

$$Y_A := \bigcup_{l \in S^{n-1}} Y_A^l$$

Ein Stützpunkt aus der Menge Y_A^l wird mit y_A^l bezeichnet.

Rand und Stützpunkte einer Mengen stehen miteinander in Zusammenhang, nämlich:

1.3.7 Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Dann ist jeder Randpunkt von A auch Stützpunkt und umgekehrt, d.h. :

$$\partial A = Y_A = \bigcup_{l \in S^{n-1}} Y_A^l$$

Beweis: Wegen $\partial_S A = \bigcup_{l \in S^{n-1}} Y_A^l$, liefert Korollar 6 im [Mar77]:

$$\partial_S A = \bigcup \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ Stützpunktmenge von } A\} = \partial A$$

□

1.3.8 Satz Sei A eine konvexe kompakte, nichtleere Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann gilt:

$$A = \overline{\text{co}}\{y_A^l \in Y_A^l \mid l \in S^{n-1}\}$$

wobei die Auswahl an Stützpunkten y_A^l in jede Richtung l beliebig ist. Ist diese Auswahlmenge abgeschlossen, genügt es, die konvexe Hülle zu bilden.

Beweis: Siehe [Bai95], Seiten 145-146. □

Mit Kenntnis je eines Stützpunktes bezüglich aller Richtung l kann man so die Menge wieder ermitteln.

Folgender Satz erläutert Rechenregeln für die Mengen aller Stützpunkte in einer Richtung. Auf die Ergebnisse dieses Satzes wird in den kommenden Kapiteln oft zurückgegriffen.

1.3.9 Satz Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann gilt:

1. $Y_{C \oplus D}^l = Y_C^l \oplus Y_D^l \quad \forall l \in S^{n-1}$
2. $Y_{\lambda \cdot C}^l = \lambda \cdot Y_C^l \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall l \in S^{n-1}$

Für den strikt konvexen Fall gilt die Eindeutigkeit des Stützpunktes, d.h. $Y_A^l \equiv \{y_A^l\}$, und damit werden die oben angegebene Gleichungen zu:

1. $y_{C \oplus D}^l = y_C^l \oplus y_D^l \quad \forall l \in S^{n-1}$
2. $y_{\lambda \cdot C}^l = \lambda \cdot y_C^l \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall l \in S^{n-1}$

Beweis: Siehe [Bai95], Seiten 146-148. □

1.3.10 Bemerkung

1. Y_A^l ist konvex.
2. $Y_A^l \subseteq Y_{\text{co}(A)}^l \quad Y_A^l \subseteq Y_{\overline{\text{co}(A)}}^l \quad Y_A^l \subseteq Y_A^l$

Beispiele zu Stützfunktionen und zu Stützpunktmengeten sind für einige elementare Mengen im Folgenden angegeben.

1.3.11 Beispiel (Stützfunktionen)

- *Punkt:* $A := \{a\} \subseteq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \delta^*(l, A) = \langle l, a \rangle$
- *Strecke:* $A := \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \delta^*(l, A) = \max\{\langle l, a \rangle, \langle l, b \rangle\}$

- *konvexes Polytop*: $A = \text{co}(V(P)) \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $V(P) := \{v_1, \dots, v_k\}$
 $\Rightarrow \delta^*(l, A) = \max_{i=1, \dots, k} \{\langle l, v_i \rangle\}$

1.3.12 Beispiel (Stützpunkte)

- *Punkt*: $A := \{a\} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow Y_A^l = y_A^l = a$
- *Strecke*: $A := \text{co}\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow Y_A^l = y_A^l = \begin{cases} A & : l \perp (v_2 - v_1) \\ v_1 & : \langle l, v_2 - v_1 \rangle < 0 \\ v_2 & : \langle l, v_2 - v_1 \rangle > 0 \end{cases}$
- *konvexes Polytop*: $A := \text{co}(V(P)) := \text{co}\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow Y_A^l = y_A^l =$
 $= \begin{cases} v_{i_0} & : \exists! i_0 \in \{1, \dots, k\} | \langle l, v_{i_0} \rangle = \delta^*(l, A) \\ \text{co}\{v_{i_j} | j = 0, \dots, k\} & : \langle l, v_{i_j} \rangle = \delta^*(l, A), j = 0, \dots, k \end{cases}$

1.3.3 Stützfunktion und Stützmengen von Polytopen

In diesem Abschnitt werden Tatsachen betreffend der Stützfunktion und Stützmengen von Polytopen erläutert und bewiesen. Diese Ergebnisse werden dann in den kommenden Kapiteln verwendet. Das erste Lemma ergibt ein einfaches Ergebnis, das aber trotzdem eine Begründung erfordert. Es sei bemerkt, dass sich die hier benutzte Notation für Punkte und Richtungen ab Kapitel 4 als sehr nützlich erweist.

1.3.13 Lemma Seien l_j und l_{j+1} zwei linear unabhängige Richtungen aus S^1 . Ein $l \in S^1$ lässt sich als lineare Kombination der Basis $\{l_j, l_{j+1}\}$ ausdrücken:

$$l = a \cdot l_j + b \cdot l_{j+1}$$

mit

$$a = \frac{\langle l, l_j^\perp \rangle}{\langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle} \quad b = \frac{\langle l, l_{j+1}^\perp \rangle}{\langle l_{j+1}, l_j^\perp \rangle}$$

Beweis: $l = a \cdot l_j + b \cdot l_{j+1}$ (*) falls $\langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle \neq 0$, d.h. l_j, l_{j+1} linear unabhängig, wobei $l = (l_1, l_2), l^\perp = (l_2, -l_1)$. Dann gilt:

$$a = \langle l, l_j^\perp \rangle / \langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle$$

$$b = \langle l, l_{j+1}^\perp \rangle / \langle l_{j+1}, l_j^\perp \rangle$$

Man bekommt aus (*) die Gleichungen

$$\langle l, l_j^\perp \rangle = b \cdot \langle l_{j+1}, l_j^\perp \rangle$$

$$\langle l, l_{j+1}^\perp \rangle = a \cdot \langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle$$

Beachte auch

$$\langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle = -\langle l_{j+1}, l_j^\perp \rangle$$

Wäre $\langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle = 0$, dann ist l_{j+1}^\perp aus dem orthogonalen Komplement von l_j , also entweder gleich l_j^\perp oder $-l_j^\perp$, da dessen Norm 1 beträgt. Dann ist aber $l_j = l_{j+1}$ bzw. $l_j = -l_{j+1}$, was ein Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit wäre. \square

1.3.14 Lemma (Berechnung der Stützfunktion) Sei $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ein kompaktes konvexes Polytop mit $k \geq 3$ Ecken. Die äußeren normalen Richtungen (Angabe der formalen Definition in 3.5.3 angegeben) seiner Kanten seien l_1, \dots, l_k . Die Menge der Ecken von P sei $\text{vert}(P) = \{p_{l_1}^{l_2}, \dots, p_{l_k}^{l_1}\}$, so dass l_j die äußere Normale der Kante $\text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$ bezeichnet. Die Schreibweise $p_{l_j}^{l_{j+1}}$ deutet den Durchschnitt der von l_j und l_{j+1} bestimmten Strecken an. Dabei sei zusätzlich $l_{k+1} := l_1$ und $l_0 := l_k$ zu verstehen (anders ausgedrückt, reduziert man die Indizes Modulo k). Dann ergibt sich die Stützfunktion von P bezüglich den Normalen l_j für $j = 1, \dots, k$ zu:

$$\delta^*(l_j, P) = \langle l_j, p_{l_{j-1}}^{l_j} \rangle = \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle$$

Außerdem gilt:

$$\langle l_j, z \rangle = \delta^*(l_j, P) \quad \text{für jedes } z \in \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$$

Beweis: Da l_j die äußere Normale von P bezüglich $\text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$ ist, gilt

$$\langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} - p_{l_{j-1}}^{l_j} \rangle = 0 \quad \text{und daher} \quad \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle = \langle l_j, p_{l_{j-1}}^{l_j} \rangle$$

Da alle Ecken im gleichen Halbraum $\mathcal{H}_-^{l_j}$ liegen, gilt für ein fest gewähltes $j \in \{1, \dots, k\}$ auch

$$\langle l_j, p_{l_i}^{l_{i+1}} \rangle \leq \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Nun lässt sich ein beliebiger Punkt in P als lineare Kombination $\sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot p_{l_h}^{l_{h+1}}$, mit $\lambda_h \in [0, 1]$ und $\sum_{h=1}^k \lambda_h = 1$ schreiben, so dass

$$\langle l_j, \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot p_{l_i}^{l_{i+1}} \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \langle l_j, p_{l_i}^{l_{i+1}} \rangle \leq \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle$$

ist, und daraus folgt $\delta^*(l_j, P) = \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle$. Für ein

$$z = \lambda p_{l_{j-1}}^{l_j} + (1 - \lambda) p_{l_j}^{l_{j+1}} \in Y_P^{l_j}$$

erhält man schließlich:

$$\langle l_j, z \rangle = \lambda \langle l_j, p_{l_{j-1}}^{l_j} \rangle + (1 - \lambda) \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle = \lambda \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle + (1 - \lambda) \langle l_j, p_{l_j}^{l_{j+1}} \rangle$$

□

1.3.15 Folgerung *Unter den gleichen Voraussetzungen des Lemmas 1.3.14 erhält man:*

$$Y_P^{l_j} = \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$$

Beweis: Die Inklusion „ \supseteq “ folgt aus dem Lemma 1.3.14. Die Gültigkeit der umgekehrten Inklusion „ \subseteq “ wird in Folgenden aufgezeigt. Da

$$\dim \text{aff}(Y_P^{l_j}) = \dim \text{aff} \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\} = 1$$

ist, folgt, dass $Y_P^{l_j}$ eine Facette ist. Daher ist:

$$Y_P^{l_j} = \text{co}\{p_{l_{i-1}}^{l_i}, p_{l_k}^{l_{k+1}}\} \quad \text{mit} \quad i, k \in \{1, \dots, m\}$$

Dies impliziert die Existenz eines $\alpha \in [0, 1]$ mit $p_{l_{j-1}}^{l_j} = (1 - \alpha) p_{l_{i-1}}^{l_i} + \alpha p_{l_k}^{l_{k+1}}$. Daraus ergibt sich $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$: Im ersten Fall ist dann $i = j$, im zweiten $i = k$. Analog geht man für $p_{l_j}^{l_{j+1}}$ vor. □

1.3.16 Folgerung *Man betrachte das Polytop $P := \text{co}\{p_1, p_2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und die zu P normalen Richtungen $l := \frac{(p_2 - p_1)^\perp}{\|p_2 - p_1\|}$ und $-l$. Dann hat man:*

1. für jedes $z \in P$ ist:

- $\langle l, z \rangle = \langle l, p_1 \rangle = \langle l, p_2 \rangle = \delta^*(l, P)$
- $\langle -l, z \rangle = \langle -l, p_1 \rangle = \langle -l, p_2 \rangle = \delta^*(-l, P)$

$$2. Y_P^l = \text{co}\{p_1, p_2\} = Y_P^{-l}$$

3. für jedes von l und $-l$ verschiedenes $u \in S^1$ gilt:

- $\delta^*(u, P) = \max\{\langle u, p_1 \rangle, \langle u, p_2 \rangle\}$
- $Y_P^u = \{p_j \mid \langle u, p_j \rangle = \delta^*(u, P), j \in \{1, 2\}\}$

insbesondere erhält man:

$$\delta^*(u, P) = \begin{cases} \langle u, p_1 \rangle & : \langle u, p_2 \rangle < \langle u, p_1 \rangle \\ \langle u, p_2 \rangle & : \langle u, p_1 \rangle < \langle u, p_2 \rangle \end{cases}$$

und demnach:

$$Y_P^u = \begin{cases} \{p_1\} & : \langle u, p_2 \rangle < \langle u, p_1 \rangle \\ \{p_2\} & : \langle u, p_1 \rangle < \langle u, p_2 \rangle \end{cases}$$

Beweis: Die Ergebnisse der Punkte 1) und 2) folgen aus Lemma 1.3.14. Der dritte Punkt wird jetzt erklärt. Also, sei $u \notin \{l, -l\}$. Zunächst ist anzunehmen, dass die Gleichung $\langle u, p_1 \rangle = \langle u, p_2 \rangle$ nicht gelten kann, denn man hätte dann $\langle u, p_2 - p_1 \rangle = 0$, also $u \in \text{span}\{p_2 - p_1\}^\perp$, und damit $u = l$ oder $-l$, was einen Widerspruch ergäbe. Falls $\langle u, p_1 \rangle < \langle u, p_2 \rangle$, dann ist $\langle u, p_2 - p_1 \rangle > 0$ und somit

$$\langle u, z \rangle = \lambda \langle u, p_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle u, p_2 \rangle < \lambda \langle u, p_2 \rangle + (1 - \lambda) \langle u, p_2 \rangle = \langle u, p_2 \rangle$$

für alle $z \in P$ (z muss eine konvexe Kombination von p_1 und p_2 sein mit $\lambda \in [0, 1]$). Der Fall $\langle u, p_1 \rangle > \langle u, p_2 \rangle$ ist analog zu behandeln. \square

1.3.17 Lemma Man habe eine Menge $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ und betrachte eine Richtung l aus S^{n-1} . Dann ist Y_P^l extremal in C . Falls $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, dann ist Y_C^l eine Seite des Polytops.

Beweis: Vergleiche [HUL93], Proposition 2.4.3 aus Kapitel III. \square

1.3.18 Lemma Für ein Polytop P aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist die Vereinigung der Stützpunktmenge über alle Richtungen gleich dem Rand des Polytops:

$$\bigcup_{l \in S^{n-1}} Y_P^l = \partial P$$

Beweis: Siehe 1.3.7. □

1.3.19 Lemma Man habe ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{vert}(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$ und betrachte eine Richtung l aus S^{n-1} . Dann existieren Indizes:

$$i_1, \dots, i_h \in \{1, \dots, k\} \quad \text{so, dass} \quad Y_P^l = \text{co}\{p_{i_1}, \dots, p_{i_h}\}$$

Für $n = 2$ und $h = 2$ ist $\dim \text{aff}(Y_P^l) = 1$ und damit $Y_P^l = \text{co}\{p_{i_1}, p_{i_2}\}$ für $p_{i_1} \neq p_{i_2}$.

Beweis: Siehe [Web94], Teil über konvexe Polytope. □

1.4 Operationen auf konvexe kompakte Mengen des \mathbb{R}^n

Nachdem in die Problematik der Konstruktion einer Arithmetik auf allgemeine Teilmengen des \mathbb{R}^n eingeleitet wurde, und die später benötigten Begriffe eingeführt wurden, untersucht man nun Operationen auf konvexe kompakte Mengen. Die Kompaktheit impliziert die Beschränktheit der Mengen. Diese Tatsache hat zur Folge, dass die Definitionen sich vereinfachen. Nicht zuletzt sind beschränkte Mengen leichter im Rechner darzustellen; außerdem entspricht die Beschränktheit den Problemen mit einer diskreten Anzahl an Nebenbedingungen, welche in der Praxis üblicherweise vorkommen.

Neben den schon erwähnten Schwierigkeiten bei der Einführung von Operationen auf allgemeine Teilmengen des \mathbb{R}^n (wie z.B. 1.2.1) ist es bei kompakten konvexen Teilmengen zusätzlich zum Teil nicht möglich die Konvexität zu bewahren. Beispielsweise ist es nicht möglich, eine Differenz invers zur Minkowski-Summe zu definieren, die die Konvexität immer bewahrt.

Bezeichne $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller nichtleeren kompakten konvexen Mengen von \mathbb{R}^n . Man kann $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden punktweisen Operationen versehen:

$$\begin{aligned} A \oplus B &:= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ A \ominus B &:= \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \\ \lambda \cdot A &:= \{\lambda a \mid a \in A\} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Unter den weiteren noch möglichen Operationen auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sind die so genannten *partiale Additionen* („partial additions“). Für eine ausführliche Beschreibung und für die Beweise der Eigenschaften vergleiche [Roc97]. Die Minkowski-Summe sei als extremer Fall genannt. Es soll nun ein anderer Spezialfall angegeben werden, nämlich die *inverse Addition / Summe*. Es seien $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, dann definiere man:

$$\begin{aligned} A \# B &:= \bigcup_{\lambda, \mu} \{\lambda \cdot A \cap \mu \cdot B \mid \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\} = \\ &= \bigcup_{\nu} \{(1 - \nu) \cdot A \cap \nu \cdot B \mid \nu \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

Dabei bleibt $A \# B$ eine konvexe Menge. Die inverse Addition ist binär, kommutativ und assoziativ auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Die Operation $\#$ kann auch als punktweise Operation betrachtet werden, durch:

$$A \# B := \{a \# b \mid a \in A, b \in B\}$$

mit

$$a = \alpha_1 \cdot \mathbf{1}, \quad b = \alpha_2 \cdot \mathbf{1}, \quad a \# b := \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \mathbf{1}$$

wobei den gemeinsamen Strahl $\{\alpha \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \geq 0, \mathbf{1} \in S^{n-1}\}$, auf dem a und b liegen, in die Betrachtung eingezogen wurde. Dabei folgt die Existenz eines solchen Strahl aus der Konstruktion von $A \# B$ (Vergleiche [Roc97]).

Besonders wird die Differenz zweier kompakter konvexer Mengen in dieser Arbeit untersucht. Es folgt deshalb ein Überblick möglicher Definitionen dieser Operation:

1. algebraische (punktweise) Differenz: Zu $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ definiere man

$$A \ominus B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

Für Rechnungen ergibt sich dass, $A \ominus B$ eine zu große Menge ist. Im allgemeine erhält man:

$$A \ominus A \supseteq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Dies erweist sich als Nachteil, wenn man eine Arithmetik definieren möchte.

2. **Differenz von Intervallen:** Sei $\mathcal{I}(\mathbb{R}) := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ die Menge aller echten reellen Intervalle, und $\overline{\mathcal{I}}(\mathbb{R}) := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a > b\}$ sei die Menge der unechten Intervallen.

1.4.1 Bemerkung *Nach der Definition des Intervalls $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ wäre $[a, b] = \emptyset$ für $a > b$. Man betrachte einen $A \in \overline{\mathcal{I}}(\mathbb{R})$ als ein Paar von Werten.*

$\mathcal{G}(\mathbb{R}) := \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cup \overline{\mathcal{I}}(\mathbb{R})$ bezeichne (nach Kaucher: siehe [BF01a]) die Menge der generalisierten Mengen. Für die Mengen $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ ergeben sich mehrere Möglichkeiten, Operationen zu definieren:

- $(\mathcal{I}(\mathbb{R}), +, \ominus)$ mit $+, \ominus$ algebraisch, d.h. punktweise definiert, wie im Punkt 2). Für den Inverser bezüglich der Differenz \ominus erhält man:

$$\ominus[a, b] = [-b, -a]$$

- Verallgemeinerungen der oben gennantenen Operationen auf der Menge $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ sind möglich (man siehe dazu die Verweisungen in [BF01a]). Man überträgt die Operationen $+, -, \cdot$ von \mathbb{R} auf $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ durch Punktweise-Definition. Leider bleiben nicht alle üblichen Eigenschaften der entsprechenden Operationen auf \mathbb{R} erhalten: z.B. das distributive Gesetz:

$$(\lambda + \mu) \cdot [a, b] = \lambda \cdot [a, b] + \mu \cdot [a, b]$$

gilt nicht für $\lambda, \mu < 0$. Außerdem existiert zu $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ eine additive Inverse bezüglich $+$ genau dann, wenn $A = [x, x]$ ist (vergleiche [BF01a]).

1.4.2 Bemerkung *Es bestehen die Isomorphismen:*

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}) \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^2 : [a, b] \mapsto (a, b)$$

und $\mathcal{G}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$.

3. **Minkowski-Differenz** (auch geometrische Differenz genannt). Seien $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Man definiere:

$$A \overset{\star}{-} B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + B \subset A\}$$

Die Menge $A \overset{\star}{-} B$ kann also als die Menge aller Verschiebungen x angesehen werden, die B in A versetzen. Diese Differenz besitzt die folgenden Eigenschaften (Beweis: Siehe [BF01a]):

- (a) $A \overset{\star}{-} A = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- (b) $A \overset{\star}{-} B$ ist konvex
- (c) $(A \overset{\star}{-} B) \oplus B \subset A$

Die Eigenschaft c) stellt einen Nachteil dar, denn es heißt, dass die Differenz $A \overset{\star}{-} B$ im Allgemeinen zu klein oder sogar oft leer ist.

4. **Demynov-Differenz** Seien $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Man definiere:

$$A \overset{\cdot}{-} B := \overline{\text{co}}\{A^l - B^l \mid l \in S^{n-1}, A^l \text{ und } B^l \text{ singleton}\}$$

wobei $A^l := Y_A^l$. Dabei sind folgenden drei Eigenschaften bedeutend (Beweis: Vergleiche [BF01a]):

- (a) $A \overset{\cdot}{-} A$ ist konvex
- (b) $A \overset{\cdot}{-} B$ ist konvex
- (c) $(A \overset{\cdot}{-} B) \oplus B \supset A$

Im Allgemeinen erweist sich Eigenschaft (a) als Nachteil, denn sie verhindert Gleichheit bei (c). Die Ursache dafür liegt in der Bildung von $\overline{\text{co}}(\cdot)$ in der Definition. Es sei bemerkt, dass die Konvexifikation zum Ziel hat, im Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ zu bleiben, denn sonst wäre sie nicht strikt notwendig.

1.4.3 Bemerkung *Es ist nicht möglich eine Differenz inverse zur Minkowski-Summe zu definieren, die nicht-leere ist und die gleichzeitig die Konvexität bewahrt. Diese ergibt sich als zu groß, wie im Punkt 3) erwähnt, oder als zu klein, wie im Punkt 4) erwähnt.*

Zur Verdeutlichung von $\overset{\star}{-}$ und $\overset{\cdot}{-}$ sei auf das folgendes Beispiel verwiesen.

1.4.4 Beispiel Für $A := \text{co}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $B := \text{co}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ist:

$$A \overset{\star}{-} B = \emptyset$$

$$A \overset{\cdot}{-} B = [-1, 1]^2$$

Das folgende Lemma bietet eine Verknüpfung von $\overset{\star}{-}$ und $\overset{\cdot}{-}$.

1.4.5 Lemma Seien $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

1. $A \overset{\star}{-} B \subset A \overset{\cdot}{-} B$
2. $\ominus(B \overset{\star}{-} A) \subset A \overset{\cdot}{-} B$

Im dritten Kapitel wird das Lemma verallgemeinert, um einen Zusammenhang mit den *gerichteten Mengen* zu zeigen.

Kapitel 2

Gerichtete Mengen

In diesem Kapitel werden die *gerichteten Mengen* zusammen mit Teilen ihrer Theorie vorgestellt. Die hier behandelten Begriffe und Ergebnisse dienen der Einleitung des nachfolgenden Kapitels über *gerichteten Polytope*, und stellen Hilfsmittel und Basis zur Entwicklung dieser dar. Der Raum der *gerichteten Polytope* ergibt sich als Teilraum der *gerichteten Mengen*. Ein anderer wichtiger Teilraum der gerichteten Mengen bildet die abgeschlossene Hülle der *eingebetteten* konvexen kompakten Mengen. Er wird im Kapitel 3 ausführlich beschrieben.

Auf der Menge aller gerichteten Mengen sind die Operationen eines \mathbb{R} -Vektorraumes definierbar, eine Norm und eine Halbordnung einföhrbar. Die sich ergebenden Strukturen werden in 2.2.2 näher betrachtet.

Bei den gerichteten Mengen sind zwei Aspekte zu unterscheiden: Die tatsächlich gerichteten Mengen, d.h. die Elemente des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$, und deren *Visualisierung*, d.h. im Wesentlichen, eine Teilmenge des \mathbb{R}^n zusammen mit einem so genannten *Orientierungsbündel*. Die Visualisierung gerichteter Mengen schafft eine Verbindung zwischen den im Kapitel 1 definierten Mengenoperationen auf \mathbb{R}^n und den Operationen auf $\vec{\mathcal{D}}^n$, dem Raum der gerichteten Mengen.

Die meisten Definitionen erfolgen rekursiv bezügl ich der Dimension n des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$.

Die Theorie der gerichteten Mengen stammt aus der Zusammenarbeit zwischen Dr. R. Baier der Universität Bayreuth und Dr. E. Farqhi der Universität von Tel Aviv. Deren Artikel [BF01a] und [BF01b] liefern den Ausgangspunkt dieser Arbeit. Die *gerichteten Polytope* stellen eine Weiterentwicklung dieser Theorie dar.

2.1 Der Raum der gerichteten Mengen

Eine gerichtete Menge kann als eine Funktion angesehen werden. Im eindimensionalen Fall besteht sie aus nur einer Komponente, im Gegensatz zum höherdimensionalen Fall, in dem sie aus zwei Komponenten besteht. Wie schon betont, bezieht sich die Definition auf die Dimension 1, und erfolgt rekursiv bezüglich der Dimension n des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$.

2.1.1 Definition (gerichtete Mengen) *Bezeichne n die Dimension des Raumes \mathbb{R}^n , und $\vec{\mathcal{D}}^n$ die Menge der gerichteten Mengen der Dimension n .*

- Für $n = 1$ ist eine gerichtete Menge in \mathbb{R} definiert durch eine Funktion

$$a_1(\cdot) : S^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

d.h. durch ein Paar reeller Werte $(a_1(-1), a_1(+1)) =: \vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$. $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$ wird auch gerichtetes Intervall genannt. Die Norm von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$ ist definiert durch:

$$\|\vec{A}\|_1 := \max_{l \in S^0} \{|a_1(l)|\} = \max\{|a_1(-1)|, |a_1(+1)|\}$$

- Für $n \geq 2$ ist eine gerichtete Menge $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ gegeben durch eine Funktion

$$\begin{aligned} \vec{A} : S^{n-1} &\rightarrow \vec{\mathcal{D}}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ l &\mapsto (\overrightarrow{A_{n-1}}(l), a_n(l)) \end{aligned}$$

deren Komponenten folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\overrightarrow{A_{n-1}}(\cdot) : S^{n-1} \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^{n-1}$ ist gleichmäßig beschränkt bezüglich der auf $\vec{\mathcal{D}}^n$ definierten Norm $\|\cdot\|_{n-1}$. Diese Komponente wird als die $(n-1)$ -dimensionale „verallgemeinerte stützende Seite“ bezeichnet.
2. $a_n(\cdot) : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion (bezüglich der Topologie auf \mathbb{R} und der von \mathbb{R}^n auf S^{n-1} induzierten Topologie). Sie heißt auch die n -dimensionale „verallgemeinerte Stützfunktion“. (Anmerkung: es handelt sich hier nicht unbedingt um eine Stützfunktion im Sinne der konvexen Analysis)

Die Norm auf $\vec{\mathcal{D}}^n$ ist gegeben durch

$$\|\vec{A}\|_n := \max\left\{\sup_{l \in S^{n-1}} \|\overline{A_{n-1}(l)}\|_{n-1}, \max_{l \in S^{n-1}} |a_n(l)|\right\}$$

Satz 2.2.2 wird sicherstellen, dass $\|\cdot\|_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tatsächlich eine Norm auf $\vec{\mathcal{D}}^n$ ist.

2.1.2 Bezeichnung

1. Für ein gerichtetes Interall $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$ wird häufig eine der folgenden Notationen benutzt:

$$\vec{A} = (a_1(-1), a_1(+1)) =: (a_1(l))_{l \in S^0} =: [\alpha_1, \alpha_2]$$

mit $\alpha_1 = -a_1(-1)$ und $\alpha_2 = a_1(+1)$.

2. Sei $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ mit $n \geq 2$. Zu einer Richtung $l \in S^{n-1}$ wird das Wertepaar $\vec{A}(l) = (\overline{A_{n-1}(l)}, a_n(l)) \in \vec{\mathcal{D}}^{n-1} \times \mathbb{R}$ von Autor dieser Arbeit mit dem Wort „Stützpaar“ (bzw. „supporting pair“ oder auch „supporting“) bezeichnet. Zur Erläuterung der Implementation erweist sich diese Bezeichnung als zweckmäßig.
3. Für ein $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ mit $n \geq 2$ schreibt man kurz $(\overline{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$. In dieser Schreibweise werden die „Stützpaare“ zu jeder Richtung $l \in S^{n-1}$ angegeben. Solch eine Darstellung einer gerichteten Menge \vec{A} wird auch vollständige Darstellung genannt.

Durch folgendes Beispiel kann man eine erste Vorstellung davon bekommen, wie eine gerichtete Menge aussehen kann.

2.1.3 Beispiel Zuerst ordne man einer Richtung $l \in S^1$ einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ zu, so dass $l \leftrightarrow (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Die Funktion:

$$\vec{A}(l) = \begin{cases} ((-\langle l^\perp, p_1 \rangle, \langle l^\perp, p_1 \rangle), \langle l, p_1 \rangle)_{l \in S^1} & : \varphi \in (0, \pi) \\ ((-\langle l^\perp, p_2 \rangle, \langle l^\perp, p_2 \rangle), \langle l, p_2 \rangle)_{l \in S^1} & : \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ ((-\langle l^\perp, p_3 \rangle, \langle l^\perp, p_3 \rangle), \langle l, p_3 \rangle)_{l \in S^1} & : \varphi \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \\ ((-\langle l^\perp, p_4 \rangle, \langle l^\perp, p_4 \rangle), \langle l, p_4 \rangle)_{l \in S^1} & : \varphi \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \\ ((1, 1), \langle l, p_1 \rangle)_{l \in S^1} & : \text{sonst} \end{cases}$$

wobei:

$$p_1 = (1, 1) \quad p_1 = (-1, 1) \quad p_1 = (-1, -1) \quad p_1 = (1, -1)$$

definiert dann eine gerichtete Menge der Dimension 2. Ursprung dieser Menge ist die konvexe kompakte Menge $A = [-1, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (\vec{A} entsteht durch Einbettung von A in $\vec{\mathcal{D}}^2$).

Die Menge $\vec{\mathcal{D}}^n$ lässt sich mit den Operationen eines \mathbb{R} -Vektorraums versehen:

2.1.4 Definition (Operationen auf $\vec{\mathcal{D}}^n$) Bezeichne $n \geq 1$ die Dimension des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$. Man setzt:

- $n = 1$: Seien $\vec{A} = (a_1(l))_{l \in S^0}$ und $\vec{B} = (b_1(l))_{l \in S^0}$ aus $\vec{\mathcal{D}}^1$ gerichtete Intervalle und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man definiert:

$$\vec{A} + \vec{B} := (a_1(l) + b_1(l))_{l \in S^0}$$

$$\lambda \cdot \vec{A} := (\lambda \cdot a_1(l))_{l \in S^0}$$

$$\vec{A} - \vec{B} := \vec{A} + (-1) \cdot \vec{B} = (a_1(l) - b_1(l))_{l \in S^0}$$

$$-\vec{A} := (-1) \cdot \vec{A} = (-a_1(l))_{l \in S^0}$$

- $n \geq 2$: Seien $\vec{A} = (\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ und $\vec{B} = (\overrightarrow{B_{n-1}(l)}, b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ aus $\vec{\mathcal{D}}^n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man definiert:

$$\vec{A} + \vec{B} := (\overrightarrow{A_{n-1}(l)} + \overrightarrow{B_{n-1}(l)}, a_n(l) + b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$$

$$\lambda \cdot \vec{A} := (\lambda \cdot \overrightarrow{A_{n-1}(l)}, \lambda \cdot a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$$

$$\vec{A} - \vec{B} := \vec{A} + (-1) \cdot \vec{B}$$

$\vec{\mathcal{D}}^n$ ist eine halbgeordnete Menge. Die angegebene Ordnung ist eine Halbordnung für jede Dimension. Im Falle konvexen kompakten Mengen entspricht sie insbesondere der Mengeninklusion. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass die Mengen aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ im Raume $\vec{\mathcal{D}}^n$ eingebettet werden können.

2.1.5 Definition (Halbordnung) Gegeben seien $\vec{A} = (\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ und $\vec{B} = (\overrightarrow{B_{n-1}(l)}, b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ aus $\vec{\mathcal{D}}^n$. Dann setzt man

$$\vec{A} \leq \vec{B} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a_n(l) \leq b_n(l) & \forall l \in S^{n-1} \\ \exists l \in S^{n-1} \mid a_n(l) = b_n(l) \Rightarrow \overrightarrow{A_{n-1}(l)} \leq \overrightarrow{B_{n-1}(l)} \end{cases}$$

2.1.6 Bemerkung Mit der Intervallnotation lassen sich die Operationen und die Relation \leq wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} + \overrightarrow{[\beta_1, \beta_2]} &= \overrightarrow{[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2]} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} &= \overrightarrow{[\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2]} \\ \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} \leq \overrightarrow{[\beta_1, \beta_2]} &\iff \alpha_1 \geq \beta_1 \wedge \alpha_2 \leq \beta_2 \end{aligned}$$

Insbesondere für die Inverse bezüglich der Addition hat man:

$$-\overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} = \overrightarrow{[-\alpha_1, -\alpha_2]}$$

Auch ein Supremum und ein Infimum lassen sich angeben:

2.1.7 Definition (Supremum) Das Supremum von $\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ und $\overrightarrow{B} = (\overrightarrow{B_{n-1}(l)}, b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ aus $\overrightarrow{\mathcal{D}}^n$ für $n \geq 1$ ist definiert durch:

$$\sup\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\} := (\top_{n-1}(l), \max\{a_n(l), b_n(l)\})_{l \in S^{n-1}} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^n$$

wobei

$$\top_{n-1}(l) = \begin{cases} \text{nicht zu betrachten} & : n = 1 \\ \overrightarrow{B_{n-1}(l)} & : a_n(l) < b_n(l) \\ \sup\{\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, \overrightarrow{B_{n-1}(l)}\} & : a_n(l) = b_n(l) \\ \overrightarrow{A_{n-1}(l)} & : a_n(l) > b_n(l) \end{cases}$$

2.1.8 Definition (Infimum) Gegeben die gerichteten Mengen $\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ und $\overrightarrow{B} = (\overrightarrow{B_{n-1}(l)}, b_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ aus $\overrightarrow{\mathcal{D}}^n$ ist deren Infimum definiert durch:

$$\inf\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\} := (\perp_{n-1}(l), \min\{a_n(l), b_n(l)\})_{l \in S^{n-1}} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^n$$

wobei

$$\perp_{n-1}(l) = \begin{cases} \text{nicht zu betrachten} & : n = 1 \\ \overrightarrow{A_{n-1}(l)} & : a_n(l) < b_n(l) \\ \inf\{\overrightarrow{A_{n-1}(l)}, \overrightarrow{B_{n-1}(l)}\} & : a_n(l) = b_n(l) \\ \overrightarrow{B_{n-1}(l)} & : a_n(l) > b_n(l) \end{cases}$$

Mit Hilfe des Supremums wird der Betrag eines $\overrightarrow{A} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^n$ definierbar.

2.1.9 Definition (Betrag) Zu $\overrightarrow{A} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^n$ setzt man $|\overrightarrow{A}| := \sup\{\overrightarrow{A}, -\overrightarrow{A}\}$

2.2 Die Strukturen des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$

Zuerst wird durch ein Lemma bestätigt, dass die Funktion $\|\cdot\|_n$ der Definition 2.1.1 tatsächlich eine wohldefinierte Norm ist.

2.2.1 Lemma Die Funktion $\|\cdot\|_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm auf $\vec{\mathcal{D}}^n$.

Beweis: Vergleiche Artikel [BF01b]. □

Der folgende Satz erläutert die Strukturen der Menge $\vec{\mathcal{D}}^n$, die als Folge der definierten Operationen, Norm und Halbordnung entstehen.

2.2.2 Satz (Strukturen von $\vec{\mathcal{D}}^n$) Die Menge $\vec{\mathcal{D}}^n$, $n \geq 1$, aller gerichteten Mengen besitzt folgende Eigenschaften:

1. Der Raum $(\vec{\mathcal{D}}^n, +, \cdot)$ ist ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum mit Nullelement $\vec{0} := (0_{\vec{\mathcal{D}}^{n-1}}, 0)_{l \in S^{n-1}}$ und Inverser $-\vec{A}$.
2. Der Raum $(\vec{\mathcal{D}}^n, \|\cdot\|_n)$ ist ein Banach-Raum.
3. Der Raum $(\vec{\mathcal{D}}^n, \leq)$ ist ein halbgeordneter und ein Riesz-Raum.

Beweis: Zum Beweis des ersten Punktes siehe Satz 3.3 und 4.14 aus [BF01b]. Der Beweis von Punkt 2 folgt aus den Sätzen 3.9 und 4.15 aus [BF01b]. Zum Beweis des dritten Punktes siehe die Sätze 3.9 und 4.16 in [BF01b]. □

2.3 Die Projektion $\Pi_{a_n}^l$ und die Antiprojektion ${}^* \Pi_{a_n}^l$

Zur Definition der Einbettung J_n von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{\mathcal{D}}^n$ und zur Definition der Visualisierung einer gerichteten Menge werden einige Hilfsfunktionen benötigt. Diese Hilfsfunktionen werden im folgenden definiert. Es soll noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass ein Sternchen links oben plaziert die Inverse bzw. linke Inverse einer invertierbaren Funktion bzw. linksinvertierbaren Funktion bezeichnet. Dies darf nicht mit der Adjunktion verwechselt werden ¹.

¹Die hier verwendete Bezeichnung wird oft in der Algebra verwendet. Siehe [MB85]

2.3.1 Definition (Hilfsfunktionen) Bezeichne $n \geq 2$ die Dimension des Raumes \mathbb{R}^n ; l eine Richtung aus S^{n-1} ; $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ das (Standard-) Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1, \dots, n}$ den i -ten Basisvektor der Standardortonormalbasis. Dann definiere man die folgenden Funktionen:

- Translation in Richtung l und Koeffizient $a_n(l)$ (oder auch zum Vektor $-a_n(l) \cdot l$):

$$\tau_{a_n}^l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - a_n(l) l$$

Die Translation $\tau_{a_n}^l$ verschiebt die Hyperebene

$$\mathcal{H}_{a_n}^l := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, l \rangle = a_n(l)\}$$

auf die Hyperebene $\text{span}\{l\}^\perp$.

Eine Translation ist durch einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ bestimmt. Zur Definition von $\tau_{a_n}^l$ werden hier die Vektoren der Form $\mathbf{v} = -a_n(l) l$ betrachtet, wobei $a_n(l)$ (in den kommenden Abschnitten) als die zweite Komponente von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ zu verstehen ist. Bei der Einbettung von Elementen aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ und bei eingebetteten gerichteten Mengen ist $a_n(l) = \delta^*(l, \cdot)$. Bei der Einbettung eines Elementes aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ erwirkt die $\tau_{a_n}^l$ die Verschiebung der Stützhyperebene $\mathcal{H}_{a_n}^l$ auf die Hyperebene durch den Ursprung parallel zu $\mathcal{H}_{a_n}^l$.

- Drehung zur Richtung l :

$$\rho_{a_n}^l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, l \mapsto \mathbf{e}_n$$

d.h., man wählt die Drehung, die den Vektor $l \in S^{n-1}$ auf den Basis-Vektor \mathbf{e}_n abbildet. Die Rotation $\rho_{a_n}^l$ dreht $\tau_{a_n}^l(\mathcal{H}^l)$ auf $\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. An Stelle der Drehung $\rho_{a_n}^l$ könnte man irgendeine andere positiv orthogonale Abbildung wählen, die allein der Forderung genügen muss, l in \mathbf{e}_n umzuformen. Eine solche Wahl ist bei der Konstruktion der Einbettung von kompakten konvexen Mengen nicht wesentlich.

- Die orthogonale Projektion auf die n -te Hyperebene:

$$\pi_{n-1} : \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

Dabei sei bemerkt, dass die Abbildung einer konvexen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ unter π_{n-1} wieder eine konvexe Menge ist (vergleiche [Roc97] Seite 19).

- Die Projektion in Richtung l :

$$\Pi_{a_n}^l := \pi_{n-1} \circ \rho_{a_n}^l \circ \tau_{a_n}^l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

und die Antiprojektion in Richtung l :

$$*\Pi_{a_n}^l := *\tau_{a_n}^l \circ *\rho_{a_n}^l \circ *\pi_{n-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Die Wirkung dieser Projektion besteht darin, dass die Hyperebene $\mathcal{H}_{a_n}^l$ auf \mathbb{R}^{n-1} projiziert wird. Die Antiprojektion bewirkt die Umkehrung von $\Pi_{a_n}^l$ auf die Hyperebene $\mathcal{H}_{a_n}^l$.

2.3.1 Spezialfall: Dimension 2

Für die kommenden Betrachtungen über die eingebetteten Mengen ist die Projektion $\Pi_{a_n}^l$ für $n = 2$ von besonderem Interesse. Dieser Sonderfall wird deswegen hier näher untersucht. Die folgenden Lemmata schaffen Werkzeuge zum direkten Berechnen der Werte von $\Pi_{a_2}^l$ und $*\Pi_{a_2}^l$. Folgende Bezeichnungen werden häufig gebraucht:

2.3.2 Definition Man betrachte einen Vektor $v = (v_1, v_2)$ aus dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 und setze:

$$v^\perp := (v_2, -v_1) \quad \text{und} \quad {}^\perp v := (-v_2, v_1)$$

Zu einer Richtung $l \in S^1$ bildet $\{l, l^\perp\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 mit der gleichen Orientierung wie die Basis $\{e_1, e_2\}$ (Siehe [Ser89]).

Nun können Behauptungen über die Projektion bzw. Antiprojektion formuliert werden.

2.3.3 Lemma Sei $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$. Zu einer Richtung $l \in S^1$ liege der Punkt \mathbf{p} auf der Gerade $\mathcal{H}_{a_2}^l$, wobei $a_2(l)$ einen beliebigen reellen Wert annehme, d.h. $\mathcal{H}_{a_2}^l$ gehöre zur Hyperebenschar

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle l, \mathbf{x} \rangle = \gamma\}_{\gamma \in \mathbb{R}}$$

Dann ist $\Pi_{a_2}^l \mathbf{p} = \langle \mathbf{p}, l^\perp \rangle$.

Beweis: Zuerst ist nach Definition $\Pi_{a_2}^l \mathbf{p} \in \mathbb{R}$. Die wesentliche Überlegung besteht darin, diesen reellen Wert in Abhängigkeit von $l = (l_1, l_2)$ zu bestimmen. Man setze $\mathbf{q} := \tau_{a_2}^l \mathbf{p}$, $\mathbf{r} := \rho_{a_2}^l \mathbf{q}$ und $\mathbf{0} := (0, 0)$, und überlege sich, dass ²

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{q} - \mathbf{0}\| = |\langle \mathbf{p} - \mathbf{0}, l^\perp \rangle|$$

Da man an dem Vorzeichen interessiert ist, lässt man den Betrag weg. Man käme zum gleichen Schluß auch durch direktes Nachrechnen mit:

$$\rho_{a_2}^l \equiv \begin{pmatrix} \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle & -\langle l, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle l, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$(\rho_{a_2}^l \circ \tau_{a_2}^l) \mathbf{p} = (\rho_{a_2}^l) \begin{pmatrix} p_1 - a_2(l) l_1 \\ p_2 - a_2(l) l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 l_2 - p_2 l_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $p = (p_1, p_2)$ verwendet wurde. □

2.3.4 Lemma Sei $x \in \mathbb{R}$. Außerdem zu einer Richtung $l = (l_1, l_2) \in S^1$ sei der Koeffizient $a_2(l)$ der Verschiebung $\tau_{a_2}^l$ vorgegeben. Dann gilt:

$${}^*\Pi_{a_2}^l x = \begin{pmatrix} \langle l, v \rangle \\ \langle l, {}^\perp v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle l, v \rangle \\ \langle l^\perp, v \rangle \end{pmatrix} = {}^*\rho_{a_2}^l \begin{pmatrix} x \\ a_2(l) \end{pmatrix}$$

mit $v = (a_2(l), x)$.

Beweis: Es ist:

$${}^*\rho_{a_2}^l \equiv \begin{pmatrix} \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle l, \mathbf{e}_1 \rangle \\ -\langle l, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Direktes Rechnen liefert:

$$\begin{aligned} {}^*\Pi_{a_2}^l x &= \begin{pmatrix} x \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle + a_2(l) l_1 \\ -x \langle l, \mathbf{e}_1 \rangle + a_2(l) l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x l_2 + a_2(l) l_1 \\ -x l_1 + a_2(l) l_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle + a_2(l) \langle l, \mathbf{e}_1 \rangle \\ -x \langle l, \mathbf{e}_1 \rangle + a_2(l) \langle l, \mathbf{e}_2 \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

²Die Schreibweise $\mathbf{p} - \mathbf{0}$ ist zu unterscheiden zwischen dem Punkt \mathbf{p} aus dem affinen Raum und dem entsprechendem Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{0}$ della giacitura. Siehe [Ser89].

Daher ergeben sich die drei Gleichungen des Lemmas. \square

2.3.5 Lemma Seien $x \in \mathbb{R}$ und $l, m \in S^1$ zwei beliebige Richtungen. Dann erhält man folgendes Ergebnis:

$$\Pi_{a_2}^m * \Pi_{a_2}^l x = \left\langle \begin{pmatrix} \langle l, v \rangle \\ \langle l, \perp v \rangle \end{pmatrix}, m^\perp \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \langle l, v \rangle \\ \langle l^\perp, v \rangle \end{pmatrix}, m^\perp \right\rangle$$

mit $v := (a_2(l), x)$.

Beweis: Man wende die vorherigen Lemmata an. \square

2.4 Die Visualisierung gerichteter Mengen

Einer gerichteten Menge aus $\vec{\mathcal{D}}^n$ ordnet man eine Visualisierung im Raum \mathbb{R}^n zu. Diese kann als eine Art Projektion von $\vec{\mathcal{D}}^n$ nach \mathbb{R}^n angesehen werden. Die Definition der Visualisierung gliedert sich in der Definition ihrer drei Bestandteile: positiver, negativer und gemischter Teil.

2.4.1 Definition (Visualisierung) Sei $n \geq 1$ und $\vec{A} = (\overline{A_{n-1}(l)}, a_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ aus $\vec{\mathcal{D}}^n$. Man definiere zuerst folgende Teile der Visualisierung:

1. **Positiver Teil** (konvexer Teil):

$$P_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{A} \mapsto \bigcap_{l \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, l \rangle \leq a_n(l)\}$$

2. **Negativer Teil** (konkaver Teil):

$$N_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{A} \mapsto \bigcap_{l \in S^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, l \rangle \leq -a_n(l)\}$$

3. **Rand der Visualisierung:**

- $n = 1$: $B_1(\vec{A}) := \partial P_1 \cup \partial N_1 = \{-a_1(-1), a_1(+1)\}$

- $n \geq 2$:

$$B_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{A} \mapsto \bigcup_{l \in S^{n-1}} {}^* \Pi_{a_n}^l (V_{n-1}(\overrightarrow{A_{n-1}(l)}))$$

Der Rand der Visualisierung besteht aus dem Rand des positiven oder des negativen Teiles zusammen mit dem gemischten Teil. Er ergibt sich als die Vereinigung der Antiprojektionen ${}^* \Pi_{a_n}^l$ der Visualisierung der $(n-1)$ -dimensionalen „stützenden Seite“ $\overrightarrow{A_{n-1}(l)}$, die sich im Raum \mathbb{R}^{n-1} befinden.

4. Gemischter Teil:

$$M_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{A} \mapsto B_n(\vec{A}) \setminus (\partial P_n(\vec{A}) \cup \partial N_n(\vec{A}))$$

Die Punkte des Randes B_n , die sich weder in P_n noch in N_n befinden, formen den gemischten Teil von V_n .

Man setzt dann, die **Visualisierung** gleich mit der Vereinigung dieser Teile:

$$V_n : \vec{\mathcal{D}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{A} \mapsto P_n(\vec{A}) \cup N_n(\vec{A}) \cup M_n(\vec{A})$$

Mindestens ein Teil, der konvexe oder der konkave, ist leer, abgesehen von dem Fall, dass beide gleich sind und nur einen Punkt beinhalten. Daraus folgt, dass die drei Teile (konvex, konkav und gemischt) der Visualisierung sich nur in dem entarteten Fall überlappen. Für eingebettete konvexe kompakte Mengen oder ihre Inverse und für gerichtete Intervalle ist der gemischte Teil stets leer. Die Visualisierung ist nie leer. Diese Überlegungen und Behauptungen spiegeln sich in dem kommenden Satz wider. Die Mengen P_n und N_n sind konvex.

2.4.2 Satz Der Rand und die Visualisierung einer gerichteten Menge $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ sind stets nicht leer, und nur die folgende Fälle kommen bei der Bildung der Visualisierung vor:

- Es existiert ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ mit $P_n(\vec{A}) = N_n(\vec{A}) = \{p\}$ oder
- Eine der Mengen $P_n(\vec{A})$ bzw. $N_n(\vec{A})$ ist leer.
- Wenn $P_n(\vec{A}) = N_n(\vec{A}) = \emptyset$ dann ist $M_n(\vec{A}) \neq \emptyset$

- Falls $M_n(\vec{A}) = \emptyset$ dann ist mindestens eine der Mengen $P_n(\vec{A})$ bzw. $N_n(\vec{A})$ nichtleer.

Beweis: Vergleiche [BF01a], Satz 3. □

Es sei zu bemerken, dass zu jedem Randpunkt $x \in B_n(\vec{A})$, es eine Richtung l gibt, für die x auf der von ${}^*\Pi_{a_n}^l(V_{n-1}(\overrightarrow{A_{n-1}(l)}))$ (Antiprojektion der $(n-1)$ -dimensionalen gerichteten „Stützseite“ $\overrightarrow{A_{n-1}(l)} \in \vec{\mathcal{D}}^{n-1}$) bestimmte Hyperebene liegt (Für eine ausführliche Begründung dieser Tatsache siehe [BF01a], Satz 3.3). All diese an x gebundene Richtungen bilden das Orientierungsbündel.

2.4.3 Definition (Orientierungsbündel) Für $n \geq 1$ und zu $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ definiere man die Stützhyperebene zu einer Richtung $l \in S^{n-1}$ durch die Stützfunktion $a_n(\cdot)$ von \vec{A} (für $n = 1$ ist diese die einzige Komponente von \vec{A} , wie aus der Definition 2.1.1 zu entnehmen ist):

$$\mathcal{H}_{a_n}^l := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle = a_n(l)\}$$

Das Orientierungsbündel von $x \in B_n(\vec{A})$ ist die Menge $O_n(x, \vec{A}) \subseteq S^{n-1}$ der Richtungen $l \in S^{n-1}$, für welche $x \in \mathcal{H}_{a_n}^l$ ist. Also definiert man:

$$\begin{aligned} O_n(\cdot, \vec{A}) : B_n(\vec{A}) &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto \{l \in S^{n-1} \mid x \in \mathcal{H}_{a_n}^l\} =: O_n(x, \vec{A}) \end{aligned}$$

Zum Beispiel für $n = 1$ mit $\vec{A} := \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]}$ ist dann $O_1(\alpha_1, \vec{A}) = -1$, $O_1(\alpha_2, \vec{A}) = +1$, denn:

$$B_n(\vec{A}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} \quad \mathcal{H}^{-1} = \{\alpha_1\} \quad \mathcal{H}^{+1} = \{\alpha_2\} \quad a_1(-1) = -\alpha_1 \quad a_1(+1) = \alpha_2$$

Für $n \geq 2$ ist ${}^*\Pi_{a_n}^l(V_{n-1}(\overrightarrow{A_{n-1}(l)})) \subseteq \mathcal{H}_{a_n}^l$ und daraus folgt:

$$O_n(x, \vec{A}) = \{l \in S^{n-1} \mid x \in {}^*\Pi_{a_n}^l(V_{n-1}(\overrightarrow{A_{n-1}(l)}))\}$$

2.4.4 Bemerkung Man sollte darauf achten, dass die Visualisierung von $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ eigentlich aus einem Paar $\vec{V}_n := (V_n(\vec{A}), O_n(\cdot, \vec{A}))$ besteht. Folgendes Beispiel ergänzt die Bemerkung, indem zwei gerichtete Mengen betrachtet werden, deren Abbildung unter V_n identisch ist, nicht aber deren Orientierungsbündel. Bezeichne

$B_{0,1}$ den abgeschlossene Einheitskugel im Ursprung, und sei $\vec{A} := J_n(B_{0,1})$, wobei J_n die im Abschnitt Kapitel 4 definierte Einbettung ist ³, dann erhält man:

$$V_n(\vec{A}) = B_{0,1} \quad B_n(\vec{A}) = \partial B_{0,1} \quad O_n(u, \vec{A}) = \{u\}$$

Nun ist für $\vec{C} = -\vec{A}$:

$$V_n(\vec{C}) = \ominus B_{0,1} = B_{0,1} \quad B_n(\vec{C}) = \ominus \partial B_{0,1} = \partial B_{0,1} \quad O_n(u, \vec{C}) = \{-u\}$$

³Bei diesem Beispiel ist die Kenntniss von J_n nicht erforderlich.

Kapitel 3

Eingebettete Mengen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Einbettung konvexer kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^n in den Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$. Wie im Abschnitt 1.4 schon erklärt wurde, trifft man die Entscheidung sich auf kompakte Mengen zu beschränken. Im gleichen Abschnitt wurde gezeigt und betont, wie schwierig es ist, eine Differenz als Inverse zur Minkowski-Summe zu definieren, die erlaubt, im Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ zu bleiben. Man kann sich die eingebetteten gerichteten Mengen $\vec{\mathcal{C}}^n$ als eine Erweiterung des Raumes $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ vorstellen, in dem man über eine Differenz von eingebetteten kompakten konvexen Mengen verfügt, bezüglich der der Teilraum $\vec{\mathcal{C}}^n$ abgeschlossen ist. Bei der Einbettung geht $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \oplus)$ in $(\vec{\mathcal{C}}^n, +)$ über, und $\vec{\mathcal{C}}^n$ formt einen Untervektorraum von $\vec{\mathcal{D}}^n$.

Besondere Beachtung verdienen in dieser Arbeit die eingebetteten kompakten konvexen Polytope in Dimension eins und zwei. Es sollte erwähnt werden, dass es durch konvexe kompakte Polytope möglich ist, beliebige konvexe kompakte Mengen zu approximieren: Gegeben ein $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ existieren Folgen $\{P^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\{Q^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ von Polytopen mit $P^i \subseteq A \subseteq Q^i$ für jedes $i = 0, 1, \dots$ und mit $P^i \rightarrow A$ und $Q^i \rightarrow A$ für $i \rightarrow \infty$. (vergleiche [Web94], Kapitel 3). Durch eine solche Approximationsmöglichkeit ist das Rechnen mit kompakten konvexen Mengen am Computer möglich. Diese Möglichkeit möchte man in dem neuen Teilraum $\vec{\mathcal{C}}^n$ fortsetzen: Mit dieser Motivation werden die *gerichteten Polytope* eingeführt. In dieser Arbeit werden die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$ näher behandelt.

Weiterhin wird die *reduzierte Darstellung* gerichteter Polytope eingeführt, um nur endlich viele Richtungen berücksichtigen zu müssen: Dies erweist sich auch bei

der Abspeicherung im Rechner von Vorteil.

3.1 Einbettung von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Wie bisher üblich, wird auch die Einbettung kompakter konvexer Mengen rekursiv bezüglich der Dimension n des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^n$ definiert.

3.1.1 Definition (Einbettung) Die Einbettung J_n von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{\mathcal{D}}^n$ ist gegeben durch

- $n = 1$:

$$J_1 : \mathcal{C}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^1, A \equiv [\alpha_1, \alpha_2] \mapsto (\delta^*(-1, A), \delta^*(+1, A)) \equiv (-\alpha_1, \alpha_2)$$

- $n \geq 2$:

$$J_n : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^n, A \mapsto (J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, A)}^l(A^l), \delta^*(l, A)))_{l \in S^{n-1}}$$

mit $A^l := Y_A^l = \{a \in A \mid \langle a, l \rangle = \delta^*(l, A)\}$ die (konvexe) Menge der Stützpunkte von A in Richtung l . Dabei wird also

$$a_n(l) := \delta^*(l, A)$$

gesetzt.

Man setzt $\vec{\mathcal{C}}^n := \overline{\text{lin}(J_n(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)))}$ als abgeschlossenen Teilraum der linearen Hülle der eingebetteten kompakten konvexen Mengen.

3.1.2 Bemerkung Im Falle einer eingebetteten konvexen kompakten Menge \vec{A} hat die Stützfunktion $a_n(l)$ stets die Form $a_n(l) = \delta^*(l, A)$. Im allgemeinen Fall \vec{A} aus $\vec{\mathcal{D}}^n$ handelt es sich um eine DC-Funktion (dabei steht DC für „Difference of Convex“), d.h. $a_n(l)$ nimmt eine der folgenden vier Formen an:

$$a_n(l) = \begin{cases} \delta^*(l, C) \\ -\delta^*(l, C) \\ \delta^*(l, C) - \delta^*(l, D) \\ \text{stetig, als Limes einer Folge der Art } (\delta^*(l, C^m) - \delta^*(l, D^m))_{m \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

mit $C, D, C^m, D^m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Zwischen dem Orientierungsbündel einer eingebetteten kompakten konvexen Menge $\vec{A} = J_n(A)$ und ihrer Inversen $-\vec{A} = -J_n(A)$ gilt die Beziehung:

$$O_n(-x, -\vec{A}) = O_n(x, \vec{A}) \quad \forall x \in \partial A \quad (3.1)$$

(vegleiche [BF01b], Satz 3.16). Dies führt zur Bezeichnung:

3.1.3 Definition *Man nennt eine gerichtete Menge eine konvexe (oder echte) gerichtete Menge, falls diese die Einbettung $J_n(A)$ einer kompakten konvexen Menge A ist. Wenn eine gerichtete Menge die Inverse $-J_n(A)$ einer eingebetteten Menge ist, nennt man sie konkave (oder unechte) gerichtete Menge.*

Anschaulich zeigen die Richtungen l bei \vec{A} „nach außen“ und bei $-\vec{A}$ „nach innen“.¹

Die Minkowski-Summe \oplus geht durch die Einbettung J_n in die Summe $+$ des \mathbb{R} -Vektorraums $\vec{\mathcal{D}}^n$ über, und die Mengeninklusion in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ entspricht der Halbordnung in $\vec{\mathcal{C}}^n$, wie aus dem folgenden Satz zu entnehmen ist.

3.1.4 Satz (Eigenschaften) *Seien $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 1$, dann erfüllt die Einbettung:*

1. *positive Linearität:*

$$J_n(\lambda \cdot A \oplus \mu \cdot B) = \lambda J_n(A) + \mu J_n(B) \quad \forall \lambda \geq 0, \mu \geq 0 \text{ aus } \mathbb{R}$$

2. *Erhaltung der Ordnung:*

$$J_n(A) \leq J_n(B) \iff A \subseteq B$$

3. *Injektivität:*

$$J_n(A) = J_n(B) \Rightarrow A = B$$

Beweis: Für die Beweise wird auf den Artikel [BF01a] verwiesen. Betreff 1) siehe Satz 3.10 und 4.17. Zum Punkt 2) siehe Satz 3.11 und 4.17. Satz 3.10 und Satz 4.17

¹Diese Veranschaulichung sollte der Intuition helfen, und keine mathematische Bedeutung haben.

liefern den Beweis für 3). □

Es soll erwähnt werden, dass eine neue Metrik auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt werden kann, bezüglich dieser J_n isometrisch ist (vergleiche [BF01a]).

Die Visualisierung konvexer beziehungsweise konkaver gerichteten Mengen lässt sich charakterisieren, durch:

3.1.5 Satz Sei $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Visualisierung Folgendes:

1. Für $\vec{A} := J_n(A)$ ist:

$$V_n(\vec{A}) = P_n(\vec{A}) \equiv A \quad B_n(\vec{A}) = \partial A \quad M_n(\vec{A}) = \emptyset$$

Für den negativen Teil erhält man:

$$N_n(\vec{A}) = \begin{cases} A & : \text{ falls } A = \{p\} \\ \emptyset & : \text{ sonst} \end{cases}$$

2. Für $\vec{A} := -J_n(A)$ ist:

$$V_n(\vec{A}) = N_n(\vec{A}) \equiv \ominus A \quad B_n(\vec{A}) = \ominus \partial A \quad M_n(\vec{A}) = \emptyset$$

Für den positiven Teil hat man:

$$P_n(\vec{A}) = \begin{cases} -A & : \text{ falls } A = \{p\} \\ \emptyset & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweis: Für die Beweise wird auf den Artikel [BF01b] verwiesen: Satz 3.8 (i),(ii) und Satz 3.4. □

Daraus liest man ab, dass die Visualisierung einer eingebetteten Menge die Menge selbst ist, und dass die Visualisierung der Inversen dieser Menge dem punktweisen Minus entspricht. Für die Orientierungsbündel gilt die Beziehung 3.1.

3.1.6 Satz Bei der Visualisierung einer konvexen oder konkaven gerichteten Menge entsteht kein gemischter Teil. Falls $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ mit $M_n(\vec{A}) \neq \emptyset$, dann existiert kein $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit $J_n(A) = \vec{A}$ oder $-J_n(A) = \vec{A}$.

Beweis: Vergleiche [BF01b], Satz 3.8 (iii). \square

Mit der Notation $\ominus \emptyset = \emptyset$ gelten die Verknüpfungen:

3.1.7 Satz Sei $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$. Dann ist:

$$\begin{aligned} P_n(-\vec{A}) &= \ominus N_n(\vec{A}) \\ N_n(-\vec{A}) &= \ominus P_n(\vec{A}) \\ M_n(-\vec{A}) &= \ominus M_n(\vec{A}) \\ B_n(-\vec{A}) &= \ominus B_n(\vec{A}) \\ V_n(-\vec{A}) &= \ominus V_n(\vec{A}) \end{aligned}$$

Beweis: Vergleiche [BF01b], Satz 3.14. \square

Das obige Ergebnis bedeutet anschaulich, dass die Visualisierung von $-\vec{A}$ sich durch punktweise Reflexion von $V_n(\vec{A})$ bezüglich des Ursprungs ergibt, oder anders ausgedrückt, durch Durchführung von \ominus .

Zum Schluß ein Lemma, das auch in den späteren Paragraphen Verwendung findet.

3.1.8 Lemma Sei $\vec{C} = J_n(C) = (\overrightarrow{C_{n-1}(l)}, c_n(l))_{l \in S^{n-1}}$ eine eingebettete gerichtete Menge mit $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für eine Richtung $u \in S^{n-1}$:

- ${}^* \Pi_n^u V_{n-1} \overrightarrow{C_{n-1}(u)} = Y_C^u$
- $\langle u, z \rangle = \delta^*(u, C) = c_n(u) \quad \forall z \in Y_C^u$
- ${}^* \Pi_n^u V_{n-1}(J_{n-1}(\{z\})) = \{z\} \quad \forall z \in Y_C^u$

Beweis: Aus der Annahme folgt gemäß der Definition, dass

$$\overrightarrow{C_{n-1}(u)} = J_{n-1}(\Pi_{a_n}^l Y_C^u) \quad \text{und} \quad c_n(u) = \delta^*(u, C)$$

und daher ist mit ?? und Y_C^u konvex (dazu siehe 1.3.10):

$$V_{n-1}(\overrightarrow{C_{n-1}(u)}) = V_{n-1}(J_{n-1}(\Pi_{a_n}^l Y_C^u)) = \Pi_{a_n}^l Y_C^u$$

Also

$${}^*\Pi_{a_n}^l V_{n-1}(\overrightarrow{C_{n-1}(u)}) = {}^*\Pi_{a_n}^l \Pi_{a_n}^l Y_C^u = Y_C^u$$

Für ein beliebiges $z \in Y_C^u$ ist $\langle u, z \rangle = \delta^*(u, C)$ und damit:

$${}^*\Pi_{a_n}^l \Pi_{a_n}^l \{z\} = z \quad \forall z \in Y_C^u$$

□

3.2 Differenz eingebetteter kompakter konvexer Mengen

Nun wird die Differenz von eingebetteten kompakten konvexen Mengen näher betrachtet, und ein Zusammenhang mit Abschnitt 1.4 hergestellt. Der Raum $\vec{\mathcal{C}}^n$ ist bezüglich der Subtraktion – abgeschlossen, aber bei der Visualisierung bleibt man nicht in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

3.2.1 Satz (Vergleich von Differenzen) Seien $C, D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ und $\vec{C} := J_n(C)$ und $\vec{D} := J_n(D)$. Dann gilt:

1. Der positive und negative Teil lassen sich mittels der geometrischen Diferenz ausdrücken:

$$\begin{aligned} P_n(\vec{C} - \vec{D}) &= C \overset{*}{-} D \\ N_n(\vec{C} - \vec{D}) &= \ominus(D \overset{*}{-} C) \end{aligned}$$

2. Die Visualisierung der Differenz $\vec{C} - \vec{D}$ liegt zwischen der geometrischen und Demynov-Differenz:

$$\begin{aligned} C \overset{*}{-} D &\subset V_n(\vec{C} - \vec{D}) \subset C \dot{-} D \\ \ominus(D \overset{*}{-} C) &\subset V_n(\vec{C} - \vec{D}) \subset \ominus(D \dot{-} C) \end{aligned}$$

Beweis: Für die Beweise wird auf den Artikel [BF01b] verwiesen. Betreff 1) siehe Satz 3.10 und Eigenschaften der $\overset{*}{-}$. Satz 3.19 zusammen mit den Eigenschaften von

– liefert den Beweis für 2). □

Die Mengen $C \overset{*}{-} D$ und $C \overset{\cdot}{-} D$ sind konvex (Siehe Abschnitt 1.4), während $V_n(\vec{C} - \vec{D})$ im allgemeinen nicht zwangsweise konvex ist. Beim Setzen von $D = \{0\}$ in den Gleichungen im Punkt 1) erhält man einen Teil der Ergebnisse von Satz 3.1.5, nämlich Auskunft über das Aussehen von $V_n(J_n(C))$ und von $V_n(-J_n(C))$.

Die Differenz zweier eingebetteter gerichteter Mengen spielt eine wesentliche Rolle bei der Darstellung eines Elements aus $\vec{\mathcal{C}}^n$. Ein beliebiges $\vec{A} \in \vec{\mathcal{C}}^n$ ergibt sich aus einer Folge von Differenzen der Art $\lim_{i \rightarrow \infty} (J_n(C^i) - J_n(D^i))$. Ein $\vec{A} \in \vec{\mathcal{C}}^n$, das in der linearen Hülle von $J_n(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$ liegt, also ein Element der Form $a_1 \cdot J_n(A_1) + \dots + a_h \cdot J_n(A_h)$, entsteht aus der Differenz zweier solcher Objekte, denn zu jedem $A \in \vec{\mathcal{C}}^n$ existieren $C, D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft: $\vec{A} = J_n(C) - J_n(D)$. Die Mengen C, D sind aber nicht eindeutig bestimmt: Für eine beliebige Wahl eines $E \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ setze man $C' := C + E$ und $D' := D + E$. Dann hat man:

$$\begin{aligned} J_n(C') - J_n(D') &= J_n(C + E) - J_n(D + E) \stackrel{3.1.4}{\equiv} J_n(C) - J_n(D) = \vec{A} \\ &\Rightarrow J_n(C) + J_n(D') = J_n(D) + J_n(C') \\ &\stackrel{3.1.4}{\Rightarrow} J_n(C + D') = J_n(D + C') \\ &\stackrel{3.1.4}{\Rightarrow} C + D' = D + C' \\ &\Rightarrow \delta^*(l, C') - \delta^*(l, D') = \delta^*(l, C) - \delta^*(l, D) \quad \forall l \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Durch Sortieren der Summanden mit nicht-negativen Gewichten und der mit negativen Gewichten erhält man: C ergibt sich als $\sum_{a_i > 0} A_i$ und ebenso für D , da $-D = \sum_{a_i < 0} A_i$ ist. Alle äquivalenten Paare unter der Äquivalenzrelation

$$(C, D) \sim (C', D') \iff C + D' = D + C'$$

für $C, C', D, D' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ führen zum gleichen Ergebnis. Dabei entstehen die Identifizierungen:

$$(C, 0) \equiv +C \quad (0, C) \equiv -C \quad (C, 0) + (0, C) = (C, C) \sim (0, 0)$$

wobei das Element $-C$ als Inverses von $+C$ zu verstehen ist. Die zitierte Äquivalenzrelation stammt von Rådström (siehe [BF01a]), und erinnert an die Definition der Differenz von Elementen aus \mathbb{N} , d.h. \mathbb{Z} .

Die oben erläuterten Ergebnisse lassen sich in folgenden beiden Sätzen zusammenfassen:

3.2.2 Satz Seien $A, B, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit $A = B \oplus C$. Dann gilt:

$$J_n(A) - J_n(B) = J_n(C) \quad \text{und} \quad V_n(J_n(A) - J_n(B)) = C$$

Beweis: Vergleiche [BF01b] □

3.2.3 Satz Seien $A, B, C, D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit $(A, B) \sim (C, D)$, und $\vec{A} = J_n(A)$, $\vec{B} = J_n(B)$, $\vec{C} = J_n(C)$, $\vec{D} = J_n(D)$. Dann erhält man:

1. $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{D}$
2. $V_n(\vec{A} - \vec{B}) = V_n(\vec{C} - \vec{D})$

Beweis: Vergleiche [BF01b] 3.11 □

3.3 Eingebettete Intervalle

In diesem Abschnitt wird die Einbettung eines Intervalls explizit berechnet, und dadurch gezeigt, wie sie und die Operationen auf eingebetteten Intervallen sich auf die Rechenregeln für die Stützfunktionen beziehen.

3.3.1 Die Einbettung

Für $n = 1$ stimmt der Raum $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +)$ mit der Menge $(\mathcal{I}(\mathbb{R}), +)$ überein, d.h. jedes Intervall der Form $[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $\alpha_1, \alpha_2 < \infty$ ist eine konvexe kompakte Menge in \mathbb{R} . Zur Erinnerung: Die Einbettung J_1 ist gegeben durch:

$$J_1 : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \vec{\mathcal{D}}^1, [\alpha_1, \alpha_2] \mapsto (a_1(l))_{l \in S^0}$$

mit $a_1(-1) = \delta^*(-1, [\alpha_1, \alpha_2])$ und $a_1(+1) = \delta^*(+1, [\alpha_1, \alpha_2])$ und damit hat man für $[\alpha_1, \alpha_2] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} J_1([\alpha_1, \alpha_2]) &= (\delta^*(-1, [\alpha_1, \alpha_2]), \delta^*(+1, [\alpha_1, \alpha_2])) \\ &= \left(\max_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{-1 \cdot \alpha\}, \max_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{+1 \cdot \alpha\} \right) \\ &= \left(\max_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{-\alpha\}, \max_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{\alpha\} \right) \\ &= (-\alpha_1, \alpha_2) = (a_1(-1), (a_1(+1))) \end{aligned}$$

Die Punkte $\{\alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ identifiziert man mit den Intervallen $[\alpha, \alpha]$, und auch für einen Punkt $[\alpha, \alpha] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ besteht der entsprechende gerichtete Punkt aus zwei Werten $a_1(\pm 1)$, nämlich:

$$J_1([\alpha, \alpha]) = (-\alpha, \alpha) = (a_1(-1), (a_1(+1)))$$

Seien nun $A := [\alpha_1, \alpha_2] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ und $B := [\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ mit $\beta_1 \leq \beta_2$. Aus der Definition der Summe erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &:= J_1(A) + J_1(B) = (a_1(l) + b_1(l))_{l \in S^0} \\ &= (\delta^*(-1, A) + \delta^*(-1, B), \delta^*(+1, A) + \delta^*(+1, B)) \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Eigenschaften im Satz 1.3.2 von der Stützfunktion einer Menge, wird der obige Ausdruck zu:

$$\begin{aligned} &= (\delta^*(-1, A \oplus B), \delta^*(+1, A \oplus B)) \\ &= (\delta^*(-1, [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2]), \delta^*(+1, [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2])) \\ &= J_1([\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2]) \equiv (-\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \end{aligned}$$

Ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, dann liefert obige Rechnung:

$$\vec{A} + \vec{B} = J_1(\tau_\beta(A))$$

Dies bedeutet, dass die Addition eines echten Intervalls A mit einem Punkt B die Verschiebung τ_β von A zur Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ wirkt. Bei den entsprechenden Mengen bewirkt die Summe $A \oplus B$ eine Verschiebung der Visualisierung im Raum \mathbb{R} um der Zahl $\beta \in \mathbb{R}$. Mit analogem Vorgehen lässt sich zeigen, dass für $A = [\alpha_1, \alpha_2]$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $B = [\beta_1, \beta_2]$ mit $\beta_1 \leq \beta_2$ gilt:

1. mit $\alpha_1 < \alpha_2$ ist:

$$J_1(\Theta[\alpha_1, \alpha_2]) = J_1([- \alpha_2, - \alpha_1]) = \overrightarrow{[- \alpha_2, - \alpha_1]} = -\overrightarrow{[\alpha_2, \alpha_1]} \neq -\overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]}$$

Dies zeigt, dass das punktweise inverse Intervall $\Theta[\alpha_1, \alpha_2]$ nicht mit der Inverse von $J_1([\alpha_1, \alpha_2])$ in $\vec{\mathcal{D}}^1$ übereinstimmt. Wenn man annimmt, dass es ein $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, $\gamma_1 < \gamma_2$, gibt mit:

$$J_1([\gamma_1, \gamma_2]) = -J_1([\alpha_1, \alpha_2])$$

dann liefert Nachrechnen:

$$(-\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha_1, -\alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 = -\alpha_1, \gamma_2 = -\alpha_2$$

Aus $-\alpha_1 > -\alpha_2$ folgt dann $\gamma_1 > \gamma_2$ im Widerspruch zur Annahme. Somit wurde gezeigt, dass nicht alle Elemente des Raumes $\vec{\mathcal{D}}^1$ aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^1)$ stammen.

2. Für einen Punkt liegt eine andere Situation vor, und zwar wird J_1 linear: Für $\beta_1 = \beta_2$ ist $J_1(\Theta[\beta_1, \beta_2]) = J_1([- \beta_2, - \beta_1]) = -J_1([\beta_1, \beta_2])$. Das Intervall im dritten Term ist noch ein Element von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^1)$, so dass man J_1 noch anwenden kann.
3. Nun soll die Differenz zweier eingebetteter Intervalle betrachtet werden:

$$\begin{aligned} J_1(A) - J_1(B) &= (a_1(l) - b_1(l))_{l \in S^0} \\ &= (\delta^*(l, A) - \delta^*(l, B))_{l \in S^0} \end{aligned}$$

Da die Stützpunkte der Intervalle A und B einzelne Punkte sind, und mit den Randpunkte übereinstimmen, lässt sich die Differenz der Stützfunktion, wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \delta^*(l, A) - \delta^*(l, B) &= y_A^l \cdot l - y_B^l \cdot l \\ &= (y_A^l - y_B^l) \cdot l \quad \forall l \in S^0 \end{aligned}$$

Als Skalarprodukt ergibt sich die Stützfunktion:

$$\delta^*(l, A \dot{-} B) \quad \text{bzw.} \quad -\delta^*(l, B \dot{-} A)$$

falls:

$$y_A^{-1} - y_B^{-1} \leq y_A^{+1} - y_B^{+1} \quad \text{bzw.} \quad y_A^{-1} - y_B^{-1} > y_A^{+1} - y_B^{+1}$$

Also entspricht $J_1(A) - J_1(B)$ der Einbettung der Demyanov-Differenzen $A \dot{-} B$ oder der Inverse der Einbettung von $B \dot{-} A$:

$$J_1(A) - J_1(B) = J_1(A \dot{-} B) \quad \text{oder} \quad J_1(A) - J_1(B) = -J_1(B \dot{-} A) \quad (3.2)$$

Die bisher erhaltene Ergebnisse lassen sich übersichtlicher in der Intervall-Notation darstellen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} \pm \overrightarrow{[\beta_1, \beta_2]} &= \overrightarrow{[\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2]} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} &= \overrightarrow{[\lambda \cdot \alpha_1, \lambda \cdot \alpha_2]} \end{aligned}$$

3.3.2 Die Visualisierung

Man möchte nun eine genaue Vorstellung der Visualisierung eines eingebetteten Intervalls gewinnen. Nach der Definition ist $M_1 = \emptyset$, so dass die Visualisierung nur aus dem konkaven und konvexen Teil besteht. Sei $\vec{A} := \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} := (-\alpha_1, \alpha_2) \in \vec{\mathcal{D}}^1$. Für den positiven Teil erhält man (Siehe Definition 2.1.1):

$$\begin{aligned} P_1(\vec{A}) &= \bigcap_{l \in S^0} \{x \in \mathbb{R} \mid \langle x, l \rangle \leq a_1(l)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \cdot x \leq a_1(-1) = -\alpha_1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid +1 \cdot x \leq a_1(+1) = \alpha_2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha_1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha_2\} \\ &= [\alpha_1, \alpha_2] = [-a_1(-1), a_1(+1)] \end{aligned}$$

Und analog für den negativen Teil (Siehe Definition 2.1.1):

$$\begin{aligned} N_1(\vec{A}) &= \ominus \bigcap_{l \in S^0} \{x \in \mathbb{R} \mid \langle x, l \rangle \leq -a_1(l)\} \\ &= \ominus (\{x \in \mathbb{R} \mid -1x \leq -(-\alpha_1)\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid +1x \leq -\alpha_2\}) \\ &= \ominus (\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\alpha_1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\alpha_2\}) \\ &= \ominus [-\alpha_1, -\alpha_2] \\ &= [\alpha_2, \alpha_1] = [a_1(+1), -a_1(-1)] \end{aligned}$$

Der Rand der Visualisierung ist gleich $\partial B_1(\vec{A}) = \partial P_1(\vec{A}) \cup \partial N_1(\vec{A}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, denn es ist $\partial P_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \partial N_1$.

Für die Visualisierung muss man jetzt drei Fälle unterscheiden, und zwar ob \vec{A} konvex, konkav oder entartet ist. In letztem Fall ist $\alpha_1 = \alpha_2$ und damit $\vec{A} \in \vec{\mathcal{P}}_0^1$, also ein eingebetteter Punkt und gilt als gleichzeitig konkav und konvex, denn es ist $P_1(\vec{A}) = N_1(\vec{A})$. Für $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ist $\vec{A} := \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]}$ konvex mit $\vec{A} = (a_1(l))_{l \in S^0} = J_1([\alpha_1, \alpha_2])$, da aus

$$a_1(-1) = -\alpha_1 \quad a_1(+1) = \alpha_2$$

und

$$\delta^*(l, [\alpha_1, \alpha_2]) = \begin{cases} +1 \cdot \alpha_2 & \text{für } l = +1 \\ -1 \cdot \alpha_1 & \text{für } l = -1 \end{cases}$$

folgt $J_1([\alpha_1, \alpha_2]) = \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]}$. Damit ist $V_1(\vec{A}) \equiv P_1(\vec{A}) = [\alpha_1, \alpha_2]$.

Ist $\alpha_1 > \alpha_2$, hat man:

$$a_1(-1) = -\alpha_1 \quad a_1(+1) = \alpha_2 = -(-\alpha_2)$$

Nun betrachtet man $\vec{B} = J_1([\alpha_2, \alpha_1])$, für

$$b_1(-1) = -\alpha_2 \quad b_1(+1) = \alpha_2$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} -\vec{B} &= -J_1([\alpha_2, \alpha_1]) = -(-\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_2, -\alpha_1) \\ &= \vec{A} \end{aligned}$$

Daher ergibt sich die Visualisierung von \vec{A} als:

$$\begin{aligned} V_1(\vec{A}) &= V_1(-\vec{B}) = \ominus V_1(\vec{B}) \\ &= \ominus[\alpha_2, \alpha_1] \\ &= [-\alpha_1, -\alpha_2] \end{aligned}$$

Man kommt zu dem Schluß, dass die eingebetteten Intervalle genau die gerichteten Mengen der Form $\vec{A} = \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]}$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2$ sind.

3.4 Linearität der Einbettung J_n

Der Satz 3.1.4 zeigt die positive Linearität der Einbettung J_n . Die Linearität von J_n gilt im Allgemeinen nicht, auch auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: Aus dem Abschnitt 1.4 ist für beliebige $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$:

$$(A - B) \oplus B \neq A \quad \text{mit} \quad - \in \{\ominus, \dot{-}, \overset{\star}{-}\}$$

Nun wäre J_n linear bezüglich \oplus und $-$, gelte $J_n(-A) = -J_n(A)$, also

$$J_n((A - B) \oplus B) = J_n(A - B) + J_n(B) = J_n(A) - J_n(B) + J_n(B) = J_n(A)$$

Aus der Injektivität in 3.1.4 würde daher folgen, dass $(A - B) \oplus B = A$, was ein Widerspruch darstellt.

Für einen Teilraum von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, nämlich \mathbb{R}^n , ist J_n aber linear. Für die Elemente aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ der Form $A = \{p \mid p \in \mathbb{R}^n\}$ stimmen die Operationen \ominus und \oplus mit den Operationen $-$ und $+$ des \mathbb{R} -Vektorraumes \mathbb{R}^n überein. Aus diesem Grund, und um die Notation zu vereinfachen, werden im Folgenden die einpunktigen Mengen $\{p\}$ mit p identifiziert. Die Einbettung ist linear bezüglich den Operationen der \mathbb{R} -Vektorräume \mathbb{R}^n und $\vec{\mathcal{D}}^n$. Dies bedeutet für zwei einpunktige Mengen des \mathbb{R}^n , dass die Operationen des Vektorraumes in die von $\vec{\mathcal{D}}^n$ übergehen:

$$J_n(v) + J_n(w) = J_n(v + w)$$

$$J_n(v) - J_n(w) = J_n(v - w)$$

$$J_n(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot J_n(v)$$

und für die entsprechende Visualisierung von $\vec{V} := J_n(v)$ und $\vec{W} := J_n(w)$ hat man dann:

$$V_n(\vec{V}) + V_n(\vec{W}) = V_n(\vec{V} + \vec{W})$$

$$V_n(\vec{V}) - V_n(\vec{W}) = V_n(\vec{V} - \vec{W})$$

$$V_n(\lambda \cdot \vec{V}) = \lambda \cdot V_n(\vec{V})$$

Im Folgenden werden die oben genannten Bemerkungen formalisiert.

3.4.1 Satz (Linearität der Einbettung) Seien p und q Punkte von \mathbb{R}^n und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten:

$$1. J_n(p + q) = J_n(p) + J_n(q)$$

$$2. J_n(\lambda \cdot p) = \lambda \cdot J_n(p)$$

Beweis: Punkt 1) ergibt sich aus dem Satz 3.1.4, und zwar aus der positiven Linearität von J_n für $A = \{p\}$ und $B = \{q\}$. Dasselbe gilt für 2) im Falle von $\lambda \geq 0$. Für $\lambda < 0$ geht man wie folgt vor: Aus der positiven Linearität von J_n und aus den Vektorraumeigenschaften von \vec{D}^n erhält man:

$$0 = J_n(0) = J_n(-p + p) = J_n(-p) + J_n(p) \Rightarrow J_n(-p) = -J_n(p)$$

Dann überlegt man sich einfach, dass $\lambda \cdot p = (-\lambda) \cdot (-p)$ und, dass $-p$ wieder ein Punkt q ist. Dies liefert das Ergebnis. \square

Es wurde schon erwähnt, dass der positive und negative Teil der Visualisierung genau dann miteinander übereinstimmen, wenn es sich um eine einpunktigen Menge handelt. Im folgenden Satz wird dies formal bewiesen.

3.4.2 Satz Sei \vec{A} ein Element aus \vec{D}^n . Dann existiert entweder ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ mit $P_n(\vec{A}) = N_n(\vec{A}) = \{p\}$ oder eine der Mengen $P_n(\vec{A})$ bzw. $N_n(\vec{A})$ ist stets leer. Der Rand $B_n(\vec{A})$ der Visualisierung ist stets nicht leer.

Beweis: Vergleiche [BF01b], Satz 3.4 \square

Eine Folge des obigen Theorem ist:

3.4.3 Folgerung Sei $\vec{A} = J_n(p)$ mit $p \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$V_n(\vec{A}) = P_n(\vec{A}) = N_n(\vec{A}) = A = \{p\}$$

Daraus folgt:

3.4.4 Folgerung Sei $p \in \mathbb{R}^n$, setze $A := \{p\}$ und $\vec{A} := J_n(A)$. Dann:

$$V_n(\vec{A}) = A = \{p\}$$

$$J_n(V_n(\vec{A})) = J_n(A)$$

Daraus folgt:

$$(V_n \circ J_n)(A) = A$$

$$(J_n \circ V_n)(\vec{A}) = \vec{A}$$

Auch die Abbildung V_n ergibt sich für einpunktige Mengen als linear:

3.4.5 Satz Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Man setze $A := \{v\}$, $B := \{w\}$ und $\vec{A} := J_n(A)$ und $\vec{B} := J_n(B)$. Dann ist:

1. $V_n(\vec{A} + \vec{B}) = V_n(\vec{A}) + V_n(\vec{B})$
2. $V_n(\lambda \cdot \vec{A}) = \lambda \cdot V_n(\vec{A}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis:

1. Aus dem vorherigen Satz 3.4.2 und den Folgerungen 3.4.3 bzw. 3.4.4 hat man:

$$V_n(\vec{A}) = v = A \quad V_n(\vec{B}) = w = B$$

und damit, zusammen mit der positiven Linearität (Satz 3.1.4) von J_n :

$$\begin{aligned} V_n(\vec{A} + \vec{B}) &= V_n(J_n(A) + J_n(B)) = V_n(J_n(A + B)) = V_n(J_n(v + w)) \\ &= v + w = A + B = V_n(\vec{A}) + V_n(\vec{B}) \end{aligned}$$

denn $v + w$ ist wieder ein Punkt.

2. $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot v\}$ ist ein Punkt. Man unterscheidet zwei Fälle:

- (a) für $\lambda \geq 0$ folgt aus der positiven Linearität (Satz 3.1.4) von J_n :

$$\begin{aligned} V_n(\lambda \cdot \vec{A}) &= V_n(\lambda \cdot J_n(A)) = V_n(J_n(\lambda \cdot A)) = \\ &= V_n(J_n(\lambda \cdot v)) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot V_n(\vec{A}) \end{aligned}$$

- (b) für $\lambda < 0$ hat man

$$\begin{aligned} V_n(\lambda \cdot \vec{A}) &= V_n((- \lambda) \cdot (- \vec{A})) \stackrel{(1)}{=} (- \lambda) \cdot V_n((- \vec{A})) = \\ &\stackrel{(2)}{=} (- \lambda) \cdot (- V_n(\vec{A})) = \lambda \cdot V_n(\vec{A}) \end{aligned}$$

Gleichheit (1) ergibt sich aus (a) und Gleichheit (2) ist Folge des Satzes 3.1.7 und der Tatsache, dass $\ominus \equiv -$. Dabei ist die Linearität von J_n nicht notwendig.

□

3.4.6 Definition (gerichteter Punkt) Die Abbildung von $\mathbb{R}^n =: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)_0$ unter J_n heißt die Menge der gerichteten Punkte:

$$\vec{\mathcal{P}}_0^n := J_n(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)_0)$$

Die bisher erläuterten Schlußfolgerungen lassen sich zusammenfassen mit:

3.4.7 Satz Zwischen dem \mathbb{R}^n und $\vec{\mathcal{P}}_0^n$ besteht ein Isomorphismus Φ_n von \mathbb{R} -Vektorräumen.

Beweis: Man nehme $\Phi_n := J_n \circ T = \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_0^n$ wobei T der Isomorphismus

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)_0 : p \mapsto \{p\}$$

ist. Dann ergibt sich aus 3.4.4:

$$V_n \circ \Phi_n = 1_{\mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad \Phi_n \circ V_n = 1_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)_0}$$

Die Linearität von Φ_n folgt aus 3.4.1 und 3.4.5. □

3.5 Operationen mit eingebetteten Polytopen des \mathbb{R}^n

Nun hat man einen Punkt, also ein Polytop mit nur einer Ecke, und ein Polytop, mit mehreren Ecken, in \mathbb{R}^n und möchte die Summe und die Differenz solcher eingebetteter Mengen untersuchen. In diesem Abschnitt werden zwei Sätze angegeben, die die Ergebnisse dieser Untersuchung zusammenfassen.

3.5.1 Satz Sei v ein Punkt des \mathbb{R}^n und $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ein Polytop. Man setze $\vec{V} := J_n(\{v\})$ und entsprechend $\vec{P} := J_n(P)$ für P . Dann gelten die folgenden Beziehungen:

1. $\vec{V} + \vec{P} = J_n(\{v\} \oplus P)$
2. $\vec{P} - \vec{V} = J_n(\{-v\} \oplus P)$
3. $\vec{V} - \vec{P} = -J_n(P \oplus \{-v\})$

Die Visualisierungen ergeben sich zu:

1. $V_n(\vec{V} + \vec{P}) = \{v\} \oplus P$
2. $V_n(\vec{P} - \vec{V}) = \{-v\} \oplus P$
3. $V_n(\vec{V} - \vec{P}) = \ominus(\{-v\} \oplus P) = \{v\} \ominus P$

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $\text{vert}(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$ seien die Ecken des Polytops P . Die Berechnung der Summe führt zu:

$$\begin{aligned}
\vec{V} + \vec{P} &= J_n(\{v\}) + J_n(P) \\
&= (J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l \{v\}^l) + J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l), \delta^*(l, \{v\}) + \delta^*(l, P))_{l \in S^{n-1}} \\
&\stackrel{(1)}{=} (J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l \{v\}) + J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l), \delta^*(l, \{v\} \oplus P))_{l \in S^{n-1}} \\
&\stackrel{(2)}{=} (J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l \{v\} \oplus \Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l), \delta^*(l, \{v\} \oplus P))_{l \in S^{n-1}}
\end{aligned}$$

Gleichheit (1) folgt aus 1.3.2 zusammen mit $\{v\}^l = \{v\}$ und Gleichheit (2) aus der positiven Linearität der Einbettung: Satz 3.1.4. Nun ist für ein $l \in S^{n-1}$, $\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l v \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ wieder ein Vektor und $\Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l$ ein Polytop des \mathbb{R}^{n-1} . Wie dem Abschnitt 1.2 zu entnehmen ist, erwirkt die Minkowski -Summe $\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l \{v\} \oplus \Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l$ die Verschiebung des Polytops $\Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l$ zum Vektor $\Pi_{\delta^*(\cdot, v)}^l v$. Der unterste Ausdruck wird so zu:

$$(J_{n-1}(\Pi_{\delta^*(\cdot, \cdot)}^l (\{v\} \oplus P)^l), \delta^*(l, \{v\} \oplus P))_{l \in S^{n-1}}$$

da

$$(\{v\} \oplus P)^l = Y_{\{v\} \oplus P}^l = Y_{\{v\}}^l \oplus Y_P^l = \{v\} \oplus P^l$$

und daher ist schließlich:

$$J_n(\{v\}) + J_n(P) = J_n(\{v\} \oplus P)$$

Die Visualisierung der Summe $\vec{V} + \vec{P}$ ergibt sich dann als das verschobene Polytop P :

$$V_n(J_n(\{v\}) + J_n(P)) = V_n(J_n(\{v\} \oplus P)) = \{v\} \oplus P$$

Anhand von 2. in Satz 3.4.1 betreffend die Linearität der Einbettung entspricht die Differenz $J_n(P) - J_n(\{v\})$ dem oben behandelten Fall mit dem Vektor $w := -v$. Also:

$$J_n(P) - J_n(\{v\}) = J_n(\{ -v \} \oplus P)$$

Anders sieht die Differenz $J_n(\{v\}) - J_n(P)$ aus. Zuerst schreibt man die Differenz um:

$$J_n(\{v\}) - J_n(P) = -(J_n(P) - J_n(\{v\}))$$

Jetzt taucht wieder die oben beschriebene Differenz auf, und schließlich erhält man so:

$$J_n(\{v\}) - J_n(P) = -J_n(P - \{v\})$$

In diesem Fall besteht die Visualisierung gemäß des Satzes 3.1.5 nur aus dem negativen Teil:

$$\begin{aligned} V_n(J_n(\{v\}) - J_n(P)) &= N_n(-J_n(P \ominus \{v\})) \\ &= \ominus V_n(J_n(P \oplus \{-v\})) \\ &= \ominus(\{-v\} \oplus P) \end{aligned}$$

□

3.5.2 Satz *Man betrachte nun zwei Polytope $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Die Summe der eingebetteten Polytope ist dann gleich der eingebetteten Minkowsky-Summe der zwei Polytope, also man hat:*

$$J_n(P) + J_n(Q) = J_n(P \oplus Q)$$

und entsprechend für die Visualisierung:

$$V_n(J_n(P) + J_n(Q)) = P_n(J_n(P) + J_n(Q)) = V_n(J_n(P \oplus Q)) = P \oplus Q$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus dem Satz 3.1.4 mit $\lambda = \mu = 1$. Die zweite Behauptung aus $V_n(J_n(P) + J_n(Q)) = V_n(J_n(P + Q))$ und aus dem Satz 3.1.5, Punkt 1). □

Die einzig allgemeingültige Aussage über die Visualisierung ist, dass sie aus einem nur konvexen Teil, nur konkavem Teil bzw. aus konvexen und gemischten oder aus konkaven und gemischten Anteil besteht (also aus maximal zwei der drei Anteilen).

Im nächsten Abschnitt wird der zweidimensionale Fall behandelt, und die hier vorgestellten Ergebnisse spezialisiert.

Zum Schluß wird der Begriff der *äußeren Normale* einer kompakten konvexen Menge eingeführt und formal angegeben, also:

3.5.3 Definition (äußere Normale) Sei $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Eine Richtung $l \in S^{n-1}$ heißt eine *äußere Normale* zu A bezüglich des Punktes $x \in \partial A$, falls:

$$A \subseteq \mathcal{H}_-^l \quad \text{und} \quad x \in \mathcal{H}^l$$

wobei

$$\mathcal{H}^l := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, l \rangle = \delta^*(l, A)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_-^l := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, l \rangle \leq \delta^*(l, A)\}$$

Die Normale heißt *innere Normale*, wenn $-l$ äußere Normale ist, und das Innere von P nicht leer ist.

Die obige Definition gilt für allgemeine konvexe kompakte Mengen des \mathbb{R}^n . Für ein Polytop kann sie anders ausgedrückt werden:

3.5.4 Bemerkung Für ein konvexes Polytop P aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{vert}(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$ ist eine Richtung $l \in S^{n-1}$ äußere Normale bezüglich einer Kante $\text{co}\{p_j, p_{j+1}\}$ mit $j \in 1, \dots, k$ und $p_{k+1} := p_1$ falls:

$$\langle l, p_i \rangle \leq \langle l, p_j \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad \langle l, p_{j+1} - p_j \rangle = 0$$

Die obige Bedingungen implizieren die Definition 3.5.3: Ein Punkt $p \in P$ lässt sich schreiben als lineare Kombination $\sum_1^k \lambda_i \cdot p_i$ der Ecken (vergleiche [Web94]) und daher ist $\langle l, p \rangle \leq \langle l, p_j \rangle$ für jedes $p_j \in \text{vert}(P)$. Damit ist gezeigt worden, dass $P \subseteq \mathcal{H}^l$. Nun:

$$\begin{aligned} p_j \in Y_P^l &\Rightarrow \langle l, p_j \rangle = \delta^*(l, P) \\ \langle l, p_{j+1} - p_j \rangle = 0 &\Rightarrow \langle l, p_{j+1} \rangle = \langle l, p_j \rangle \\ &\Rightarrow p_{j+1} \in Y_P^l \\ x \in \text{co}\{p_j, p_{j+1}\} &\Rightarrow x = \lambda \cdot p_j + (1 - \lambda) \cdot p_{j+1} \\ &\Rightarrow \langle l, x \rangle = \langle l, p_j \rangle \Rightarrow x \in \mathcal{H}^l \end{aligned}$$

3.6 Eingebettete Polytope des \mathbb{R}^2

In diesem Abschnitt werden beispielsweise die Einbettung eines Polytops und seine Visualisierung explizit berechnet. Außerdem wird die Summe und die Differenz zweier eingebetteter Polytope betrachtet.

Eine zu unseren Zwecken geeignete Anordnung der Richtungen aus S^1 lässt sich angeben durch:

3.6.1 Definition (Kreisanordnung auf S^1) Man ordne einer Richtung $l \in S^1$ den Winkel $\varphi_l \in [0, 2\pi)$ zu. Man gibt dann die folgenden Definitionen an:

- Für $l_1, l_2 \in S^1$ ist $l_1 \leq l_2$ falls $\varphi_{l_1} \leq \varphi_{l_2}$.
- Zu zwei Richtungen l_1, l_2 definiert man das Intervall $[l_1, l_2]$ als die Menge:

$$[l_1, l_2] := \{l \in S^1 \mid l_1 \leq l \wedge l \leq l_2\} \quad \text{falls } l_1 \leq l_2$$

$$[l_1, l_2] := \{l \in S^1 \mid \varphi_l \in [\varphi_{l_2}, 2\pi) \cup [0, \varphi_{l_1}]\} \quad \text{falls } l_2 \leq l_1$$

und den Intervall (l_1, l_2) als $[l_1, l_2] \setminus \{l_1, l_2\}$.

- Sei $I_A = \{l_1, \dots, l_k\} \subset S^1$ eine diskrete Menge an Richtungen. Man setzt dann:

$$l_1 \leq \dots \leq l_k \leq l_1$$

falls:

$$l_1 \leq \dots \leq l_k \quad \text{und} \quad [l_1, l_2] \cup \dots \cup [l_k, l_1] = S^1$$

3.6.1 Die Einbettung

Sei $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ein kompaktes konvexes Polytop mit $k \geq 3$ Ecken. Die äußeren normalen Richtungen seiner Kanten seien l_1, \dots, l_k und für sie gelte $l_1 \leq \dots \leq l_k \leq l_1$. Die Menge der Ecken von P sei $\text{vert}(P) = \{p_{l_1}^{l_2}, \dots, p_{l_k}^{l_1}\}$, so dass l_j die äußere Normale der Kante $\text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$ bezeichnet. Aus der Anordnung der Normalen folgt dann $\partial P = \bigcup_1^k \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$. Die Schreibweise $p_{l_j}^{l_{j+1}}$ weist so auf den Durchschnitt der von l_j und l_{j+1} bestimmten Strecken. Dabei sei zusätzlich $l_{k+1} := l_1$ und $l_0 := l_k$ zu verstehen (anders ausgedrückt, reduziert man die Indizes Modulo k). Dann erhält man für $j = 1, \dots, k$ anhand der im Abschnitt 1.3.3 besprochenen Hilfsmittel:

- Stützpunktmenge:

$$Y_P^l = P^l = \begin{cases} \text{co}\{p_{l_j-1}^{l_j}, p_{l_j}^{l_j+1}\} & : l = l_j \\ \{p_{l_j}^{l_j+1}\} & : \forall l \in (l_j, l_{j+1}) \end{cases}$$

- Stützfunktion:

$$\delta^*(l, P) = \begin{cases} \langle p_{l_j}^{l_j+1}, l \rangle = \langle p_{l_j-1}^{l_j}, l \rangle & : l = l_j \\ \langle p_{l_j}^{l_j+1}, l \rangle & : \forall l \in (l_j, l_{j+1}) \end{cases}$$

- Projektion: mit der Notation $\Pi_{a_2}^l := \Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l$ hat man:

$$\begin{aligned} \Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{l_j-1}^{l_j}, p_{l_j}^{l_j+1}\} &= \text{co}\{x_{l_j-1}^{l_j}, x_{l_j}^{l_j+1}\} \\ &= [\min\{x_{l_j}^{l_j+1}, x_{l_j-1}^{l_j}\}, \max\{x_{l_j}^{l_j+1}, x_{l_j-1}^{l_j}\}] \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $x_{l_j}^{l_j+1}$ den Wert $\Pi_{a_2}^{l_j} p_{l_j}^{l_j+1}$, der durch Anwendung des Lemmas 2.3.3 berechnet wurde. Da l_j eine äußere Normale ist, lässt sich die Projektion noch weiter vereinfachen und explizit berechnen. Man setzt $v := \frac{p_{l_j+1}^{l_j} - p_{l_j}^{l_j-1}}{\|p_{l_j+1}^{l_j} - p_{l_j}^{l_j-1}\|}$, so dass sich $l_j = v^\perp$ und $l_j^\perp = (v^\perp)^\perp = -v$ ergeben.

Dann hat man:

$$\langle l_j^\perp, v \rangle = -\|v\|^2 < 0 \Rightarrow \langle l_j^\perp, x_{l_j}^{l_j+1} \rangle < \langle l_j^\perp, x_{l_j-1}^{l_j} \rangle \Rightarrow x_{l_j}^{l_j+1} < x_{l_j-1}^{l_j}$$

Schließlich ist die Projektion der Kante gleich $[x_{l_j}^{l_j+1}, x_{l_j-1}^{l_j}]$. Für jedes l aus (l_j, l_{j+1}) ist jedoch:

$$\Pi_{a_2}^l \{p_{l_j}^{l_j+1}\} = \langle p_{l_j}^{l_j+1}, l^\perp \rangle$$

- Einbettung der projizierten Stützpunkt Mengen für l_j :

$$\begin{aligned} J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{l_j-1}^{l_j}, p_{l_j}^{l_j+1}\}) &= J_1([x_{l_j}^{l_j+1}, x_{l_j-1}^{l_j}]) = (-x_{l_j}^{l_j+1}, x_{l_j-1}^{l_j}) \\ &= (-\langle p_{l_j}^{l_j+1}, l_j^\perp \rangle, \langle p_{l_j-1}^{l_j}, l_j^\perp \rangle) \end{aligned}$$

und für jedes $l \in (l_j, l_{j+1})$ erhält man:

$$J_1(\Pi_{a_2}^l \{p_{l_j}^{l_j+1}\}) = (-\langle p_{l_j}^{l_j+1}, l^\perp \rangle, \langle p_{l_j}^{l_j+1}, l^\perp \rangle)$$

Anhand der oben erläuterten Zwischenergebnisse kann jetzt die Einbettung berechnet werden:

$$J_2(P) = (J_1(\Pi_{a_2}^l P^l), \delta^*(l, P))_{l \in S^1} \stackrel{(1)}{=} (J_1(\Pi_{a_2}^l P^l), \delta^*(l, P^l))_{l \in S^1} \quad (3.3)$$

Für eine Richtung $l \in S^1$ ist $(J_1(\Pi_{a_2}^l P^l), \delta^*(l, P^l))$ dann gleich:

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} (J_1(\Pi_{a_2}^l \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & \text{für } l = l_j \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l \{p_{l_j}^{l_{j+1}}\}), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & \text{für } l \in (l_j, l_{j+1}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} ((-\langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l^\perp \rangle, \langle p_{l_{j-1}}^{l_j}, l^\perp \rangle), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & \text{für } l = l_j \\ ((-\langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l^\perp \rangle, \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l^\perp \rangle), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & \text{für } l \in (l_j, l_{j+1}) \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $j = 1, \dots, k$. Die Gleichheit (1) ergibt sich aus dem Satz 1.3.2

Die „Stützpaare“ zu den Normalen l im Intervall (l_j, l_{j+1}) für $j = 1, \dots, k$ lassen sich so umschreiben, dass eine Abhängigkeit von den „Stützpaaren“ zu den Richtungen l_j und l_{j+1} deutlich wird. Zuerst schreibt man das Skalarprodukt $\langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle$ in Abhängigkeit von den Normalen l_j und l_{j+1} , die nach Konstruktion (für Anzahl der Ecken $k \geq 3$) linear unabhängig sind, und dann betrachtet man den Durchschnitt der Kanten zu l_j und l_{j+1} , also:

$$\begin{aligned} \Pi_{a_2}^l \{p_{l_j}^{l_{j+1}}\} &= \Pi_{a_2}^l (\text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\} \cap \text{co}\{p_{l_j}^{l_{j+1}}, p_{l_{j+1}}^{l_{j+2}}\}) \\ \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle &= a \cdot \langle p_{l_{j-1}}^{l_j}, l_j \rangle + b \cdot \langle p_{l_{j+1}}^{l_{j+2}}, l_{j+1} \rangle \end{aligned}$$

Wobei in der letzten Zeile die Richtung l als lineare Kombination der linear unabhängigen Vektoren geschrieben wurde (mit Lemma 1.3.13):

$$a = \langle l, l_j^\perp \rangle / \langle l_j, l_{j+1}^\perp \rangle \quad b = \langle l, l_{j+1}^\perp \rangle / \langle l_{j+1}, l_j^\perp \rangle$$

Aus diesen Ausdrücken entnimmt man, dass die „Stützpaare“ zu den äußeren normalen Richtungen eine wesentliche Rolle spielen. Es sei schließlich bemerkt, dass

$$\dim \text{affco}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\} = 1 \quad \text{und} \quad \dim \text{aff}\{p_{l_j}^{l_{j+1}}\} = 0$$

gilt. Die Visualisierung von $\vec{P} := J_2(P)$ ergibt sich als:

$$V_2(\vec{P}) = \text{co}\left(\bigcup_{j=1}^k \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}\right)$$

da $V_2(\vec{P}) = P_2(\vec{P}) = P = \text{co } \partial P$.

Obige Betrachtungen führen zur Idee der *reduzierten Darstellung*, die später besprochen wird.

3.6.2 Summe zweier eingebetteter Polytope

Man habe zwei Polytope $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(P) := \{p_{v_1}^{v_2}, \dots, p_{v_k}^{v_1}\}$, zur Richtungsmenge $I_P := \{v_1, \dots, v_k\}$, und $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(Q) := \{q_{w_1}^{w_2}, \dots, q_{w_m}^{w_1}\}$, zur Richtungsmenge $I_Q := \{w_1, \dots, w_m\}$. Dabei gelten die schon eingeführten Bezeichnung und Konventionen für die Punkte und die Richtungen (siehe 3.6.1). Man berechnet die Summe $\vec{P} + \vec{Q} := J_2(P) + J_2(Q)$, um die Rolle der normalen Richtungen und der Ecken herzuleiten.

Mit der Notation $\Pi_{a_2}^l := \Pi_{\delta^*(\cdot, \cdot)}^l$ führt die Berechnung der Summe zu folgendem Ergebnis:

$$\vec{P} + \vec{Q} = J_2(P) + J_2(Q) = (J_1(\Pi_{a_2}^l P^l) + J_1(\Pi_{a_2}^l Q^l), \delta^*(l, P) + \delta^*(l, Q))_{l \in S^1}$$

Für ein $l_j := v_\nu = w_\mu \in I_P \cap I_Q$ haben P^{l_j} und Q^{l_j} affine Dimension gleich 1, denn sie stimmen mit den Kanten $\text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu}, p_{v_\nu}^{v_{\nu+1}}\}$ bzw. $\text{co}\{q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, q_{w_\mu}^{w_{\mu+1}}\}$ überein. Die Summe $J_1(\Pi_{a_2}^l P^l) + J_1(\Pi_{a_2}^l Q^l)$ lässt sich günstig bestimmen, indem man die Rechnung in \vec{D}^1 statt im \mathbb{R}^2 durchführt, denn so ist keine Betrachtung der Eigenschaften von $\Pi_{a_n}^l$ und der konvexen Hülle nötig. Die Normale l_j ist äußere Normale gleichzeitig von P^{l_j} und Q^{l_j} . Die Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.6.1 ergibt die Gleichheiten:

$$\begin{aligned} \Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu}, p_{v_\nu}^{v_{\nu+1}}\} &= [\langle p_{v_{\nu+1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle, \langle p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle] \\ \Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, q_{w_\mu}^{w_{\mu+1}}\} &= [\langle q_{w_{\mu+1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle, \langle q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle] \end{aligned}$$

Daher ergeben sich die entsprechenden gerichteten Intervalle zu:

$$\begin{aligned} J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} P^{l_j}) &= (-\langle p_{v_{\nu+1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle, \langle p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle) \\ J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} Q^{l_j}) &= (-\langle q_{w_{\mu+1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle, \langle q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle) \end{aligned}$$

Schließlich erhält man:

$$\begin{aligned} J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} P^{l_j}) + J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} Q^{l_j}) &= (-\langle p_{v_{\nu+1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle - \langle q_{w_{\mu+1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle, \langle p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu}, l_j^\perp \rangle + \langle q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle) \\ &= (-\langle p_{v_{\nu+1}}^{v_\nu} + q_{w_{\mu+1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle, \langle p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu} + q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, l_j^\perp \rangle) \\ &= J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu} + q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, p_{v_\nu}^{v_{\nu+1}} + q_{w_\mu}^{w_{\mu+1}}\}) \end{aligned}$$

Für $l \in S^1 \setminus (I_P \cap I_Q)$ erhält man (eigentlich könnte man wie oben vorgehen)

$$J_1(\Pi_{a_2}^l P^l) + J_1(\Pi_{a_2}^l Q^l) = J_1((\Pi_{a_2}^l P^l) \oplus (\Pi_{a_2}^l Q^l)) = J_1(\Pi_{a_2}^l (P^l \oplus Q^l))$$

Sei nun $l \in S^1$. Dann ist

$$\begin{aligned} & (J_1(\Pi_{a_2}^l P^l) + J_1(\Pi_{a_2}^l Q^l), \delta^*(l, P) + \delta^*(l, Q)) = \\ & = \begin{cases} (J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_{\nu}} + q_{w_{\mu-1}}^{w_{\mu}}\}, p_{v_{\nu}}^{v_{\nu+1}} + q_{w_{\mu}}^{w_{\mu+1}}\}), \delta^*(l, P \oplus Q)) & \text{für } l_j \in I_P \cap I_Q \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l (P^l \oplus Q^l)), \delta^*(l, P \oplus Q)) & \text{für } l \in S^1 \setminus (I_P \cap I_Q) \end{cases} \end{aligned}$$

Bei der (weiteren) Durchführung dieser Rechnung betrachtet man die Richtungen aus $S^1 \setminus (I_P \cup I_Q)$ separat von den Richtungen aus $I_P \cup I_Q$. Diese letzte Indexmenge lässt sich weiter zerlegen in drei Unterindexmengen:

$$I_P \setminus (I_P \cap I_Q) \quad , \quad I_Q \setminus (I_P \cap I_Q) \quad , \quad I_P \cap I_Q$$

Die Richtungen aus den Indexmengen seien wieder angeordnet gemäß der Kreisordnung auf S^1 der Definition 3.6.1. Insbesondere sei die Vereinigung $I_P \cup I_Q$ gleich $\{u_1, \dots, u_h\}$, dann kann man

$$S^1 \setminus (I_P \cup I_Q) = \bigcup_{j=1}^h (u_j, u_{j+1})$$

schreiben, wobei die schon erwähnten Konventionen für die Indizes gelten. Zu einem dieser Intervalle (u_j, u_{j+1}) bezeichnet der Punkt $p_{u_j}^{u_{j+1}}$ bzw. $q_{u_j}^{u_{j+1}}$ die Ecke $p_{v_{\xi-1}}^{v_{\xi}} \in \text{vert}(P)$ bzw. $q_{w_{\zeta-1}}^{w_{\zeta}} \in \text{vert}(Q)$, die „zwischen“ den Richtungen u_j und u_{j+1} sich befindet, d.h. die Ecke mit

$$(u_j, u_{j+1}) \subseteq (v_{\xi-1}, v_{\xi}) \quad \text{bzw.} \quad (u_j, u_{j+1}) \subseteq (w_{\zeta-1}, w_{\zeta})$$

Als Folge der Zerlegung der Indexmenge differenziert sich Obiges weiter in:

$$= \begin{cases} (J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_{\nu}} + q_{w_{\mu-1}}^{w_{\mu}}\}, p_{v_{\nu}}^{v_{\nu+1}} + q_{w_{\mu}}^{w_{\mu+1}}\}), \delta^*(l_j, P \oplus Q)) & : l_j \in I_P \cap I_Q \\ (J_1[(\Pi_{a_2}^l (\text{co}\{p_{v_{\eta-1}}^{v_{\eta}}\} \oplus \{q_{u_{\eta'-1}}^{u_{\eta'}}\})], \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in I_P \setminus (I_P \cap I_Q) \\ (J_1[(\Pi_{a_2}^l (\{p_{u_{\theta'-1}}^{u_{\theta'}}\} \oplus \text{co}\{q_{w_{\theta-1}}^{w_{\theta}}\}, q_{w_{\theta}}^{w_{\theta+1}}\})], \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in I_Q \setminus (I_P \cap I_Q) \\ (J_1[(\Pi_{a_2}^l (\{p_{u_j}^{u_{j+1}}\} \oplus \{q_{u_j}^{u_{j+1}}\})], \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in (u_j, u_{j+1}) \end{cases}$$

wobei in der zweiten bzw. dritten Zeile $l = v_\eta \equiv u_{\eta'}$ für ein $\eta \in \{1, \dots, k\}$ und ein $\eta' \in \{1, \dots, h\}$ bzw. $l = w_\theta \equiv u_{\theta'}$ für ein $\theta \in \{1, \dots, m\}$ und ein $\theta' \in \{1, \dots, h\}$ steht. Anhand der Beziehung $\text{co}(C) \oplus \text{co}(D) = \text{co}(C \oplus D)$ schließt man:

$$= \begin{cases} (J_1(\Pi_{a_2}^{l_j} \text{co}\{p_{v_{\nu-1}}^{v_\nu} + q_{w_{\mu-1}}^{w_\mu}, p_{v_\nu}^{v_{\nu+1}} + q_{w_\mu}^{w_{\mu+1}}\}), \delta^*(l_j, P \oplus Q)) & : l_j \in I_P \cap I_Q \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l \text{co}\{p_{v_{\eta-1}}^{v_\eta} + q_{u_{\eta'-1}}^{u_{\eta'}}, p_{v_\eta}^{v_{\eta+1}} + q_{u_{\eta'-1}}^{u_{\eta'}}\}), \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in I_P \setminus (I_P \cap I_Q) \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l \text{co}\{p_{u_{\theta'-1}}^{u_{\theta'}} + q_{w_{\theta-1}}^{w_\theta}, p_{u_{\theta'-1}}^{u_{\theta'}} + q_{w_\theta}^{w_{\theta+1}}\}), \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in I_Q \setminus (I_P \cap I_Q) \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l \{p_{u_j}^{u_{j+1}} + q_{u_j}^{u_{j+1}}\}), \delta^*(l, P \oplus Q)) & : l \in (u_j, u_{j+1}) \end{cases}$$

Analog wie im vorherigen Abschnitt lässt sich das unterste Glied aus den restlichen herleiten, und somit ist gezeigt, dass es für die Durchführung der Summe, die Kenntnisse der „Stützpaare“ zum Index $I_P \cup I_Q$ ausreichend ist.

Kapitel 4

Gerichtete Polytope

Kompakte konvexe Mengen des \mathbb{R}^n können durch kompakte konvexe Polytope approximiert werden. Man möchte nun in dem Teilraum $\vec{\mathcal{C}}^n$ der gerichteten Mengen analog vorgehen können. Eine Verallgemeinerung des Begriffs Polytops ist zuerst notwendig. Man geht dabei wie im $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ vor: Die Teilmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wird in den $\vec{\mathcal{D}}^n$ eingebettet und dann deren lineare Hülle gebildet. Die Polytope im \mathbb{R}^n können durch ihre Ecken oder durch lineare Gleichungssysteme dargestellt werden. Um Rechnungen mit den Elementen des Raumes $\vec{\mathcal{P}}^n$ der *gerichteten Polytope* durchführen zu können, ist es zweckmäßig, eine analoge Darstellung der Elemente aus dem $\vec{\mathcal{P}}^n$ zu haben. Insbesondere am Rechner ist eine endliche Darstellung für eine einfache Abspeicherung ohne weitere Diskretisierungen erforderlich. Der Begriff der *reduzierten Darstellung* wird eingeführt. Eine solche Darstellung enthält alle wesentlichen Informationen.

Die Idee dafür geht aus Betrachtungen über die Visualisierung hervor. Diese besteht für ein eingebettetes Polytop $J_n(P)$ aus einem Polytop P . Man versucht, die Eckendarstellung eines Polytops in den Raum $\vec{\mathcal{D}}^n$ zu übertragen. Jedes Polytop besitzt Seiten mit maximaler affiner Dimension, die wir hier mit k bezeichnen wollen. Die Grundidee der *reduzierten Darstellung* besteht darin, nur die „Stützpaare“ (man schlage in der Definition 2.1.1 nach) zu gewissen Richtungen zu berücksichtigen, genau die, deren reprojizierte Visualisierung die Dimension k hat. Die Forderung der Maximalität an diese Dimension ergibt eine „minimale“ *reduzierte Darstellung*, in der eine möglichst kleine Anzahl von Richtungen betrachtet wird. In der Visualisierung sind diese Richtungen normal zur Visualisierung $*\Pi_{a_n}^l V_{n-1}(\overrightarrow{A_{n-1}(l)})$ der

„Stützpaare“ $\vec{A}(l)$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine *reduzierte Darstellung* eines $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ zu definieren. Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ denke man zum Beispiel daran, nur die Ecken für mehrere geschickt ausgewählte Richtungen einzubetten. Dies müßte aber für mehrere Richtungen für die gleiche Ecke erfolgen, was ungünstig wäre. Geeignete Richtungen sind die Normalen zu allen reprojizierten „Stützpaaren“ mit maximaler Dimension k , deren Durchschnitt die gerade einzubettende Ecke ergibt. Eine solche *reduzierte Darstellung* unterscheidet sich von der in dieser Arbeit angegebenen Definition dadurch, dass die Ecken schon „zur Verfügung“ stehen. Die *reduzierte Darstellung* der Definition 4.1.5 speichert die Ecken eines eingebetteten Polytops indirekt über die Facetten (zusammen mit nur einer Richtung). Schließlich würde diese Methode zur oben genannten *reduzierten Darstellung* führen, ohne große Vorteile erbracht zu haben, außer einer größeren Analogie mit dem Fall $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Da sich die Rechenoperationen auf die Kanten beziehen, müssen die Kanten zuerst aus den Ecken berechnet werden.

Um die Vollständigkeit und Konsistenz der Definition der *reduzierten Darstellung* zu zeigen, sind folgende Fragen zu beantworten:

- Enthält die *reduzierte Darstellung* die wesentliche Information?
- Kann man mittels der *reduzierten Darstellung* rechnen?

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den obigen Fragen: Dabei werden neue Begriffe definiert und die Grundlagen gelegt, um auf diese Fragen eine Antwort zu erhalten.

4.1 Gerichtete Polytope und deren reduzierte Darstellung

Bevor die *gerichteten Polytope* eingeführt werden, werden einige Eigenschaften der Menge aller Polytope im \mathbb{R}^n nochmal wiederholt. Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der kompakten konvexen Polytope des \mathbb{R}^n ist bezüglich der Minkowski-Summe und der Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen; es gilt nämlich:

$$P \oplus Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und für jedes λ aus \mathbb{R} (vergleiche [Web94], Kapitel 3). Die oben zitierten Operationen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gehen für $\lambda \geq 0$ durch die Einbettung J_n in die entsprechende Operationen des \mathbb{R} -Vektorraumes $\vec{\mathcal{D}}^n$ über. Um einen Untervektorraum von $\vec{\mathcal{D}}^n$ zu erhalten, muss die lineare Hülle der Menge aller eingebetteten kompakten konvexen Polytope betrachtet werden. Dieser Raum bildet dann den so genannten Raum der *gerichteten Polytope*, wie in der folgenden Definition angegeben wird.

4.1.1 Definition (gerichtete Polytope) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der kompakten konvexen Polytope des \mathbb{R}^n , und sei J_n die Einbettung in den Raum der gerichteten Mengen. Man definiert den Raum der gerichteten Polytope als die Menge:

$$\vec{\mathcal{P}}^n := \text{lin}(J_n(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)))$$

wobei $\text{lin}(\cdot)$ die lineare Hülle bezeichnet.

Es sei bemerkt, dass bei der Bildung von $\vec{\mathcal{P}}^n$ die abgeschlossene lineare Hülle $\overline{\text{lin}(J_n(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)))}$ zu einer viel zu großen Menge führen würde, denn sie stimmt mit dem Raum $\vec{\mathcal{C}}^n$ überein. Der Raum $\vec{\mathcal{P}}^n$ ist ein Teilraum von $\vec{\mathcal{C}}^n$, und es gelten die Inklusionen: $\vec{\mathcal{P}}^n \subseteq \vec{\mathcal{C}}^n \subseteq \vec{\mathcal{D}}^n$.

Zu einem beliebigen $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ existieren Folgen $\{P^i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{Q^i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit:

$$P^i \subseteq A \subseteq Q^i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad P^i, Q^i \rightarrow A \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty$$

wobei die Konvergenz bezüglich des Hausdorff-Abstands zu verstehen ist. Daher folgt mittels des Satzes 3.1.4 und der Stetigkeit von J_n (siehe [BF01a])

$$J_n(P^i) \leq J_n(A) \leq J_n(Q^i) \quad i \rightarrow \infty$$

4.1.2 Definition Für ein $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ definiert man zu einer Richtung $l \in S^{n-1}$:

$$B_n^l(\vec{A}) := {}^* \Pi_{a_n}^l V_{n-1}(\overline{A_{n-1}(l)})$$

Es ist nach Konstruktion $B_n^l(\vec{A}) \subseteq B_n(\vec{A})$. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, auf welches \vec{A} man sich bezieht, wird die Bezeichnung B_n^l anstelle von $B_n^l(\vec{A})$ benutzt.

Für eine gegebene gerichtete Menge $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ sind die reprojizierten $(n-1)$ -dimensionalen Visualisierungen B_n^l von $\overrightarrow{A_{n-1}(l)}$ Teilmengen des \mathbb{R}^n mit einer bestimmten affinen Dimension, die als die Dimension von \vec{A} in Richtung $l \in S^{n-1}$ bezeichnet wird, wie in der folgenden Definition angegeben ist:

4.1.3 Definition Sei $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$. Als die Dimension von \vec{A} in die Richtung $l \in S^{n-1}$ setzt man:

$$d(l, \vec{A}) := \dim \text{aff}(B_n^l(\vec{A}))$$

Nun greife man nochmal auf die Beschreibung der Einbettung eines $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ aus Abschnitt 3.6.1 zurück, um die reduzierte Darstellung eines gerichteten Polytops einzuführen. Für ein gegebenes $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(P) = \{p_{l_1}^{l_2}, \dots, p_{l_k}^{l_1}\}$ und den äußeren Normalen $l_1, \dots, l_k \in S^1$ erhält man für ein $l \in S^1$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} (J_1(\Pi_{a_2}^l P^l), \delta^*(l, P)) &= \\ &= \begin{cases} (J_1(\Pi_{a_2}^l \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & : l = l_j \\ (J_1(\Pi_{a_2}^l \{p_{l_j}^{l_{j+1}}\}), \langle p_{l_j}^{l_{j+1}}, l \rangle) & : l \in (l_j, l_{j+1}) \end{cases} \quad \text{mit } j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Die „Stützpaare“ zu den Richtungen l im Intervall (l_j, l_{j+1}) mit $j = 1, \dots, k$ lassen sich von „Stützpaaren“ zu den l_j herleiten. Außerdem haben die B_2^l die affine Dimension 0 oder 1. Genauer ausgedrückt bedeutet dies:

$$\begin{aligned} d(l, \vec{A}) &= \dim \text{aff}(\text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}) = 1 \quad \text{für } l = l_j \\ d(l, \vec{A}) &= \dim \text{aff}(\{p_{l_j}^{l_{j+1}}\}) = 0 \quad \text{für } l \in (l_j, l_{j+1}) \end{aligned}$$

wobei $j = 1, \dots, k$. Der Rand des gerichteten Polytops $J_2(P)$ ist gleich der Vereinigung:

$$\bigcup_{l=l_1, \dots, l_k} {}^* \Pi_{a_2}^l V_1(J_1(\Pi_{a_2}^l P^l)) = \bigcup_{l=l_1, \dots, l_k} B_2^l(\vec{P})$$

d.h. ergibt sich durch die reprojizierten 1-dimensionalen Visualisierungen $B_2^l(\vec{P})$ größter affiner Dimension. Man kann also durch die „Stützpaare“ zu den Normalen l_j die vollständige Darstellung und Visualisierung von $\vec{P} := J_2(P)$ erhalten. Solche Überlegungen führen zur Definition des Begriffes der *reduzierten Darstellung*. Bevor dieser Begriff angegeben werden kann, wird noch eine weitere Definition benötigt.

4.1.4 Definition Für ein gegebenes $P \in \vec{\mathcal{P}}^n$ bezeichnet $\text{dmax}(\vec{P})$ die maximale affine Dimension der reprojizierten $(n-1)$ -dimensionalen Visualisierungen $B_n^l(\vec{P})$:

$$\text{dmax}(\vec{P}) := \max_{l \in S^{n-1}} d(l, \vec{P})$$

Es gilt stets $\text{dmax}(\vec{P}) \leq n - 1$. Nun kommt man zur zentralen Definition:

4.1.5 Definition (reduzierte Darstellung) Sei $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ ein gerichtetes Polytop mit vollständiger Darstellung $(\overrightarrow{P_{n-1}(l)}, p_n(l))_{l \in S^{n-1}}$. Dann heißt

$$(\overrightarrow{P_{n-1}(l)}, p_n(l))_{l \in I_P}$$

eine **reduzierte Darstellung** von \vec{P} , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $I_P \subseteq S^{n-1}$ mit $\#I_P < \#\mathbb{N}$
2. $\forall l \in I_P$ ist $l \in O_n(x, \vec{P}) \quad \forall x \in B_n^l(\vec{P})$
3. $d(l, \vec{P}) = \text{dmax}(\vec{P}) \quad \forall l \in I_P$
4. $\bigcup_{l \in I_P} B_n^l(\vec{P}) = B_n(\vec{P})$

Man sagt, ein Polytop sei in reduzierter Darstellung, wenn es durch eine reduzierte Darstellung angegeben wird. Man bezeichnet die reduzierte Darstellung von \vec{P} zum Index I_P auch mit $[\vec{P}|I_P]$ oder auch mit $[\vec{P}|l_1, \dots, l_k]$, wenn die Richtungen explizit angegeben werden. Eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ heißt **minimal**, wenn es keine andere reduzierte Darstellung $[\vec{P}|J_P]$ gibt, deren Index J_P die Bedingung $\#J_P < \#I_P$ erfüllt.

Die erste Bedingung der Definition 4.1.5 legt die Art der auszuwählenden Indizes an Richtungen fest, welche nach der zweiten Bedingung normal zu den reprojizierten $(n-1)$ -dimensionalen Visualisierungen $B_n^l(\vec{P})$ der entsprechenden „Stützpaare“ sind. Der dritte Punkt bestimmt, welche „Stützpaare“ zu berücksichtigen sind, nämlich die mit maximaler affiner Dimension. Aus der reduzierten Darstellung muss man immer noch in der Lage sein, die Visualisierung rekonstruieren zu können: Dies sichert die vierte Anforderung zusammen mit dem Satz 4.1.13.

Bei der reduzierten Darstellung vermeidet man es, die Richtungen und die „Stützpaare“ zu betrachten, deren reprojizierte $(n-1)$ -dimensionale Visualisierung $B_n^l(\vec{P})$

Dimension $d(l, \vec{P})$ strikt kleiner als $d_{\max}(\vec{P})$ ist. Diese $B_n^l(\vec{P})$ erhält man als Durchschnitt von visualisierten „Stützpaaren“ in der reduzierten Darstellung, d.h. als Durchschnitt von $B_n^{l_i}(\vec{P})$ mit Richtungen l_i im Index I_P . Für den „entarteten“ Fall ist die Auswahl der Richtungen unwesentlich. Man kann irgendeine Richtung betrachten.

Die Minimalität ist keine triviale Anforderung an den Index I_P , da sie nicht unbedingt erfüllt ist als Folge der Bedingung 1) bis 4) in der Definition oben. Man betrachte zum Beispiel den zweidimensionalen Fall: eine eingebettete Strecke $\vec{P} := J_2(\text{co}\{p, q\})$ mit $p = (p_x, p_y)$ und $q = (q_x, q_y)$. Dabei sind beide Richtungen

$$l := \frac{(p_y - q_y, -p_x + q_x)}{\|(p_y - q_y, -p_x + q_x)\|}$$

und $-l$ normal zu:

$$\text{co}\{p, q\} = B_2^l(\vec{P}) = B_n^{-l}(\vec{P})$$

Für diese reprojizierte Visualisierung gilt:

$$d(l, \vec{P}) = d(-l, \vec{P}) = 1 = d_{\max}(\vec{P})$$

während für die restlichen Richtungen $u \in S^1 \setminus I_P$ man $d(u, \vec{P}) = 0$ erhält. Die reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P := \{l, -l\}] := (P_1(v), p_2(v))_{v=l, -l}$ erfüllt also die Definition, ist aber keine minimale reduzierte Darstellung. Minimal wäre einer der Indizes $J_P := \{l\}$ oder $J_P := \{-l\}$. Für einen eingebetteten Punkt führt jede endliche Teilmenge von S^1 zu einer reduzierten Darstellung. Die Minimalität ist dann erreicht, wenn man nur eine Richtung berücksichtigt. Bei einem Polytop aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit mindestens drei Ecken ergibt die Definition 4.1.5, angewendet auf das eingebettete Polytop, eine minimale reduzierte Darstellung: Man kann in diesem Fall von einer reduzierten Darstellung sprechen. Dabei ist aber zu beachten, dass man nach der Durchführung einer Summe oder einer Differenz nicht unbedingt wieder eine reduzierte Darstellung erhält.

4.1.1 Eigenschaften und Berechnung reduzierter Darstellungen

Nachdem die Definition angegeben wurde, untersucht man die Eigenschaften der reduzierten Darstellung. Zuerst beschafft man sich einige Mittel, die auch später nützlich sind: So kommen die folgende drei Lemmata zu Stande.

4.1.6 Satz Sei $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, und setze man $\vec{P} := J_n(P)$. Dann existiert eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ des eingebetteten gerichteten Polytops $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$.

Beweis: Es wird gezeigt, dass der folgende Richtungsindex eine reduzierte Darstellung von \vec{P} ergibt:

$$I_P := \{l \in S^{n-1} \mid d(l, \vec{P}) = \text{dmax}(\vec{P})\}$$

Der Index I_P ist aus Konstruktion nicht leer. Nun prüft man die Erfüllung der Bedingungen der Definition 4.1.5 nach.

1. Aus $\vec{P} = J_n(P)$ folgt $B_n^l = Y_P^l$. Dabei sind die Mengen Y_P^l eigentliche Seiten des Polytops P für jedes $l \in I_P$. Da ein Polytop nur endlich viele davon besitzt, folgt $\#I_P < \infty$;
2. Die 2. Bedingung ist klar;
3. Die 3. Bedingung ergibt sich aus der Konstruktion von I_P ;
4. Aus dem Satz 3.1.5 erhält man: $\partial P = B_n(\vec{P})$. Lemma 1.3.18 liefert die Inklusion:

$$\bigcup_{l \in I_P} B_n^l = \bigcup_{l \in I_P} Y_P^l \subseteq \partial P$$

Die umgekehrte Inklusion wird im Folgenden aufgezeigt. Sei $x \in \partial P$: Dann gilt $x \in Y_P^u$ für eine Richtung $u \in S^{n-1}$ (Vgl. [Mar77], Kap. V, Corollar 4). Dabei ist Y_P^u eine eigentliche Seite, die in einer Facette F des Polytops P liegt (Vgl. [Sch93], Theorem 2.4.7). Nun ist: $\dim \text{aff}(F) = \text{dmax}(\vec{P})$ (Facette haben maximale Dimension). Also $Y_P^u \subseteq Y_P^l \quad \forall l \in I_P$.

□

4.1.7 Lemma Sei \vec{P} ein eingebettetes gerichtetes Polytop aus $\vec{\mathcal{P}}^n$. Eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ liege vor. Zu einer Richtung l_i aus dem Index I_P gilt:

1. $p_n(l_i) = \delta^*(l_i, P)$
2. $B_n^{l_i} = Y_P^{l_i}$
3. $\max \dim \text{aff}(Y_P^l) = \dim \text{aff}(Y_P^{l_i}) \quad l \in S^{n-1}$

$$4. \bigcup_{l_i \in I_P} Y_P^{l_i} = \partial P$$

wobei $\vec{P} = J_n(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis: Der erste Punkt folgt aus der Tatsache, dass \vec{P} ein eingebettetes gerichtetes Polytop ist. Punkt zwei folgt aus dem Lemma 1.3.15 und Satz 3.1.5. Punkt 3) ist eine Folge der Definition 4.1.5 der reduzierten Darstellung. Schließlich ergibt sich der letzte Punkt aus Lemma 1.3.18 und aus dem Beweis vorheriges Satzes. \square

4.1.8 Lemma Sei \vec{P} ein eingebettetes gerichtetes Polytop aus $\vec{\mathcal{P}}^n$. Dabei sei $\vec{P} = J_n(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{vert}(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ liege vor. Für $i = 1, \dots, k$ existiert dann $l \in I_P$ mit $p_i \in Y_P^l$.

Beweis: Man nehme an, es sei $p_i \notin Y_P^l$ für jedes $l \in I_P$. Da aber p_i eine Ecke vom Polytop ist, gilt: $p_i \in \partial P = B_n(\vec{P})$. Dies ist im Widerspruch zu $B_n(\vec{P}) = \bigcup_{l \in I_P} Y_P^l$. \square

4.1.9 Satz Es gelten die Voraussetzungen des Lemmas 4.1.8. Zusätzlich gelte $\dim \text{aff}(P) = n$. Ist $l \in S^{n-1}$ eine Richtung mit:

$$\dim \text{aff}(Y_P^l) = \text{dmax}(\vec{P}) = n - 1$$

so ist $l \in I_P$.

Beweis: Man nehme an, die Richtung l sei nicht im Index I_P enthalten. Nach Lemma 1.3.19 existieren paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_h \in \{1, \dots, k\}$ mit $Y_P^l = \text{co}\{p_{i_1}, \dots, p_{i_h}\}$. Daraus ergibt sich $h \geq (n - 1) + 1 = n$. Das Lemma 4.1.8 liefert dann:

$$\forall \nu \in \{1, \dots, h\} \quad \exists l_{i_\nu} \in I_P \quad | \quad p_{i_\nu} \in Y_P^{l_{i_\nu}}$$

Man setze $p := \sum_{\nu=1}^h \frac{1}{h} \cdot p_{i_\nu}$. Da die Stützmenge konvex ist, hat man $p \in Y_P^l \subset \partial P = B_n(\vec{P})$. Nun hat man: $\exists \mu \in \{1, \dots, h\} \mid p \in Y_P^{l_{i_\mu}}$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta^*(l_{i_\mu}, P) &= \langle l_{i_\mu}, p \rangle = \sum_{\nu=1}^h \frac{1}{h} \cdot \langle l_{i_\mu}, p_{i_\nu} \rangle \\ &\leq \sum_{\nu=1}^h \frac{1}{h} \cdot \delta^*(l_{i_\mu}, P) = \delta^*(l_{i_\mu}, P) \\ &\Rightarrow \langle l_{i_\mu}, p \rangle = \langle l_{i_\mu}, p_{i_\nu} \rangle \quad \nu = 1, \dots, h \\ &\Rightarrow p_{i_\nu} \in Y_P^{l_{i_\mu}} \quad \nu = 1, \dots, h \\ &\Rightarrow Y_P^l = \text{co}\{p_{i_1}, \dots, p_{i_h}\} \subset Y_P^{l_{i_\mu}} \end{aligned}$$

Wegen Voraussetzungen ist $\text{dmax}(\vec{P}) = \dim \text{aff}(Y_P^l)$ also:

$$\dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1 = \text{dmax}(\vec{P}) = \dim \text{aff}(Y_P^{l_{i_\mu}})$$

und:

$$\dim \text{lin}(Y_P^l) = \dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1 = \dim \text{aff}(Y_P^{l_{i_\mu}}) = \dim \text{lin}(Y_P^{l_{i_\mu}})$$

Aus $Y_P^l \subset Y_P^{l_{i_\mu}}$ ist $\text{lin}(Y_P^l) \subset \text{lin}(Y_P^{l_{i_\mu}})$. Aus der letzten Inklusion erhält man:

- $\begin{cases} l \perp \text{lin}(Y_P^l) \\ l_{i_\mu} \perp \text{lin}(Y_P^{l_{i_\mu}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{lin}(Y_P^l) = \text{span}\{l\}^\perp \\ \text{lin}(Y_P^{l_{i_\mu}}) = \text{span}\{l_{i_\mu}\}^\perp \end{cases}$
- $\text{span}\{l\}^\perp \subset \text{span}\{l_{i_\mu}\}^\perp \Rightarrow \text{span}\{l\} \supset \text{span}\{l_{i_\mu}\} \Rightarrow l_{i_\mu} = \pm l$

Man nehme nun an, es sei $l_{i_\mu} = -l$. Dann ergibt sich aus $p_{i_\mu} \in Y_P^{l_{i_\mu}}$ und (Lemma 1.3.14):

$$\delta^*(l, P) = \langle l, p_{i_\mu} \rangle = \langle -l_{i_\mu}, p_{i_\mu} \rangle = -\langle l_{i_\mu}, p_{i_\mu} \rangle = -\delta^*(l_{i_\mu}, P) = -\delta^*(-l, P)$$

Für ein beliebiges $q \in P$ hat man:

$$\begin{aligned} \langle l, q \rangle &\leq \delta^*(l, P) \\ \langle -l, q \rangle &\leq \delta^*(-l, P) \Rightarrow -\delta^*(-l, P) \leq \langle l, q \rangle \leq \delta^*(l, P) = -\delta^*(-l, P) \\ &\Rightarrow P \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle = \delta^*(l, P)\} = \text{aff}(Y_P^l) \\ &\Rightarrow \dim \text{aff}(P) \leq \dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $l_{i_\mu} = -l$, also ist $l = l_{i_\mu} \in I_P$, was wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung $l \notin I_P$ darstellt. \square

Nun kommt eine Behauptung über die reduzierte Darstellung eingebetteter Polytope.

4.1.10 Satz Sei P ein Polytop aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man bettet P ein und betrachte eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$. Dann lässt sich die vollständige Darstellung von \vec{P} aus $[\vec{P}|I_P]$ rekonstruieren.

Beweis: Es wird gezeigt, dass die Werte $p_n(u)$ und $\overrightarrow{P_{n-1}(u)}$ sich für ein $u \in S^{n-1} \setminus I_P$ aus der reduzierten Darstellung berechnen lassen. Der Beweis gliedert sich also in zwei Teile.

1. Aus $\vec{P} = J_n(P)$ zusammen mit dem Satz 3.1.5 folgt, dass $B_n(\vec{P}) = \partial P$ ist. Aus der Definition 4.1.5 der reduzierten Darstellung erhält man:

$$B_n(\vec{P}) = \bigcup_{l \in I_P} B_n^l(\vec{P})$$

Nun ist nach Konstruktion der Einbettung mittels Lemma 4.1.7 und 3.1.5:

$$B_n^l(\vec{P}) = Y_P^l \quad \forall l \in I_P$$

Dies ergibt zusammen mit 4) in 4.1.5:

$$P = \text{co}(\partial P) = \text{co}(B_n(\vec{P})) = \text{co}\left(\bigcup_{l_i \in I_P} B_n^{l_i}(\vec{P})\right) = \text{co}\left(\bigcup_{l_i \in I_P} Y_P^{l_i}\right)$$

Da \vec{P} eine eingebettete gerichtete Menge ist, ergibt 4.1.7:

$$p_n(l) = \delta^*(l, P)$$

Damit ergibt sich:

$$p_n(l) = \delta^*(l, P) = \delta^*(l, \text{co}\left(\bigcup_{l_i \in I_P} Y_P^{l_i}\right)) \quad \forall l \in S^{n-1}$$

Dies gilt insbesondere für ein $u \in S^{n-1} \setminus I_P$.

2. Für alle Richtungen $l \in S^{n-1}$ gilt:

$$\begin{aligned} Y_P^l &= \{x \in P \mid \langle l, x \rangle = \delta^*(l, P)\} \\ &= \{x \in \partial P \mid \langle l, x \rangle = \delta^*(l, P)\} \\ &= \{x \in \bigcup_{l_i \in I_P} Y_P^{l_i} \mid \langle l, x \rangle = \delta^*(l, P)\} \end{aligned}$$

Nach der Definition der Einbettung gilt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{n-1}(l)} &= J_{n-1}(\Pi_{a_n}^l Y_P^l) \\ &= J_{n-1}(\Pi_{a_n}^l \{x \in \bigcup_{l_i \in I_P} Y_P^{l_i} \mid \langle l, x \rangle = \delta^*(l, P) = p_n(l)\}) \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: Dabei ist $a_n(\cdot) \equiv p_n(\cdot) \equiv \delta^*(\cdot, P)$) □

4.1.11 Bemerkung Für die Dimension $n = 2$ kann der Satz 4.1.10 konstruktiv bewiesen werden, allerdings unter gewissen Annahmen, wie im Folgenden beschrieben wird. Für das einzubettende Polytop sei $\dim \text{aff}(P) = 2$, d.h. habe mindestens 3 Ecken. Der Index I_P sei angeordnet bezüglich der Kreisordnung. Für $l_i < l_{i+1} \in I_P$ (man achte darauf, dass daraus folgt, dass keine $l \in I_P$ mit $l_i < l < l_{i+1}$ existiert) gilt dann: $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} \neq \emptyset$. Dann ist $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = \{p\}$ und man setzt:

$$\begin{aligned} p_n(l) &:= \langle p, l \rangle \\ \overrightarrow{P_{n-1}(l)} &:= J_1(\Pi_{a_2}^l \{p\}) = (-\langle p, l^\perp \rangle, \langle p, l^\perp \rangle) \end{aligned}$$

Der Wert $p_n(l)$ ergibt sich aus 1.3.14. Ist $\#\text{vert}(P) \leq 3$, dann kann man z.B. 1.3.16 verwenden, um den Wert $p_n(l)$ zu berechnen. In der letzten Zeile verwendet man Lemma 2.3.3.

Folgender Satz besagt, dass die reduzierte Darstellung die wesentliche Information zur Beschreibung eines gerichteten Polytops enthält.

4.1.12 Satz (Eindeutigkeit) Sei eine reduzierte Darstellung $[\overrightarrow{P} | I_P]$ eines eingebetteten gerichteten Polytops $P \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^n$ gegeben. Für ein eingebettetes Polytop $\overrightarrow{A} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^n$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{A_{n-1}(l)} = \overrightarrow{P_{n-1}(l)} \quad \text{und} \quad a_n(l) = p_n(l) \quad \forall l \in I_P$$

und:

$$B_n(\vec{A}) = B_n(\vec{P})$$

genau dann, wenn $\vec{A} = \vec{P}$.

Beweis: Wenn $\vec{A} = \vec{P}$ ist, dann ergeben sich die Gleichungen der Behauptung sofort. Die umgekehrte „Richtung“ liefert der Satz 4.1.13: Sie wird in dessen Beweis gezeigt, da 4.1.13 eine Umformulierung dieses Satzes darstellt. \square

Wenn man sich die Definition 2.1.1 einer gerichteten Menge in Erinnerung ruft, kann man eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ des gerichteten Polytops \vec{P} als eine Einschränkung der Funktion:

$$\vec{P}(\cdot) : S^{n-1} \longrightarrow \vec{\mathcal{D}}^n \times \mathbb{R}$$

auf eine Teilmenge $I_P \subseteq S^{n-1}$ ansehen. Obiger Satz 4.1.12 lässt sich also umformulieren in:

4.1.13 Satz (Fortsetzung) Sei $[\vec{P}|I_P]$ eine reduzierte Darstellung eines eingebetteten $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte gleichmäßig beschränkte Fortsetzung von:

$$\overline{P_{n-1}(\cdot)} : I_P \longrightarrow \vec{\mathcal{D}}^{n-1}, l \mapsto \overline{P_{n-1}(l)}$$

und eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von:

$$p_n(\cdot) : I_P \longrightarrow \mathbb{R}, l \mapsto p_n(l)$$

auf ganz S^{n-1} .

Beweis:

1. Die Existenz der Fortsetzungen ergibt sich aus dem Satz 4.1.10. Die Beschränktheit folgt aus [BF01a] 4.19 während die Stetigkeit sich aus der Stetigkeit von $\delta^*(\cdot, P)$ ergibt.
2. In Folgenden wird die Eindeutigkeit der Fortsetzung für ein eingebettetes gerichtetes Polytop gezeigt:

Man habe $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\vec{P} = J_n(P)$ bzw. $\vec{Q} = J_n(Q)$ und entsprechenden reduzierten Darstellungen $[\vec{P}|I_P]$ bzw. $[\vec{Q}|I_Q]$ mit:

$$\partial P = \bigcup_{l_i \in I_P} B_n^{l_i}(\vec{P}) = \bigcup_{u_j \in I_Q} B_n^{u_j} = B_n(\vec{Q}) = \partial Q$$

Dann ist für jedes $l \in S^{n-1}$:

$$p_n(l) = \delta^*(l, P) = \delta^*(l, \text{co}(\partial P)) = \delta^*(l, \text{co}(\partial Q)) = \delta^*(l, Q) = q_n(l)$$

Damit ist $P = Q$ und auch $J_n(P) = J_n(Q)$.

□

Im Falle eingebetteter gerichteter Polytope lässt sich eine reduzierte Darstellung recht leicht bestimmen. Der folgende Satz kann als eine Umformulierung von 4.1.6 angesehen werden.

4.1.14 Satz *Es liege ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ vor. Man nehme an, es sei $\text{vert}(P) = \{v_1, \dots, v_k\}$ und es gelte $\dim \text{aff}(P) = n$. Man setzt dann $\vec{P} := J_n(P)$. Der Richtungsindex:*

$$I_P := \{l \in S^{n-1} \mid \dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1\}$$

ergibt eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$. Diese ist auch minimal.

Beweis: Man prüft die geforderten Bedingungen der Definition 4.1.5 nach. Also:

1. Da P ein Polytop ist, folgt $\#I_P < \infty$
2. Für ein $l \in I_P$ folgt aus Lemma 4.1.7, dass $Y_P^l = B_n^l$. Für ein $x \in Y_P^l$ ist dann nach der Definition $l \in O_n(x, \vec{P})$
3. Da ein Polytop Seiten maximaler Dimension hat, folgt nach Konstruktion $\text{dmax}(\vec{P}) = n - 1$
4. Aus dem Satz 3.1.5 hat man $B_n(\vec{P}) = \partial P$. Nun ist $\bigcup_{l \in I_P} Y_P^l \subset \partial P$. Umgekehrt ist: Sei $x \in \partial P$, dann existiert $v \in S^{n-1}$ mit $x \in Y_P^v$. Ist $\dim \text{aff}(Y_P^v) = n - 1$, so folgt $v \in I_P$ und damit $x \in \bigcup_{l \in I_P} Y_P^l$. Sonst ist $v \notin I_P$, aber Y_P^v ist Schnitt von Facetten, d.h. $\exists l_{i_1}, \dots, l_{i_h} \in I_P \mid Y_P^v = \bigcap_{l=l_{i_1}, \dots, l_{i_h}} Y_P^l$. Und daraus: $x \in Y_P^v \subset Y_P^{l_i}$ für $l = l_{i_1}, \dots, l_{i_h}$

□

4.2 Arithmetische Operationen mittels der reduzierten Darstellung

Jetzt verfügt man über eine zweckmäßige Darstellung gerichteter Polytope. Es stellt sich nun die Frage, ob man mit ihr Berechnungen durchführen kann, und inwieweit dies möglich ist. In diesem Abschnitt werden Sätze vorgestellt, die es erlauben, die arithmetischen Operationen $+$, $-$, \cdot mittels der reduzierten Darstellung durchzuführen. Es muss nicht auf die vollständige Darstellung zurückgegriffen werden.

Unter der Anwendung einer der Operationen $+$, $-$, \cdot auf reduzierte Darstellungen versteht man die Durchführung der betrachteten Operation auf einem gewissen Index $I \subset S^{n-1}$. Die kommenden Sätze definieren die oben genannten Operationen und legen den dabei passenden Index fest. So lässt sich zum Beispiel die reduzierte Darstellung der Summe zweier gerichteter Polytope auf die Summe der einzelnen reduzierten Darstellungen zurückführen.

Während der Entstehung dieser Arbeit wurde die Entscheidung getroffen, nur Operationen mit eingebetteten gerichteten Polytopen zu betrachten, d.h. gerichtete Polytope in der Form $J_n(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, und einige Beweise von Sätzen auf die Dimension 2 zu beziehen. Der allgemeine Fall eines beliebigen $P \in \vec{\mathcal{P}}^n$ geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Darüberhinaus wird deshalb die eben erwähnte Art gerichteter Polytope betrachtet.

Die folgenden Sätze legen die Anwendbarkeit der reduzierten Darstellung fest und formalisieren gleichzeitig die Rechenregeln. Zuerst wird die Summe behandelt, gefolgt von der Multiplikation mit einer reellen Zahl.

4.2.1 Satz (Summe) *Man habe zwei gerichtete Polytope $\vec{P}, \vec{Q} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ mit $\vec{P} = J_2(P)$ bzw. $\vec{Q} = J_2(Q)$ für $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Gegeben seien entsprechende reduzierte Darstellungen:*

$$[\vec{P}|_{I_P}] = (\overline{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in I_P} \quad \text{und} \quad [\vec{Q}|_{I_Q}] = (\overline{Q_1(l)}, q_2(l))_{l \in I_Q}$$

Man setze:

- $I_R := I_P \cup I_Q$ falls \vec{P}, \vec{Q} nicht entartet;
- $I_R := I_P$ falls \vec{P} nicht entartet und \vec{Q} entartet oder beide entartet;

- $I_R := I_Q$ falls \vec{P} entartet und \vec{Q} nicht entartet;

und definiere:

$$[\vec{P}|_{I_P}] + [\vec{Q}|_{I_Q}] := (\overline{P_1(l)} + \overline{Q_1(l)}, p_2(l) + q_2(l))_{l \in I_R}$$

wobei die „Stützpaare“ $\vec{P}(u)$ bzw. $\vec{Q}(u)$ zu $u \notin I_P$ bzw. $u \notin I_Q$ auf Grund von 4.1.10 erhaltbar sind. Dann ist die obige Summe die reduzierte Darstellung von $\vec{R} := \vec{P} + \vec{Q}$ zum Index I_R , und es gilt die Beziehung:

$$[\vec{P} + \vec{Q}|_{I_R}] = [\vec{P}|_{I_P}] + [\vec{Q}|_{I_Q}]$$

Beweis: Für die Polytope $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ sei o.B.d.A. $\dim \text{aff}(P) = \dim \text{aff}(Q) = n$ (ist $n = 2$, dann folgt $k \geq 3$). Nun hat man für ein l aus der Vereinigung $I_P \cup I_Q$:

$$\begin{aligned} \vec{P}(l) + \vec{Q}(l) &= (\overline{P_{n-1}(l)} + \overline{Q_{n-1}(l)}, p_n(l) + q_n(l)) \\ &= (J_{n-1}(\Pi_{p_n}^l Y_P^l) + J_{n-1}(\Pi_{q_n}^l Y_Q^l), \delta^*(l, P) + \delta^*(l, Q)) \\ &= (J_{n-1}(\Pi_{p_n}^l Y_P^l \oplus \Pi_{q_n}^l Y_Q^l), \delta^*(l, P \oplus Q)) \\ &= (J_{n-1}(\Pi_{p_n+q_n}^l Y_P^l \oplus Y_Q^l), \delta^*(l, P \oplus Q)) \end{aligned}$$

da \vec{P} und \vec{Q} eingebettete gerichtete Polytope sind. Dabei ergeben sich die Gleichheiten in den zwei letzten Zeilen aus den Sätzen 3.1.4, 1.3.2 und 1.3.9 und aus den Eigenschaften der Projektion zusammen mit der Bemerkung 3.1.2. Man prüft jetzt die Erfüllung der Anforderungen der Definition 4.1.5 nach. Also:

1. I_R ist nach Konstruktion endlich.
2. $x \in \partial(P \oplus Q)$ impliziert die Existenz eines l_i mit $x \in Y_{P \oplus Q}^{l_i} = Y_P^{l_i} \oplus Y_Q^{l_i}$. Dabei folgt die letzte Gleichheit aus 1.3.9.
3. Nun wird die affine Dimension $d(l, \cdot)$ untersucht. Man erhält:
 - für $l \in I_P \cap I_Q$ ist aus 3) in der Definition 4.1.5 und mit Verwendung von 4.1.7:

$$\text{dmax}(\vec{P}) = \dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1 = \dim \text{aff}(Y_Q^l) = \text{dmax}(\vec{Q})$$

und daher:

$$\dim \text{aff}(Y_{P \oplus Q}^l) = \dim \text{aff}(Y_P^l \oplus Y_Q^l) = n - 1$$

- für $l \in I_P \setminus (I_P \cap I_Q)$ ist:

$$\dim \text{aff}(Y_Q^l) < n - 1 \quad \text{und} \quad \dim \text{aff}(Y_P^l) = n - 1$$

und daher:

$$\dim \text{aff}(Y_P^l \oplus Y_Q^l) = n - 1$$

- für $l \in I_Q \setminus (I_P \cap I_Q)$ geht man analog zu oben vor.
- für $l \in S^{n-1} \setminus (I_P \cup I_Q)$ ist

$$\dim \text{aff}(Y_Q^l) < n - 1 \quad \text{und} \quad \dim \text{aff}(Y_P^l) < n - 1$$

und daher

$$\dim \text{aff}(Y_P^l \oplus Y_Q^l) < n - 1$$

Daher gilt für die Dimensionen $d(\cdot, \vec{R})$:

$$\begin{aligned} d(l_j, \vec{R}) &= n - 1 \quad \forall l_j \in I_R := I_P \cup I_Q \\ d(l, \vec{R}) &< n - 1 \quad \forall l \in S^1 \setminus I_R \end{aligned}$$

und somit ist: $\text{dmax}(\vec{R}) = d(l_j, \vec{R}) = n - 1 \quad \forall l_j \in I_R$.

4. Der Satz 3.5.2 liefert: $\vec{R} = J_n(P \oplus Q)$, wobei $P \oplus Q$ wieder ein Polytop ist, und $l_j \perp Y_{P \oplus Q}^{l_j}$ gilt. Durch Verwendung von Lemma 4.1.7 auf \vec{R} erhält man dann:

$$B_2(\vec{R}) = \partial(P \oplus Q) = \bigcup_{l_j \in I_R} Y_{P \oplus Q}^{l_j} = \bigcup_{l_j \in I_R} B_n^{l_j}(\vec{R})$$

Bisher wurde also gezeigt, dass die „Stützpaare“ von \vec{R} zum Index I_R tatsächlich eine reduzierte Darstellung bilden. Zum Schluß ist:

$$\begin{aligned} [\vec{R}|I_R] &= (\overline{R_1(l_j)}, r_2(l_j))_{l_j \in I_R} \\ &= (\overline{P_1(l_j)} + \overline{Q_1(l_j)}, p_2(l_j) + r_2(l_j))_{l_j \in I_R} \\ &= [\vec{P}|I_P] + [\vec{Q}|I_Q] \end{aligned}$$

□

4.2.2 Satz (Multiplikation) Gegeben sei ein eingebettetes Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von ihm. Zu einem $\lambda \in \mathbb{R}$ setze man $I_R := I_P$, $\vec{R} := \lambda \cdot \vec{P}$ und definiere:

$$\lambda \cdot [\vec{P}|I_P] := (\lambda \cdot \overrightarrow{P_1(l)}, \lambda \cdot p_2(l))_{l \in I_R}$$

Dann gilt:

$$[\lambda \cdot \vec{P}|I_R] = \lambda \cdot [\vec{P}|I_P]$$

Beweis: Man unterscheidet die Fälle $\lambda \geq 0$ und $\lambda < 0$ und prüft die Bedingungen der Definition 4.1.5 nach:

- $\lambda \geq 0$: Aus den Voraussetzungen ist $\vec{P} = J_n(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Daraus ergibt Satz 3.1.4: $\vec{R} = J_n(\lambda \cdot P)$.

1. Der Index ist offensichtlich endlich. Für $\lambda = 0$ könnte man irgendeine Richtung betrachten.

$$2. x \in \partial(\lambda \cdot \vec{P}) \stackrel{3.1.5}{=} B_n(\lambda \cdot \vec{P}) \Rightarrow \exists l \mid x \in Y_{\lambda \cdot P}^l \stackrel{1.3.9}{=} \lambda \cdot Y_P^l$$

$$3. (a) \text{dmax}(\vec{P}) \stackrel{4.1.5}{=} \dim \text{aff}(Y_P^l) \quad \forall l \in I_R$$

(b) nun erhält man $d(l, \vec{R}) = \text{dmax}(\vec{P}) \quad \forall l \in I_P$, da es gilt:

$$\begin{aligned} d(l, \vec{R}) &= \dim \text{aff}(Y_{\lambda \cdot P}^l) \stackrel{1.3.9}{=} \dim \text{aff}(\lambda \cdot Y_P^l) = \dim \text{aff}(Y_P^l) \\ &= \text{dmax}(\vec{P}) \end{aligned}$$

(c) für $u \notin I_P$ ist dann: $\dim \text{aff}(Y_{\lambda \cdot P}^u) < \text{dmax}(\vec{P})$. Damit:

$$\text{dmax}(\vec{R}) = \text{dmax}(\vec{P}) \Rightarrow \text{dmax}(\vec{R}) = d(l, \vec{R}) \quad \forall l \in I_R$$

(d) ist $\lambda = 0$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\stackrel{3.1.4}{\Rightarrow} \vec{R} = J_n(0) \in \vec{\mathcal{P}}_0^n \\ &\Rightarrow d(l, \vec{R}) = \dim \text{aff}(Y_{\{0\}}^l) = 0 \quad \forall l \in S^{n-1} \\ &\Rightarrow d(l, \vec{R}) = 0 = \text{dmax}(\vec{R}) \quad \forall l \in I_R \end{aligned}$$

4. für den Rand erhält man:

$$\begin{aligned} \bigcup_{l \in I_R} B_n^l(\vec{R}) &\stackrel{4.1.7}{=} \bigcup_{l \in I_R} Y_R^l \stackrel{1.3.9}{=} \bigcup_{l \in I_R} \lambda \cdot Y_P^l = \lambda \cdot \bigcup_{l \in I_R} Y_P^l \\ &= \lambda \cdot B_n(\vec{P}) \stackrel{Kap.3}{=} B_n(\lambda \cdot \vec{P}) = B_n(\vec{R}) \end{aligned}$$

- $\lambda < 0$: O.B.d.A. kann man $\lambda = -1$ annehmen. Sonst setzt man $\lambda = -\mu$ mit $\mu = |\lambda| > 0$ und $\vec{Q} := \mu \vec{P}$ und verwendet dabei den vorherigen Beweis. Also $\vec{R} = -\vec{P} = -J_n(P)$.

1. Wie oben.

2. für jedes $l \in I_R$ und $x \in B_n^l(\vec{R})$ erhält man:

$$\begin{aligned} x \in B_n^l(\vec{R}) &= B_n^l(-\vec{P}) \stackrel{Kap.3}{=} \ominus B_n^l(\vec{P}) \\ &\Rightarrow -x \in B_n^l(\vec{P}) \\ &\Rightarrow l \in O_n(-x, \vec{P}) \stackrel{3.1}{=} O_n(x, -\vec{P}) = O_n(x, \vec{R}) \end{aligned}$$

3. zuerst erhält man:

$$\begin{aligned} d(l, \vec{R}) &= \dim \text{aff}(B_n^l(\vec{R})) = \dim \text{aff}(\ominus B_n^l(\vec{P})) \\ &= \dim \text{aff}(B_n^l(\vec{P})) = d(l, \vec{P}) \end{aligned}$$

und damit folgt:

$$d\max(\vec{R}) = d\max(\vec{P}) = d(l, \vec{P}) = d(l, \vec{R}) \quad \forall l \in I_R$$

4. Man erhält:

$$\begin{aligned} B_n^l(\vec{R}) &= B_n^l(-\vec{P}) = {}^*\Pi_{-p_n}^l V_{n-1}(\overline{R_{n-1}(l)}) \\ &= {}^*\Pi_{-p_n}^l [\ominus V_{n-1}(\overline{P_{n-1}(l)})] \\ &= \ominus {}^*\Pi_{p_n}^l V_{n-1}(\overline{P_{n-1}(l)}) = \ominus B_n^l(\vec{P}) \\ &\Rightarrow \bigcup_{l \in I_R} B_n^l(\vec{R}) = \bigcup_{l \in I_P} \ominus B_n^l(\vec{P}) = \ominus B_n(\vec{P}) = B_n(-\vec{P}) \end{aligned}$$

□

Nun wird die Differenz mittels der reduzierten Darstellung erläutert.

4.2.3 Satz (Differenz) Man habe zwei gerichtete Polytope $\vec{P}, \vec{Q} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ mit $\vec{P} = J_2(P)$ bzw. $\vec{Q} = J_2(Q)$ für $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Gegeben seien entsprechende reduzierte Darstellungen $[\vec{P}|I_P]$ und $[\vec{Q}|I_Q]$. Man setze:

- $I_R := I_P \cup I_Q$, falls \vec{P}, \vec{Q} nicht entartet sind;

- $I_R := I_P$, falls \vec{P} nicht entartet und \vec{Q} entartet oder beide entartet sind;
- $I_R := I_Q$, falls \vec{P} entartet und \vec{Q} nicht entartet ist;

und definiere:

$$[\vec{P}|I_P] - [\vec{Q}|I_Q] = (\overrightarrow{P_1(l)} - \overrightarrow{Q_1(l)}, p_2(l) - q_2(l))_{l \in I_R}$$

Dann enthält die obige Summe eine reduzierte Darstellung von $\vec{R} := \vec{P} - \vec{Q}$ zum Index $I \subseteq I_R$.

Beweis: Ist einer der gerichteten Polytope entartet oder sind beide entartet (zur Erinnerung: Ein gerichtetes Polytop heißt „entartet“, wenn es aus \vec{P}_0^n ist), dann liefern die Sätze 3.5.1 und 4.2.1 die Behauptung. Sind beide gerichtete Polytope nicht entartet, dann kann sich ergeben, dass $d(l, \vec{R}) < d(l, \vec{P})$ und $d(l, \vec{R}) < d(l, \vec{Q})$ für $l \in I_R$. Solche Richtungen werden im Index I nicht aufgenommen.

Man bezieht sich nun auf den 2-dimensionalen Fall. Für die Richtungen $l \in (I_P \cup I_Q) \setminus (I_P \cap I_Q)$ gilt:

$$d(l, \vec{P}) = 1, d(l, \vec{Q}) = 0 \quad \text{oder} \quad d(l, \vec{P}) = 0, d(l, \vec{Q}) = 1$$

Mit Hilfe von Satz 3.5.1 ergibt sich, dass $\overrightarrow{R_1(l)}$ ein eingebettetes Intervall $J_1(I)$ oder die Inverse $-J_1(I)$ ist, und daher ist $V_1(\overrightarrow{R_1(l)}) = I$ oder $V_1(\overrightarrow{R_1(l)}) = \ominus I$. Daraus erhält man:

$$\dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{P_1(l)} - \overrightarrow{Q_1(l)})) = 1 = d(l, \vec{R})$$

da $V_1(\overrightarrow{R_1(l)})$ immer eine Strecke ist. Für die Richtungen $l \in (I_P \cap I_Q)$ gilt $d(l, \vec{P}) = 1 = d(l, \vec{Q})$ und deswegen ergeben sich folgende zwei Fälle:

1. Ist $\overrightarrow{P_1(l)} = \overrightarrow{Q_1(l)}$, dann ist $d(l, \vec{R}) = 0$
2. Ist $\overrightarrow{P_1(l)} \neq \overrightarrow{Q_1(l)}$, erhält man mittels der Gleichung 3.2, Seite 47:

$$\overrightarrow{P_1(l)} = J_1(I_1 \dot{-} I_2) \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{P_1(l)} = -J_1(I_2 \dot{-} I_1)$$

Dies liefert in Bezug auf die Visualisierung:

$$V_1(\overrightarrow{R_1(l)}) = I_1 \dot{-} I_2 \quad \text{oder} \quad V_1(\overrightarrow{R_1(l)}) = I_2 \dot{-} I_1$$

Dabei sind I_1 und I_2 echte Intervalle aus $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. Also $B_2^l(\vec{R})$ ist eine Strecke im \mathbb{R}^2 , und daher ist $d(l, \vec{R}) = 1$.

Für die Richtungen im Durchschnitt kann sich also ergeben:

$$\dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{P_1(l)} - \overrightarrow{Q_1(l)})) = 0$$

Nun werden die Richtungen betrachtet, die nicht im Index I_R liegen:

$$\begin{aligned} l \in S^{n-1} \setminus (I_P \cup I_Q) &\Rightarrow d(l, \overrightarrow{P}) = d(l, \overrightarrow{Q}) = 0 \\ &\Rightarrow \dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{P})) = \dim \text{aff}(Y_P^l) \\ &= \dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{P})) = \dim \text{aff}(Y_P^l) = 0 \end{aligned}$$

d.h.: $\overrightarrow{P_1(l)}, \overrightarrow{Q_1(l)} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_0^1$. Damit ist $\overrightarrow{R_1(l)} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_0^1$ und $V_1(\overrightarrow{R_1(l)})$ ein Punkt im \mathbb{R} ; folglich $\dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{R})) = 0$. Also $d(l, \overrightarrow{R}) = 0$.

Man setzt:

$$I := I_R \setminus \{l \in I_R \mid \dim \text{aff}(B_2^l(\overrightarrow{P_1(l)} - \overrightarrow{Q_1(l)})) = 0\}$$

An dieser Stelle wird nicht gezeigt, dass I auch die Bedingungen 2) und 3) der Definition 4.1.5 erfüllt, weil im Beweis Aspekte einbezogen werden, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, wie formale Ausführungen ergeben haben. Auch aus diesem Grund wird der Satz im Ausblick (mit schwächeren Voraussetzungen) wiedergegeben. \square

Dieser letzte Satz erweist sich schwieriger zu beweisen als der vorherige, weil durch die Differenz zweier „Stützpaare“ mit Dimension k beziehungsweise k' ein „Stützpaar“ mit der Dimension $k'' < k, k'$ entstehen kann. In diesem Fall ist das Ergebnis in strenger Interpretation der Definition 4.1.5 keine reduzierte Darstellung mehr, da die Bedingung 3) nicht erfüllt ist. Um so eine Phänomen zu vermeiden, muss der Index geschickt ausgewählt werden, wie in den Sätzen vorgenommen wurde.

4.2.4 Satz *Es liegen $\overrightarrow{P} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^n$ und $\overrightarrow{Q} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^n$ vor. Ihre Zerlegungen als Differenz eingebetteter gerichteter Polytope seien:*

$$\overrightarrow{P} = J_n(P_1) - J_n(P_2) \quad \text{und} \quad \overrightarrow{Q} = J_n(Q_1) - J_n(Q_2) \quad (4.1)$$

mit $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Dabei seien nur die Beziehungen 4.1 und reduzierten Darstellungen $[\overrightarrow{P}_i | I_{P_i}]$ bzw. $[\overrightarrow{Q}_i | I_{Q_i}]$ von $\overrightarrow{P}_i := J_n(P_i)$ bzw. $\overrightarrow{Q}_i := J_n(Q_i)$, $i = 1, 2$

bekannt. Aus diesen reduzierten Darstellungen lassen sich dann reduzierte Darstellungen für $\vec{P} + \vec{Q}$, $\vec{P} - \vec{Q}$ und $\lambda\vec{P}$ direkt berechnen.

Beweis: Man kennt also die Beziehungen 4.1 und die oben erwähnten reduzierten Darstellungen aber nicht die gerichteten Polytope $\vec{P}_i := J_n(P_i)$ und $\vec{Q}_i := J_n(Q_i)$, $i = 1, 2$. Aus der Annahme folgen sofort die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{Q} &= J_n(P_1 \oplus Q_1) - J_n(P_2 \oplus Q_2) \\ \vec{P} - \vec{Q} &= J_n(P_1 \oplus Q_2) - J_n(P_2 \oplus Q_1)\end{aligned}$$

Man setze nun $R_{ij} := P_i \oplus Q_j$ für $i, j = 1, 2$. Aus dem Abschnitt 4.1 folgt, dass für die Minkowski-Summen $R_{ij} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ für $i, j = 1, 2$ gilt. Man berechnet reduzierten Darstellungen $[\vec{R}_{ij}|I_{R_{ij}}]$ der eingebetteten gerichteten Polytope $\vec{R}_{ij} := J_n(R_{ij})$, $i, j = 1, 2$ mittels des Satzes 4.2.1. Dadurch lässt sich $[\vec{P}|I_P] + [\vec{Q}|I_Q]$ bzw. $[\vec{P}|I_P] - [\vec{Q}|I_Q]$ auf $[\vec{R}_{1j}|I_{R_{1j}}] - [\vec{R}_{2j}|I_{R_{2j}}]$, $j = 1, 2$, zurückführen. Dabei sind die Voraussetzungen des Satzes 4.2.3 erfüllt. Analog geht man für die Multiplikation mit einer Zahl vor: Man muss aber dabei die Fälle $\lambda \geq 0$ und $\lambda < 0$ unterscheiden.

Es sei bemerkt, dass man auf Grund der Behauptung in 4.2.3 über den Index nicht unbedingt eine reduzierte Darstellung im strikten Sinn erhält. \square

4.3 Der ein- und zweidimensionale Fall

In diesem Abschnitt werden die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ behandelt, denn diese sind aus verschiedenen Gründen besonders wichtig für diese Arbeit: Erstens sind diese Fälle intuitiv (und stellen deswegen einen wichtigen Ausgangspunkt für die Entwicklung und das Verstehen der Theorie dar), und zweitens sind diese die in der Software implementierten Fälle. Während der Entstehung dieser Arbeit wurde die Entscheidung getroffen, sich auf eingebettete Polytope zu beschränken, weil viele der gestellten theoretischen Fragen über diese Arbeit hinaus gehen.

4.3.1 Der eindimensionale Fall

In dem eindimensionalen Falle ist der Begriff einer reduzierten Darstellung überflüssig, denn man hat nur zwei Richtungen in S^0 . Aus diesem Grund kann man

behaupten, dass reduzierte und vollständige Darstellung übereinstimmen: Mit einigen Anpassungen ist die Definition 4.1.5 leicht anwendbar auf die Dimension 1. Zuerst sei es bemerkt, dass $\mathcal{I}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$ und $\vec{\mathcal{P}}^1 \equiv \vec{\mathcal{C}}^1 \equiv \vec{\mathcal{D}}^1$. Für ein $\vec{A} := \overrightarrow{[\alpha_1, \alpha_2]} = (a_1(-1), a_1(+1))$ wähle man nun den index:

$$I_A := S^0 = \{-1, +1\}$$

der offensichtlich endlich ist. Das Orientierungsbündel von \vec{A} ist gleich S^0 , so dass

$$l = -1 \in O_1(\alpha_1, \vec{A}) \quad \text{und} \quad l = +1 \in O_1(\alpha_2, \vec{A})$$

ist. Die Randpunkte $\{\alpha_1\}$ und $\{\alpha_2\}$ spielen hier die Rolle der Reprojektionen: Deren affine Dimension ist gleich 0 für alle Richtungen, und genauso ist $\text{dmax}(\vec{A}) = 0$. Die Vereinigung der Randpunkte ergibt schließlich den Rand $B_1(\vec{A})$ der Visualisierung. Daraus folgt, dass:

$$[\vec{A}|I_A] = \{(a_1(l))_{l=-1,+1}\} = \vec{A}$$

ist.

4.3.2 Der zweidimensionale Fall

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion einer reduzierten Darstellung eingebetteter Polytope von der Dimension 2 erläutert. Drei wesentliche Fälle sind zu unterscheiden: „Punkt“, „Strecke“ und „Polytop mit mindestens 3 Ecken“.

Punkt

Man habe einen Punkt $\{p\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und bette ihn in $\vec{\mathcal{D}}^2$ ein. \vec{P} bezeichne den eingebetteten Punkt. Eine (minimale) reduzierte Darstellung des gerichteten Polytops \vec{P} wird erhalten, indem eine beliebige Richtung zusammen mit ihren zugehörigen „Stützpaaren“ ausgewählt wird. Sie erfüllt tatsächlich Definition 4.1.5, was im Folgenden gezeigt wird.

4.3.1 Satz Sei $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}_0^2$ mit $\vec{P} = J_2\{p\}$. Man wähle eine beliebige Richtung l aus S^1 . Dann ist $[\vec{P}|l]$ eine (minimale) reduzierte Darstellung von \vec{P} .

Beweis: Die Indexmenge $I_P = \{l\}$ ist offensichtlich endlich, so ist die erste Anforderung in der Definition erfüllt. Anwendung vom Lemma 3.1.8 liefert:

$$Y_{\{p\}}^l = \{p\} \quad \overrightarrow{P_1(l)} = J_1(\Pi_{a_2}^l Y_{\{p\}}^l) \quad p_2(l) = \delta^*(l, \{p\}) = \langle l, p \rangle$$

und dann (unter Verwendung des Lemmas 2.3.3):

$$\begin{aligned} V_1(\overrightarrow{P_1(l)}) &= \Pi_{a_2}^l Y_{\{p\}}^l = \langle l^\perp, p \rangle \\ B_2^l(\overrightarrow{P}) &= {}^* \Pi_{a_2}^l V_1(\overrightarrow{P_1(l)}) \\ &= {}^* \Pi_{a_2}^l \Pi_{a_2}^l Y_{\{p\}}^l \\ &= Y_{\{p\}}^l = p \end{aligned}$$

Daher ist

$$x \in B_2^l(\overrightarrow{P}) = \{p\} \iff x = p$$

also $l \in O_2(p, \overrightarrow{P})$. Die maximale Dimension von \overrightarrow{P} ist null:

$$\begin{aligned} d(u, \overrightarrow{P}) &= \dim \text{aff}(B_2^u(\overrightarrow{P})) = 0 \quad \forall u \in S^1 \\ &\Rightarrow \text{dmax}(\overrightarrow{P}) = 0 \\ &\Rightarrow d(l, \overrightarrow{P}) = 0 \end{aligned}$$

Schließlich folgt, weil 3.1.5 $B_2(\overrightarrow{P}) = \{p\}$ liefert: $\bigcup_{l \in I_P} B_2^l(\overrightarrow{P}) = \{p\}$ □

Strecke

4.3.2 Satz Ist $\overrightarrow{P} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$ von der Form $\overrightarrow{P} = J_2(P)$ mit $P := \text{co}\{p_1, p_2\}$, erhält man eine (minimale) reduzierte Darstellung, indem man die „Stützpaare“ zu der Richtung $l := \frac{(p_2 - p_1)^\perp}{\|p_2 - p_1\|}$ oder $-l$ nimmt. Anders ausgedrückt ergeben die Indizes $I_P := \{l\}$ bzw. $J_P := \{-l\}$ eine minimale reduzierte Darstellungen des gerichteten Polytops \overrightarrow{P} .

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass beide gewählten Richtungen normal zu P sind. Die Indexmengen $\{l\}$ bzw. $\{-l\}$ sind offensichtlich endlich, also ist die erste Bedingung in der Definition erfüllt. Mit Hilfe vom Lemma 3.1.8 stellt man auch die Gültigkeit der Anforderung 2) fest:

$$x \in B_2^l(\overrightarrow{P}) \implies l \in O_2(x, \overrightarrow{P})$$

und ganz analog für $-l$. Da \vec{P} ein eingebettetes Polytop ist, folgt aus Lemma 1.3.15 und Lemma 1.3.16 :

$$B_2^l(\vec{P}) = \text{co}\{p_1, p_2\} \quad \text{und} \quad B_2^{-l}(\vec{P}) = \text{co}\{p_1, p_2\}$$

so dass $d(l, \vec{P}) = d(-l, \vec{P}) = 1$. Nun ist für die Richtungen $u \notin \{l, -l\}$ anhand vom Lemma 1.3.16 : $d(u, \vec{P}) = 0$. Damit hat man:

$$\text{dmax}(P) = 1 = d(l, \vec{P}) = d(-l, \vec{P})$$

Lemma 1.3.16 ergibt:

$$\bigcup_{l \in I_P} B_2^l(\vec{P}) = \text{co}\{p_1, p_2\} = \partial P = B_2(\vec{P})$$

und so ist Punkt 4) erfüllt. □

Polytop mit mindestens 3 Ecken

4.3.3 Satz *Es liege ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(P) := \{p_{l_1}^{l_1}, \dots, p_{l_k}^{l_k}\}$ und $k \geq 3$ vor. Dabei gelten die im Abschnitt 3.6.2 eingeführte Bezeichnungen. Man erhält eine (minimale) reduzierte Darstellung von $\vec{P} := J_2(P) \in \vec{\mathcal{P}}^2$, indem man die „Stützpaare“ zu den äußeren Normalen l_j für $j = 1, \dots, k$ betrachtet. Dies bedeutet, dass*

$$[\vec{P}|_{I_P}] \quad \text{mit} \quad I_P := \{l_j \mid j = 1, \dots, k\}$$

eine (minimale) reduzierte Darstellung von \vec{P} ist.

Beweis: Der Index I_P ist nach Konstruktion endlich. Nach Lemma 1.3.15 und 4.1.7 ist:

$$B_2^{l_j}(\vec{P}) = Y_P^{l_j} = \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\}$$

und daher:

$$\bigcup_{l_j \in I_P} B_2^{l_j}(\vec{P}) = \bigcup_{l_j \in I_P} Y_P^{l_j}$$

Außerdem gilt:

$$\bigcup_{l_j \in I_P} Y_P^{l_j} = \bigcup_{l \in S^1} Y_P^l$$

Nach Lemma 1.3.17 ist Y_P^l extremal; Y_P^l ist entweder eine Kante, und daher $l \in I_P$, oder eine Ecke. Dies ergibt zusammen mit Anwendung von Lemma 1.3.18 mit

$$\bigcup_{l \in S^1} Y_P^l = \partial P$$

und wegen $\vec{P} = J_n(P)$, dass $\partial P = B_2(\vec{P})$. Also gelten die folgende Gleichungen:

$$\bigcup_{l_j \in I_P} B_2^{l_j}(\vec{P}) = \bigcup_{j=1}^k \text{co}\{p_{l_{j-1}}^{l_j}, p_{l_j}^{l_{j+1}}\} = \partial P = B_2(\vec{P})$$

Also ist die vierte Bedingung erfüllt. Nun zur Dritten. Da aus Lemma 4.1.7 $B_2^l(\vec{P}) = Y_P^l$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(l, \vec{P}) &= 0 \quad \forall l \notin I_P \\ d(l_j, \vec{P}) &= 1 \quad \forall l_j \in I_P \end{aligned}$$

Demnach hat man $d(l_j, \vec{P}) = \text{dmax}(\vec{P}) \quad \forall l_j \in I_P$. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch Anforderung 2) gilt. Dies ergibt sich durch Anwendung vom Lemma 3.1.8. \square

4.4 Ausblick

Dieser Abschnitt verschafft einen Überblick auf noch offene theoretische Fragen, deren Antwort zum großen Teil über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Die Stellung dieser Fragen führt zu Vermutungen: Man versucht im Folgenden sie auch zu rechtfertigen. Dabei hat man auf formale Ausführungen in einigen Fällen verzichten müssen. Diese Vermutungen werden im Folgenden als „Hypothese“ bezeichnet: Man möchte sie beweisen oder Gegenbeispiele dafür finden. Unter „Bezeichnungen“ werden Vorschläge für Definitionen dargestellt.

Die Visualisierung $V_n(\vec{P})$ eines $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ besteht beispielsweise, wenn das Orientierungsbündel nicht betrachtet wird, aus einem Polytop im \mathbb{R}^n . Wenn man sich auf geometrische Eigenschaften der $B_n^l(\vec{P})$, die Teilmengen von $V_n(\vec{P}) \in \mathbb{R}^n$ sind, beziehen will, ist es nützlich, über eine zweckmäßige Sprechweise zu verfügen. Mit dieser Motivation werden Begriffe wie Ecken, Kanten, Facetten und normale Richtungen eines Polytops im \mathbb{R}^n auf gerichtete Polytope verallgemeinert. Dafür bezieht

man sich auf die reprojizierte $(n - 1)$ -dimensionalen Visualisierung der „Stützpaar“, d.h. die $B_n^l(\vec{P})$, deren Vereinigung den Rand der Visualisierung bildet, und wendet dort die für Polytope schon bestehenden Definitionen an.

4.4.1 Bezeichnung Sei \vec{P} ein gerichtetes Polytop aus $\vec{\mathcal{P}}^n$. Ein „Stützpaar“ $\vec{P}(l) = (\overrightarrow{P_{n-1}(l)}, p_n(l))$ heißt eine Ecke, falls $d(l, \vec{A}) = 0$ ist, eine Kante, falls $d(l, \vec{A}) = 1$. Es heißt eine Facette, falls $d(l, \vec{A}) = \max\{\dim \text{aff}(V_n(\vec{A})), n - 1\}$ (im allgemeine $\neq n - 1$) ist. Eine Richtung $u \in S^{n-1}$ heißt normal zu dem Stützpaar $\vec{P}(l)$, falls sie normal zur Reprojektion $B_n^l(\vec{P})$ ist.

Wichtig ist zu untersuchen, inwieweit eine reduzierte Darstellung die wesentliche Information über ein gerichtetes Polytop enthält und zwar, inwieweit die Zuordnung einer reduzierten Darstellung einem \vec{P} geht. Folgende Hypothese untersucht die Beziehung zwischen einem \vec{P} und einer zugehörigen $[\vec{P}|I_P]$. Die Hypothese 4.4.2 bzw. 4.4.3 bezieht sich auf den Satz 4.1.12 bzw. 4.1.13.

4.4.2 Hypothese (Eindeutigkeit) Sei eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ eines gerichteten Polytops $P \in \vec{\mathcal{P}}^n$ gegeben. Für ein $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^n$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{A_{n-1}(l_i)} = \overrightarrow{P_{n-1}(l_i)} \quad \text{und} \quad a_n(l_i) = p_n(l_i) \quad \forall l_i \in I_P$$

und

$$V_n(\vec{A}) = V_n(\vec{P})$$

genau dann, wenn $\vec{A} = \vec{P}$.

Laut der Definition 2.1.1 einer gerichteten Menge ist eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ die Einschränkung der Funktion $\vec{P}(\cdot)$ zu $I_P \subset S^{n-1}$. Die obige Hypothese lässt sich dadurch wie folgt umformulieren.

4.4.3 Hypothese (Fortsetzung) Sei $[\vec{P}|I_P]$ eine reduzierte Darstellung von $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte gleichmäßig beschränkte Fortsetzung von:

$$\overrightarrow{P_{n-1}(\cdot)} : I_P \longrightarrow \vec{\mathcal{D}}^{n-1}, \quad l \mapsto \overrightarrow{P_{n-1}(l)}$$

und eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von:

$$p_n(\cdot) : I_P \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l \mapsto p_n(l)$$

auf ganz S^{n-1} .

Die folgende zwei Hypothese stellen eine Verallgemeinerung einiger Sätze dar, die in den vorkommenden Abschnitten für eingebettete gerichtete Polytope bewiesen wurden.

4.4.4 Hypothese *Es liege eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$. Dann lässt sich die vollständige Darstellung rekonstruieren.*

4.4.5 Hypothese *Der Satz 4.2.1, der Satz 4.2.2 und der Satz 4.2.3 gelten auch für allgemeine gerichtete Polytope $\vec{P}, \vec{Q} \in \vec{\mathcal{P}}^n$.*

Man möchte die in $\vec{\mathcal{D}}^n$ definierte Norm (Siehe 2.1.1) mittels einer reduzierten Darstellung ermitteln, um zum Beispiel gerichtete Polytope zu vergleichen. Die folgende Hypothese gilt leider im Allgemeinen nicht.

4.4.6 Hypothese (Norm) *Sei $P \in \vec{\mathcal{P}}^n$ und liege eine zugehörige reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ vor. Dann gilt:*

$$\|\vec{P}\| = \|[\vec{P} | I_P]\|$$

Dabei setzt man:

$$\|[\vec{P} | I_P]\| := \max\left\{ \sup_{l \in I_P} \|\overrightarrow{P_{n-1}(l)}\|_{n-1}, \max_{l \in I_P} |p_n(l)| \right\}$$

Als Gegenbeispiel zu 4.4.6 betrachtet man das eingebettete gerichtete Polytop $\vec{P} := J_2([-1, 1]^2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$. Eine reduzierte Darstellung ergibt sich, wenn man den Index:

$$I_P := \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$$

betrachtet. Da $|p_2(l)| = 1$ für alle $l \in I_P$ aber $|p_2(l)| = \sqrt{2}$ für z.B. $u := \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} \notin I_P$ hält die Hypothese 4.4.6 nicht: Dabei ist es sogar ausreichend, nur eine Richtung zu berücksichtigen.

Im Folgenden werden noch einige weitere Fragen von möglichem theoretischen Interesse aufgelistet.

1. In den meisten Beweisen der vorangegangenen Abschnitte stellt man ziemlich leicht die Gültigkeit der Bedingung 2) der Definition 4.1.5 fest. Ist diese Bedingung vielleicht sogar überflüssig?

2. Welche geometrische Eigenschaften besitzt der Rand einer Visualisierung? Ist er z.B. eine orientierbare Differentialmannigfaltigkeit für eingebetteten gerichteten Polytope?
3. Ist der Rand als mengenwertige Funktion $B_n(\vec{P}) : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n : l \mapsto B_n^l$ oberhalb stetig? Bleibt sie nach der Durchführung von arithmetischen Operationen oberhalb stetig?

Die Menge S^{n-1} kann mit einer Halbordnung versehen werden, ähnlich wie es im Abschnitt 3.6.1 mit S^1 gemacht wurde. Diese Ordnung induziert dann die Anordnung der Richtung im Index I_A , und auch die entsprechende Stützpaaren einer reduzierten Darstellung sind dadurch geordnet. Die „Stützpaaren“, die „benachbarten“ Richtungen entsprechen, werden als benachbart bezeichnet:

4.4.7 Bezeichnung (benachbarte Stützpaare) Ein gerichtetes Polytop $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ und eine zugehörige reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ liegen vor. Die Richtungen im Index I_P seien bezüglich einer Halbordnung (S^{n-1}, \leq) angeordnet. Zwei „Stützpaare“ $\vec{P}(l_1)$ und $\vec{P}(l_2)$ heißen benachbart, falls:

1. es keine andere Richtung $l \in I_P$ gibt mit $l_1 \leq l \leq l_2$
2. $B_n^{l_1} \cap B_n^{l_2} \neq \emptyset$

Nun wird der zweidimensionale Fall untersucht. Man betrachte ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(P) := \{p_{l_1}^{l_2}, \dots, p_{l_k}^{l_1}\}$ und $k \geq 3$ (es gelten die im Abschnitt 3.6.2 eingeführten Bezeichnungen), brette es in $\vec{\mathcal{D}}^2$ ein und berechne eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von ihm. Dabei sind die Richtungen im Index I_P angeordnet bezüglich der Kreisanordnung auf S^1 . Man nehme zwei im Index benachbarte Richtungen l_i und l_{i+1} . Für sie gelten die folgenden Bedingungen:

1. $l_i < l_{i+1}$
2. $\nexists l_j \in I_P \mid l_i < l_j < l_{i+1}$

Zu diesen Richtungen erhält man den Bezeichnungen nach:

$$B_2^{l_i} = \text{co}\{p_{l_{i-1}}^{l_i}, p_{l_i}^{l_{i+1}}\}$$

$$B_2^{l_{i+1}} = \text{co}\{p_{l_i}^{l_{i+1}}, p_{l_{i+1}}^{l_{i+2}}\}$$

Die folgenden Hypothesen beziehen sich auf die obige Ausführung.

4.4.8 Hypothese Aus der Anordnung der Richtungen ergibt sich eine Anordnung der Kante, so dass folgende Implikation hält:

$$l_i < l_{i+1} \Rightarrow B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} \neq \emptyset \quad (4.2)$$

Ist $[\vec{P}|I_P]$ minimal, dann gilt auch:

$$B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = B_2^l = p_{l_i}^{l_{i+1}} \quad \forall l \in (l_i, l_{i+1}) \quad (4.3)$$

Man fragt sich, für welche Kategorien von Elementen aus $\vec{\mathcal{P}}^2$ die Implikation 4.2 erfüllt ist, und ob eine zu 4.3 ähnliche Beziehung gilt.

4.4.9 Hypothese Für ein $\vec{P} = \pm J_2(P)$ mit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und eine zugehörige reduzierte Darstellung gilt die Beziehung 4.2.

4.4.10 Bemerkung Es lässt sich auf Grund der gleichmäßigen Beschränktheit der ersten Komponente und der Stetigkeit der zweiten Komponente einer gerichteten Menge vermuten, dass die Implikation 4.2 auch im Allgemeinen gilt. Das Bild 4.1 zeigt aber ein Beispiel dafür, dass 4.2 nicht gültig ist. Eine wesentliche Frage dabei ist aber, ob es ein gerichtetes Polytop $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ existieren kann, dessen Rand (betrachtet zusammen mit dem Orientierungsbündel) so aussieht. Dabei erinnere man sich daran, dass bei der Definition von $\vec{\mathcal{D}}^2$ die lineare Hülle gebildet wird, und nicht die abgeschlossene lineare Hülle.

Man beachte, dass das Bild 4.1 nicht den Rand der Visualisierung einer Differenz eingebetteter gerichteter Polytope wiedergibt, sondern es wurde durch Anwendung des Algorithmus A.0.17 zur Einbettung auf ein nicht-konvexes Polygon erzeugt. Deswegen ist zu untersuchen, ob tatsächlich eine solche Visualisierung zu Stande kommen kann.

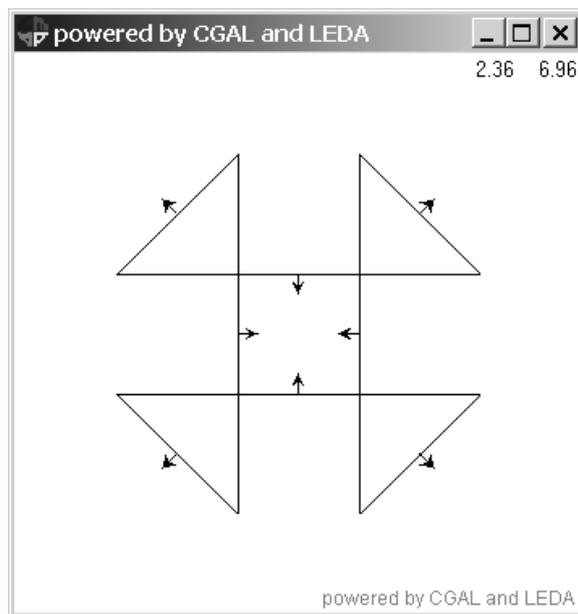


Abbildung 4.1: Die Beziehung 4.2 verliert an Gültigkeit.

4.4.11 Bezeichnung (Anordnung der Kanten) Man habe eine minimale reduzierte Darstellung $[\vec{P} | I_P]$ eines gerichteten Polytops $\vec{P} \in \vec{\mathcal{D}}^2$. Die Kanten $B_2^{l_i}$ und $B_2^{l_j}$ zu zwei Richtungen $l_i, l_j \in I_P$ heißen benachbart, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$B_2^{l_i} \cap B_2^{l_j} \neq \emptyset$$

Dabei sei der Durchschnitt gleich der Menge $\{p\}$. Für die zwei benachbarten Kanten $B_2^{l_i}$ und $B_2^{l_j}$ sei:

$$\begin{aligned} B_2^{l_i} &= \text{co}\{p_1, p_2\} = \text{co}\{p_1, p\} \\ B_2^{l_j} &= \text{co}\{q_1, q_2\} = \text{co}\{p, q_2\} \end{aligned}$$

Man definiere eine Anordnung zweier benachbarter Kanten folgendermaßen:

$$B_2^{l_i} \prec B_2^{l_j} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \overrightarrow{p_1 q_1} = \overrightarrow{p_1 p_2} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{p_2 q_2} = \overrightarrow{q_1 q_2} \\ l_i^\perp = \alpha \cdot \overrightarrow{p_1 p} \quad \text{und} \quad l_j^\perp = \beta \cdot \overrightarrow{p q_2} \end{cases} \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0$$

oder alternativ folgendermaßen:

$$B_2^{l_i} \prec B_2^{l_j} \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{\overrightarrow{p_1 p}}{\|\overrightarrow{p_1 p}\|} < \frac{\overrightarrow{p q_2}}{\|\overrightarrow{p q_2}\|}$$

4.4.12 Bemerkung Man achte darauf, dass $l \notin I_P \Rightarrow d(l, \vec{P}) = 0 \Rightarrow \vec{P}(l) \in \vec{\mathcal{P}}_0^2$.

4.4.13 Bemerkung Die im Anhang präsentierten Algorithmen funktionieren unter der Annahme:

$$l_i < l_{i+1} \Rightarrow B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} \neq \emptyset$$

Für den Fall, dass sie nicht hält, müsste man zuerst die „Stützpaare“ in einer reduzierten Darstellung in der Art anordnen, dass die zugehörigen Kanten sich als benachbarte erweisen.

4.4.14 Hypothese Ist $\vec{P} = \pm J_2(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, dann gilt die folgende Implikation:

$$l_i < l_{i+1} \Rightarrow B_2^{l_i} \prec B_2^{l_{i+1}}$$

für zwei benachbarten Richtungen $l_i, l_{i+1} \in I_P$. Also gilt die Implikation in 4.2.

4.4.15 Hypothese Gegeben seien ein $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ und eine zugehörige minimale reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$. Man betrachte zwei benachbarte Richtungen $l_1, l_2 \in I_P$ und nehme an, es gelte für sie:

$$B_2^{l_1} \cap B_2^{l_2} \neq \emptyset$$

Folgenden Beziehungen lassen sich dann zeigen:

1. $*\Pi_{a_2}^l(V_1(\overrightarrow{P_1(l_1)}) \cap V_1(\overrightarrow{P_1(l_2)})) = B_2^{l_1} \cap B_2^{l_2} = B_2^l \quad \forall l \in (l_1, l_2)$. Dabei ist $B_2^l = \mathcal{H}^{l_1} \cap \mathcal{H}^{l_2}$ und ergibt sich daher als Lösung \mathbf{x} des folgenden Lineargleichungssystems:

$$\begin{cases} \langle l_1, \mathbf{x} \rangle = p_2(l_1) \\ \langle l_2, \mathbf{x} \rangle = p_2(l_2) \end{cases}$$

2. $B_2^{l_1} \cup B_2^{l_2} = \bigcup_{l \in [l_1, l_2]} B_2^l$

3. $\overrightarrow{P_1(l)} \in \vec{\mathcal{P}}_0^2$

Das Intervall (l_1, l_2) bzw. $[l_1, l_2]$ in 1) bzw. 2) muss durch ein Intervall $(u_1, u_2) \subseteq (l_1, l_2)$ bzw. $[u_1, u_2] \subseteq [l_1, l_2]$ ersetzt werden, falls Fälle wie die im Bild 4.1 gezeigt, vorkommen dürfen.

Kapitel 5

Anwendungsbeispiele

Dieses Kapitel schließt nach dem vorausgegangenen theoretischen Teil die Lücke zur praktischen Anwendung und präsentiert Beispiele, die mit dem zuvor entwickelten Verfahren und der Software erstellt wurden. Polytope des \mathbb{R}^2 werden eingebettet, Operationen durchgeführt und schließlich werden die entsprechenden Visualisierungen erzeugt und gezeigt. Jedes Beispiel besteht aus einer mathematischen Aufgabe und Bildern der erzeugten Visualisierungen. Für einige besonders interessante Beispiele wird auch der Quellcode des einprogrammierten Beispiels und die berechnete reduzierte Darstellung explizit angegeben.

Es soll erwähnt werden, dass alle Rechnungen mit Genauigkeit *double* ausgeführt wurden.

Das „scaling“ der Bilder musste je nach Bild angepasst werden (durch den Parameter *framedefault* in der Klasse *VisualizationStream*) und entspricht deswegen nicht unbedingt einem Maßstab.

Die Bilder beziehen sich auf den Rand der Visualisierung zusammen mit dem „reduzierten“ Orientierungsbündel. Dies besteht aus den Richtungen, die in der reduzierten Darstellung aufgenommen werden.

Die Werte in den Tabellen wurden ebenfalls mit der Software berechnet und erzeugt: Die reduzierte Darstellung (gekapselt in der Klasse *DirectedPolytop2*) sind in *ASCII*-Dateien abspeicherbar. Zur Verfügung stehen die Formate *csv* (*comma separated values*) Dateien lassen sich leicht in Anwendungen wie *Excel* oder *StarOffice* importieren) und *tex* (in diesem Fall wird eine \LaTeX Tabelle erzeugt).

5.1 Punkt und Strecke

Man betrachtet den Punkt $P = (3, 2)$ und die Strecke $Q = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}$ und bettet die beide Mengen ein. Man erhält entsprechend die gerichteten Polytope: $\vec{P} = J_2(P)$ und $\vec{Q} = J_2(Q)$. Deren Summe $\vec{R} := \vec{P} + \vec{Q}$ und deren Differenz $\vec{S} := \vec{P} - \vec{Q}$ wird mittels der reduzierten Darstellung berechnet. Die Visualisierungen von \vec{R} und \vec{S} werden erzeugt und gezeichnet. Eine graphische Darstellung dieser Visualisierungen sieht man im Bild 5.1. Aus dem Bild wird deutlich, wie die Summe oder die Differenz von \vec{P} mit einem gerichteten Punkt eine Verschiebung der Visualisierung $V_2(\vec{P})$ bewirkt.

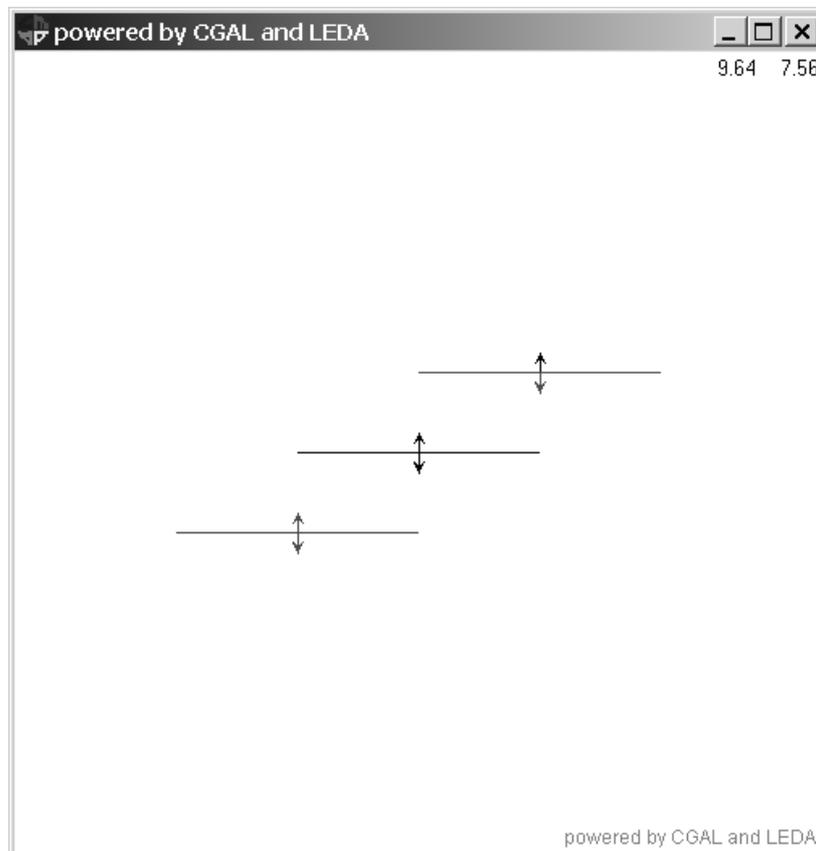


Abbildung 5.1: $V_2(\vec{Q})$ erscheint in der Mitte in schwarz. $V_2(\vec{R})$ ist oben in grau. $V_2(\vec{S})$ befindet sich unten in grau.

5.2 Summe und Differenz zweier eingebetteter Strecken

Man habe die zwei eingebetteten Strecken \vec{P} und \vec{Q} aus $\vec{\mathcal{D}}^2$ mit $P = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}$ bzw. $Q = \text{co}\{(0, -1), (0, 1)\}$. Für \vec{P} erhält man die folgende (nicht minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$:

i	l_i	$\overrightarrow{P_{2-1}(l_i)}$	$p_2(l_i)$
0	(0, 1)	(1, 1)	0
1	(0, -1)	(1, 1)	0

und für \vec{Q} erhält man die (nicht minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{Q}|I_Q]$ mit den Werten:

i	l_i	$\overrightarrow{Q_{2-1}(l_i)}$	$q_2(l_i)$
0	(1, 0)	(1, 1)	0
1	(-1, 0)	(1, 1)	0

Die (minimale) reduzierte Darstellung für die Summe \vec{R} ergibt sich zu:

i	l_i	$\overrightarrow{R_{2-1}(l_i)}$	$r_2(l_i)$
0	(1, 0)	(1, 1)	1
1	(0, 1)	(1, 1)	1
2	(-1, 0)	(1, 1)	1
3	(0, -1)	(1, 1)	1

Für die Differenz \vec{S} erhält man die folgende (minimale) reduzierte Darstellung:

i	l_i	$\overrightarrow{S_{2-1}(l_i)}$	$s_2(l_i)$
0	(1, 0)	(-1, -1)	1
1	(0, 1)	(1, 1)	-1
2	(-1, 0)	(-1, -1)	1
3	(0, -1)	(1, 1)	-1

Das Bild 5.2 bzw. 5.3 zeigt den Rand der Visualisierung von \vec{R} bzw. \vec{S} .

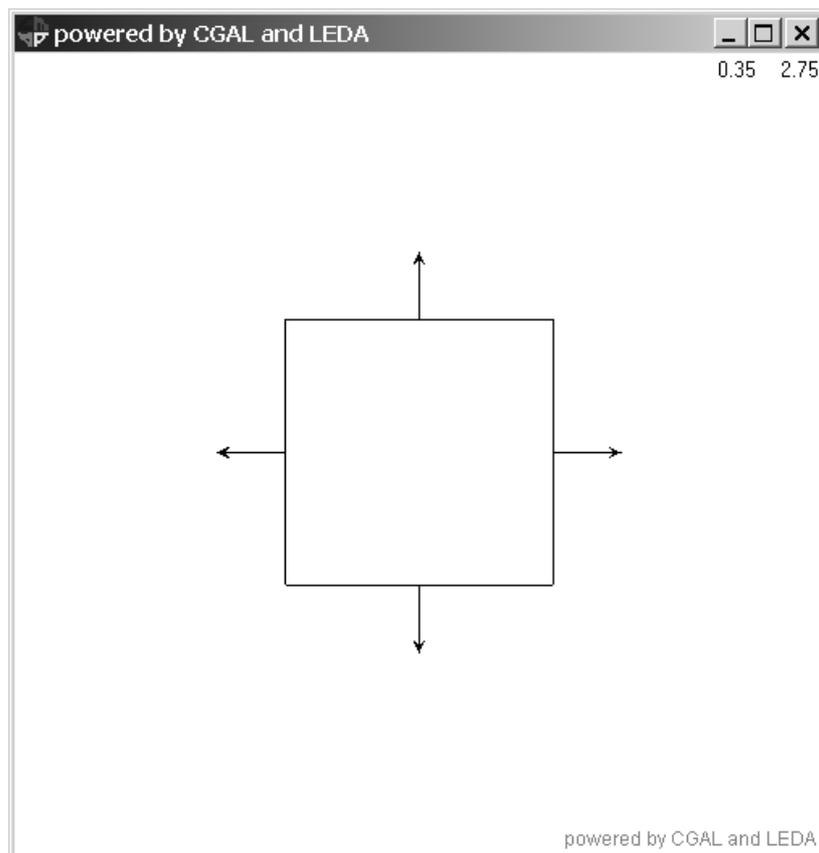


Abbildung 5.2: Rand der Visualisierung von \vec{R} .

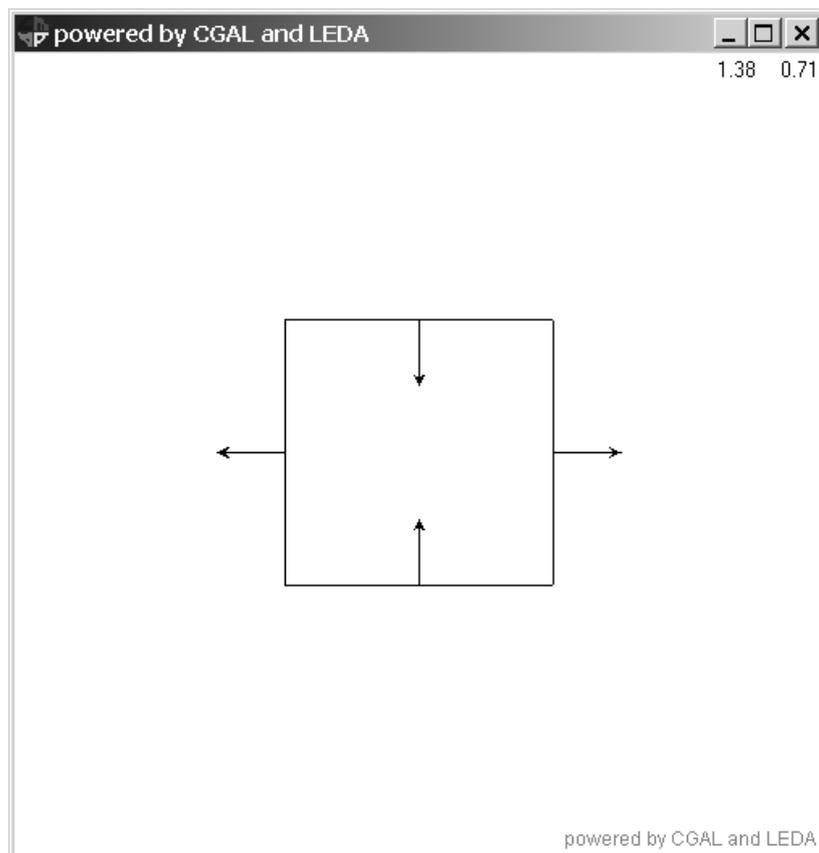


Abbildung 5.3: Rand der Visualisierung von \vec{S} .

5.3 Strecke und Quadrat

Die gerichteten eingebetteten Polytope aus dem Raum $\vec{\mathcal{D}}^2$ dieses Beispiels:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= J_2(P) \quad \text{mit} \quad P = J_2([-1, 1]^2) \\ \vec{Q} &= J_2(Q) \quad \text{mit} \quad Q = \text{co}\{(-1, -1), (1, 1)\}\end{aligned}$$

liefern für den Rand der Visualisierung deren Summe und deren Differenz die Bilder 5.4 und 5.5.

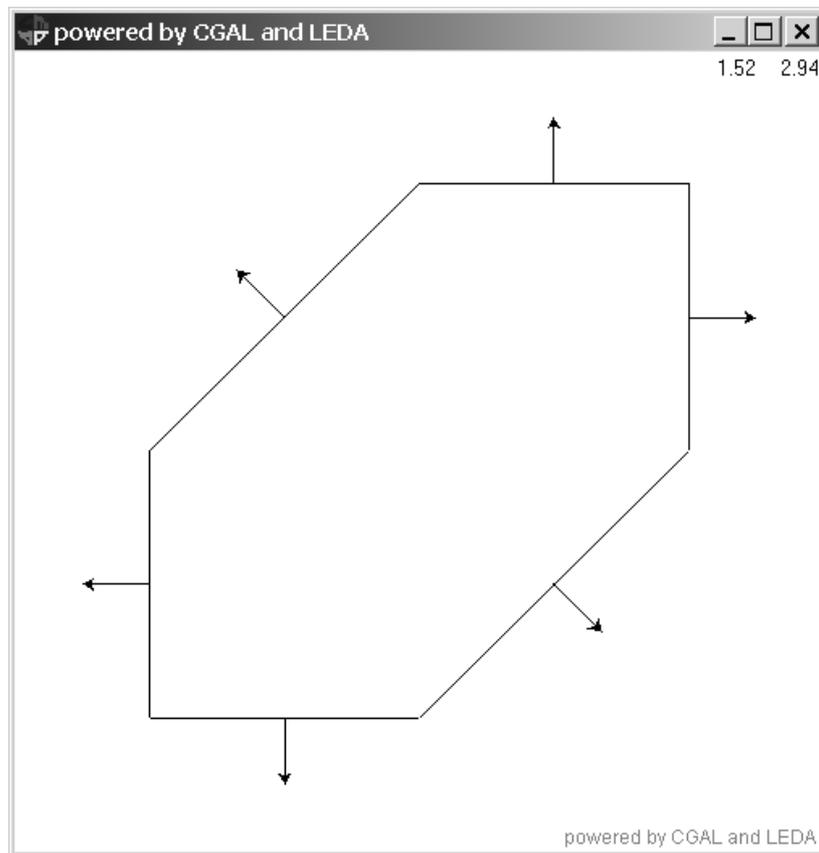


Abbildung 5.4: Rand der Summe $\vec{P} + \vec{Q}$.

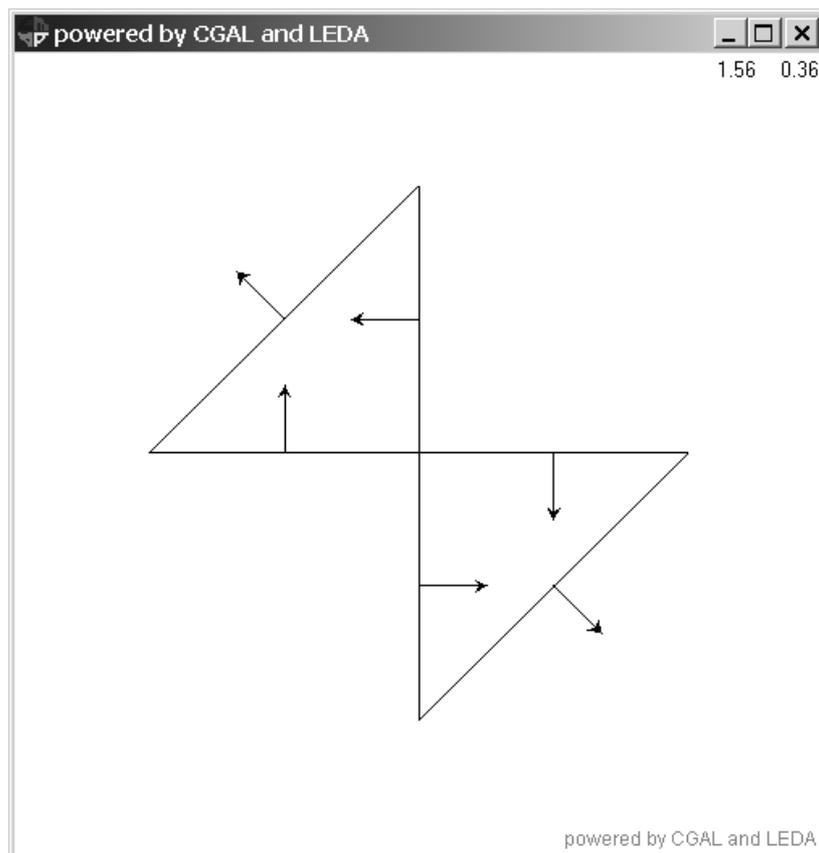


Abbildung 5.5: Rand der Differenz $\vec{P} - \vec{Q}$.

5.4 Summe und Differenz eines Quadrates mit einem Dreieck

Polytope mit affinen Dimension 2, d.h. mit mindestens drei Ecken, ergeben eine komplexere Visualisierung als diejenige, die bisher betrachtet wurden.

Nun möchte man mit diesem Beispiel eine Vorstellung übermitteln, wie die Differenz zweier gerichteten Polytope aussehen kann. Zu diesem Zweck werden die Polytope

$$P = \text{co}\{(0.5, 0.5), (-0.75, 0.5), (-0.75, -0.75), (0.5, -0.75)\}$$

$$Q = \text{co}\{(-0.5, -0.6), (1.5, -0.3), (0.6, 1)\}$$

betrachtet. Ihre Einbettungen $\vec{P} = J_2(P)$ und $\vec{Q} = J_2(Q)$ liefern für die Ränder der Visualisierung das Bild 5.6. Die Summe $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ ist zusammen mit der Differenz $\vec{R} = \frac{2}{3}\vec{P} - \frac{3}{2}\vec{Q}$ im Bild 5.7 visualisiert.

5.5 Parameterabhängige arithmetische Operationen

5.5.1 Ein erstes Beispiel

Nun beschäftigt man sich mit einem ausführlichen Beispiel. Neben den Bildern werden für einige Fälle auch die berechnete reduzierte Darstellungen explizit angegeben. Auch das Programm zur Erzeugung der betrachteten eingebetteten Polytope und der entsprechenden Visualisierungen wird angegeben und kurz beschrieben. Man will so erklären wie die programmierte Software einsetzbar ist, und welche Mittel sie zur Verfügung stellt. Gegeben seien also die folgenden zwei Polytope aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$:

$$P = [-1, 1]^2$$

$$Q_m = \text{co}\left\{\left(\cos \frac{2\pi k}{m}, \sin \frac{2\pi k}{m}\right) \mid k = 0, \dots, m-1\right\}$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ die vorgegebene Anzahl der Kanten von Q_m darstellt. Man setze entsprechend $\vec{P} := J_2(P)$ und $\vec{Q}_m := J_2(Q_m)$ für die eingebetteten gerichteten Polytope, und berechne dann (minimale) reduzierte Darstellungen für \vec{P}

$$[\vec{P}|I_P] = [\vec{P}|l_1, \dots, l_4]$$

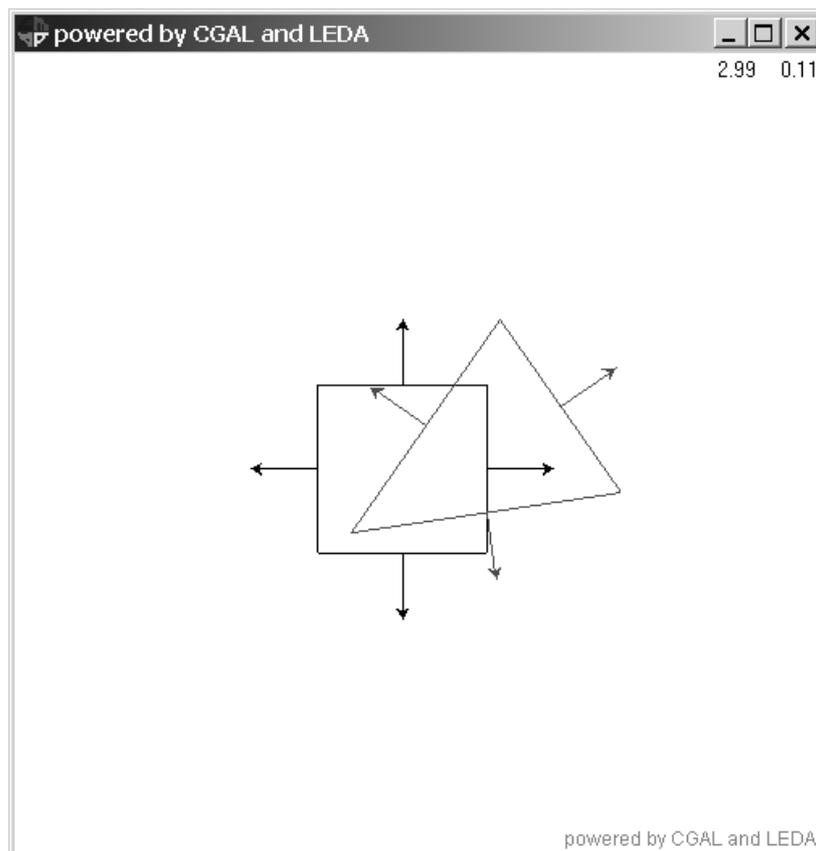


Abbildung 5.6: Rand von \vec{P} in schwarz und von \vec{Q} in grau.

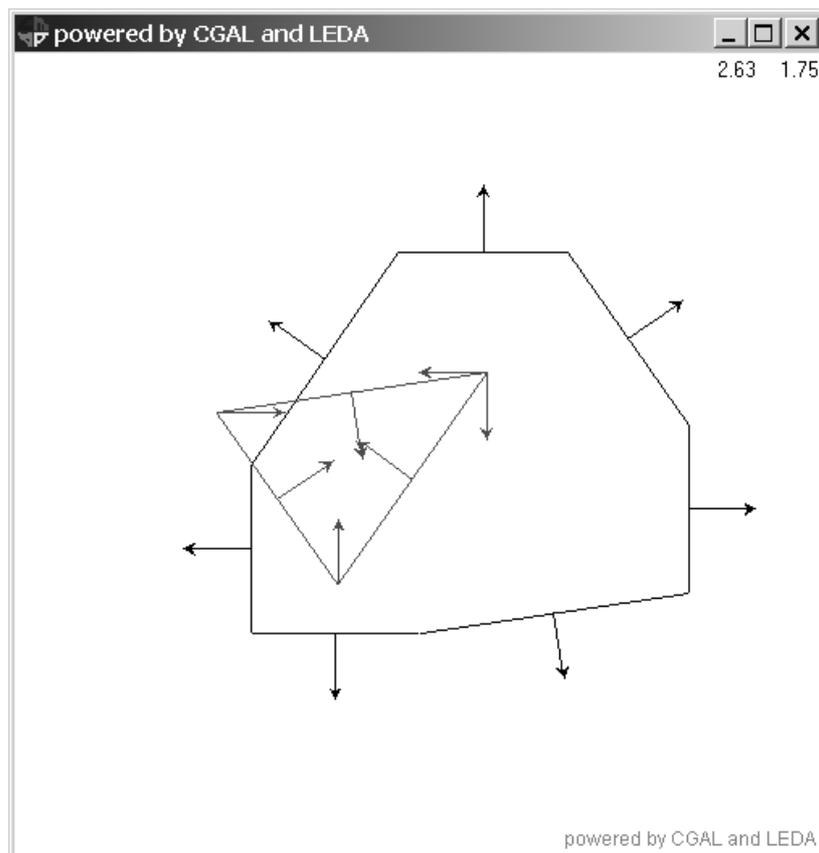


Abbildung 5.7: Rand von \vec{R} erscheint in schwarz. Rand von \vec{S} ist in grau.

und für \vec{Q}

$$[\vec{Q}_m | I_{Q_m}] = [\vec{Q}_m | u_1, \dots, u_m]$$

Mittels dieser führt man dann die arithmetischen Operationen $\vec{R} := \vec{P} + \lambda \cdot \vec{Q}_m$ und $\vec{S} := \vec{P} - \lambda \cdot \vec{Q}_m$ zu verschiedenen Werten der Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$. Die reduzierten Darstellungen ermöglichen auch die Erzeugung der Rändern $B_2(\vec{P})$ und $B_2(\vec{Q}_m)$.

Das folgende Programm dient der Berechnung der hier angegebenen Beispiele. Dabei werden die Werte von m bzw. λ durch eine Variable eingegeben: Zeile 14 bzw. 22. Im Programm werden die folgenden Schritte vorgenommen:

- Das Polytop P bzw. Q_m wird angelegt durch Eingabe der Ecken: Zeile 06 bis 10 bzw. 14 bis 18.
- P bzw. Q_m wird eingebettet und das entsprechende gerichtete Polytop erzeugt: Zeile 12 bzw. 20. Durch die Einbettung kommt eine minimale reduzierte Darstellung zu Stande.
- Zum Zeichnen der Visualisierungen wird ein *Stream* von Typ *WindowStream* angelegt: Zeile 25.
- Die zu zeichnende Objekte werden auf einem graphischen *Stream* geleitet: Zeile 27 bis 38. Dabei ist es zu beachten, dass die Anweisungen der Art `stream.Add(dP)`; zwei Schritte erfordern, und zwar die Berechnung der Visualisierung von \vec{P} (dies erfolgt, indem die Methode `VisualizationStream::Add` den *Constructor* der Klasse *Visualization2* aufruft: Eine so genannte *implicit conversion* findet statt), und dann das Zeichnen auf einem graphischen Fenster (Diese letzte Operation ist auch nicht trivial und erfolgt durch die Zusammenarbeit mehrerer Klassen).

```

01 // include headers : "Embedding2.h", "DirectedPolytop2 .h", " Visualization2 .h",
02 //                  " VisualizationStream .h", " WindowStream.h"
03
04 void main()
05 {
06     Polygon2 P;
07     P.push_back(Point2 (1,1));
08     P.push_back(Point2 (-1,1));
09     P.push_back(Point2(-1,-1));

```

```

10 P.push_back(Point2(1,-1));
11
12 DirectedPolytop2 dP = Embedding2::Exemplar() -> Embed(P);
13
14 const int m = 20;
15 Polygon2 Qm;
16 const double pi = atan(1.0) * 4;
17 for(int k = 0; k < m; k++)
18   Qm.push_back(Point2(cos(2*pi*k / m), sin(2*pi*k / m)));
19
20 DirectedPolytop2 dQm = Embedding2::Exemplar() -> Embed(Qm);
21
22 FT lambda = 1;
23 DirectedPolytop2 dQ = lambda * dQm;
24
25 VisualizationStream <WindowStream> stream;
26
27 stream.Add(dP);
28 stream.Add(dQ, CGAL::ORANGE);
32 stream.Add(dP + dQ, CGAL::RED);
36 stream.Add(dP - dQ, CGAL::BLUE);
37 stream.Print();
38 stream.Hold();
39 }

```

Wie in der Einleitung des Kapitels schon erwähnt, lassen sich die berechneten reduzierten Darstellungen in *ASCII*-Dateien abspeichern: Dazu muss man einen *Stream* vom Typ *ASCIIStream* anlegen (Im Beispielcode wird diese Operation nicht vorgenommen, denn sie ist eine reine technische Sache). Mit diesem Vorgehen erhält man die folgende Tabelle. Dabei sei bemerkt, dass die regelmäßige Wiederholung von Werten die Symmetrie in den Visualisierungen widerspiegelt. Die wiedergegebenen Daten beziehen sich auf den Fall $m = 12$ und $\lambda = 1$. Die minimale reduzierte Darstellung von \vec{P} ergibt sich zu:

i	l_i	$\overrightarrow{P_{2-1}(l_i)}$	$p_2(l_i)$
0	(1, 0)	(1, 1)	1
1	(0, 1)	(1, 1)	1
2	(-1, 0)	(1, 1)	1
3	(0, -1)	(1, 1)	1

Für $[Q_m | I_Q]$ erhält man:

i	u_i	$\overrightarrow{Q_{2-1}(u_i)}$	$q_2(u_i)$
0	(0.965926, 0.258819)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
1	(0.707107, 0.707107)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
2	(0.258819, 0.965926)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
3	(-0.258819, 0.965926)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
4	(-0.707107, 0.707107)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
5	(-0.965926, 0.258819)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
6	(-0.965926, -0.258819)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
7	(-0.707107, -0.707107)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
8	(-0.258819, -0.965926)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
9	(0.258819, -0.965926)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
10	(0.707107, -0.707107)	(0.258819, 0.258819)	0.965926
11	(0.965926, -0.258819)	(0.258819, 0.258819)	0.965926

Und schließlich ist $[\overrightarrow{R}|I_R]$ gleich:

i	v_i	$\overrightarrow{R_{2-1}(v_i)}$	$r_2(v_i)$
0	(1, 0)	(1, 1)	2
1	(0.965926, 0.258819)	(0.965926, -0.448288)	2.19067
2	(0.707107, 0.707107)	(0.258819, 0.258819)	2.38014
3	(0.258819, 0.965926)	(-0.448288, 0.965926)	2.19067
4	(0, 1)	(1, 1)	2
5	(-0.258819, 0.965926)	(0.965926, -0.448288)	2.19067
6	(-0.707107, 0.707107)	(0.258819, 0.258819)	2.38014
7	(-0.965926, 0.258819)	(-0.448288, 0.965926)	2.19067
8	(-1, 0)	(1, 1)	2
9	(-0.965926, -0.258819)	(0.965926, -0.448288)	2.19067
10	(-0.707107, -0.707107)	(0.258819, 0.258819)	2.38014
11	(-0.258819, -0.965926)	(-0.448288, 0.965926)	2.19067
12	(0, -1)	(1, 1)	2
13	(0.258819, -0.965926)	(0.965926, -0.448288)	2.19067
14	(0.707107, -0.707107)	(0.258819, 0.258819)	2.38014
15	(0.965926, -0.258819)	(-0.448288, 0.965926)	2.19067

Nun kommen die Bilder der Rände $B_2(\vec{P})$, $B_2(\vec{Q}_m)$, $B_2(\vec{R})$, $B_2(\vec{S})$ der Visualisierungen. Die Bilder und entsprechende Parameter sind im Folgenden zur Übersicht aufgelistet (Man beachte, dass unterschiedliche Werte für das Scaling der graphischen Fenster benutzt werden mussten, um bessere Bilder generieren zu können. Dies hat zur Folge, dass nicht unbedingt alle Bilder mit dem gleichen Maßstab kommen):

gezeichnete Objekte	m	λ	Bild	Seite
$B_2(\vec{P}), B_2(\vec{Q}_m)$	20	1	5.8	109
$B_2(\vec{R})$	20	1	5.9	110
$B_2(\vec{S})$	20	1	5.10	111
$B_2(\vec{S})$	4	1	5.11	112
$B_2(\vec{S})$	16	$\frac{1}{2}$	5.12	113
$B_2(\vec{S})$	22	$\frac{1}{2}$	5.13	114
$B_2(\vec{S})$	30	$\frac{1}{2}$	5.14	115
$B_2(\vec{S})$	50	$\frac{1}{2}$	5.15	116

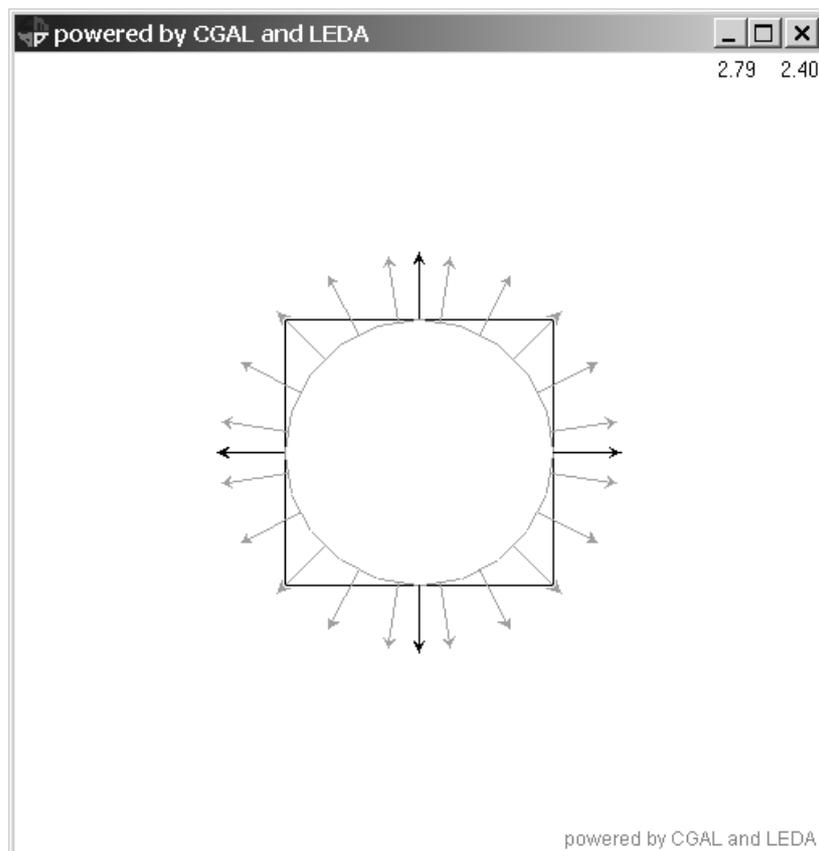


Abbildung 5.8: Ausgangspolytope: \vec{P} in schwarz, \vec{Q}_{20} in grau.

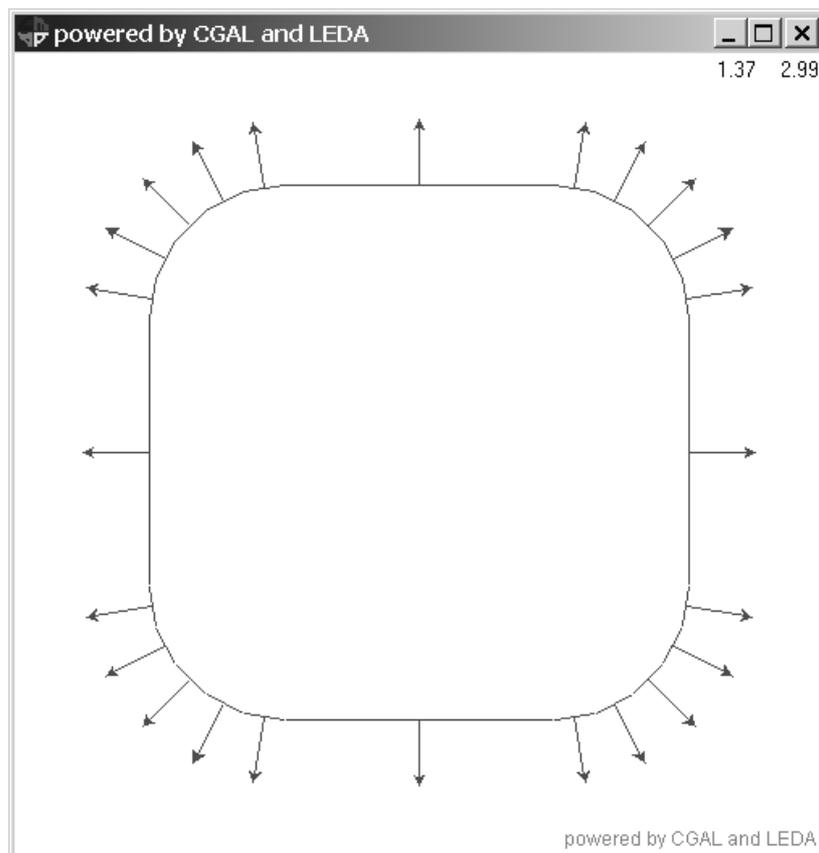


Abbildung 5.9: Visualisierung der Summe \vec{R} mit $\lambda = 1, m = 20$.

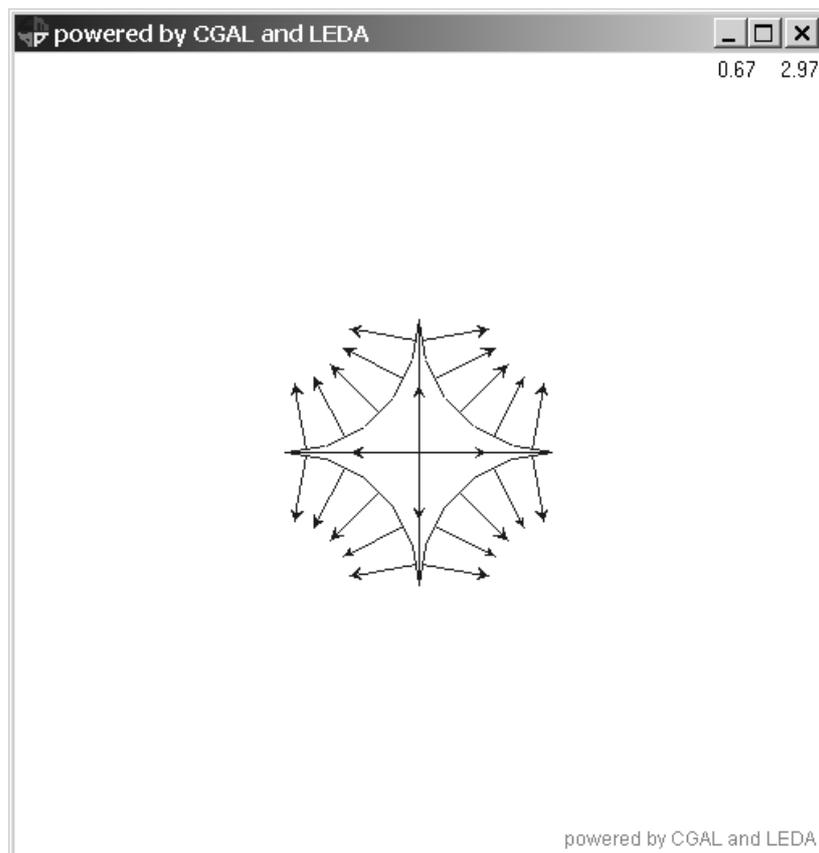


Abbildung 5.10: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = 1, m = 20$.

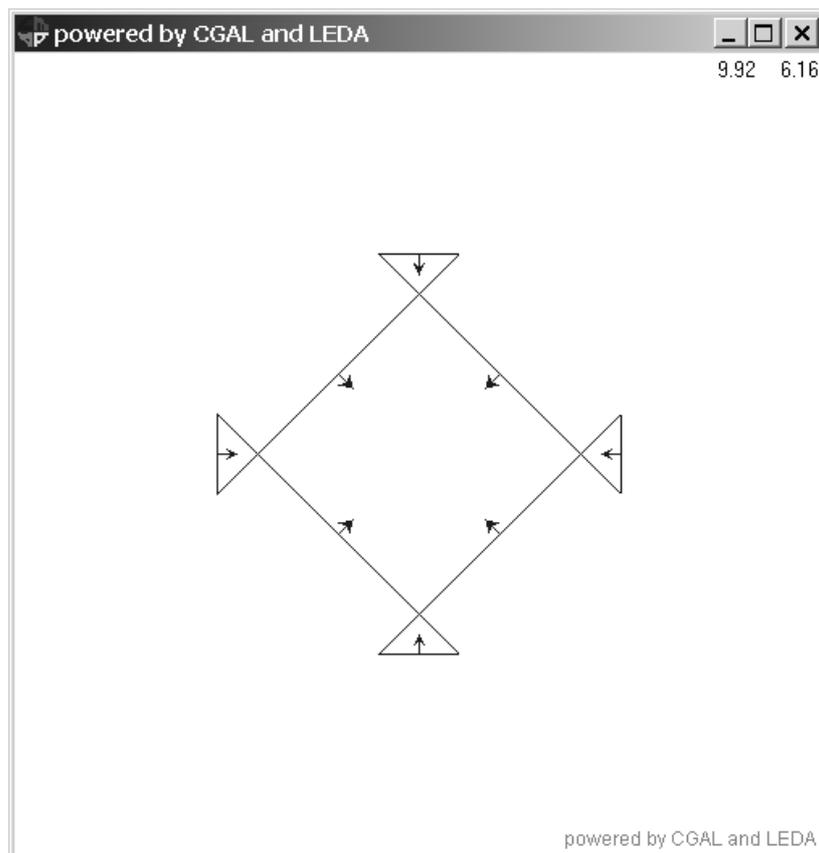


Abbildung 5.11: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = 1, m = 4$.

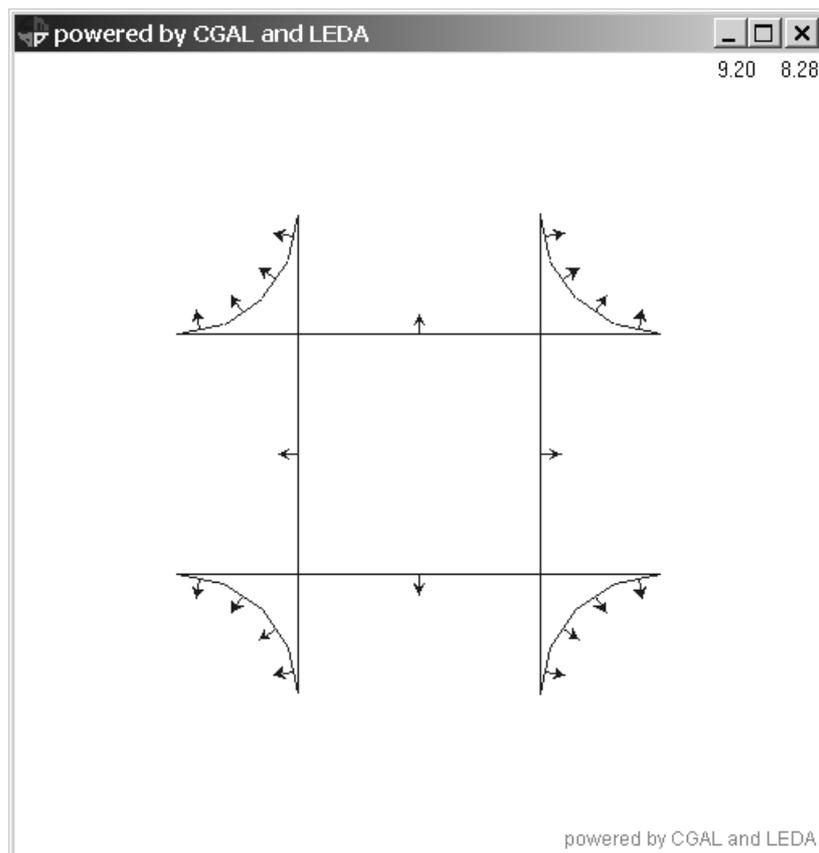


Abbildung 5.12: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $m = 16$.

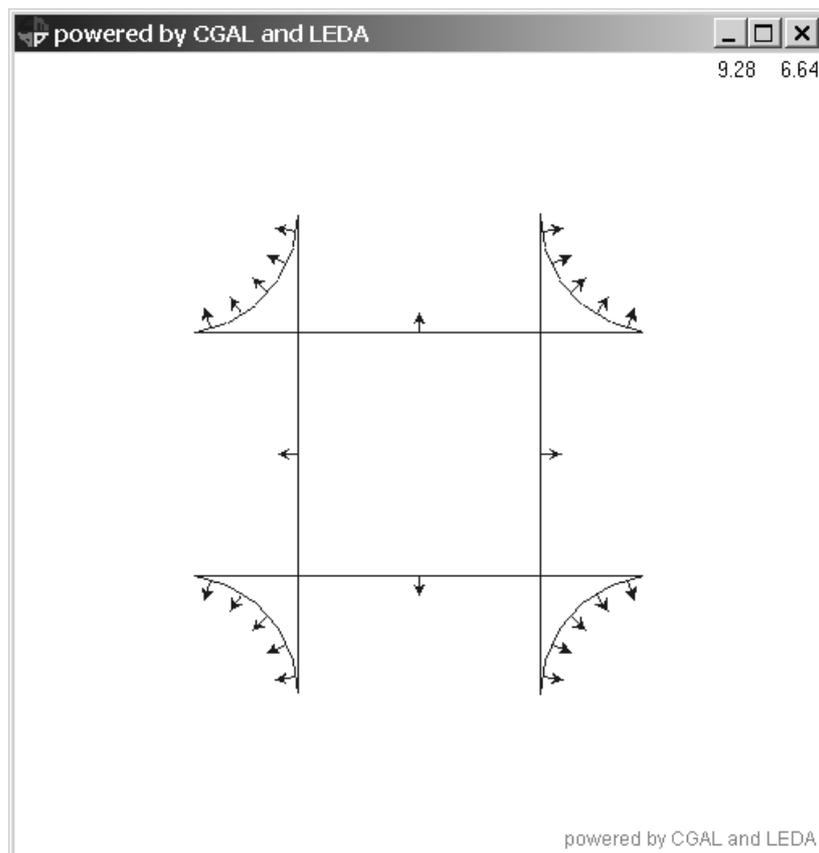


Abbildung 5.13: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $m = 22$.

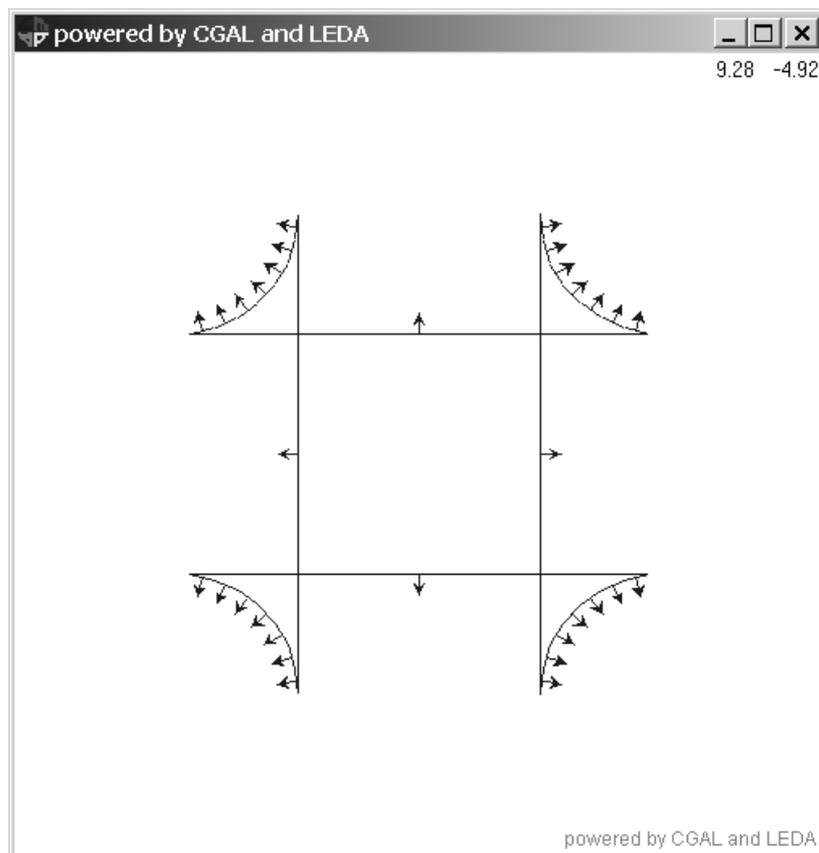


Abbildung 5.14: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $m = 30$.

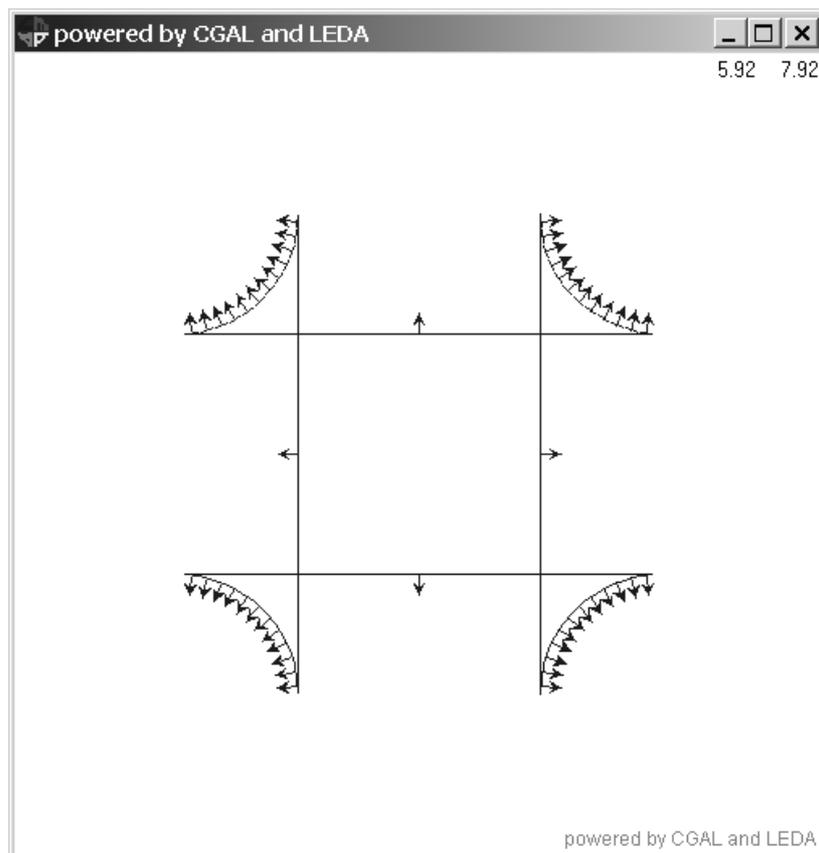


Abbildung 5.15: Visualisierung der Differenz \vec{S} mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $m = 50$.

5.5.2 Ein zweites Beispiel

Nun werden einige Bilder präsentiert, die wie in den vorhergehenden Beispielen auch hier mittels der reduzierten Darstellung erzeugt werden. In diesem Beispiel dienen die folgende zwei Polytope aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ als Ausgangspolytope:

$$P_n = \text{co} \left\{ \left(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

$$Q_m = \text{co} \left\{ \left(\cos \frac{2\pi k}{m}, \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \mid k = 0, \dots, m-1 \right\}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ bzw. $m \in \mathbb{N}$ die vorgegebene Anzahl der Kanten von P_n bzw. Q_m darstellt. Man setze entsprechend $\vec{P}_n := J_2(P_n)$ und $\vec{Q}_m := J_2(Q_m)$ für die eingebetteten gerichteten Polytope, und berechne dann (minimale) reduzierte Darstellungen für \vec{P} :

$$[\vec{P}_n | I_{P_n}] = [\vec{P} | l_1, \dots, l_n]$$

und für \vec{Q} :

$$[\vec{Q}_m | I_{Q_m}] = [\vec{Q} | u_1, \dots, u_m]$$

Mit diesen Darstellungen führt man dann die arithmetische Operation:

$$\vec{R} := \mu \cdot \vec{P}_n - \lambda \cdot \vec{Q}_m$$

zu verschiedenen Werten der Parameter $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Die Rechnung erfolgt durch $[\vec{P}_n | I_{P_n}]$ und $[\vec{Q}_m | I_{Q_m}]$, d.h. man führt folgende Berechnung durch:

$$\mu \cdot [\vec{P}_n | I_{P_n}] - \lambda \cdot [\vec{Q}_m | I_{Q_m}]$$

und erhält die reduzierte Darstellung $[\vec{R} | I_{P_n} \cup I_{Q_m}]$.

Zur Übersicht werden die Bilder und die entsprechenden Parameter in der folgenden Tabelle aufgelistet:

gezeichnete Objekte	n	μ	m	λ	Bild	Seite
$B_2(\vec{R})$	3	10	20	6	5.16	119
$B_2(-\vec{R})$	3	10	20	6	5.17	120
$B_2(\vec{R})$	3	10	10	6	5.18	121
$B_2(-\mu \cdot \vec{P}_n)$, $B_2(\lambda \cdot \vec{Q}_m)$	4	6	10	6	5.19	122
$B_2(\vec{R})$	4	6	10	6	5.20	122
$B_2(-\mu \cdot \vec{P}_n)$, $B_2(\lambda \cdot \vec{Q}_m)$	2	7	50	6	5.21	124
$B_2(\vec{R})$	2	7	50	6	5.22	125
$B_2(\vec{R})$	2	4	50	6	5.23	126
$B_2(-\vec{R})$	2	6	10	6	5.24	127
$B_2(\vec{R})$	10	8	20	4	5.25	128
$B_2(\vec{R})$	4	3	20	4	5.26	129

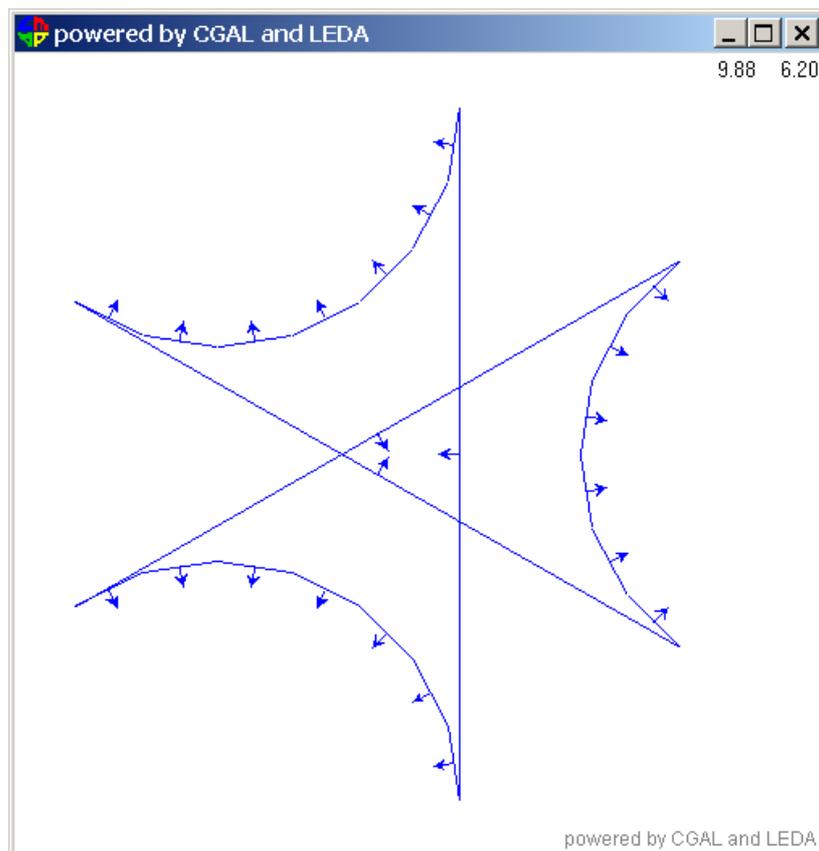


Abbildung 5.16: Rand von $10 \cdot \vec{P}_3 - 6 \cdot \vec{Q}_{20}$.

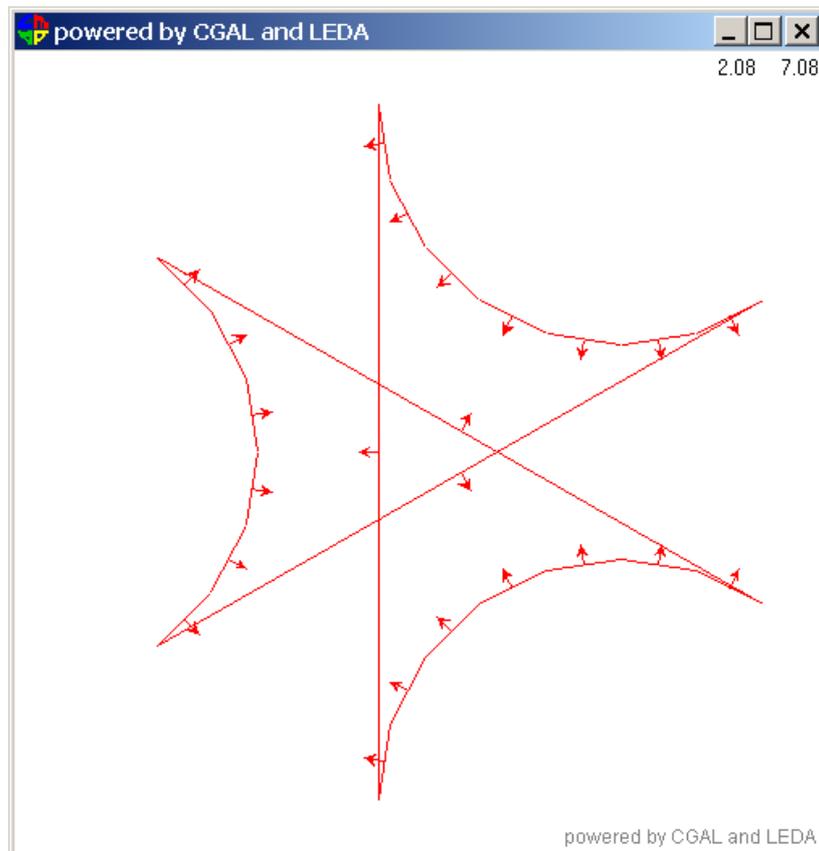


Abbildung 5.17: Rand von $-10 \cdot \vec{P}_3 + 6 \cdot \vec{Q}_{20}$.

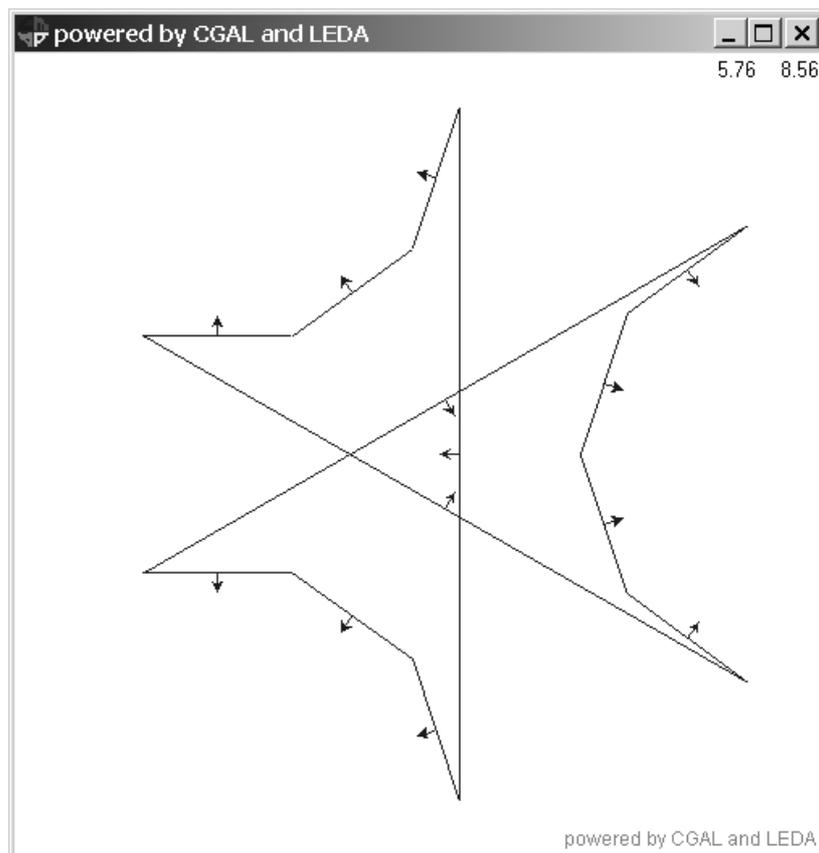


Abbildung 5.18: Rand von $10 \cdot \vec{P}_3 - 6 \cdot \vec{Q}_{10}$.

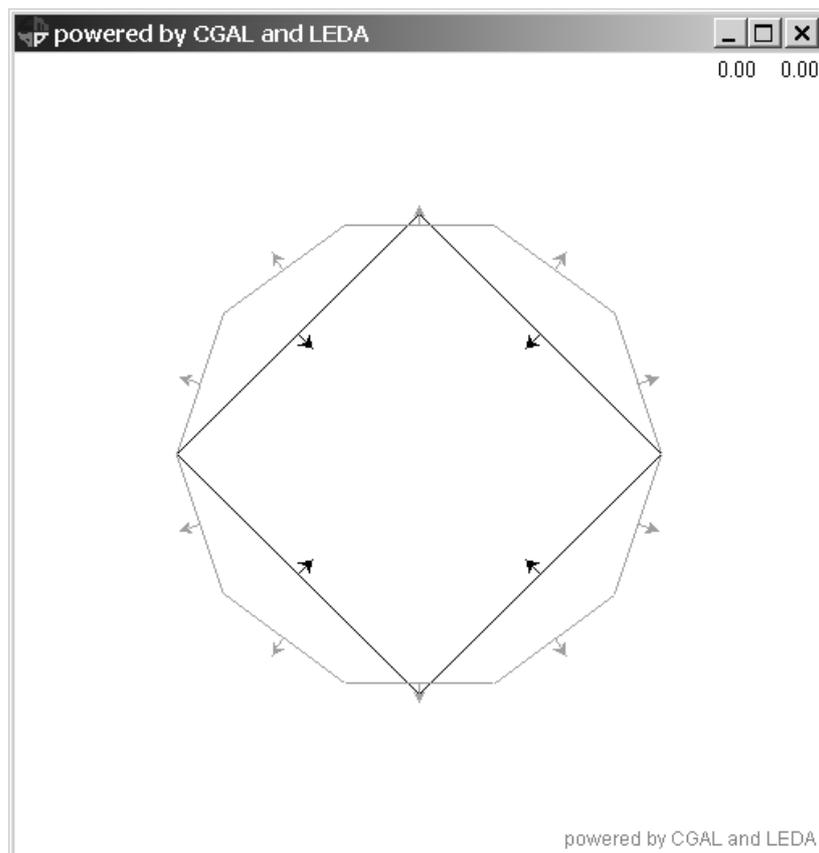


Abbildung 5.19: Rand von $-6 \cdot \vec{P}_4$ in schwarz und Rand von $6 \cdot \vec{Q}_{10}$ in grau.

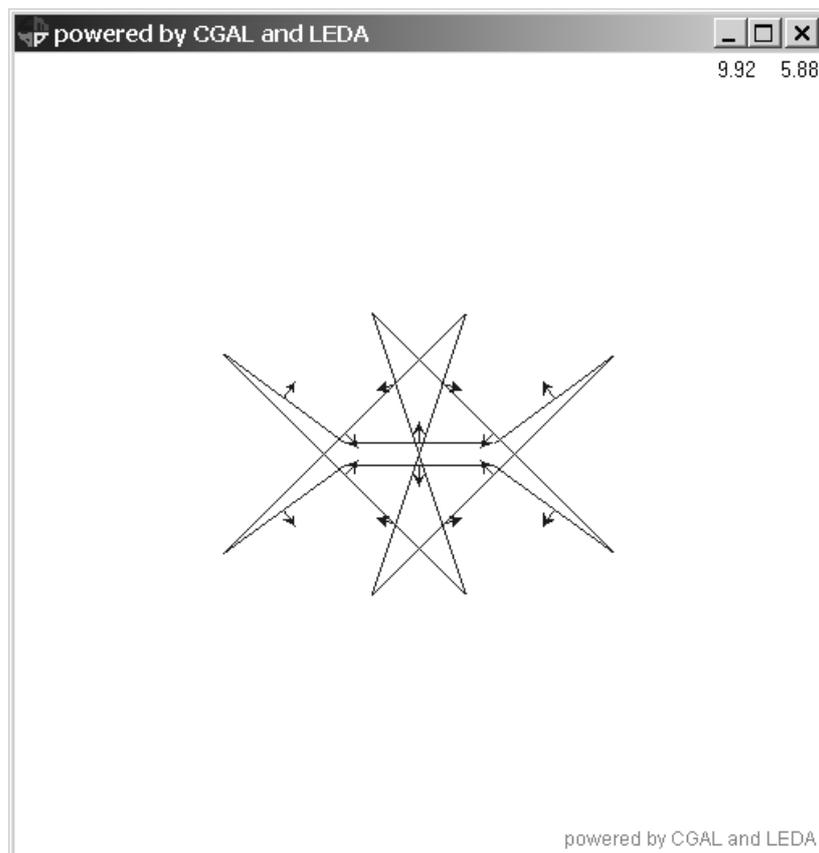


Abbildung 5.20: Rand von $6 \cdot \vec{P}_4 - 6 \cdot \vec{Q}_{10}$.

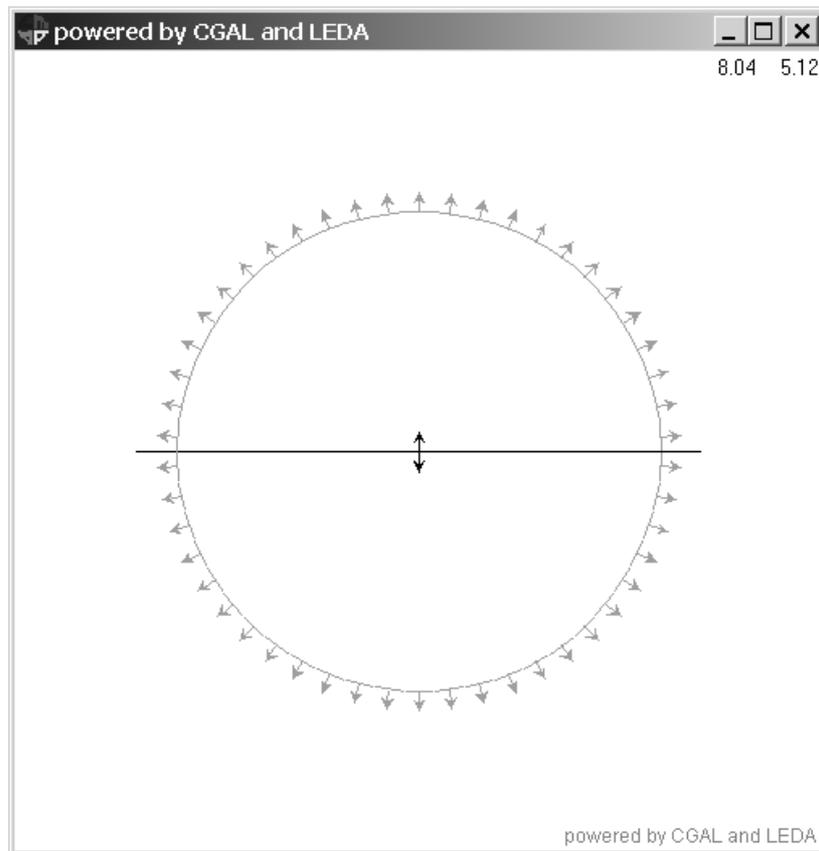


Abbildung 5.21: $B_2(7 \cdot \vec{P}_2)$ ist in schwarz, $B_2(6 \cdot \vec{Q}_{50})$ ist in grau.

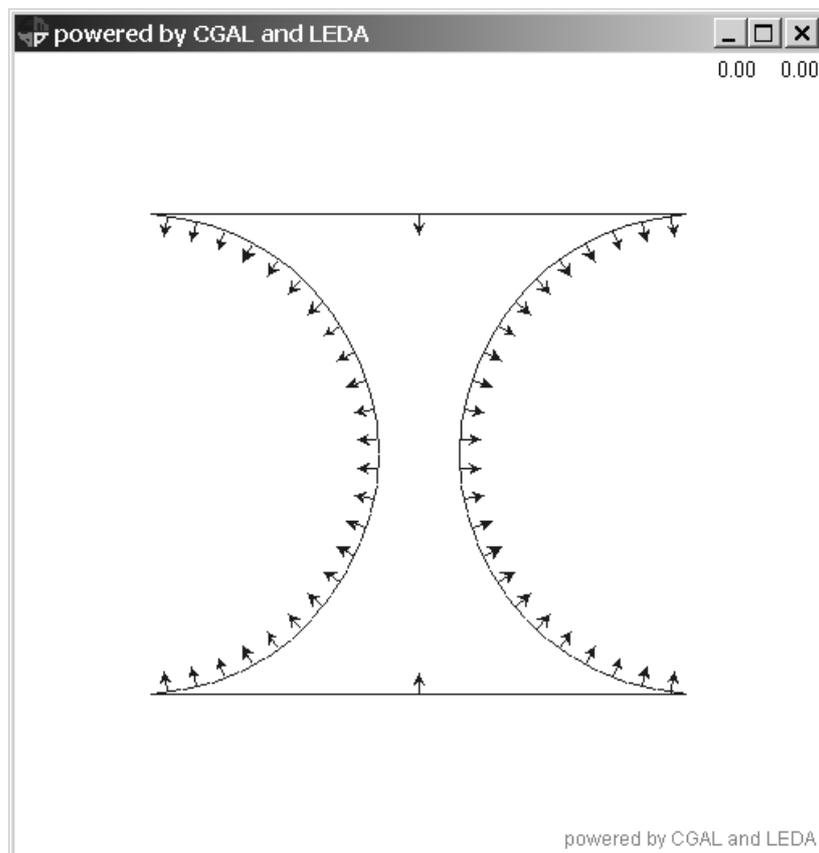


Abbildung 5.22: Der Rand von $7 \cdot \vec{P}_2 - 6 \cdot \vec{Q}_{50}$.

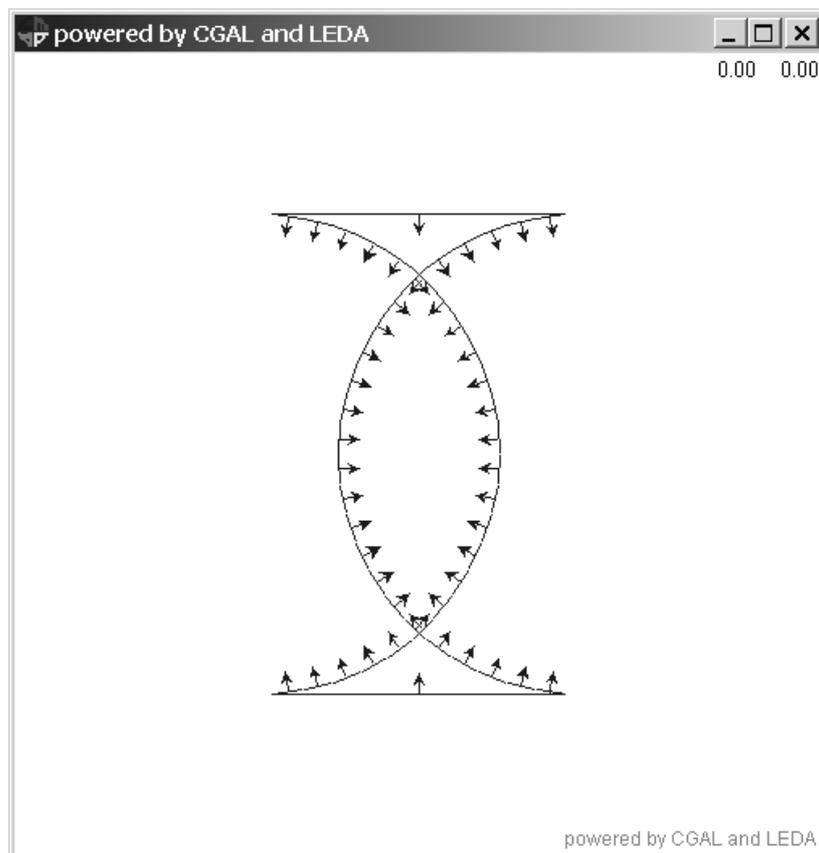


Abbildung 5.23: Der Rand von $4 \cdot \vec{P}_2 - 6 \cdot \vec{Q}_{50}$.

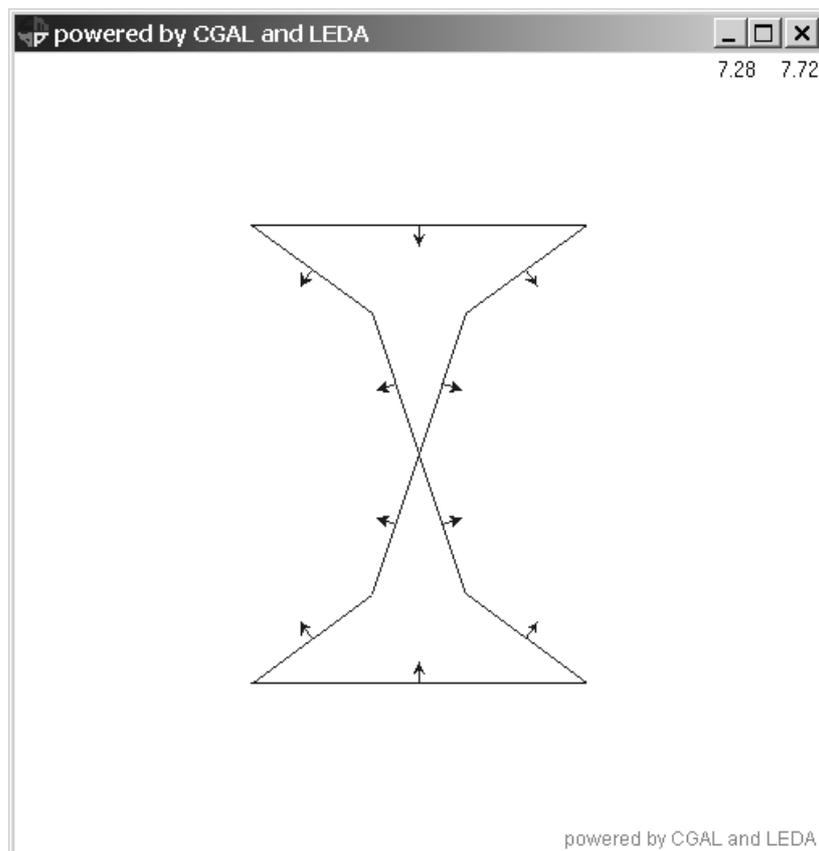


Abbildung 5.24: Der Rand von $6 \cdot \vec{P}_2 - 6 \cdot \vec{Q}_{10}$.

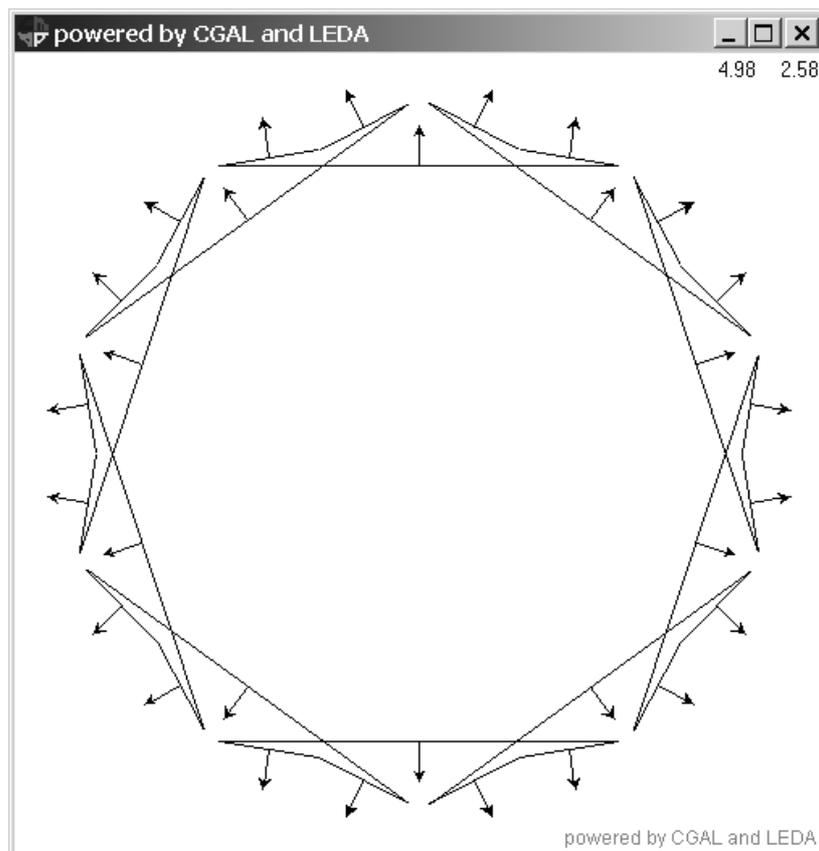


Abbildung 5.25: $B_2(8 \cdot \vec{P}_{10} - 4 \cdot \vec{Q}_{20})$.

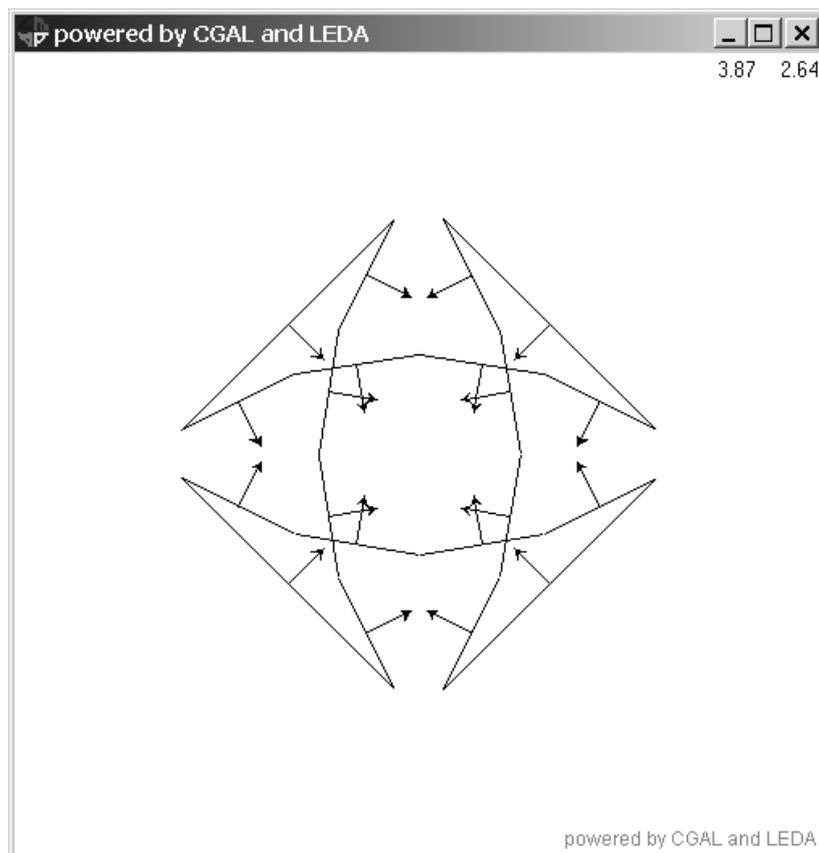


Abbildung 5.26: $3 \cdot \vec{P}_4 - 4 \cdot \vec{Q}_{20}$.

Anhang A

Implementierung

Neben der Entwicklung der gerichteten Polytope, ist es Aufgabe dieser Arbeit, die reduzierte Darstellung von gerichteten Polytopen am Rechner zu implementieren. Ursprünglich war geplant, eine Software zu schreiben, die es ermöglicht, mit beliebigen gerichteten Polytopen der Dimension eins, zwei, und drei mittels der reduzierten Darstellung zu rechnen. Es zeigte sich aber während der Entstehung dieser Arbeit, dass einige Aspekte der Theorie noch zu untersuchen bleiben. Die Überwindung solcher Probleme geht aber über die Arbeit hinaus, und deswegen konnten sie nicht ausführlich berücksichtigt werden. Ihre Untersuchung hat aber zur Verfeinerung von den in dieser Arbeit eingeführten Begriffen bewirkt, und gezeigt, dass die gerichteten Polytope auch nur der Dimension zwei in der reduzierten Darstellung ein ziemlich kompliziertes Thema darstellen. Aus diesen Gründen hat man sich auf die Dimensionen eins und zwei begrenzt. Implementiert wurden also die Teilräume $\vec{\mathcal{P}}^1$ und $\vec{\mathcal{P}}^2$.

Zweck der reduzierten Darstellung ist es, eine Darstellung im Rechner von gerichteten Polytopen zu erhalten, die keine Diskretisierung erfordert.

Trennung von vier Aspekten

Vier hauptsächliche Aspekte wurden bei der Entwicklung der Implementierung unterschieden:

- die Einbettung von Polytopen aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$;

- die Darstellung der Elemente aus dem Raum $\vec{\mathcal{P}}^2$ bzw. $\vec{\mathcal{P}}^1$ durch die reduzierten Darstellung;
- die Visualisierung solcher Elemente;
- die Erzeugung von Bildern der Visualisierungen;

Dabei bieten die entwickelten Klassen die folgenden Möglichkeiten und Werkzeuge:

- konvexe kompakte Intervalle des \mathbb{R} bzw. konvexe kompakte Polytope des \mathbb{R}^2 einzubetten;
- gerichtete Polytope durch direkte Eingabe der Werte der zugehörigen darstellenden Funktionen zu erzeugen;
- allgemeine gerichtete Polytope der Dimension eins und zwei in der reduzierten Darstellung abzuspeichern;
- die zugehörigen Operationen durchzuführen (aber auf bestimmte Kategorien begrenzt);
- die entsprechende Visualisierung zu berechnen;
- Hilfsmittel zur Ausgabe der berechneten reduzierten Darstellungen;
- Hilfsmittel zum tatsächlichen Zeichnen der erhaltenen Visualisierungen auf Ausgabegeräte und/oder Dateien;

Programmierungssprache und Bibliotheken

Die Klassensammlung wurde in der Programmierungssprache C++ geschrieben, welche sich als passend erweist, da es sich um eine vielseitige, moderne, mächtige, objektorientierte Sprache handelt. Dies bietet den Vorteil einer höheren Abstraktionsebene (*abstraction layer*) und bringt Flexibilität und Effizienz zusammen ¹. Au-

¹Anhand eines modernen Kompilierer kann der erzeugte Code die Leistungen von Fortran gleichen oder sogar übertreffen. Siehe [Lip96]

Berdem stellt C++ die Algorithmen und Datenstrukturen der STL ² Bibliothek zur Verfügung. Nichtletztendlich ist die CGAL ³ Bibliothek in C++ geschrieben.

Die Bibliothek CGAL stellt Lösungen zu grundlegenden geometrischen Problemen im Rahmen der *computational geometry* zur Verfügung.

Zur Realisierung der Software ist CGAL keine nötige Wahl, sondern eine günstige Entscheidung: Nicht alle ihre Komponenten verwenden die CGAL Bibliothek. Der Kern der gesamten Sammlung, d.h. die gerichtete Intervalle und die zweidimensionale gerichtete Polytope, zum Beispiel, setzen sich auf der STL. Die Klassen zur Einbettung und die Klassen zur Visualisierung operieren mit geometrischen Objekten, wie Punkte, Polygonen, und Begriffe der Geometrie, wie Konvexität: Hier kommt CGAL sehr gut im Einsatz, denn alle diese Strukturen stehen schon zur Verfügung. CGAL bietet zusätzlich robustes Rechnen mit beliebiger Genauigkeit ⁴. Die Behandlung von Problemen im Bereich der *computational geometry* wird dadurch erleichtert.

Zwei Klassenhauptsysteme

Es gibt zwei Klassenhauptsysteme (*Packages*). Das eine entspricht den gerichteten Intervallen: Es besteht aus den Klassen *DirectedInterval* und *XDirectedInterval*. Das andere entspricht den gerichteten Polytopen der Dimension zwei und besteht aus den folgenden Klassen: *DirectedPolytop2*, *ReducedBundle*, *ReducedRepresentation*, *Supporting*, *Visualisierung2*, *Projection2*, *Einbettung2*, *MSR2*, *MostSimilar*. Zusätzlich sind die Klassen *ASCIIStream*, zur Ausgabe der berechneten reduzierten Darstellungen, *VisualizationStream*, *WindowStream*, *PSSStream* zur Erzeugung der Bilder, zu erwähnen. Schließlich kommen die Zubehörklassen/utility *Arrow2*, *Vector2* und *Vector2*. Es ist zu bemerken, dass CGAL Datentypen für Richtungen und Vektoren mitliefert. Diese haben aber leider einige unangenehme Nachteile, die sie zu ungeeignet machen.

²Standard Template Library

³Computational Geometry Algorithms Library. Für weitere Informationen siehe www.cgal.org

⁴Zum diesem Zweck sind aber zusätzliche Bibliotheken erforderlich. *LEDA*, *GMP*, *CORE*, *CLN* sind unterstützte Bibliotheken.

Grundlegende Struktur

Die gerichtete Polytope verschiedener Dimension wurden aus technischen Gründen als selbstständige Klassen definiert. Eine rekursive Implementierung kommt nicht in Frage, weil sie rechnerisch ungünstig ist, denn der Bedarf an Arbeitsspeicher wäre zu groß. Die Vererbung aus einer *abstrakten Basis*-Klasse weist sich auch nicht als optimale Lösung. Trotz diesen Entwurfsentscheidungen sind die Klassen nicht voneinander unabhängig: Die Klasse *DirectInterval* stellt einen Grundbaustein dar, denn die gerichteten Polytope in Dimension 2 bauen sich auf diese auf. Man denke an die Definition 2.1.1: Die Elemente $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ haben die Form $(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1}$, wobei $\overrightarrow{P_1(l)} \in \vec{\mathcal{P}}^1$.

In der Theorie der gerichteten Polytope, ist ein gerichtetes Intervall ein Paar $\vec{A} := (a_1(-1), a_1(+1)) \in \mathbb{R}^2$. Ein gerichtetes Polytop der Dimension 2 in reduzierter Darstellung kann, als eine diskrete Folge von Paaren $(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l)) \in \vec{\mathcal{P}}^1 \times \mathbb{R}$ zu einem Index I_P angesehen werden. Die Implementierung entspricht genau dieser Vorstellung, indem die Klasse *DirectedInterval* das Wertepaar $(a_1(-1), a_1(+1))$ mit Operationen zusammen kapselt, und die Klasse *DirectedPolytop2* eine endliche Liste von „Stützpaaren“ $(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in I_P}$ mit Operationen zusammenkapselt. Im Allgemeinen ist ein gerichtetes Polytop $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ gemäß der Definition 2.1.1 eine Funktion:

$$\vec{P} : S^{n-1} \rightarrow \vec{\mathcal{P}}^{n-1} \times \mathbb{R} : l \mapsto (\overrightarrow{P_{n-1}(l)}, p_n(l))$$

Bei der Implementierung wird diese Ansicht durch *Funktionenobjekte* $\vec{P}(\cdot)$ verstärkt.

Schlußbemerkungen

Auf der mitgelieferten CD-Rom findet man die elektronische Dokumentation mit einer ausführlichen (technischen) Beschreibung der Software-Komponenten. Sie vollstündigt diese Arbeit.

Es soll erwähnt werden, dass viel Wert auf die Flexibilität und Einfachheit bei der Benutzung der Klassen gelegt wurde. Man hat sich bemüht, dieses Ziel zu verwirklichen.

Die Grundzüge der vorgestellten Theorie werden in diesem Kapitel nochmals wiederholt. Dabei werden wichtige Sätze und Bemerkungen in Bemerkungen zusammengefasst.

Die Implementierung der gerichteten Intervallen

Beschreibung der Klasse

Nach Definition 2.1.1 ist ein gerichtetes Intervall $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$ im Wesentlichen eine Funktion:

$$\vec{A}(\cdot) \equiv a_1(\cdot) : S^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

die einer Richtung $u \in S^0$ einen reellen Wert $a_1(u)$ zuordnet. Eine Funktion $a_1(\cdot)$ ist vollständig bekannt, wenn die Werte zu beiden möglichen Richtungen angegeben werden. Zur Darstellung eines allgemeinen gerichteten Intervalles ist es dann ausreichend das Paar $(a_1(-1), a_1(+1))$ abzuspeichern. Die Implementierung der gerichteten Intervalle beruht auf diesem Ansatz: Sie speichert das Paar $(a_1(-1), a_1(+1))$ ab, und kapselt es mit den Operationen auf $\vec{\mathcal{D}}^1$ zusammen. Außerdem weist die zur Implementation dienende Klasse das Verhalten einer Funktion $\vec{A}(\cdot)$ auf, indem man durch das Schreiben $\vec{A}(u)$ den Wert $a_1(u)$ als Rückgabe erhält. Ein Objekt der Klasse *DirectedInterval* (d.h. eine *Instanz* oder genauer ein *Exemplar*) kann deshalb als ein *Funktionsobjekt* (*functional object*) $\vec{A}(\cdot)$ betrachtet werden. Ist eine Richtung $u \in S^0$ gegeben, so gibt der Methode den entsprechenden Stützwert $a_1(u)$ zurück. Die Klasse verstärkt diese Ansicht durch den Operator `DirectedInterval::operator()`.

Der \mathbb{R} -Vektorraum $\vec{\mathcal{D}}^1$ der gerichteten Intervallen wird mittels der Klasse *DirectedInterval* dargestellt. Ein Objekt dieser Klasse definiert *Methoden* zur Anlegung von gerichteten Intervallen, zur Durchführung der arithmetischen Operationen $+$, $-$, \cdot , und zur Abfrage der Werte $a_1(-1)$ und $a_1(+1)$. Aus dem Grund, dass eine Instanz von *DirectedInterval* in der Lage ist, einen allgemeinen \vec{A} aus $\vec{\mathcal{D}}^1$ darzustellen, erzeugt die Angabe zweier Werte α, β das gerichtete Intervall $\vec{A} = (\alpha, \beta)$ und bewirkt nicht die Einbettung $J_1([\alpha, \beta])$. Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass es noch eine *template* Klasse namens *XDirectedInterval* zur Verfügung steht, die die Möglichkeit bietet, Intervalle $[a, b] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ direkt einzubetten⁵. *XDirectedInterval* wird hier nicht besprochen, weil sie keine zusätzliche mathematischen Eigenschaften besitzt. Für eine ausführliche technische Beschreibung von *XDirectedInterval*

⁵Die Klasse *XDirectedInterval* besitzt auch andere Eigenschaften. Sie befinden sich nicht in der Klasse *DirectedInterval* aus dem Grund, dass es eine gute Entwurfsregel ist, nur die strikt betreffende Methoden, einer Klasse zuzuordnen.

tedInterval und *DirectedInterval* verweise ich auf die elektronische Dokumentation auf der mitgelieferten CD-Rom.

Der Vektorraum $\vec{\mathcal{D}}^1$ ist auf dem Körper \mathbb{R}^1 der reellen Zahlen definiert. Die Wahl von dem Datentyp *NT* zur Darstellung der Elementen aus \mathbb{R}^1 bestimmt den *template* Parameter *NumberType* der Klasse *DirectedInterval*. Die Klasse ist von dieser Wahl unabhängig, so lange der Parameter *NT* einige Anforderungen erfüllt, welche im Wesentlichen die definierten Operationen auf *NT* betreffen. Im Überblick⁶ soll *NumberType* ein unäres + und –, ein binäres + und – und das Produkt · definieren.

Deklaration

Im Folgenden wird die Klasse *DirectedInterval* angegeben und es werden die zugehörigen Methoden und ihre Schnittstelle erläutert:

```

template<typename NT>
class DirectedInterval
{
  protected:

    NT _a; // a1(-1) [M1]
    NT _b; // a1(+1) [M2]

  public:

    DirectedInterval () : _a( static.cast <NT>(0), _b( static.cast <NT>(0) ) {} [M3]
    DirectedInterval (NT a, NT b) : _a(a), _b(b) {} [M4]
    DirectedInterval ( const DirectedInterval <NT>& DI) : _a(DI._a), _b(DI._b) {} [M5]
    virtual ~ DirectedInterval () {} [M6]

    NT& operator ()( const NT direction ); [M7]

    DirectedInterval operator *(NT lambda) const; [M8]
    DirectedInterval operator +() const; [M9]
    DirectedInterval operator +( const DirectedInterval & DI) const; [M10]
    DirectedInterval operator -() const; [M11]
    DirectedInterval operator -( const DirectedInterval & DI) const; [M12]

    const DirectedInterval <NT>& operator =( const DirectedInterval <NT>& DI); [M13]
    DirectedInterval & operator +=( const DirectedInterval & DI); [M14]
    DirectedInterval & operator -=( const DirectedInterval & DI); [M15]
    DirectedInterval & operator *( const NT lambda); [M16]

```

⁶Details befinden sich in der elektronischen Dokumentation

```

bool IsDegenerate () const;           [M17]
const NT norm() const;               [M18]
};

```

Es folgt eine Beschreibung der Mitglieder der Klasse:

[M4] Durch Eingabe von zwei reellen Werten α_1 und α_2 (d.h. zwei Exemplaren von *NumberType*) erzeugt die Methode **[M4]** ein gerichtetes Intervall $\vec{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Das Paar von Werten wird in den Mitglieder **[M1]** und **[M2]** gespeichert. Dabei ist zu beachten, dass dieser *constructor* ein gerichtetes Intervall erzeugt, deren entsprechende darstellende Funktion die eingegebenen Werte zugeordnet werden. Dieser *constructor* entspricht deshalb nicht der Einbettung. Zusammengefasst heißt das: \vec{A} wird zu $(a_1(-1), a_1(+1)) = (\alpha_1, \alpha_2)$ gesetzt und bewirkt nicht etwa $\vec{A} := J_1([\alpha_1, \alpha_2])$. Dieses Verhalten der Klasse stammt aus dem Grund, dass durch sie allgemeine gerichtete Mengen dargestellt werden sollen und nicht nur eingebettete gerichtete Mengen .

[M7] Diese Methode lässt die Klasse wie eine Funktion $\vec{A}(\cdot) : S^0 \rightarrow \mathbb{R}$ verhalten. Es ist zu beachten, dass die Anweisung $\vec{A}(u) = \alpha$ die Zuordnung vom Wert α zur Richtung u bewirkt. Diese Methode erlaubt daher auch die Erzeugung von Elementen $\vec{A} \in \vec{\mathcal{D}}^1$.

[M8] gibt $\vec{C} := \lambda \cdot \vec{A}$ zurück, d.h. aus \vec{A} wird das Element \vec{C} berechnet, angelegt und dann schließlich zurückgegeben.

[M9],[M10] : unäres $+$ und binäres $+$. Die Rückgabe von **[M9]** ist \vec{A} . Zum Beispiel nimmt **[M10]** folgende Schritte vor:

A.0.1 Algorithmus (reduced sum computing)

1. **begin**
2. **for** $u \in S^0$ **do**
3. **compute** $\vec{A}(u) + \vec{B}(u)$
4. **store in** $\vec{C}(u)$
5. **end**

[M11],[M12] unäres $-$ und binäres $-$.

[M17] prüft ob $-\alpha_1 = \alpha_2$, d.h. ob $\vec{A} \in \vec{\mathcal{P}}_0^1$.

[M3],[M5],[M6],[M13] bis [M16] : Diese Methoden sind notwendig für die Implementierung oder zum eine Anforderung der Programmiersprache. Sie entsprechen keinen theoretischen Begriffen. Die Methode [M3], zum Beispiel, ist der *default constructor*. Wurde zur Verfügung gestellt, um die Deklaration von Array zu erleichtern.

Die Implementierung der gerichteten Polytopen der Dimension zwei

Vorbereitung

Die Implementierung stützt sich auf der bisher erläuterten Theorie. Hier werden die Teile davon erwähnt, die bei der Implementierung gebraucht sind.

A.0.2 Definition Sei ein $\vec{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, a_2(l))_{l \in S^1} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ gegeben, und dabei sei $\overrightarrow{P_1(l)} = (p_1^l(-1), p_1^l(+1))$. Zu einer Richtung l definiere man:

$$1. B_1^l(\vec{P}) : S^0 \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \begin{cases} \max B_1(\overrightarrow{P_1(l)}) & : \text{falls } u = +1 \\ \min B_1(\overrightarrow{P_1(l)}) & : \text{falls } u = -1 \end{cases}$$

Dabei ist $B_1(\overrightarrow{P_1(l)}) = \{-p_1^l(-1), p_1^l(+1)\}$.

$$2. B_2^l(\vec{P}) := * \Pi_{a_2}^l V_1(\overrightarrow{P_1(l)}). \text{ Es ist } B_2^l(\vec{P}) \subseteq B_2(\vec{P}).$$

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, auf welches \vec{P} man sich bezieht, wird die Bezeichnung B_1^l bzw. B_2^l benutzt statt $B_1^l(\vec{P})$ bzw. $B_2^l(\vec{P})$.

Ab hier gelten die folgende Bezeichnungen, und es seien die folgende Vereinbarungen getroffen im Bezug auf ein Polytop aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Sie stellen ein Art *precondition* dar.

A.0.3 Bezeichnung Sei $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ein kompaktes konvexes Polytop. Die Bedingung $k \geq 3$ für die Anzahl der Ecken wird angenommen: $k = 1, 2$ werden als Sonderfälle behandelt. Die äußeren normalen Richtungen seiner Kanten seien l_1, \dots, l_k und bilden den Index I_P . Für sie gelte $l_1 \leq \dots \leq l_k \leq l_1$. Die Menge der Ecken von

P sei $\text{vert}(P) = \{v_1, \dots, v_k\}$, so dass l_j die äußere Normale der Kante $\text{co}\{v_j, v_{j+1}\}$ bezeichnet. Aus der Anordnung der Normalen folgt dann $\partial P = \bigcup_1^k \text{co}\{v_j, v_{j+1}\}$. Dabei sei zusätzlich $l_{k+1} := l_1$ bzw. $v_{k+1} := v_1$ und $l_0 := l_k$ bzw. $v_0 := v_k$ (anders ausgedrückt, reduziert man die Indizes Modulo k).

Der nächsten Bemerkung zu Folge erhält man eine reduzierte Darstellung eines $\vec{P} = J_2(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, indem man nur die Richtungen normal zu den Kanten von P betrachtet.

A.0.4 Bemerkung Man habe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und setze $\vec{P} := J_2(P) \in \vec{\mathcal{P}}^2$. Es gelten die obigen Vereinbarungen. Dann erhält man eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von \vec{P} , indem man:

$$I_P := \{l_0, \dots, l_{k-1}\}$$

setzt und die folgende Auflistung wählt:

$$\{\vec{P}(l_i)\}_{l_i \in I_P}$$

Ist $P \equiv \{v_0\}$, dann wählt man eine beliebige Richtung $l \in S^1$. Falls $P \equiv \text{co}\{v_0, v_1\}$, dann setze man l_0 gleich einer der zwei normalen Richtungen $\pm \frac{v_1 - v_0}{\|v_1 - v_0\|}$.

Beweis: Vergleiche Abschnitt 4.3.2. □

Ähnlich zu obigen Bemerkung ergibt sich eine reduzierte Darstellung von $-\vec{P}$:

A.0.5 Bemerkung Man habe ein konvexes gerichtetes Polytop \vec{P} mit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und setze $\vec{Q} = (\overrightarrow{Q_1}(l), q_2(l))_{l \in S^1} := -\vec{P}$. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von \vec{P} . Für ein $l \in S^1 \setminus I_P$ mit $l \in (l_i, l_{i+1})$, wobei $l_i < l_{i+1} \in I_P$ gilt:

- Eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{Q}|I_Q]$ ergibt sich durch:

$$\{-\overrightarrow{P_1}(l_i)\}_{l_i \in I_P}$$

- $\overrightarrow{Q_1}(l) = -J_1(\Theta[-a, a]) = (-a, a) = -J_1(V_1(\overrightarrow{P_1}(l)))$ wobei $a = \Pi_{a_2}^l(*\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1))$.

Beweis: Ergibt sich aus A.0.6 und wegen der Linearität der Einbettung. \square

Die Bemerkung drückt aus, dass $\overrightarrow{Q_1(l)} \equiv \overrightarrow{P_1(l)}$ für diejenigen l die nicht im Index $I_P \equiv I_Q$ liegen, da $\overrightarrow{P_1(l)} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_0^2$. Zusammengefasst, braucht man nicht, die Konvexität bzw. Konkavität von \overrightarrow{P} bzw. \overrightarrow{Q} zu berücksichtigen, wenn es um die Bestimmung von $\overrightarrow{P_1(l)}$ bzw. $\overrightarrow{Q_1(l)}$ geht.

Man betrachte ein gerichtetes Polytop $\overrightarrow{P} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$ mit vollständiger Darstellung $(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1}$ und eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\overrightarrow{P}|I_P := \{l_1, \dots, l_k\}]$. Die Richtungen im Index seien bezüglich der Kreisanordnung angeordnet. Außerdem sei l aus $S^1 \setminus I_P$ und l gehöre dem offenen Intervall (l_i, l_{i+1}) an. Ist \overrightarrow{P} gleich der Einbettung $J_2(P)$ oder gleich $-J_2(P)$ für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ (Dabei gelten die Vereinbarungen A.0.3), so induziert die Anordnung der Richtungen im Index eine Anordnung der „Kanten“ $B_2^{l_i}$ (siehe auch 4.4), so dass gilt:

$$l_i < l_{i+1} \implies B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = B_2^l \neq \emptyset \quad (\text{A.1})$$

für $i = 1, \dots, k$. Insbesondere ist:

$$B_2^l = \{v_i\} \quad (\text{A.2})$$

Ist \overrightarrow{P} von der Form $J_2(Q) - J_2(R)$ mit $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, dann es ist gerechtfertigt, die Gültigkeit der obigen Implikation A.1 anzunehmen (siehe auch 4.4). Die eben genannte Implikation spielt eine entscheidende Rolle bei den Algorithmen zur Berechnung der „Stützpaaren“, die in einer reduzierten Darstellung fehlen.

Es sei bemerkt, dass der Fall $\overrightarrow{P} = J_2(Q) - J_2(R)$ vom ziemlich allgemeinen Umfang ist. Das \overrightarrow{P} komme durch eine endliche Reihe von Summen und Differenzen zustande, etwa

$$\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot J_2(P_i) \quad , \quad \alpha_i \in \{-1, 1\}$$

mit $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Durch Trennung der Summanden mit $\alpha_i = -1$ von den mit $\alpha_i = +1$ und Anwendung der positiven Linearität der Einbettung, lässt sich die Summe umschreiben in:

$$\overrightarrow{P} = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^k J_2(P_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=-1}}^k J_2(P_i) = J_2(\bigoplus_{i_1}^{i_{k'}} P_{i_j}) - J_2(\bigoplus_{i_1}^{i_{k''}} P_{i_j})$$

mit $\bigoplus_{i_1}^{i_{k'}} P_{i_j}$ und $\bigoplus_{i_1}^{i_{k''}} P_{i_j}$ wieder Polytope aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

Nun wird die Berechnung vom Durchschnitt $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}}$ untersucht unter der Annahme von A.1. Dabei gelten die Vereinbarungen A.0.3.

A.0.6 Bemerkung Gegeben sei $\vec{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1} \in \vec{\mathcal{P}}^2$. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P} | I_P]$ und ein $l \in S^1 \setminus I_P$ mit $l \in (l_i, l_{i+1})$, wobei $l_i < l_{i+1} \in I_P$ ist. Man erhält:

- Ist $\vec{P} = J_2(P)$ mit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, dann gilt:

1. $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = * \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1) = * \Pi_{a_2}^{l_{i+1}} B_1^{l_{i+1}}(+1)$
2. $\overrightarrow{P_1(l)} = J_1(\Pi_{a_2}^l (* \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1))) = J_1(\Pi_{a_2}^l (* \Pi_{a_2}^{l_{i+1}} B_1^{l_{i+1}}(+1)))$
3. $p_2(l) = \langle B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}}, l \rangle = \langle * \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1), l \rangle$

- Ist $\vec{P} = -J_2(P)$ mit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, dann gilt:

1. $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = * \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1) = * \Pi_{a_2}^{l_{i+1}} B_1^{l_{i+1}}(-1)$
2. $\overrightarrow{P_1(l)} = J_1(\Pi_{a_2}^l (* \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1))) = J_1(\Pi_{a_2}^l (* \Pi_{a_2}^{l_{i+1}} B_1^{l_{i+1}}(-1)))$
3. $p_2(l) = \langle B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}}, l \rangle = \langle * \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1), l \rangle$

- Außerdem gilt in beiden Fällen:

$$B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}} = B_2^l$$

Obige Bemerkung besagt, dass bei der Bestimmung von „Stützpaaren“ zu einer Richtung l aus $S^1 \setminus I_P$ die Berechnung vom Durchschnitt $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}}$ wesentlich ist. Für eingebettete gerichtete Polytope oder ihre Inversen lässt sich dieser Durchschnitt sofort festlegen. Kommende Bemerkungen untersuchen genau diese Fälle und liefern Methoden zur direkten Berechnung der gesuchten Werte $\overrightarrow{P_1(l)}$ und $p_2(l)$.

A.0.7 Bemerkung Mit den gleichen Voraussetzung von Bemerkung A.0.6 sei $\vec{P} = J_2(P)$ beziehungsweise $\vec{P} = -J_2(P)$. Dann erhält man:

$$\overrightarrow{P_1(l)} = (-a, a) \tag{A.3}$$

$$p_2(l) = \langle w, l \rangle \tag{A.4}$$

indem man setzt

$$v = (p_2(l_i), B_1^{l_i}(-1)) \quad \text{bzw.} \quad v = (p_2(l_i), B_1^{l_i}(+1))$$

und dann berechnet

$$\begin{aligned} w &= (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, {}^\perp v \rangle) = (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i^\perp, v \rangle) \\ a &= \langle w, l^\perp \rangle \end{aligned}$$

Beweis: Aus der Bemerkung A.0.6 ist

$$\overrightarrow{P_1(l)} = J_1(\Pi_{a_2}^l(*\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1))) \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{P_1(l)} = J_1(\Pi_{a_2}^l(*\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1)))$$

und

$$p_2(l) = \langle *\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1), l \rangle \quad \text{bzw.} \quad p_2(l) = \langle *\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1), l \rangle$$

Anwendung von Lemma 2.3.5 und 2.3.4 mit

$$x = B_1^{l_i}(-1) \quad \text{bzw.} \quad x = B_1^{l_i}(+1)$$

liefert dann die Behauptung. □

A.0.8 Bemerkung Man habe ein $\overrightarrow{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$ und ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Ist \overrightarrow{P} gleich $J_2(P)$ und ist $0 \in P_2(\overrightarrow{P})$, dann ist $p_2(l) \geq 0$ für jedes $l \in S^1$. Ist \overrightarrow{P} gleich $-J_2(P)$ und ist $0 \in N_2(\overrightarrow{P})$, dann ist $p_2(l) \leq 0$ für jedes $l \in S^1$. Allgemeiner kann man $x_0 \in P_2(\overrightarrow{P})$ bzw. $x_0 \in N_2(\overrightarrow{P})$ annehmen, und $p_2(l) \geq \langle x_0, l \rangle$ bzw. $p_2(l) \leq \langle x_0, l \rangle$ betrachten.

Anhand obiger Bemerkung lässt sich die Bemerkung A.0.7 verallgemeinern:

A.0.9 Bemerkung Gegeben sei $\overrightarrow{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\overrightarrow{P}|I_P]$ von \overrightarrow{P} und ein $l \in S^1 \setminus I_P$ mit $l \in (l_i, l_{i+1})$, wobei $l_i < l_{i+1} \in I_P$ ist. Man nehme an, \overrightarrow{P} sei gleich $J_2(Q) - J_2(R)$ mit $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, und dass ein $x_0 \in \text{int}(P_2(\overrightarrow{P}) \cup N_2(\overrightarrow{P}))$ gibt. Dann gilt

$$\overrightarrow{P_1(l)} = (-a, a) \tag{A.5}$$

$$p_2(l) = \langle w, l \rangle \tag{A.6}$$

wobei man setzt:

$$\begin{aligned} v &= (p_2(l_i), B_1^l(-1)) && \text{falls } p_2(l_i) > \langle x_0, l_i \rangle \\ v &= (p_2(l_i), B_1^l(+1)) && \text{falls } p_2(l_i) < \langle x_0, l_i \rangle \end{aligned}$$

und dann berechnet:

$$\begin{aligned} w &= (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, {}^\perp v \rangle) = (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i^\perp, v \rangle) \\ a &= \langle w, l^\perp \rangle \end{aligned}$$

Die folgende Bemerkung liefert ein nützliches Ergebnis für die Anwendung der Bemerkungen A.0.7 und A.0.9.

A.0.10 Bemerkung Sei $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ und P wie in der Bemerkung A.0.6. Dann erhält man:

- Ist $\vec{P} = J_2(P)$ dann $B_1^l(-1) = -p_1^l(-1)$
- Ist $\vec{P} = -J_2(P)$ dann $B_1^l(+1) = -p_1^l(-1)$

für jedes $l \in S^1$. Im Allgemeinen stimmen die Werte der zwei linken Glieder mit einander nicht überein.

Auch in der folgenden Bemerkung wird ein Verfahren zur Berechnung des Durchschnitts $B_2^{l_i} \cap B_2^{l_{i+1}}$ (man blicke auf A.1 und A.2 zurück) angegeben. Da sie unter schwächeren Annahmen gilt, ist sie allgemeiner einsetzbar.

A.0.11 Bemerkung Gegeben sei $\vec{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1} \in \vec{\mathcal{P}}^2$. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ von \vec{P} und ein $l \in S^1 \setminus I_P$ mit $l \in (l_i, l_{i+1})$, wobei $l_i < l_{i+1} \in I_P$ ist. Man nehme an, \vec{P} sei gleich $J_2(Q) - J_2(R)$ mit $Q, P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$\overrightarrow{P_1(l)} = (-a, a) \tag{A.7}$$

$$p_2(l) = \langle v_u, l \rangle \tag{A.8}$$

wobei der Koeffizient a und der Vektor v_u folgendermaßen bestimmt werden:

- setze $v_{u'} = {}^* \Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(u')$ und $w_{u''} = {}^* \Pi_{a_2}^{l_{i+1}} B_1^{l_{i+1}}(u'')$ für alle $u', u'' \in S^0$

- bestimme $u, u''' \in S^0$ mit $\|v_u - w_{u'''}\|_2 = 0$
- setze $a = \Pi_{a_2}^l v_u$

Die Verfahren in A.0.7 und A.0.9 ergeben den gesuchten Durchschnitt direkt aus der reduzierten Darstellung. Nachteil dabei ist die Existenz und Bestimmung eines x_0 . In A.0.11 wird der Durchschnitt in \mathbb{R}^2 bestimmt. Der Nachteil dabei besteht darin, dass Reprojektionen erforderlich sind.

A.0.12 Bemerkung Man betrachte ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, und es gelten die Vereinbarungen A.0.3. Dann erhält man:

1. $\Pi_{a_2}^{l_i} \text{co}\{v_i, v_{i+1}\} = [\Pi_{a_2}^{l_i}\{v_i\}, \Pi_{a_2}^{l_i}\{v_{i+1}\}]$
2. $J_1([\Pi_{a_2}^{l_i}\{v_i\}, \Pi_{a_2}^{l_i}\{v_{i+1}\}]) = (-\Pi_{a_2}^{l_i}\{v_i\}, \Pi_{a_2}^{l_i}\{v_{i+1}\})$
3. $J_2(\Pi_{a_2}^{l_i} \text{co}\{v_i, v_{i+1}\}) = (J_1([\Pi_{a_2}^{l_i}\{v_i\}, \Pi_{a_2}^{l_i}\{v_{i+1}\}]), \delta^*(P, l_i))$
4. $\delta^*(P, l_i) = \langle l_i, v_i \rangle = p_2(l_i)$

A.0.13 Bemerkung Sei \vec{P} ein gerichtetes konvexes Polytop aus $\vec{\mathcal{P}}^2$ wie bisher betrachtet. Gegeben sei die reduzierte Darstellung von A.0.4. Dann gilt:

1. $B_2^{l_i} = \text{co}\{*\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(-1), *\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(+1)\}$
2. für $u \in S^0$ ist $*\Pi_{a_2}^{l_i} B_1^{l_i}(u) = (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, {}^\perp v \rangle) \in \mathbb{R}^2$ mit $v = (p_2(l_i), B_1^l(u))$

Klassen zum Raum $\vec{\mathcal{D}}^2$

Bestandteile

Ein gerichtetes Polytop $P \in \vec{\mathcal{P}}^2$ ist laut Definition 2.1.1 eine Funktion der Art:

$$\begin{aligned} \vec{P} : S^2 &\rightarrow \vec{\mathcal{D}}^1 \times \mathbb{R} \\ l &\mapsto (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l)) \end{aligned}$$

Dabei kommen mehrere mathematische Objekten im Spiel: Die Richtungen $l \in S^1$, die „Stützpaare“ $(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))$ und die gerichtete Intervalle $\overrightarrow{P_1(l)}$. Wenn

eine reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ betrachtet wird, taucht noch ein Element auf, und zwar die Indexmenge $I_P \subset S^1$.

Man kann sich die reduzierte Darstellung als eine endliche Liste von „Stützpaaren“ vorstellen, ein Paar zu jedem Index $l \in I_A$. Auf „Stützpaaren“ sind binäre Operationen definiert:

$$(\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l)) + (\overrightarrow{Q_1(l)}, q_2(l)) = (\overrightarrow{P_1(l)} + \overrightarrow{Q_1(l)}, p_2(l) + q_2(l)) \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda \cdot (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l)) = (\lambda \cdot \overrightarrow{P_1(l)}, \lambda \cdot p_2(l)) \quad (\text{A.10})$$

Ein Element $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$, in reduzierter Darstellung, $[\vec{P}|I_P]$ ist so eine Funktion

$$\vec{P} : S^1 \rightarrow \vec{\mathcal{D}}^1 \times \mathbb{R} \quad (\text{A.11})$$

$$l \mapsto \begin{cases} (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l)) & : \text{ falls } l \in I_P \\ \text{m.s.r.}(l, \vec{P}(l_i), \vec{P}(l_j)) & : \text{ falls } l \in S^1 \setminus I_P \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

wobei $l_i, l_j \in I_P$ Richtungen sind, für welche die Reprojektionen der Visualisierungen der entsprechenden „Stützpaare“ die Bedingungen

$$B_2^l = B_2^{l_i} \cap B_2^{l_j}$$

erfüllen. Dabei bezeichnet $\text{m.s.r.}(l, \vec{P}(l_i), \vec{P}(l_j))$ einen Algorithmus zur Berechnung der Elemente, die in der reduzierten Darstellung nicht aufgenommen wurden. Er wird auf Seite 147 besprochen. Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass Konstruktion gemäß $\overrightarrow{P_1(l)} \in \vec{\mathcal{P}}_0^2$ ist.

Die Funktion \vec{P} verwaltet die Liste $[\vec{P}|I_P]$ und ist zuständig für die Ausführung von:

- $[\vec{P}|I_P] \pm [\vec{Q}|I_Q]$ für $\vec{P}, \vec{Q} \in \vec{\mathcal{P}}^2$
- $\lambda \cdot [\vec{P}|I_P]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
- Aufforderung von $\text{m.s.r.}(\cdot, \cdot, \cdot)$

Zuordnungen

Jedes der oben genannten Elemente wird in einem Objekt einer gewissen spezialisierten Klasse umgesetzt. Es ergeben sich dadurch die im Folgenden erläuterten Zuordnungen.

$l \in S^2$	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>Versor2</i>
$\overrightarrow{P_1}(l)$	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>DirectedInterval</i>
$(\overrightarrow{P_1}(l), p_2(l))$	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>Supporting</i>
I_P	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>ReducedBundle</i>
Liste $[\overrightarrow{P} I_P]$	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>ReducedRepresentation</i>
$[\overrightarrow{P} I_P], +, -, *$	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>DirectedPolytop2</i>
m.s.r.	\leftrightarrow	Objekt der Klasse <i>MSR2</i>

$[\overrightarrow{P}|I_P]$ ist eine endliche Liste, auf der arithmetische Operationen zwischen „Stützpaaren“ definiert sind. Ein Objekt der Klasse *DirectedPolytop2* lässt alle diese Objekte zusammenarbeiten, indem es sie mit Operationen zusammen kapselt. Sie stellt den Teilraum \overrightarrow{D}^2 dar.

Anforderungen an die Klassen

Nun möchte man die Eigenschaften der Klassen festlegen. Zu diesem Zweck betrachte man nun $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \in \overrightarrow{P}^2$ mit $[\overrightarrow{P}|I_P]$ bzw. $[\overrightarrow{Q}|I_Q]$ und wolle, z. B. die Summe

$$[\overrightarrow{P}|I_P] + [\overrightarrow{Q}|I_Q]$$

berechnen. Die Durchführung einer solchen Operation erfordert die im Folgenden schematisierten Schritte (für die Differenz und das Produkt mit einem Skalar geht man analog vor):

A.0.14 Algorithmus (reduced sum computing)

1. **compute** $I_R := I_P | I_Q := I_P \cup I_Q$
2. **for** $l \in I_R$ **do**
3. **if** $l \in I_P$ **then**
4. **retrive** $\overrightarrow{P}(l)$
5. **else call** m.s.r.($l, \overrightarrow{P}(l_i), \overrightarrow{P}(l_j)$)
6. **if** $l \in I_B$ **then**
7. **retrive** $\overrightarrow{Q}(l)$

-
8. **else call** $\text{m.s.r.}(l, \vec{P}(l_i), \vec{P}(l_j))$
 9. **compute** $\vec{R}(l) := (\overrightarrow{P_1}(l), p_2(l)) + (\overrightarrow{Q_1}(l), q_2(l))$
 10. **store** $\vec{R}(l)$
 11. **set** $\vec{R} \equiv [\vec{R}|_{I_R}] := (\{\vec{R}(l)\}_{l \in I_R}, I_R)$

Dementsprechend weisen die beteiligte Klassen Eigenschaften auf und bekommen Zuständigkeiten zugewiesen. Hier sind diese zusammengefaßt:

- *Versor2*: hat Norm gleich 1; besitzt Methode zu Berechnung von ${}^\perp l$ und l^\perp ; kann mit *Vector2* skalar multipliziert werden; implementiert die Kreisanzordnung und die offenen Intervalle von S^1 ;
- *Supporting*: Speichert die Werte $\overrightarrow{P_1}(l)$ und $p_2(l)$; definiert die Summe und das Produkt in A.9;
- *ReducedBundle*: ordnet die Richtungen an; besitzt Methode $|$ für die Vereinigung von Indizes; besitzt Methode \in für $l \in (l_i, l_{i+1})$ mit l_i, l_{i+1} in *ReducedBundle*;
- *DirectedInterval*: implementiert den \mathbb{R} -Vektorraum $\vec{\mathcal{D}}^1$;
- *ReducedRepresentation*: Es handelt sich um einem *container* mit besonderen Fähigkeiten. Berechnet das zugehörige *ReducedBundle* „on the fly“;
- *DirectedPolytop2*: kapselt die Liste *ReducedRepresentation* zusammen mit der Arithmetik des \mathbb{R} -Vektorraumes $\vec{\mathcal{D}}^2$ und den Algorithmus *m.s.r.*. Die Klasse ist ein *functional object*;

Der Algorithmus *m.s.r.*

Nun wird der Algorithmus *m.s.r.* (*missing supporting reconstruction*) zur Herleitung der „Stützpaare“ besprochen, die in einer reduzierten Darstellung nicht aufgenommen werden. Zum Ausführen einer arithmetischen Operation ist ihre Herleitung notwendig: Man möge einen Blick auf das Algorithmus A.0.14 und auf die Sätze im Abschnitt 4.1 werfen. Die im Folgenden angegebene Varianten von *m.s.r.* ergeben sich aus den Bemerkungen vom Abschnitt „Vorbereitung“, 138.

Anwendungsbedingung der kommenden Algorithmen ist die Gültigkeit der folgenden *preconditions*: Wie schon erwähnt ist die Implikation A.1 entscheidend, und es gelten die Vereinbarungen A.0.3, so dass die Fälle $k = 1, 2$ gesondert behandelt werden.

A.0.1 preconditions

1. **sort** I_P
2. $\#I_P \geq 3$
3. **if** $\#I_P < 3$ **then handle**

Es gibt zwei Vorgehensweise in den behandelten Verfahren. In der einen wird der Durchschnitt zweier „benachbarter“ „Stützpaare“ direkt berechnet aus der Kenntnisse dieser „Stützpaare“. In der anderen wird er in \mathbb{R}^2 durch Reprojektion bestimmt. Der Algorithmus A.0.15 gehört zur ersten Variante: Er ergibt sich aus den Bemerkungen A.0.7, A.0.9, A.0.10.

A.0.15 Algorithmus (missing supporting reconstruction - Variante I) *Es liege ein gerichtetes Polytop $\vec{P} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ vor. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ und ein $l \in S^1 \setminus I_P$ mit $l \in (l_i, l_{i+1})$, wobei $l_i < l_{i+1} \in I_P$ ist. Man nehme an, \vec{P} sei gleich $J_2(Q) - J_2(R)$ mit $Q, P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, und dass ein $x_0 \in P_2(\vec{P}) \cup N_2(\vec{P})$ existiert. Dann erhält man das „Stützpaar“ $\vec{P}(l)$ folgendermaßen:*

1. **begin**
2. **compute** $l_i \in I_P \mid l \in (l_i, l_{i+1})$
3. **retrieve Supporting** $(\overrightarrow{P_1(l_i)}, p_2(l_i))$
4. **set** $v := (p_2(l_i), -p_1^i(-1))$
5. **compute** $w := (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, {}^\perp v \rangle)$
6. **compute** $a := \langle w, l^\perp \rangle$
7. **compute** $p_2 := \langle w, l \rangle$

8. **set** $\vec{P}(l) := ((-a, a), p_2) = (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))$

9. **end**

Folgender Algorithmus gehört der zweiten Variante an und ergibt sich aus der Bemerkung A.0.11. Obwohl der Algorithmus A.0.15 mit einem gewissen Erfolg angewandt wurde, hat man die Entscheidung getroffen, A.0.16 in der Implementierung aufzunehmen, da er flexibler und schneller einzuprogrammieren ist. Seine Realisierung verteilt sich auf mehrere Klassen. Genauer auf: *MSR2*, *MostSimilar* und *Projection2*.

A.0.16 Algorithmus (missing supporting reconstruction - Variante II) *Es liege ein gerichtetes Polytop $\vec{P} := (\overrightarrow{P_1(l)}, p_2(l))_{l \in S^1} \in \vec{\mathcal{P}}^2$ vor. Man betrachte eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P} | I_P = \{l_1, \dots, l_k\}]$ von \vec{P} und ein $l \in S^1 \setminus I_P$. Man nehme an, \vec{P} sei gleich $J_2(Q) - J_2(R)$ mit $Q, P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Dann erhält man das Stützpaar zu l mit folgendem Verfahren:*

1. **begin**

2. **compute** $l_i, l_{i+1} \in I_P \mid l \in (l_i, l_{i+1})$

3. **retrieve** $(\overrightarrow{P_1(l_i)}, p_2(l_i))$, $(\overrightarrow{P_1(l_{i+1})}, p_2(l_{i+1}))$

4. **for** $u, u' = -1, +1$ **do**

5. **set** $v := (p_2(l_i), B_1^{l_i}(u))$

6. **compute** $v_u := (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, \perp v \rangle)$

7. **set** $w := (p_2(l_{i+1}), B_1^{l_{i+1}}(u'))$

8. **compute** $v_{u'} := (\langle l_{i+1}, w \rangle, \langle l_{i+1}, \perp w \rangle)$

9. **for** $u, u' = -1, +1$ **do**

10. **if** $\|v_u - v_{u'}\| < \epsilon$ **then**

11. **store** u

12. **compute** $p_2 := \langle v_u, l \rangle$

13. **compute** $a := \langle v_u, l^\perp \rangle$
14. **set** $\vec{P}(l) := ((-a, a), p_2) = (\overline{P_1(l)}, p_2(l))$
15. **end**

Die Deklaration der Klasse

Im Folgenden wird die Klasse *DirectedPolytop2* angegeben. Ferner werden die dazugehörige Methoden und ihre Schnittstelle erläutert:

```

class DirectedPolytop2
{
  private :

    ReducedRepresentation _RRep; [M1]

    Supporting operator [] (const Versor2& l) const ; [M2]

  public :

    DirectedPolytop2 operator +() const { return * this ; } [M3]
    DirectedPolytop2 operator +(const DirectedPolytop2& DPolytop) const ; [M4]
    DirectedPolytop2 operator -() const ; [M5]
    DirectedPolytop2 operator -(const DirectedPolytop2& DPolytop) const ; [M6]
    DirectedPolytop2 operator *(const FT& lambda) const ; [M7]

    Supporting& operator () (const Versor2& l) { return _RRep[l] ; } [M8]

    const ReducedBundle Bundle() const { return _RRep.Bundle () ; } [M9]
};

```

Es folgt eine kurze Beschreibung der Mitglieder der Klasse:

[M1] Diese *member variable* speichert die Liste $[\vec{P}|I_P]$, d.h. der Richtungsindex I_P und die zugehörigen Stützpaare $\vec{P}(l_i)$, $l_i \in I_P$.

[M2] Ist zuständig zur M.S.R. Es realisiert die Funktion A.11.

[M3] - [M7] Das sind die binären und unären Operationen der Arithmetik von \vec{D}^2 . Die Methode **[M4]**, zum Beispiel, realisiert A.0.14.

[M8] Diese Methode lässt die Klasse verhalten, wie eine Funktion:

$$\vec{P}(\cdot) : S^1 \rightarrow \vec{D}^1 \times \mathbb{R}$$

Es ist zu beachten, dass die Anweisung $\vec{P}(l) = (\vec{P}_1, p_2)$ mit $\vec{P}_1 \in \vec{\mathcal{D}}^1$ und $p_2 \in \mathbb{R}$ die Zuordnung vom „Stützpaar“ $(\vec{P}_1, p_2) \in \vec{\mathcal{D}}^1 \times \mathbb{R}$ zur Richtung l bewirkt. Diese Methode erlaubt dadurch auch die Erzeugung von Elementen $\vec{P} \in \vec{\mathcal{D}}^2$.

[M9] Berechnet das reduzierte Orientierungsbündel I_P . Dies erfolgt „on the fly“.

Klassen zur Einbettung

Ein Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ liege vor, und dabei gelten die Bezeichnungen und Vereinbarungen von A.0.3. Die Definition 3.1.1 der Einbettung ergibt für die Dimension zwei:

$$J_2(P) = (J_1(\Pi_{\delta^*(\cdot, P)}^l P^l, \delta^*(l, P)))_{l \in S^1}$$

wobei

$$P^l = \begin{cases} \text{co}\{v_i, v_{i+1}\} & : l = l_i \\ \{v_i\} & : \forall l \in (l_i, l_{i+1}) \end{cases}$$

für ein $l_i \in I_P$ und $i = 1, \dots, k$. Die Abbildung J_2 wirkt also nur auf dem Rand ∂P vom P , d.h. auf der Vereinigung $\cup_{i=1}^k \text{co}\{v_i, v_{i+1}\}$ der Kanten: Bei der Durchführung der Einbettung muss nur der Rand berücksichtigt werden. Außerdem genügt es anhand der Bemerkung A.0.4 die Richtungen l_i im Index I_P zu berücksichtigen, um direkt eine reduzierte Darstellung des eingebetteten gerichteten Polytops zu berechnen. Dies zusammen noch mit der Bemerkung A.0.12 führt zum Algorithmus A.0.17. Zur Ausführung dieses Algorithmus müssen die folgende *preconditions* geprüft werden:

A.0.2 preconditions

1. **begin**
2. **if** $\text{vert}(P) \neq \emptyset$ **and** P *simple* **then**
3. **if** P *not konvex* **then rise error**
4. **if** P *not counterclockwise oriented* **then orient Edges**
5. **else rise error**

6. end

Solche *preconditions* erleichtern die Durchführung einiger Schritten im Algorithmus, sind aber nicht wesentlich. Precondition *counterclockwise oriented* spielt eine wichtige Rolle bei der Ermittlung der äußeren Normalen: Diese ergeben sich durch *counterclockwise* Umdrehung der Richtung einer Kante (Die CGAL-Klasse *Polygon2* kommt mit Methoden zur Rückgabe dieser Richtungen). Man sollte auch dabei darauf beachten, dass die Implikation A.1 gilt.

Nun kann das Verfahren zur Einbettung von P und gleichzeitigen Erzeugung von $[\vec{P}|I_P]$ angegeben werden.

A.0.17 Algorithmus (piecewise boundary embedding) *Es liege ein konvexes kompaktes Polytop $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{vert}(P) = \{v_1, \dots, v_k\}$ vor. Es seien die Bedingung A.0.3 erfüllt. Dann erhält man eine reduzierte Darstellung des konvexen gerichteten Polytops $\vec{P} := J_2(P)$ folgendermaßen:*

```

 $k \geq 3$   1. begin
           2.   for  $i = 1, \dots, k$  do
           3.     compute  $l_i \in S^1 \mid l_i \perp \text{co}\{v_i, v_{i+1}\}$ 
           4.     compute  $a_2 := \langle l_i, v_i \rangle$ 
           5.     compute  $\alpha_1 := \langle l_i^\perp, v_i \rangle$  and  $\alpha_2 := \langle l_i^\perp, v_{i+1} \rangle$ 
           6.     set  $\vec{A}(l_i) := ((-\alpha_i, \alpha_{i+1}), a_2)$ 
           7.   end

```

Die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ werden als Ausnahmen behandelt.

```

 $k = 1, 2$   1. begin
           2.   for  $i = 1$  do
           3.     if  $k = 1$  then
           4.       set  $l_i := (0, 1)$ 
           5.     else
           6.       compute  $l_i \in S^1 \mid l_i \perp \text{co}\{v_i, v_{i+1}\}$ 
           7.       compute  $a_2 := \langle l_i, v_i \rangle$ 

```

```

8.      compute  $\alpha_1 := \langle l_i^\perp, v_i \rangle$ 
9.      if  $k = 0$  then
10.         set  $\alpha_2 := \alpha_1$ 
11.      else
12.         compute  $\alpha_2 := \langle l_i^\perp, v_{i+1} \rangle$ 
13.      set  $\vec{A}(l_i) := ((-\alpha_i, \alpha_{i+1}), a_2)$ 
14. end

```

Die Realisierung des Algorithmus ist auf verschiedene Klassen verteilt. Diese sind: *Embedding2*, *Projection2*.

Klassen zur Visualisierung

Man betrachte ein gerichtetes Polytop $P \in \vec{\mathcal{P}}^2$, und nehme an, es sei von der Form $J_2(Q) - J_2(R)$ für gewisse Polytope $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Ihre Kenntnisse ist nicht wesentlich. Es sei daran erinnert, dass ein solches \vec{P} durch endlich viele Durchführungen arithmetischer Operationen auf einbetteten gerichteten Polytopen zu Stande kommen kann, etwa:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot J_2(P_i) \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

für $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

Eine (minimale) reduzierte Darstellung $[\vec{P}|_{I_P}]$ von \vec{P} zum Richtungsindex $I_P \subset S^1$ liege vor. Dann hat man aus der Definition 4.1.5, dass für den Rand $B_2(P)$ gilt:

$$\bigcup_{l_i \in I_P} B_2^{l_i} = B_2(\vec{P})$$

Der Rand lässt sich also durch Reprojektion der Stützpaare aus $[\vec{P}|_{I_P}]$ berechnen. Außerdem ist

$$d(l_i, \vec{P}) = \text{dmax}(\vec{P}) = 2$$

so dass $B_2^{l_i}$ eine Strecke $\text{co}\{s_i, s_{i+1}\}$ für jedes $l_i \in I_P$ ist. Die Punkte s_i, s_{i+1} werden mit Hilfe der Bemerkung A.0.13 berechnet.

Die Richtungen $l_i \in I_P$ stellen dar, was hier als reduziertes Orientierungsbündel bezeichnet wird. Sie entsprechen angelegten Vektoren $\tilde{l}_i := (\hat{s}_i, l_i)$, wobei \hat{s}_i den Mittelpunkt der Strecke $\text{co}\{s_i, s_{i+1}\}$ bezeichnet.

Folgender Algorithmus dient der Berechnung vom Rand $B_2(\vec{P})$ und des reduzierten Orientierungsbündels $\{\tilde{l}_i\}_{l_i \in I_P}$.

A.0.18 Algorithmus (piecewise boundary tracing) *Ein gerichtetes Polytop \vec{P} der Form $J_2(Q) - J_2(R)$ für gewisse Polytope $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und eine (minimale) Darstellung $[\vec{P}|I_P]$ liegen vor. Dann werden der Rand $B_2(P)$ der Visualisierung und das reduzierte Orientierungsbündel folgendermaßen berechnet.*

1. **begin**
2. **for** $l_i \in I_P$ **do**
3. **retrieve** $\vec{P}(l_i) = (\overline{P_1(l_i)}, p_2(l_i))$
4. **set** $v := (p_2(l_i), B_1^l(-1))$ **and** $v' := (p_2(l_i), B_1^l(+1))$
5. **compute** $s_i := (\langle l_i, v \rangle, \langle l_i, \perp v \rangle)$ **and** $s_{i+1} := (\langle l_i, v' \rangle, \langle l_i, \perp v' \rangle)$
6. **compute** \hat{s}_i **of** $\overline{s_i s_{i+1}}$
7. **store** $\overline{s_i s_{i+1}}$ **and** \tilde{l}_i
8. **end**

Zuständig für die Rechnungen in A.0.18 ist die Klasse *Visualisation2*. Das tatsächliche Zeichnen auf Ausgabegeräte liefert aber die Klasse *VisualisationStream* in Zusammenarbeit mit anderen.

Literaturverzeichnis

- [Bai95] Robert Baier. *Mengenwertige Integration und die diskrete Approximation erreichbarer Mengen*, volume Heft 50. Bayreuther Mathematische Schriften, 1995. ISSN 0172-1062.
- [BF01a] Robert Baier and E. Farkhi. Part i. The space of directed sets. Differences of convex compact sets in the space of directed sets. *Set-Valued Anal*, 9(3):217–245, 2001.
- [BF01b] Robert Baier and E. Farkhi. Part ii. The space of directed sets. Differences of convex compact sets in the space of directed sets. *Set-Valued Anal*, 9(3):247–272, 2001.
- [BKOS97] M. Berg, M. Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational geometry: algorithms and applications*, volume Heft 50. Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-61270-X.
- [Gam96] Erich Gamma. *Entwurfsmuster: Elemente wiederverwendbarer objektorientierter Software*. Addison-Wesley-Longman, 1996. ISBN 3-8273-1862-9 Originalausgabe: Design patterns ISBN 0-201-63361-2.
- [HUL93] Jean-Baptiste Hiriott-Urruty and Claude Lemarechel. *Convex Analysis and Minimization I*. Springer-Verlag, 1993.
- [Lip96] Stanley B. Lippman. *Inside the C++ object model*. Addison-Wesley, 1996. ISBN 0-201-83454-5.
- [Mar77] Jürg T. Marti. *Konvexe Analysis*. Birkhäuser Verlag Basel, 1977. ISBN 3-7643-0839-7.

- [MB85] S. MacLane and G. Birkhoff. *Algebra*. Mursia, 1985.
- [Mye95] Nathan C. Myers. Traits: a new useful template technique. *C++ Report*, 1995.
- [Oua] Steve Oualline. *Practical C++ programming*. A nut shell handbook. O'Reilly&Associates. ISBN 1-56592-139-9.
- [Roc97] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1997. ISBN 0-691-01586-4.
- [Sch93] Rolf Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, 1993. ISBN 0-521-35220-7.
- [Ser89] Edoardo Sernesi. *Geometria I*. Bollati Boringhieri, 1989.
- [SP00] Perdita Stevens and Rob Pooley. *Using UML. Software engineering with objects and components*. Addison-Wesley, 2000. ISBN 0-201-64860-1.
- [SS] Tan Kiat Shi and Willi-Hans Steeb. *Symbolic C++: An introduction to Computer algebra using object-oriented programming*. Springer-Verlag. ISBN 981-3083-55-7.
- [Web94] Roger Webster. *Convexity*. Oxford University Press, 1994. ISBN 0-19-853147-8.
- [Zie95] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, 1995. ISBN 0-387-94329-3.

Index

- Antiprojektion, 28
- CGAL, xxi
- d-Simplex, 2
- Differenz
 - Demynov, 20
 - Minkowski, 20
 - Punktweise, 18
 - von gerichteten Mengen, 26
 - von Intervallen, 19
 - von reduzierten Darstellungen, 80
- Differenzen
 - Vergleich, 42
- Dimension
 - affine Dimension, 1
- Einbettung, 38
 - Linearität, 49
- gerichtete Menge
 - $\overrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)}$, 38
 - Betrag, 27
 - Definition, 24
 - Einbettung, 38
 - gemischter Teil, 32
 - Infimum, 27
 - konkav, 39
 - konvex, 39
 - negativer Teil, 32
 - Norm, 24, 25
 - Operationen, 26
 - Ordnung, 26
 - positiver Teil, 32
 - Stützpaar, 25
 - Supremum, 27
 - Visualisierung, 32
 - vollständige Darstellung, 25
- gerichteter Punkt, 52
- Implementierung
 - der gerichteten Intervallen, 135
 - der gerichteten Polytopen, 138
 - Einbettung, 151
 - Klassenhauptsysteme, 133
 - Programmierungssprache, 132
 - Visualisierung, 153
- Normale
 - äußere, 55
 - Kreisanordnung, 56
- Orientierungsbündel, 34
- Polytop
 - \mathcal{H} -Polytop, 2
 - \mathcal{V} -Polytop, 2
 - Definition, 2

- gerichtetes, 65
- Operationen mit eingebetteten, 52
- Produkt, 3
- standard, 3
- summe zweier eingebetteter, 59
- Projektion, 28
- reduzierte Darstellung
 - arithmetische Operationen, 76
 - Berechnung, 68
 - Definition, 67
 - Differenz, 80
 - Eigenschaften, 68
 - minimal, 67
 - Multiplikation, 79
 - Summe, 76
- Richtung
 - Intervall, 56
 - Kreisanordnung, 56
- Stützfunktion, 8
- Stützpunkt, 9
- Strukturen des Raumes \vec{D}^n , 28
- Summe
 - inverse, 18
 - Minkowski, 6
 - von gerichteten Mengen, 26
 - von reduzierten Darstellungen, 76
- Visualisierung, 32
 - gemischter Teil, 32
 - negativer Teil, 32
 - positiver Teil, 32

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig von mir angefertigt wurde und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet wurden.

Bayreuth, den 1 Februar 2003

Gilbert Perria

CD-Rom mit dem Quellcode und der elektronischen Dokumentation