



UNIVERSITÄT  
BAYREUTH

# Kontrollierbarkeitsabschätzungen der Wellengleichung

Bachelorarbeit

von

Michael Schamel

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK  
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 29. September 2011

Betreuung:  
Prof. Dr. L. Grüne



# Danksagungen

To Sonja,  
you made it possible,  
thank you!

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Grüne bedanken, dessen Tür jederzeit für Fragen und Probleme offen steht und der trotz vieler Termine und Arbeit immer nett und hilfsbereit ist.

Des Weiteren möchte ich mich bei Karl Worthmann und Nils Altmüller für die bisher interessanteste und lehrreichste Aufgabe meines Studiums bedanken - die mir bisher unheimlich viel Spass bereitet hat und an der ich hoffentlich weiterarbeiten darf. Vielen Dank für die viele Zeit, die ihr in meine Betreuung gesteckt habt und ich hoffe, dass ihr an meiner manchmal sehr ingenieurhaften Art nicht zu sehr verzweifelt seid.

Bedanken möchte ich mich auch beim gesamten Lehrstuhl, insbesondere bei Thomas Jahn und Florian Müller - die Pausen mit euch genieße ich sehr. ;)

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Familie, allen voran meine Eltern, die mir als tolle Vorbilder dienen und die mich immer unterstützt und an mich geglaubt haben - auch in eher schlechten Zeiten. Bedanken will ich mich auch bei meiner Schwester und ihrem Freund, die mich während dieser Arbeit in unserer WG ertragen mussten.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freunden besonders für das Verständnis, dass ich nicht immer dabei sein konnte und oft im Stress war.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Beispiel . . . . .	1
1.2	Problemstellung . . . . .	2
1.3	Motivation . . . . .	5
1.4	Aufbau . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>9</b>
2.1	Fourierreihen . . . . .	9
2.2	Konvergenz der Fourierreihen . . . . .	10
2.3	Vergleich von Reihen . . . . .	11
2.4	Differenzierbarkeit von Fourierreihen . . . . .	12
2.5	Fourierreihendarstellung von Funktionen . . . . .	15
2.6	Gliedweise Integration . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Lösung der Wellengleichung als Fourierreihe</b>	<b>19</b>
3.1	Ansatz . . . . .	20
3.2	Überprüfung der Lösungsformel . . . . .	22
3.3	Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung aus der Lösungsformel . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Energieabnahme der Wellengleichung</b>	<b>29</b>
4.1	Entwicklung der Ableitungen der Lösung als Fourierreihen . . . . .	30
4.2	Energieabnahme . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Kontrollierbarkeitsabschätzung mit gewichteter Energienorm</b>	<b>43</b>
5.1	Berechnung von $C$ . . . . .	44
5.2	Berechnung von $\sigma$ . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>MAPLE-Quelltexte</b>	<b>I</b>
A.1	Lösungsformel der Wellengleichung . . . . .	I

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Index</b>	<b>VI</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Vor der mathematischen Einführung ein kleines Beispiel, das das Ziel dieser Arbeit motiviert.

### 1.1 Beispiel

Abbildung 1.1 stellt eine schwingende Saite zum Startzeitpunkt dar. Die Auslenkung der Saite ist hierbei abhängig von der Ortsvariablen  $x$ . Schwingt die Saite nun, so ändert sich die Auslenkung der Saite am Ort  $x$  mit fortlaufender Zeit - die Saite ist also ebenfalls von der Zeit  $t$  abhängig. Insgesamt wird die Saite durch eine Funktion  $y(t, x)$ , die von  $x$  und  $t$  abhängt beschrieben. Sie ist zudem abhängig davon, wie sich die Saite an den Enden verhält. Ist die Saite eingespannt, d.h. der Wert von  $y$  am Rand ist fest gegeben, so spricht man von einer Dirichlet-Randbedingung. Ist hingegen die Ableitung von  $y$  nach  $x$  gegeben, so spricht man von einer Neumann-Randbedingung. Desweiteren ist die Saite abhängig von der Auslenkung zum Startzeitpunkt sowie deren Ableitung bezüglich des Ortes - den Anfangsbedingungen.

Geht man davon aus, dass keine Reibung auftritt, so schwingt die Saite unendlich lange. Wir wollen nun die rechte Seite durch eine sogenannte Steuerung  $u(t)$  so beeinflussen, dass sich die Saite nach endlicher Zeit in der Ruhelage befindet. Dazu hilft ein Maß, das Kosten genannt wird, das besagt, wie nahe man bereits am Ziel - der Ruhelage ist. Hierbei wird oft die Energie benutzt - in diesem Fall die Summe aus Lageenergie und Bewegungsenergie. Die Steuerung wird nun so gewählt, dass die Energie in den nächsten  $N$  Zeitschritten maximal abnimmt -  $N$  wird Horizont genannt. Iteriert man dieses Verfahren - man berechnet also eine optimale Steuerung, wendet diese an, berechnet eine neue optimale Steuerung usw., so wird das Verfahren MPC genannt.

Die Frage ist nun ob man nach endlicher Zeit die Ruhelage erreichen kann - man spricht dann davon, dass die Saite kontrollierbar ist und vor allem wie weit man für die Berechnung der Steuerung in die Zukunft schauen muss. Die erste Frage wird direkt durch meine Arbeit

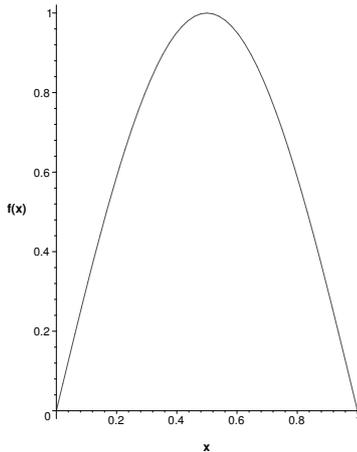


Abbildung 1.1: Schwingende Saite zum Startzeitpunkt

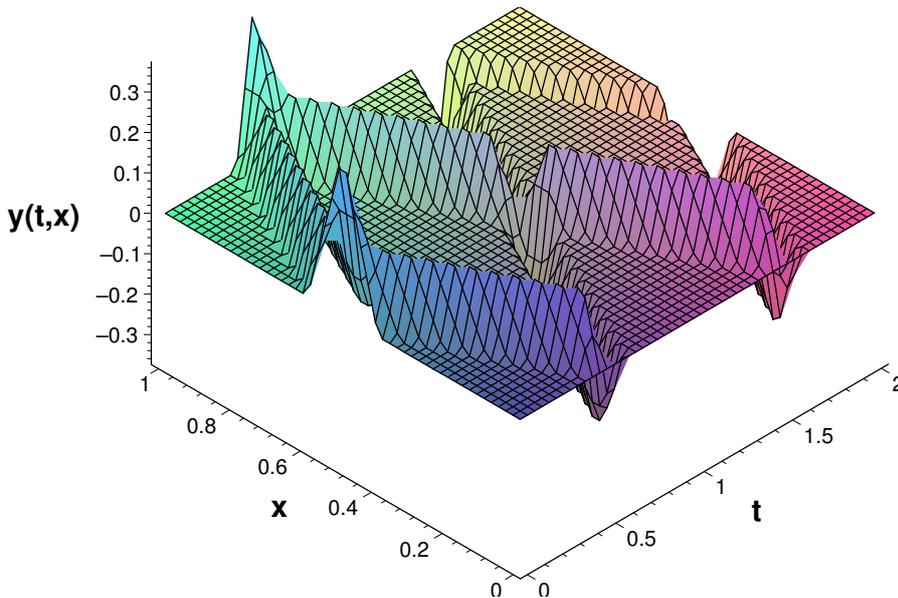
beantwortet, für die zweite Frage berechne ich zwei Konstanten anhand derer man den Horizont  $N$  - also die Anzahl an Schritten, die in die Zukunft geschaut werden muss, abschätzen kann.

## 1.2 Problemstellung

In dieser Arbeit geht es um Kontrollierbarkeitsabschätzungen der Wellengleichung. Daher werde ich zunächst die Wellengleichung und Kontrollierbarkeit definieren.

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung, d.h. eine Gleichung in der Ableitungen nach mehreren Variablen vorkommen. In der Wellengleichung und vielen anderen partiellen Differentialgleichungen teilt man diese Variablen auf in Zeitvariablen und Ortsvariablen. In der Regel gibt es nur eine Zeitvariable, daher spricht man für  $n$  Ortsvariablen von der  $n$ -dimensionalen Wellengleichung. In Beispiel 1.1 wird die schwingende Saite durch die Funktion  $y(t, x)$  beschrieben - diese ist die Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung.

Die Wellengleichung ist gegeben durch  $y_{tt} = c^2 y_{xx}$ . Die Konstante  $c$  wird hierbei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellengleichung genannt. Abbildung 1.2 zeigt die Lösung der Wellengleichung im Verlauf der Zeit. Zur Startzeit  $t = 0$  ist eine Funktion gegeben, diese breitet sich im Laufe der Zeit nach links und rechts aus. Je größer die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , desto schneller breitet sich die anfangs gegebene Funktion aus. Die Abkürzung  $y_{xx}$  und analog  $y_{tt}(t, x)$  in der Wellengleichung entspricht der zweimaligen Ableitung von  $y(t, x)$  nach  $x$  bzw.  $t$ , d.h.  $y_{xx}(t, x) = \frac{d^2}{dx^2} y(t, x)$  bzw.  $y_{tt}(t, x) = \frac{d^2}{dt^2} y(t, x)$ .

Abbildung 1.2: Lösung der Wellengleichung für  $u(t) \equiv 0$ 

Betrachtet man die schwingende Saite aus Beispiel 1.1, so hatte diese zwei Enden, die Ortsvariable  $x$  ist also beschränkt. Daher gehen wir im Folgenden davon aus, dass  $x \in [0, L] := \Omega$  - die Enden der Saite befinden sich also in  $x = 0$  und  $x = L$ . Wie im Beispiel erwähnt schwingt die Saite ohne Einwirkung unendlich lange. Daher beginnen wir bei der Startzeit  $t = 0$  und lassen die Saite unendlich lange schwingen, d.h.  $t \in [0, \infty[$ .

Damit die Wellengleichung eine eindeutige Lösung besitzt, müssen - wie in Beispiel 1.1 eingeführt - Anfangsbedingungen und Randbedingungen gestellt werden. Als Anfangsbedingung benötigt man hierbei den Zustand der Lösung sowie der Ableitung der Lösung zum Startzeitpunkt, d.h.  $t = 0$ . Als Randbedingung betrachten wir in dieser Arbeit am linken Rand die homogene (d.h. identisch der Nullfunktion) Dirichlet-Randbedingung  $y(t, 0) = 0$  sowie die inhomogene Neuman-Randbedingung  $y_x(t, L) = u(t)$ . Insgesamt ergibt sich also folgende Problemstellung (vgl. Abbildung 1.3 links) :

**Definition 1.1** (ARWP der 1-dim. Wellengleichung).

Seien  $f(x), g(x)$  sowie  $u(t)$  vorgegeben und  $L > 0$ . Dann heißen folgende Gleichungen Anfangsrandwertproblem (kurz ARWP) der 1-dimensionalen Wellengleichung :

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad \text{auf } [0, \infty[ \times \Omega \quad (1.1)$$

$$y(0, x) = f(x) \quad y_t(0, x) = g(x) \quad \text{auf } \Omega \quad (1.2)$$

$$y(t, 0) = 0 \quad y_x(t, L) = u(t) \quad \text{auf } [0, \infty[ \quad (1.3)$$

Für die numerischen Rechnungen sowie die analytischen Beweise ist das Intervall  $[0, \infty[$  sehr unpraktisch - man hätte gerne ein beschränktes Intervall. Daher diskretisiert man das

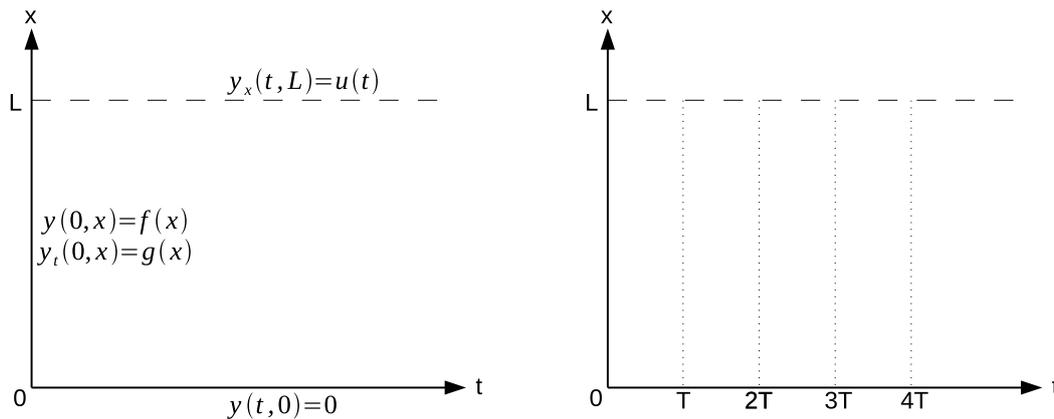


Abbildung 1.3: Kontinuierliche (links) und diskrete (rechts) Problemstellung des ARWP der Wellengleichung

Zeitintervall obiger Gleichung, d.h. man betrachtet obiges Problem auf den beschränkten Intervallen  $[(i-1)T, iT]$ .  $T > 0$  wird hierbei die Zeitschrittweite genannt. Das rechte Bild in Abbildung 1.3 zeigt hierbei die Aufteilung des Zeitintervalls. Im ersten Schritt löst man für  $i = 1$  also (1.1) - (1.3) auf dem Zeitintervall  $[0, T]$ . Für die Anfangsbedingungen des zweiten Schrittes wird nun die berechnete Lösung des ersten Schrittes zur Zeit  $T$  genommen. Iteriert man dies nun weiter, so erhält man für  $i \rightarrow \infty$  die Lösung des oben angegebenen Anfangsrandwertproblems. Grund hierfür ist, dass die Wellengleichung ein dynamisches System ist, d.h. die Lösung ist nicht abhängig von der Anfangszeit sondern nur den Anfangsbedingungen - damit entspricht also die Lösung der Teilintervalle der Lösung der zeitlich unbeschränkten Wellengleichung auf diesem Teilintervall.

In Beispiel 1.1 sowie als Neumann-Randbedingung am rechten Rand tritt die sogenannte Steuerung  $u(t)$  auf. Im Beispiel hilft diese, die Saite in ihre Ruhelage zu steuern, d.h. die Saite lässt sich kontrollieren. Bevor man allerdings den Begriff Kontrollierbarkeit allgemein definieren kann, benötigt man ein sogenanntes Kontrollsystem - im Beispiel die Saite, das man kontrollieren will. Dort wurde anhand der Steuerung und dem Zustand der Saite im letzten Zeitschritt der neue Zeitschritt berechnet. Dies lässt sich für diskrete Systeme verallgemeinern. Nach [4] sind Kontrollsysteme dynamische Systeme in kontinuierlicher oder diskreter Zeit, die von einem Parameter  $u$  abhängen, der sich abhängig von der Zeit oder dem Zustand des Systems verändern kann. Damit ergibt sich folgende an [1] orientierte Definition :

**Definition 1.2** (Diskretes Kontrollsystem).

Seien  $Z$  und  $U$  Funktionenräume sowie  $F : Y \times U \rightarrow Y$ . Dann ist ein diskretes Kontrollsystem gegeben durch ein dynamisches System :

$$y(n+1) = F(y(n), u(n))$$

Für die diskrete Wellengleichung entspricht  $y(n) := y(nT, x)$ , wobei  $y$  hierbei die Lösung des kontinuierlichen Problems ist. Desweiteren entspricht  $F$  der Lösung des Anfangsrandwertproblems der Wellengleichung.

Zusätzlich zu einem Kontrollsystem, benötigen wir wie in Beispiel 1.1 erklärt eine Art Maß oder Gütefunktion, das besagt, wie nahe man bereits am erklärten Ziel ist. Diese Funktion wird Stufenkosten genannt. Anschaulich wird über eine Funktion  $\rho$  die zeitliche und örtliche Änderung der Welle gemessen. Am Beispiel der Saite befinden wir uns in der Ruhelage, wenn die zeitliche und örtliche Änderung Null ist. Dies liegt daran, dass wir uns am linken Rand bereits in der Ruhelage befinden - ohne eine Änderung ist damit auch der Rest der Welle in der Ruhelage. Wir definieren die Stufenkosten also folgendermaßen :

**Definition 1.3** (Diskrete Stufenkosten).

Die diskreten Stufenkosten  $l : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  sind definiert durch :

$$l(y_u(n), u(n)) := \underbrace{\int_0^L \rho(z_x(n), y_t(n)) dx}_{:=l^*(y_u(n), u(n))} + \lambda \int_0^T u(n)^2$$

Für  $\rho$  bietet sich z.B. die Energie (vgl. [8, Kapitel 9.1]) oder die gewichtete Energie an, auf die ich später in dieser Arbeit eingehen werde. Anschaulich bedeutet (exponentielle) Kontrollierbarkeit für ein diskretes System, dass für alle Problemfälle eine Steuerung existiert, sodass die Stufenkosten exponentiell fallend sind. Für die schwingende Saite in Beispiel 1.1 bedeutet dies, dass für alle Anfangsauslenkungen eine Steuerung existiert, sodass sich mit dieser Steuerung die Saite in die Ruhelage steuern lässt. Mit Hilfe des Kontrollsystems und den Stufenkosten lässt sich die Kontrollierbarkeit also definieren durch :

**Definition 1.4** (Exponentielle Kontrollierbarkeit).

Ein System ist exponentiell kontrollierbar bezüglich den Stufenkosten  $l(y_u(n), u(n)) \Leftrightarrow$

$$\exists C \geq 1, \sigma \in ]0, 1[ : \quad \forall y \in Y \exists u \in U : \quad l^*(y_u(n), u(n)) \leq C \sigma^n l^*(y)$$

Die für diese Arbeit benötigten Grundlagen sind hiermit definiert. Im folgenden Abschnitt werde ich nun diese Arbeit motivieren.

## 1.3 Motivation

Wie in Beispiel 1.1 erwähnt, lassen sich Konstanten, die man für die Kontrollierbarkeitsabschätzung braucht dazu benutzen um den Horizon in einem MPC-Verfahren abzuschätzen. Daher werde ich kurz das MPC-Verfahren einführen.

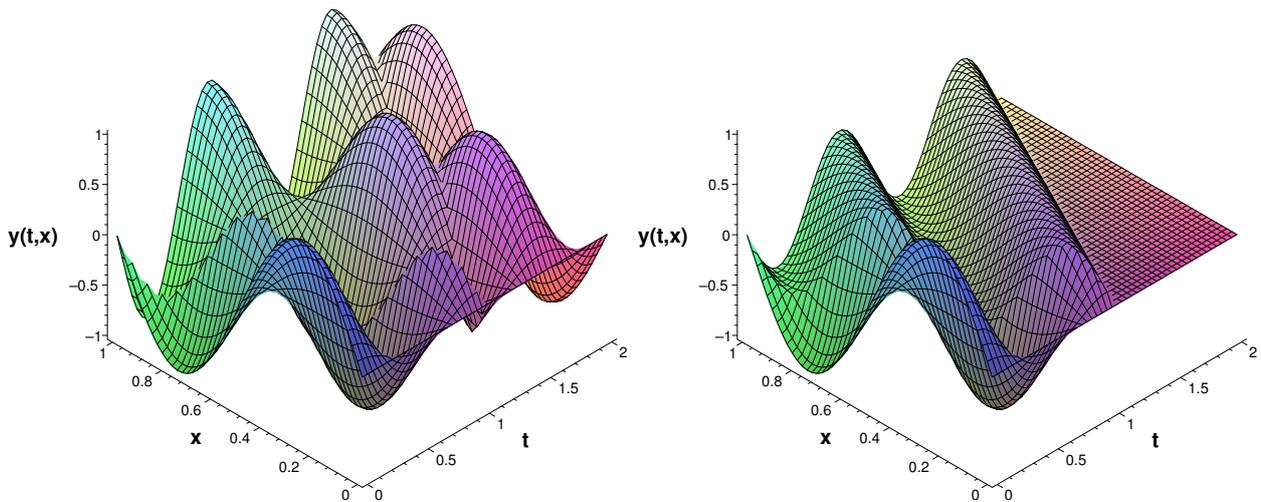


Abbildung 1.4: Ungesteuerte (links) und gesteuerte (rechts) Lösung der Wellengleichung für  $f(x) = \sin(2\pi x)$  und  $g(x) = 0$

Man betrachte das diskrete Kontrollsystem aus Definition 1.2. Das Ziel ist es, eine Steuerung zu berechnen, sodass die Stufenkosten minimiert werden. Da das Zeitintervall unendlich lange ist, hat das diskrete System unendlich viele Schritte - es ist daher schwierig für das ganze Intervall eine Steuerung zu bestimmen. Daher wird der Horizont  $N$  eingeführt, der die Anzahl an Schritten angibt, die zur Berechnung der Steuerung benutzt werden. Es wird also für die nächsten  $N$  Schritte eine Steuerung über ein Optimierungsverfahren berechnet. Davon wird nun die erste Steuerung implementiert, d.h. die erste Steuerung wird angewendet und ein neuer Zustand des Systemes wird berechnet. Dort wird nun wiederum die Steuerung für die nächsten  $N$  Schritte berechnet. Iterative Anwendung dieses Verfahrens wird Modelprädiktive Regelung (auf englisch : model predictive control - kurz MPC) genannt.

In [5, Theorem 5.3] wurden sogenannte Suboptimalitätsabschätzungen für MPC bewiesen. Anhand dieser kann man über den Horizont  $N$  sowie  $C$  und  $\sigma$  aus der Kontrollierbarkeitsabschätzung abschätzen, ob das MPC-Verfahren stabilisieren wird oder nicht. Ist der Suboptimalitätsgrad  $\alpha > 0$ , so wird das Kontrollsystem stabilisiert. Für den Horizont  $N = 2$  ist  $\alpha$  gegeben durch :

$$\alpha = 1 - (C(1 + \sigma) - 1)^2 \quad (1.4)$$

Die Kontrollierbarkeit der Wellengleichung in endlicher Zeit wurde bereits in [6] gezeigt. Dort wurde allerdings ein Horizont von  $\frac{L}{c}$  benötigt. In [1] wurde anhand von (1.4) gezeigt, dass  $N = 2$  ausreichend ist - solange bestimmte Anforderungen an  $T$  gestellt sind. Abbildung 1.4 zeigt die ungesteuerte und die gesteuerte Lösung der Wellengleichung - wie man sehen kann entspricht die gesteuerte Lösung nach einiger Zeit der Nullfunktion.

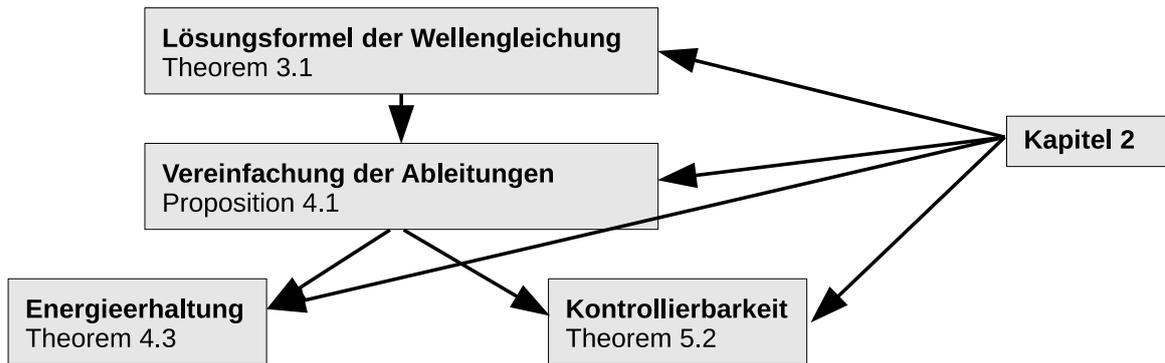


Abbildung 1.5: Schematische Darstellung des Aufbaus dieser Arbeit

Das Ziel in zukünftigen Arbeiten soll nun sein, ähnliche Abschätzungen für die mehrdimensionale Wellengleichung zu zeigen. In [1] wurde zur Lösung des ARWP der Wellengleichung die D'Alembert-Formel sowie die Methode der Reflektion (vgl. [8, Kapitel 3.2]) benutzt. Diese lässt sich allerdings nicht auf mehrere Dimensionen übertragen. Daher verwende ich in dieser Arbeit den Ansatz über Fourierreihen um die Kontrollierbarkeit der Wellengleichung zu zeigen. Der Vorteil hierbei ist, dass sich zumindest das homogene ARWP der Wellengleichung mit  $u(t) = 0$  im Mehrdimensionalen über Fourierreihen lösen lässt.

## 1.4 Aufbau

Diese Arbeit besteht aus 6 weiteren Kapiteln. In dieser Arbeit treten einige Theoreme sowie eine Proposition auf - den Zusammenhang veranschaulicht Abbildung 1.5.

In Kapitel 2 werde ich Fourierreihen einführen und erklären, wieso sich viele Funktionen als Fourierreihen entwickeln lassen. Zudem werde ich ein paar grundlegende Eigenschaften, wie die gliedweise Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit sowie die Quadratur und Multiplikation zeigen.

Anhand dieses Kapitels kann in Kapitel 3 über Fourierreihen eine Lösungsformel (Theorem 3.1) für das ARWP der Wellengleichung hergeleitet werden. Dort werde ich auch zeigen, dass die Lösungsformel unter geeigneten Voraussetzungen gegen die Lösung konvergiert. In der Lösungsformel tritt eine gewöhnliche Differentialgleichung auf, diese werde ich in diesem Kapitel ebenfalls lösen.

In Kapitel 4 werde ich dann über die Lösungsformel zuerst in der Lage sein,  $y_x(t, x)$  und  $y_t(t, x)$  über Fourierreihen darzustellen und zu vereinfachen (Proposition 4.1). Anschließend zeige ich mit diesen Vereinfachungen die sogenannte Energieabnahme der Wellengleichung

(Theorem 4.3).

Im darauffolgenden Kapitel werde ich die sogenannte gewichtete Energie motivieren. Mit Hilfe dieser lässt sich nun die Kontrollierbarkeitsabschätzung durchführen (Theorem 5.2).

In den beiden anschließenden Kapiteln werde ich diese Arbeit kurz zusammenfassen sowie einen kleinen Ausblick liefern.

# Kapitel 2

## Fourierreihen

Um eine Lösungsformel für das Anfangs-Randwertproblem aufzustellen, werden zuerst grundlegende Sätze benötigt um die Korrektheit der Formel zeigen zu können.

Im ersten Abschnitt werde ich Fourierreihen einführen. Danach untersuche ich, dass Fourierreihen gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren. Anschließend zeige ich, wann zwei Fourierreihen identisch sind. Im letzten Abschnitt werde ich die gliedweise Differentiation von Fourierreihen betrachten und deren Ableitung angeben.

In diesem Kapitel sei generell  $\Omega := ]0, L[$  und damit  $\overline{\Omega} = [0, L]$

### 2.1 Fourierreihen

In diesem Abschnitt werde ich Fourierreihen kurz einführen. Quelle hierbei ist [7, Seite 127]. Zuerst werde ich allerdings einen Funktionenraum benötigen, in dem Fourierreihen wohldefiniert sind :

**Definition 2.1** ( $L^2$ ).

$$\mathcal{L}^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (2.1)$$

$$L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim \quad \text{mit} \quad f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ f.ü.} \quad (2.2)$$

Hierbei ist  $f \sim g$  eine Äquivalenzrelation, der  $L^2$  dementsprechend ein Faktorraum.

Mit Hilfe dieses Funktionenraums kann man nun Fourierreihen definieren :

**Definition 2.2** (Fourierreihen).

Sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann ist die Fourierreihe von  $f$  definiert als :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n := \langle f(x), \phi_n(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx \quad (2.3)$$

Hierbei wird  $f_n$  Fourierkoeffizient und  $\phi_n$  Fourierbasis genannt.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet das Skalarprodukt.

**Bemerkung 2.3.**

- a) Die Fourierkoeffizienten sind nicht unendlich, d.h. das Integral ist endlich, da  $f \in L^2(\Omega)$   
 b) Fourierreihen lassen sich auch für mehrere (Orts-)Dimensionen definieren.  
 c) Falls  $f$  von Ort und Zeit abhängig ist, d.h.  $f(t,x)$  so ist die Fourierreihe gegeben durch :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) \quad \text{mit } a_n(t) := \langle f(t,x), \phi_n(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(t,x)\phi_n(x) \quad (2.4)$$

Die Fourierkoeffizienten sind also zeitabhängig.

**Bemerkung 2.4** (Gerade und ungerade Fourierreihen).

- a) Falls  $\phi_n(x) = \cos(\beta_n x)$  mit  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , so wird die Fourierreihe gerade genannt.  
 b) Falls  $\phi_n(x) = \sin(\beta_n x)$  mit  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , so wird die Fourierreihe ungerade genannt.

Zum Abschluss zitiere ich eine wichtige Eigenschaft von Fourierbasen aus [8, Kapitel 5.1]

**Lemma 2.5** (Fourierbasen sind Orthonormalsysteme).

Sei die Fourierbasis  $(\phi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  gerade oder ungerade, d.h.  $\phi_n(x) = \sin(\beta_n x)$  bzw.  $\phi_n(x) = \cos(\beta_n x) \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Fourierbasis bezüglich der  $L^2$ -Norm ein Orthonormalsystem, d.h. es gilt :

$$\langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij} \quad (2.5)$$

## 2.2 Konvergenz der Fourierreihen

Der folgende Abschnitt orientiert sich mit leichten Änderungen an [8, Kapitel 5.4]. Mein erstes Ziel ist es zu zeigen, dass man Funktionen unter gewissen Voraussetzungen durch ihre Fourierreihen entwickeln kann. Dazu wird gezeigt, dass die Fourierreihe bezüglich verschiedener bekannter Konvergenzbegriffe gegen die Funktion konvergiert.

Im folgenden betrachte ich drei aus der Analysis bekannte Konvergenzbegriffe :

**Definition 2.6** (Konvergenz).

Die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergiert

- a) punktweise gegen  $f(x)$  in  $\Omega$  : $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in ]a, b[ : \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

- b) gleichmäßig gegen  $f(x)$  in  $\overline{\Omega}$  : $\Leftrightarrow$

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

c) im quadratischen Mittel (oder bzgl. der  $L^2$ -Norm) gegen  $f(x)$  in  $\Omega$  : $\Leftrightarrow$

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \longrightarrow 0 \quad \text{für } N \longrightarrow \infty \quad (2.8)$$

Die folgenden drei Sätze geben nun Voraussetzungen an, damit Fourierreihen bezüglich der drei Konvergenzbegriffe gegen die Funktion konvergieren.

**Theorem 2.7** (Punktweise Konvergenz).

Sei  $f(x)$  auf  $\Omega$  stetig und  $f'(x)$  auf  $\Omega$  stückweise stetig. Dann konvergiert die Fourierreihe der Funktion  $f(x)$  punktweise gegen  $f(x)$ .

**Theorem 2.8** (Gleichmäßige Konvergenz).

Sei  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $f$  erfülle Dirichlet-, Neumann- oder Robin-Randbedingungen (vgl. Kapitel 1). Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f(x)$  gleichmäßig gegen  $f(x)$ .

**Theorem 2.9** ( $L^2$  Konvergenz).

Die Fourierreihe konvergiert auf  $\Omega$  gegen  $f(x) \Leftrightarrow f \in L^2(\Omega)$ , d.h.  $\int_0^L |f(x)|^2 dx < \infty$

**Bemerkung 2.10.**

Theorem 2.7 und 2.8 benötigen mindestens stetige Funktionen, Theorem 2.9 hingegen ist auch auf nicht stetige Funktionen anwendbar.

Aufgrund obiger Sätze lässt es sich also rechtfertigen, Funktionen mit bestimmten Eigenschaften durch ihre Fourierreihen zu ersetzen.

Im Folgenden werde ich für Gleichheit, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad (2.9)$$

die  $L^2$ -Konvergenz fordern. Grund hierfür ist, dass die Voraussetzungen in Theorem 2.9 am schwächsten sind und der  $L^2$  bereits für die Wohldefiniertheit der Fourierreihen benötigt wird - d.h. im Folgenden wird für die Gleichheit von Fourierreihe und Funktion nur die quadratische Integrierbarkeit der Funktion gefordert.

## 2.3 Vergleich von Reihen

Im folgenden Abschnitt und im nächsten Kapitel werden Fourierreihen verglichen. Daher wird in diesem Abschnitt überprüft, wie sich Fourierreihen mit gleicher Fourierbasis und die dazugehörigen Fourierkoeffizienten verhalten.

**Lemma 2.11** (Vergleich von Reihen).

Seien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$  zwei Fourierreihen auf  $\Omega \times [0, T]$ . Dann gilt :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \Leftrightarrow a_n(t) = b_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^N a_n(t)\phi_n(x) - \sum_{n=1}^N b_n(t)\phi_n(x) \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [a_n(t) - b_n(t)]\phi_n(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) - b_n(t)]\phi_n(x) = 0 \end{aligned}$$

$\phi_n(x)$  ist ein Orthonormalsystem nach Lemma 2.5, d.h. es gilt :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\phi_n(x) = 0 \Leftrightarrow f_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) - b_n(t)]\phi_n(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & a_n(t) - b_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & a_n(t) = b_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

## 2.4 Differenzierbarkeit von Fourierreihen

Im folgenden Kapitel werde ich Fourierreihen gliedweise differenzieren. Da gliedweises Differenzieren in vielen Fällen zu Fehlern führt, werde ich im Folgenden zwei Sätze beweisen, um die Korrektheit des gliedweisen Differenzierens zeigen. Dieser Abschnitt orientiert sich an der Idee in [7, Kapitel 6.3], da ich allerdings Spezialfälle betrachte werde ich diese beweisen.

**Lemma 2.12** (Zweimaliges gliedweises Differenzieren bezüglich  $t$ ).

Sei  $z \in C^{0,2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$  die zugehörige Fourierreihe.

Dann gilt auf  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  :

$$z_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\phi_n(x) \quad (2.11)$$

*Beweis.*  $z \in C^{0,2}(\bar{\Omega} \times [0, \infty[) \Rightarrow z_{tt}(t, x)$  eindeutig bestimmt.

$z_{tt}$  ist quadratisch integrierbar, da  $z_{tt}$  stetig auf einem abgeschlossenen Intervall ist. Daraus folgt, dass die Fourierreihe existiert und gegen die Funktion konvergiert.

Es reicht also zu zeigen, dass die Fourierreihe von  $z_{tt}(t, x)$  mit der zweimal gliedweise differenzierten Fourierreihe von  $z(t, x)$  übereinstimmt.

$$z_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x) \quad \text{mit } c_n(t) := \frac{2}{L} \int_0^L z_{tt}(t, x)\phi_n(x)dx$$

Es bleibt nach Theorem 2.11 zu zeigen, dass  $b_n''(t) = c_n(t)$

$$b_n''(t) := \frac{d^2}{dt^2} \frac{2}{L} \int_0^L z(t, x)\phi_n(x)dx = \frac{2}{L} \int_0^L z_{tt}(t, x)\phi_n(x)dx = c_n(t)$$

Hierbei wurde der Satz über parameterabhängige Integrale verwendet (vgl. [3, Kapitel 9 Satz 2]). Laut diesem gilt für eine stetige Funktion :

$$\frac{d}{dt} \int_0^L f(t)dx = \int_0^L \frac{d}{dt} f(t)dx$$

□

**Lemma 2.13** (Zweimaliges gliedweises Differenzieren bezüglich  $x$ ).

Sei  $z \in C^{2,0}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$  die zugehörige Fourierreihe mit :

$$z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, L) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(L) = 0,$$

$$\phi_n''(x) = -\beta_n^2 \phi_n(x)$$

Dann gilt auf  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  :

$$z_{xx}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\beta_n^2 \phi_n(x) \quad (2.12)$$

*Beweis.*  $z \in C^{2,0}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \Rightarrow z_{xx}(t, x)$  eindeutig bestimmt.

$z_{xx}$  ist quadratisch integrierbar, da  $z_{xx}$  stetig auf einem abgeschlossenen Intervall ist. Daraus folgt, dass die Fourierreihe existiert und gegen die Funktion konvergiert.

Es reicht also wie in dem vorherigen Beweis zu zeigen, dass die Fourierreihe von  $z_{xx}(t, x)$  mit der zweimal gliedweise differenzierten Fourierreihe von  $z(t, x)$  übereinstimmt.

$$z_{xx}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x) \quad \text{mit } c_n(t) := \frac{2}{L} \int_0^L z_{xx}(t, x)\phi_n(x)dx$$

Es bleibt nach Lemma 2.11 zu zeigen, dass  $-\beta_n^2 b_n(t) = c_n(t)$ . Hierbei kann nicht wie im vorherigen Beweis der Satz über parameterabhängige Integrale verwendet werden, da Integrationsvariable und Differentiationsvariable übereinstimmen. Stattdessen werde ich zweimal partiell integrieren :

$$\int_0^L u(x)v''(x)dx = \int_0^L u''(x)v(x)dx + [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]_0^L$$

Damit ergibt sich für  $u(x) := z(t, x)$  sowie  $v(x) := \phi(x)$  :

$$\begin{aligned} -\beta_n^2 b_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{-\beta_n^2 \phi_n(x)}_{= \phi_n''(x)} z(t, x) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L z_{xx}(t, x) \phi_n(x) dx + [z_x(t, x) \phi_n(x) - z(t, x) \phi_n'(x)]_0^L \\ &= c_n(t) + \underbrace{z_x(t, L)}_{=0} \phi_n(L) - z(t, L) \underbrace{\phi_n'(L)}_{=0} - z_x(t, 0) \underbrace{\phi_n(0)}_{=0} + \underbrace{z(t, 0)}_{=0} \phi_n'(0) \\ &= c_n(t) \end{aligned}$$

Hierbei wurden im letzten bzw. vorletzten Schritt die Voraussetzungen eingesetzt. □

**Lemma 2.14** (Einmaliges gliedweises Differenzieren bezüglich t).

Sei  $z \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times [0, T])$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$  die zugehörige Fourierreihe.

Dann gilt auf  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ :

$$z_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \phi_n(x) \quad (2.13)$$

*Beweis.* analog Beweis zu Lemma 2.12 □

**Lemma 2.15** (Einmaliges gliedweises Differenzieren bezüglich x).

Sei  $z \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0, T])$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$  die zugehörige Fourierreihe mit :

$$z(t, 0) = 0, \quad \phi'(L) = 0$$

$$\phi_n''(x) = -\beta_n^2 \phi_n(x)$$

Zudem sei  $\frac{\phi_n'(x)}{\beta_n}$  ebenfalls Fourierbasis.

Dann gilt auf  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ :

$$z_x(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n'(x) \quad (2.14)$$

**Bemerkung 2.16.** Für die Fourierbasis  $\phi_n(x) = \sin(\beta_n x)$  ist  $\frac{\phi_n'(x)}{\beta_n} = \cos(\beta_n x)$  ebenfalls Fourierbasis.

*Beweis.* Dieser Beweis lässt sich leider nicht analog zu Lemma 2.13 durchführen, da hier die erste Ableitung von  $\phi_n$  auftritt - und nicht die zweite Ableitung wie in Lemma 2.13. Das Problem dabei ist, dass für die zweite Ableitung die Formel  $\phi_n''(x) = -\beta_n^2 \phi_n(x)$  gilt - für die erste Ableitung gibt es allerdings keine analoge Formel.

Wie in Lemma 2.13 will ich zeigen, dass die Ableitung der Fourierreihe gleich der Fourierreihe der Ableitung ist. Aufgrund der ersten Ableitung von  $\phi_n$  hilft es einem nicht, die Fourierreihe der Ableitung bezüglich  $\phi_n$  zu bilden. Stattdessen benutze ich  $\frac{\phi_n'(x)}{\beta_n}$  als Fourierbasis - das laut Voraussetzung eine Fourierbasis ist. Daher ergibt sich aus Bem 2.3 folgende Fourierreihendarstellung der Ableitung :

$$z_x(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \frac{\phi_n'(x)}{\beta_n} \quad \text{mit } c_n(t) := \frac{2}{L} \int_0^L z_x(t, x) \frac{\phi_n'(x)}{\beta_n} dx$$

Also bleibt zu zeigen :

$$c_n(t) = \beta_n b_n(t)$$

Dazu wird  $c_n(t)$  partiell integriert :

$$\begin{aligned} c_n(t) &= -\frac{2}{L\beta_n} \int_0^L z(t, x) \underbrace{\phi_n''(x)}_{= -\beta_n^2 \phi_n(x)} dx + z(t, x) \phi_n'(x) \Big|_0^L \\ &= \beta_n \frac{2}{L} \int_0^L z(t, x) \phi_n(x) dx + \underbrace{z(t, 0) \phi_n'(0)}_{= 0} + z(t, L) \underbrace{\phi_n'(L)}_{= 0} \\ &= \beta_n b_n(t) \end{aligned}$$

Hierbei wurden im letzten bzw. vorletzten Schritt die Voraussetzungen eingesetzt. □

## 2.5 Fourierreihendarstellung von Funktionen

Im folgenden Kapitel wird es oft nützlich sein, Fourierreihen zurück in die ursprünglichen Funktionen zu transformieren. Zur Erinnerung die Definition der Fourierreihe von  $f$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x) \quad \text{mit } f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx$$

Damit ergibt sich direkt folgendes Lemma :

**Lemma 2.17.** Sei  $f \in L^2(\Omega)$  sowie  $\phi_n$  Fourierbasis.

Dann gilt : Die Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x) \quad \text{mit } f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx$$

konvergiert bezüglich der  $L^2$ -Norm gegen die Funktion  $f$ .

Analog konvergiert die Ableitung der Fourierreihe gegen die Ableitung der Funktion :

**Lemma 2.18.** Sei  $f \in L^2(\Omega)$  sowie  $\phi_n$  und  $\frac{1}{\beta_n}\phi'_n$  Fourierbasen und es gelte :

$$f(0) = 0 \quad \phi'(L) = 0 \quad \phi''_n(x) = -\beta_n^2\phi_n(x)$$

Dann gilt : Die Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi'_n(x) \quad \text{mit } f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx$$

konvergiert bezüglich der  $L^2$ -Norm gegen die Funktion  $f'$ .

*Beweis.* Falls wir gliedweise differenzieren können, würde die Aussage nach Definition der Fourierreihen direkt folgen. Daher werde ich im Folgenden zeigen, dass gliedweise differenziert werden darf, d.h. dass die Fourierreihe der Ableitung gleich der Ableitung der Fourierreihe ist.

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx = -\frac{2}{L} \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^L f(x) \phi''_n(x) dx \\ &= \frac{1}{\beta_n} \frac{2}{L} \underbrace{\int_0^L f'(x) \frac{\phi'_n(x)}{\beta_n} dx}_{:= f'_n} - \frac{2}{L} \frac{1}{\beta_n^2} [f(L) \underbrace{\phi'_n(L)}_{=0} - \underbrace{f(0) \phi'_n(0)}_{=0}] \end{aligned}$$

Es ergibt sich also :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n \frac{\phi'_n(x)}{\beta_n} \quad \text{mit } f'_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \frac{\phi'_n(x)}{\beta_n} dx$$

Da  $\frac{\phi'_n(x)}{\beta_n}$  Fourierbasis ist, entspricht dies der Fourierreihe der Ableitung. □

## 2.6 Gliedweise Integration

In diesem Abschnitt werde ich Fourierreihen unter Integralen genauer betrachten. Zuerst benötige ich Theorem 45 aus [7, Seite 207]), das besagt, wann Fourierreihen gliedweise integriert werden dürfen :

**Theorem 2.19** (Gliedweise Integration).

Sei  $f$  stückweise stetig auf  $[0, L]$ . Dann kann die Fourierreihe von  $f$  gliedweise integriert werden und das Ergebnis konvergiert gegen das Integral der Funktion  $f$  auf  $[0, L]$ .

Grundlage für die nächsten beiden Lemmata ist obiges Theorem sowie die Eigenschaft, dass Fourierbasen Orthonormalsysteme (Lemma 2.5) sind, d.h. es gilt :

$$\langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.15)$$

**Lemma 2.20** (Quadratur).

Sei  $\phi_n$  ein Orthonormalsystem und die Funktionen, gegen die die Fourierreihen konvergieren seien stückweise stetig. Dann gilt :

$$\int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \phi_n(x)^2 \right) dx$$

*Beweis.*

$$\int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \phi_n(x) \phi_m(x) dx$$

Die Funktionen, gegen die die Fourierreihen konvergieren sind mindestens stückweise stetig, d.h. es darf gliedweise integriert werden (vgl. Theorem 2.19) :

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \int_0^L \underbrace{\phi_n(x) \phi_m(x)}_{= \delta_{mn}} dx$$

Es fallen also alle Terme mit  $m \neq n$  heraus und es ergibt sich :

$$= \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \phi_n(x)^2 \right) dx$$

□

**Lemma 2.21** (Multiplikation).

Sei  $\phi_n$  Orthonormalsystem und die Funktion, gegen die die Fourierreihe konvergiert sei stückweise stetig. Dann gilt :

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \Phi_n(x)^2 dx = \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi_n(x) \right) dx$$

*Beweis.* Der Beweis funktioniert analog vorherigem Lemma :

$$\begin{aligned} \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi_n(x) \right) &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \Phi_n(x) \Phi_m(x) \\ &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \Phi_n(x)^2 dx \end{aligned}$$

Im letzten Schritt darf analog dem vorherigen Beweis gliedweise integriert werden. Damit fallen aufgrund der Orthogonalität die Summanden mit  $m \neq n$  weg. □

**Lemma 2.22** (Fourierbasentransformation).

Sei  $\phi_n(x)$  Fourierbasis mit :

$$\phi(0) = 0 \quad \phi'(L) = 0 \quad \text{oder} \quad \phi'(0) = 0 \quad \phi(L) = 0$$

$$\phi_n''(x) = -\beta_n^2 \phi_n(x)$$

Dann gilt :

$$\int_0^L \frac{\phi_n'(x)^2}{\beta_n^2} dx = \int_0^L \phi_n(x)^2 dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_n(x)^2 dx &= -\frac{1}{\beta_n^2} \int_0^L \phi_n(x) \phi_n''(x) dx \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^L \phi_n'(x)^2 dx - \frac{1}{\beta_n^2} [\underbrace{\phi_n(L) \phi_n'(L)}_{=0} - \underbrace{\phi_n(0) \phi_n'(0)}_{=0}] \end{aligned}$$

□

# Kapitel 3

## Lösung der Wellengleichung als Fourierreihe

Im folgenden betrachten wir das in Kapitel 1 gegebene Problem :

$$y_{tt}(t, x) = c^2 y_{xx}(t, x) \quad \text{auf } [0, \infty[ \times \Omega \quad (3.1)$$

$$y(0, x) = f(x) \quad y_t(0, x) = g(x) \quad \text{auf} \quad (3.2)$$

$$y(t, 0) = 0 \quad y_x(t, L) = u(t) \quad \text{auf } [0, \infty[ \quad (3.3)$$

Gesucht ist eine Lösungsformel für obiges Problem. Für ein unbeschränktes Anfangswertproblem, d.h. (3.1)-(3.2) gibt es mit der D'Alembertformel eine explizite Formel um aus den Anfangsbedingungen eine Lösung auszurechnen. Durch die Randbedingungen wird das Problem allerdings deutlich komplizierter, da an den Rändern Reflektionen auftreten können. Ein Lösungsansatz, den ich im folgenden darstellen werde, ist die Verwendung von Fourierreihen.

Die Idee hierbei ist, die homogene Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen in ein inhomogenes Problem mit homogenen Randbedingungen umzuwandeln, dieses dann zu lösen und durch Rücktransformation eine Lösung des ursprünglichen Problems zu erhalten.

Zur Lösung des homogenen Problems wird die Funktion durch ihre Fourierreihe ersetzt. Die Fourierreihe muss die Wellengleichung mit Anfangs-Randbedingungen ebenfalls erfüllen, d.h. es entstehen Bedingungen an die Fourierkoeffizienten - um genauer zu sein entsteht eine Differentialgleichung, die die Fourierkoeffizienten erfüllen müssen.

Im ersten Abschnitt werde ich die Lösungsformel formal herleiten ohne mich um die Voraussetzungen zu kümmern. Im Abschnitt danach werde ich beweisen, dass die hergeleitete Lösungsformel unter bestimmten Voraussetzungen die Wellengleichung erfüllt und somit die Fourierreihe gleich der Lösungsfunktion ist.

### 3.1 Ansatz

Das folgende Kapitel orientiert sich an [7, Kapitel 7.3.2]. Dort wurde die Rechnung für inhomogene, von der Zeit abhängige Randbedingungen anhand der Wärmeleitungsgleichung durchgeführt. Die grundlegende Idee lässt sich für die Wellengleichung verwenden - durch die homogene Dirichletrandbedingung wird ein Teil der Rechnung auch etwas leichter.

In der folgenden Rechnung wird auf die Voraussetzungen nicht eingegangen - im zweiten Teil dieses Abschnittes werde ich die Voraussetzungen angeben und zeigen, dass die hier berechnete Formel obiges Problem unter diesen Voraussetzungen auch löst.

Ziel ist es eine geeignete Funktion  $r(t, x)$  zu finden, so dass eine inhomogene Wellengleichung  $z(t, x) = y(t, x) - r(t, x)$  mit homogenen Randbedingungen  $z(t, 0) = 0$  und  $z_x(t, L) = 0$  entsteht. Dazu gehe ich von folgendem Ansatz aus :

$$r(t, x) = xu(t) \quad \text{also} \quad z(t, x) = y(t, x) - xu(t)$$

$$\Rightarrow z(t, 0) = y(t, 0) - 0 = 0 \quad z_x(t, L) = y_x(t, L) - u(t) = 0$$

Damit ergibt sich folgende neue Problemstellung :

$$z_{tt} = y_{tt} - xu''(t) = c^2 y_{xx} - xu''(t) = c^2 z_{xx} - xu''(t) \quad (3.4)$$

Hierbei wurde  $u(t)$  zweimal differenziert - wir werden also später  $u \in C^2([0, T])$  fordern müssen.

Diese Gleichung wollen wir über Fourierreihen darstellen. Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass Funktionen durch ihre Fourierreihen dargestellt werden können (vgl. Theorem 2.7-2.9). Daher folgender Ansatz für  $z(t, x)$  :

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x) \quad \text{mit} \quad \phi_n(x) = A \cos(\alpha_n x) + B \sin(\beta_n x)$$

$\phi_n(x)$  wird hierbei so gewählt, dass die Randbedingungen von  $z(t, x)$  erfüllt sind :

$$\begin{aligned} z(t, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(0) = 0 & z_x(t, L) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi'_n(L) = 0 \\ \Rightarrow \phi_n(0) &= A = 0 \\ \Rightarrow \phi'_n(L) &= B \beta_n \cos(\beta_n L) = 0 \quad \text{also} \quad \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass  $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0$ .  $B$  kann hier frei gewählt werden - um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen wählen wir  $B = 1$ . Damit ergibt sich also für die

Fourierbasis  $\phi_n(x) = \sin(\beta_n x)$ .

Die Fourierkoeffizienten  $b_n(t)$  nicht bisher noch nicht bestimmt. Die Definition der Koeffizienten hilft hierbei nicht weiter, da die Funktion  $y(t, x)$ , d.h. die Lösung der Wellengleichung, unbekannt ist - es soll mit diesem Ansatz eine Formel hergeleitet werden. Die Bedingungen an die Koeffizienten bekommt man durch die Tatsache, dass die Fourierreihe die Wellengleichung erfüllen muss.

In der Wellengleichung treten Ableitungen auf - die Fourierreihe muss also differenziert werden. Dazu bieten sich Lemmata 2.12 und 2.13 an. Die Voraussetzungen sind erfüllt - ich werde sie im nächsten Abschnitt zeigen. Es ergibt sich also :

$$z_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \phi_n(x) \quad z_{xx}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 b_n(t) \phi_n(x)$$

Weiterhin wird die Fourierreihendarstellung von  $xu''(t)$  benötigt (vgl. Def 2.2) :

$$xu''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \quad \text{mit} \quad a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L xu''(t) \phi_n(x) dx$$

Obige Terme sind wohldefiniert, falls  $xu''$  stetig und damit auf  $[0, L]$  integrierbar ist, d.h. die Fourierreihe würde existieren und konvergieren. Damit ergibt sich zusammengesetzt aus (3.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \phi_n(x) = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 b_n(t) \phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein, damit  $z(t, x)$  die Gleichung (3.4) erfüllt. Nach Lemma 2.11 muss daher gelten :

$$b_n''(t) = -c^2 \beta_n^2 b_n(t) - a_n(t) \quad (3.5)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für die zwei Anfangsbedingungen benötigt werden. Diese erhält man aus den Anfangsbedingungen der Wellengleichung :

$$\begin{aligned} f(x) = y(0, x) = z(0, x) + xu(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \phi_n(x) + xu(0) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \phi_n(x) &= f(x) - xu(0) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aufgrund der Definition von Fourierreihen erfüllt, falls gilt :

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx$$

Analog ergibt sich :

$$g(x) = y_t(0, x) = z_t(0, x) + xu'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0) \phi_n(x) + xu'(0)$$

## 22KAPITEL 3. LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG ALS FOURIERREIHE

$$\text{also} \quad b'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat keine explizite Lösung (da sie inhomogen ist und die Funktion  $u(t)$  unbekannt ist). Man kann allerdings bei bekannten Anfangsdaten und bekanntem  $u(t)$  die Lösung z.B. per Maple berechnen lassen, vgl. dazu die Abbildungen in Kapitel 1.

Damit wurde nun eine Formel für  $z(t, x)$  aufgestellt. Dadurch ergibt sich für  $y(t, x)$  folgende Formel :

$$y(t, x) = z(t, x) + xu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x) + xu(t) \quad (3.6)$$

Im nächsten Kapitel werde ich nun zeigen, dass diese Lösungsformel die Wellengleichung erfüllt und daher gegen die Lösung konvergiert.

### 3.2 Überprüfung der Lösungsformel

Folgendes Theorem besagt, wann die Fourierreihe, die man über die Lösungsformel erhält, gegen die Lösung konvergiert.

Da die Voraussetzungen möglichst schwach sein sollen, werde ich kurz zwei Funktionenräume einführen die ermöglichen, dass man von den Anfangsdaten nur die Existenz von schwachen Ableitungen fordern muss.

$$H^k(\Omega) := \{y \in L^2(\Omega) : D^\alpha y \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$$H_0^1(\Omega) := \text{Abschluss von } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega)$$

Damit kann nun folgendes Theorem formuliert werden :

**Theorem 3.1** (Lösungsformel der Wellengleichung).

*Sei  $y$  schwache Lösung des anfangs gegebenen Anfangs-Randwertproblem (2.1)-(2.3) mit  $u \in C^2([0, T])$  und  $f \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  sowie  $g \in H_0^1(\Omega)$*

*Dann gilt :*

$$y(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n(t) \phi_n(x) + xu(t) \quad (3.7)$$

*Die Gleichheit bedeutet, dass die rechte Seite (punktweise, gleichmäßig und bezüglich der  $L^2$ -Norm) gegen die linke Seite konvergiert. Hierbei ist  $b_n(t)$  Lösung der Differentialgleichung :*

$$b_n''(t) = -c^2 \beta_n^2 b_n(t) - a_n(t) \quad (3.8)$$

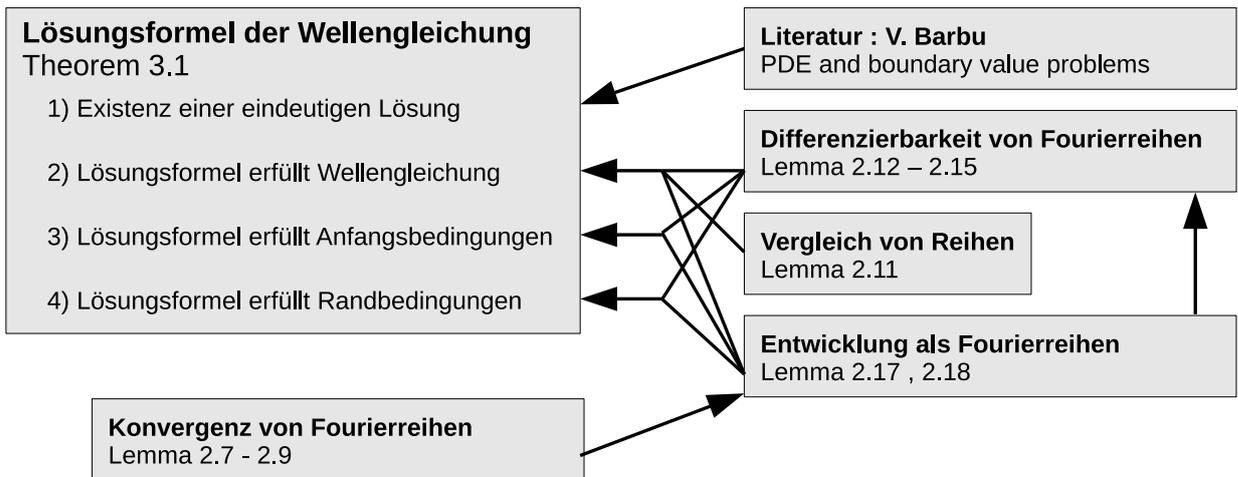


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 3.7

mit Anfangsbedingungen :

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx \quad (3.9)$$

$$b'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx \quad (3.10)$$

und

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L xu''(t) \phi_n(x) dx \quad (3.11)$$

$$\phi_n(t) = \sin(\beta_n t) \quad \text{mit } \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad n = 1, \dots \quad (3.12)$$

*Beweis.* Zuerst muss festgestellt werden, dass für das obige Problem auch eine Lösung existiert und diese eindeutig ist. Die Fourierreihe der Lösungsformel konvergiert gegen eine eindeutige Funktion und erfüllt obiges Problem, daher muss sie gegen die eindeutige Lösung konvergieren. Abbildung 3.1 stellt den Aufbau des Beweises schematisch dar.

1) *Es existiert eindeutige Lösung obigen Problems :*

Nach [2, Theorem 5.2.1] gilt mit dem zweiten Teil :

Sei  $f \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  sowie  $g \in H_0^1(\Omega)$ . Dann gilt :  
 $y \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C[0, T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  existiert und ist eindeutige Lösung des Anfangsrandwertproblems.

Hierbei beachte man, dass die Lösungs in Ortsrichtung nur schwach differenzierbar ist. Da wir die Konvergenz immer nur über die  $L^2$ -Norm betrachten - also das Integral von Funktion

## 24 KAPITEL 3. LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG ALS FOURIERREIHE

minus Fourierreihe konvergiert gegen Null (vgl. Kapitel 2) ist die schwache Differenzierbarkeit ausreichend.

Es muss zudem gezeigt werden, dass die Gleichung sowie die Anfangs- und die Randdaten erfüllt werden.

2) Die Lösungsformel erfüllt Wellengleichung :

$y, x$  und  $u$  sind zweimal differenzierbar und die Ableitungen quadratisch integrierbar, daher gilt nach Lemma 2.12 :

$$y_{tt}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \phi_n(x) + xu''(t)$$

Hierbei ist zu beachten, dass für klassisches Differenzieren die Voraussetzung  $u$  zweimal differenzierbar nötig ist. Auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, L]$  ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar, insbesondere ist also  $u''$  auf  $[0, L]$  integrierbar und kann daher  $xu''(t)$  nach Satz 2.9 als Fourierreihe entwickelt werden. Die Fourierkoeffizienten entsprechen dabei  $a_n(t)$  :

$$y_{tt}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

$b_n''(t)$  löst die Differentialgleichung (3.8), daher kann man es durch  $-c^2 \beta_n^2 b_n(t) - a_n(t)$  ersetzen :

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_n^2 b_n(t) + a_n(t)] \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 b_n(t) \phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.11 ist die zweite und dritte Reihe identisch und hebt sich daher weg. Nach Lemma 2.13 entspricht der erste Term  $y_{xx}(t, x)$ , da  $xu(t)$  bei der Differentiation wegfällt - falls die Voraussetzungen erfüllt sind. Dies ist der Fall, da die Bedingungen an  $\phi$  aufgrund der Definition von  $\phi$  und die an  $z(t, x)$  aufgrund der Randbedingungen der Wellengleichung gegeben sind.  $y$  und  $u$  sind zweimal differenzierbar und die Ableitungen integrierbar, daher muss auch  $z$ , d.h. die erste Fourierreihe zweimal differenzierbar und die Ableitung integrierbar sein.

Damit wurde also gezeigt, dass die Wellengleichung erfüllt ist.

3) Die Lösungsformel erfüllt die Anfangsbedingungen :

$$y(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \phi_n(x) + xu(0)$$

### 3.3. LÖSUNG DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG AUS DER LÖSUNGSFORMEL

$b_n(0)$  war hierbei eine Anfangsbedingung der zu lösenden Differentialgleichung (vgl. (3.9)) und entspricht dem Fourierkoeffizienten von  $f(x) - xu(0)$  (vgl. Def. 2.2). Da  $f(x) - xu(0)$  integrierbar ist, konvergiert die Fourierreihe gegen  $f(x) - xu(0)$ . Es ergibt sich :

$$y(0, x) = f(x) - xu(0) + xu(0) = f(x)$$

Für die Berechnung der Ableitung nach  $t$  benutze ich Lemma 2.14. Die Voraussetzungen sind hierbei wieder analog obiger Argumentation erfüllt.

$$y_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(0) \phi_n(x) + xu'(0)$$

$b'_n(0)$  war analog der ersten Anfangsbedingung der Fourierkoeffizient von  $g(x) - xu'(0)$  (vgl. (3.10)). Es ergibt sich also :

$$y_t(0, x) = g(x) - xu'(0) + xu'(0) = g(x)$$

Damit wurde gezeigt, dass die Anfangsbedingungen der Wellengleichung erfüllt sind.

4) Die Lösungsformel erfüllt die Randbedingungen :

$$y(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \underbrace{\phi_n(0)}_{=0} + 0u(t) = 0$$

Für die Ableitung nach  $x$  wird Lemma 2.15 benutzt. Die Voraussetzungen sind auch hier wieder analog der Argumentation für  $y_{xx}$  erfüllt.

$$y_x(t, L) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \underbrace{\phi'_n(L)}_{=0} + u(t) = 0$$

Damit wurde gezeigt, dass die Randbedingungen erfüllt sind. □

Im nächsten Abschnitt werde ich die Lösung der in Theorem 3.1 gegebenen Differentialgleichung angeben.

## 3.3 Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung aus der Lösungsformel

Die unten angegebene Lösung löst die Differentialgleichung. Diese wurde hierbei mit Maple berechnet - sie lässt sich allerdings auch analytisch herleiten.

**Lemma 3.2** (Lösung der Differentialgleichung).

Gegeben sei folgende Differentialgleichung :

$$b''_n(t) = -\beta_n^2 b_n(t) - a_n(t)$$

## 26 KAPITEL 3. LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG ALS FOURIERREIHE

Mit Anfangsbedingungen :

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx$$

$$b'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx$$

sowie mit :

$$\phi_n''(x) = -\beta_n^2 \phi_n(x) \quad -\frac{1}{\beta_n^2} \phi_n'(t)^2 - \phi_n(t)^2 = 1$$

$$\phi_n(0) = 0 \quad \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(0) = 1$$

Dann besitzt diese DGL folgende Lösung :

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) b'_n(0) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) b_n(0) \\ &\quad - \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi_n'(s) a_n(s) ds \right) \phi_n(t) + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \phi_n'(t) \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3.** Die Bedingungen an  $\phi_n$  sind für  $\phi_n(x) = \sin(\beta_n x)$  erfüllt.

*Beweis.* Zuerst werde ich die erste Anfangsbedingung zeigen :

$$\begin{aligned} b_n(t=0) &= \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\phi_n(0)}_{= \sin(0) = 0} b'_n(0) + \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\phi_n'(0)}_{= \cos(0) = 1} b_n(0) \\ &\quad - \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^0 \phi_n'(s) a_n(s) ds \right) \phi_n(0) + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^0 \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \phi_n'(0) \\ &= b_n(0) \end{aligned}$$

Für die zweite Anfangsbedingung wird zunächst die Ableitung von  $b_n$  benötigt :

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) b'_n(0) + \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\phi_n''(t)}_{= -\beta_n^2 \phi_n(x)} b_n(0) \\ &\quad - \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi_n'(s) a_n(s) ds \right) \phi_n'(t) + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \underbrace{\phi_n''(t)}_{= -\beta_n^2 \phi_n(x)} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{\beta_n^2} \phi_n'(t) a_n(t) \phi_n(t) + \frac{1}{\beta_n^2} \phi_n(t) a_n(t) \phi_n'(t)}_{= 0} \end{aligned}$$

### 3.3. LÖSUNG DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG AUS DER LÖSUNGSFOR

Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned}
 b'_n(t=0) &= \underbrace{\frac{1}{\beta_n} \phi'_n(0)}_{=\cos(0)=1} b'_n(0) + \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\phi_n(0)}_{=\sin(0)=0} b_n(0) \\
 &- \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^0 \phi'_n(s) a_n(s) ds \right) \phi'_n(t) + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^0 \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \phi''_n(t) \\
 &= b'_n(0)
 \end{aligned}$$

Als letztes muss gezeigt werden, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Dazu betrachtet man die zweite Ableitung :

$$\begin{aligned}
 b''_n(t) &= \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\phi''_n(t)}_{=-\beta_n^2 \phi_n(x)} b'_n(0) - \beta_n \phi'_n(t) b_n(0) \\
 &- \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi'_n(s) a_n(s) ds \right) \underbrace{\phi''_n(t)}_{=-\beta_n^2 \phi_n(x)} - \left( \int_0^t \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \phi'_n(t) \\
 &- \underbrace{\frac{1}{\beta_n^2} \phi'_n(t) a_n(t) \phi'_n(t) - \phi_n(t) a_n(t) \phi_n(t)}_{= \left[ -\frac{1}{\beta_n^2} \phi'_n(t)^2 - \phi_n(t)^2 \right] a_n(t) = a_n(t)} \\
 &= -\beta_n^2 b_n(t) - a_n(t)
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist also erfüllt. □

Wir haben in diesem Kapitel also eine Lösungsformel für das Anfangsrandwertproblem der Wellengleichung aufgestellt. Im nächsten Kapitel werden wir diese nutzen, um für eine bestimmte Steuerung  $u(t)$  die Ableitungen  $y_x$  und  $y_t$  der Lösung ausrechnen zu können.



# Kapitel 4

## Energieabnahme der Wellengleichung

Zur Vereinfachung wird in den folgenden Kapiteln die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = 1$  gesetzt.

In diesem Kapitel werde ich zeigen, dass für die Wellengleichung unter einer bestimmten Steuerung die Energie abnimmt. Es muss also gezeigt werden :

$$l^*(y(i+1)) \leq \sigma l^*(y(i)) \quad \text{mit } \sigma \in [0, 1]$$

Hierbei war  $l^*(y(n))$  nach Definition 1.3 gegeben durch :

$$l^*(y(n), u(n)) := \int_0^L \rho(y_x(nT, x), y_t(nT, x)) dx$$

Die Energie ist gegeben durch :

$$\rho(y_x(t, x), y_t(t, x)) := y_x(t, x)^2 + y_t(t, x)^2$$

Ich werde im Folgenden den ersten Schritt, d.h.  $i = 0$  für die normale Energie zeigen. Dazu müssen  $l^*(y(0))$  und  $l^*(y(1))$  betrachtet werden. Diese entsprechen den Kosten zur Startzeit  $t = 0$  sowie zur Endzeit  $t = T$  des ersten Intervalls, das durch die Diskretisierung des Zeitintervalls (vgl. Kapitel 1) entstanden ist.

$$\begin{aligned} l^*(y(0)) &= \int_0^L y_x(0, x)^2 + y_t(0, x)^2 dx = \int_0^L f'(x)^2 + g(x)^2 dx \\ l^*(y(1)) &= \int_0^L y_x(T, x)^2 + y_t(T, x)^2 dx \end{aligned}$$

Wie oben bereits berechnet hängt  $l^*(y(0))$  nur von  $f$  und  $g$  ab. Daher werde ich im ersten Schritt  $y_x(T, x)$  bzw.  $y_t(T, x)$  so umformen, dass sie nur noch von  $f$  und  $g$  abhängig sind. Im zweiten Schritt werde ich dann die Ungleichung zeigen.

Man beachte hierbei, dass für die Kontrollierbarkeit der Wellengleichung  $\sigma < 1$  benötigt wird.

## 4.1 Entwicklung der Ableitungen der Lösung als Fourierreihen

Die Vereinfachung von  $y_x$  und  $y_t$  ist als folgende Proposition zusammengefasst. Die hierbei auftretende Steuerung  $u(t)$  wurde so gewählt, dass am rechten Rand keine Reflektionen auftreten (vgl. [1]).

**Proposition 4.1** (Vereinfachung  $y_x(t, x)$  und  $y_t(t, x)$ ).

Seien die Voraussetzungen aus Theorem 3.1 erfüllt und  $u$  gegeben durch :

$$u(t) = \frac{1}{2} (f'(L-t) - g(L-t))$$

Dann gilt :

$$y_x(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi_n(t)c_1(t) + \phi_n'(t)c_2(t)) \phi_n'(x)$$

$$y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi_n'(t)c_1(t) + \phi_n''(t)c_2(t)) \phi_n(x)$$

mit  $c_1$  und  $c_2$  definiert als :

$$c_1(t) := g_n + \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx$$

$$c_2(t) := f_n - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx$$

Wobei  $f_n$  bzw.  $g_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$  bzw.  $g$  sind.

### Bemerkung 4.2.

- 1) Für  $t = 0$  entsprechen  $y_x$  bzw.  $y_t$  hier wie zu erwarten den Funktionen  $f'$  bzw.  $g$ .
- 2) Die Steuerung entspricht der später auftretenden Steuerung (5.1) für  $n = 0$  und eingesetzten Anfangsbedingungen der Wellengleichung.

*Beweis.* Der Beweis untergliedert sich in sechs Schritte. Im ersten Schritt werde ich die Lösung als Fourierreihe darstellen. Die Fourierkoeffizienten sind hierbei durch eine Differentialgleichung gegeben die ich im nächsten Schritt lösen und vereinfachen werde. Die Lösung der Differentialgleichung enthält die Steuerung, daher werde ich diese im dritten Schritt umformen. Im darauffolgenden Schritt werde ich die umgeformte Steuerung einsetzen und die Fourierkoeffizienten vereinfachen. Im fünften Schritt werde ich die Fourierkoeffizienten in  $y_x$  und  $y_t$  einsetzen und mit den inhomogenen Termen zusammenfassen. Im letzten Schritt werde ich die in  $y_x$  und  $y_t$  auftretende Terme (genauer  $c_1$  und  $c_2$ ) in die gewünschte Darstellung umformen. Abbildung 4.1 stellt den Aufbau des Beweises als Flussdiagramm dar.

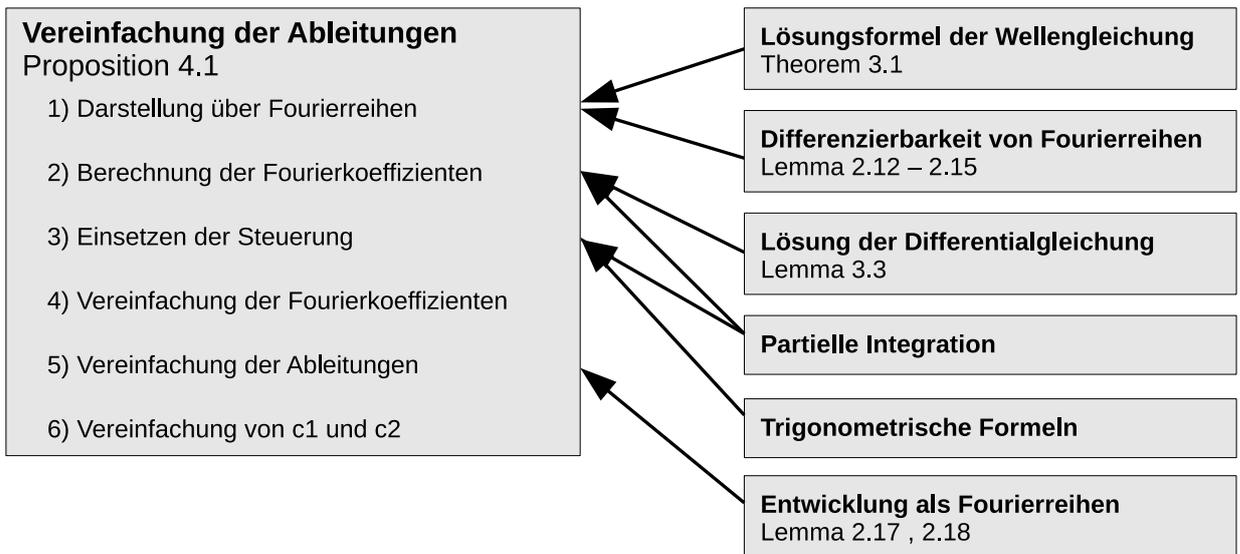


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Beweises von Proposition 4.1

1) *Darstellung über Fourierreihen* :

Die Voraussetzungen an Theorem 3.1 sind erfüllt, d.h. die Lösung kann über die in Theorem 3.1 angegebene Fourierreihe berechnet werden :

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x) + xu(t)$$

Dies Reihe durfte hierbei nach Kapitel 2 gliedweise differenziert werden, es ergibt sich also :

$$y_x(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi'_n(x) + u(t) \quad (4.1)$$

$$y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \phi_n(x) + xu'(t) \quad (4.2)$$

Hierbei war  $b_n(t)$  und  $b'_n(t)$  die Lösung einer Differentialgleichung (vgl. Theorem 3.1). Daher werde ich die Differentialgleichung lösen und weiter vereinfachen.

2) *Berechnung der Fourierkoeffizienten* :

Nach Lemma 3.2 ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch :

$$b_n(t) = \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) b'_n(0) + \frac{1}{\beta_n} \phi'_n(t) b_n(0) \quad (4.3)$$

$$- \frac{1}{\beta_n^2} \left( \int_0^t \phi'_n(s) a_n(s) ds \right) \phi_n(t) + \frac{1}{\beta_n^2 c} \left( \int_0^t \phi_n(s) a_n(s) ds \right) \phi'_n(t)$$

Dabei waren  $b_n(0)$  und  $b'_n(0)$  gegeben durch :

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx$$

$$b'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx$$

$b_n(0)$  bzw.  $b'_n(0)$  sind also von  $f$  und  $u(0)$  bzw.  $g$  und  $u'(0)$  abhängig - diese Funktionen sind jeweils bekannt. Daher werde ich im Folgenden aus (4.3) die beiden Integralterme genauer untersuchen. Dazu zur Erinnerung :

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L xu''(t)\phi_n(x)dx = u''(t) \frac{2}{L} \int_0^L x\phi_n(x)dx =: u''_n(t)$$

In (4.3) müssen also die folgenden beiden Terme berechnet werden :

$$\int_0^t \phi_n(s)u''_n(s)ds \quad \int_0^t \phi'_n(s)u''_n(s)ds$$

Hierbei ist die Funktion  $u''_n(t)$  störend - über  $u_n(t)$  wissen wir mehr. Daher integriere ich zweimal partiell :

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n(s)u''_n(s)ds &= - \int_0^t \phi'_n(s)u'_n(s)ds + \phi_n(t)u'_n(t) - \underbrace{\phi_n(0)}_{=0} u'_n(0) & (4.4) \\ &= \int_0^t \underbrace{\phi''_n(s)}_{=-\beta_n^2\phi_n(s)} u_n(s)ds + \phi_n(t)u'_n(t) - \phi'_n(t)u_n(t) + \underbrace{\phi'_n(0)}_{=\beta_n} u_n(0) \\ &= -\beta_n^2 \int_0^t \phi_n(s)u_n(s)ds + \phi_n(t)u'_n(t) - \phi'_n(t)u_n(t) + \beta_n u_n(0) \end{aligned}$$

sowie analog für den zweiten Term :

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi'_n(s)u''_n(s)ds &= - \int_0^t \underbrace{\phi''_n(s)}_{=-\beta_n^2\phi_n(s)} u'_n(s)ds + \phi'_n(t)u'_n(t) - \underbrace{\phi'_n(0)}_{=\beta_n} u'_n(0) & (4.5) \\ &= -\beta_n^2 \int_0^t \phi'_n(s)u_n(s)ds + \beta_n^2(\phi_n(t)u_n(t) - \underbrace{\phi_n(0)}_{=0} u_n(0)) \\ &\quad + \phi'_n(t)u'_n(t) - \beta_n u'_n(0) \end{aligned}$$

Die bei der partiellen Integration aufgetretenden Randterme schauen hier etwas störend aus - es wird sich aber herausstellen, dass sie später sehr nützlich sein werden.

#### 4.1. ENTWICKLUNG DER ABLEITUNGEN DER LÖSUNG ALS FOURIERREIHEN 33

In (4.4) bzw. (4.5) kommen weiterhin Integrale vor die ich nun durch eine explizit angegebene Steuerung weiter vereinfachen werde.

3) *Einsetzen der Steuerung :*

Ich setze nun als Steuerung folgende Funktion ein :

$$u(t) = \frac{1}{2}(f'(L-t) - g(L-t))$$

Damit ergibt sich also für  $u_n$  :

$$u_n(t) = \frac{1}{2}(f'(L-t) - g(L-t)) \frac{2}{L} \int_0^L x \phi_n(x) dx$$

Das Integral kann hierbei mit Hilfe partieller Integration direkt berechnet werden :

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^L x \phi_n(x) dx &= -\frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_0^L x \phi_n''(x) dx \\ &= -\frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} [x \phi_n'(x)]_0^L + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_0^L \phi_n'(x) dx \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \left[ -\frac{1}{\beta_n} L \underbrace{\phi_n'(L)}_{=0} + \frac{1}{\beta_n} 0 \cdot \phi_n'(0) + \phi_n(L) - \underbrace{\phi_n(0)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \phi_n(L) \end{aligned}$$

Im Folgenden werde ich nun folgende Integrale aus (4.4) bzw. (4.5) anhand oben angegebener Steuerung weiter vereinfachen :

$$\int_0^t \phi_n'(s) u_n(s) ds \quad \int_0^t \phi_n(s) u_n(s) ds$$

Dabei werde ich eine Koordinatentransformation durchführen und es werden die Terme  $\phi_n'(L-x)$  bzw.  $\phi_n(L-x)$  entstehen. Diese lassen sich - wie folgende Rechnung zeigen wird - durch trigonometrische Formeln ebenfalls vereinfachen. Es gelten folgende trigonometrische Formel :

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad (4.6)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \quad (4.7)$$

Aus (4.6) folgt daher für  $\phi_n'(L-x) = \beta_n \cos(\beta_n(L-x))$  :

$$\begin{aligned} \phi_n'(L-x) &= \beta_n \cos(\beta_n(L-x)) = \beta_n \cos(\beta_n L) \cos(\beta_n x) + \beta_n \sin(\beta_n L) \sin(\beta_n x) \\ &= \beta_n \underbrace{\phi_n'(L)}_{=0} \phi_n'(x) + \beta_n \phi_n(L) \phi_n(x) \\ &= \beta_n \phi_n(L) \phi_n(x) \end{aligned}$$

Analog folgt aus (4.7) für  $\phi_n(L-x) = \sin(\beta_n(L-x))$  :

$$\phi_n(L-x) = \frac{1}{\beta_n} \phi_n(L) \phi_n'(x) \quad (4.8)$$

Damit ergibt sich mit Koordinatentransformation sowie (4.8) :

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n'(s) u_n(s) ds &= \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \phi_n(L) \int_0^t \phi_n'(s) u(s) ds \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \phi_n(L) \int_0^t \phi_n'(s) \frac{1}{2} (f'(L-t) - g(L-t)) ds \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \phi_n(L) \int_{L-t}^L \phi_n'(L-x) \frac{1}{2} (f'(x) - g(x)) dx \\ &= \frac{1}{\beta_n} \frac{2}{L} \underbrace{\phi_n(L)^2}_{=1} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} (f'(x) - g(x)) dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

Hierbei wurde verwendet, dass  $\phi_n(L)^2 = 1$ . Es ergibt sich insgesamt also :

$$\int_0^t \phi_n'(s) u_n(s) ds = \frac{1}{\beta_n} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx$$

Analog ergibt sich für das zweite Integral mit Koordinatentransformation und (4.8) :

$$\int_0^t \phi_n(s) u_n(s) ds = \frac{1}{\beta_n^3} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \quad (4.10)$$

Damit sind beide Integrale nur noch von  $f$  und  $g$  abhängig und damit bekannt. Daher werde ich im Folgenden die Zwischenergebnisse einsetzen und weiter vereinfachen.

4) Vereinfachung der Fourierkoeffizienten :

Setzt man in (4.3) nun (4.4) und (4.5) sowie (4.9) und (4.10) ein, so erhält man für  $b_n(t)$  :

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) b_n'(0) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) b_n(0) \\ &- \frac{1}{\beta_n^2} \left( -\beta_n \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx + \beta_n^2 \phi_n(t) u_n(t) + \phi_n'(t) u_n'(t) - \beta_n u_n'(0) \right) \phi_n(t) \\ &+ \frac{1}{\beta_n^2} \left( -\frac{1}{\beta_n} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx + \phi_n(t) u_n'(t) - \phi_n'(t) u_n(t) + \beta_n u_n(0) \right) \phi_n'(t) \end{aligned}$$

Hierbei lässt sich folgendes vereinfachen :

$$u_n'(t) \underbrace{[\phi_n(t) \phi_n'(t) - \phi_n(t) \phi_n'(t)]}_{=0} = 0$$

$$u_n(t) \underbrace{[\beta_n^2 \phi_n(t)^2 + \phi_n'(t)^2]}_{= \beta_n^2} = \beta_n^2 u_n(t)$$

Klammert man  $\phi_n(t)$  und  $\phi_n'(t)$  aus, so ergibt sich :

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) \underbrace{\left( b_n'(0) + u_n'(0) + \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \right)}_{:= c_1(t)} \\ &+ \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) \underbrace{\left( b_n(0) + u_n(0) - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \right)}_{:= c_2(t)} - u_n(t) \end{aligned}$$

Man erhält also :

$$b_n(t) = \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) c_1(t) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) c_2(t) - u_n(t) \quad (4.11)$$

Damit können wir nun  $y_x(t, x)$  berechnen. Für  $y_t(t, x)$  benötigen wir  $b_n'$ . Dazu leite ich  $b_n$  ab und erhalte folgendes Ergebnis :

$$b_n'(t) = \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) c_1(t) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n''(t) c_2(t) - u_n'(t) \quad (4.12)$$

Hierbei kürzen sich die Ableitungen bezüglich  $c_1$  und  $c_2$  heraus, da :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) \frac{d}{dt} c_1(t) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) \frac{d}{dt} c_2(t) \\ &= \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) \frac{d}{dt} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx - \frac{1}{\beta_n^3} \phi_n'(t) \frac{d}{dt} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass die jeweils ersten beiden Terme von  $c_1$  und  $c_2$  konstant sind, d.h. sie fallen bei der Differentiation weg. Nach der Rechnung vor (4.9) bzw. (4.10) lässt sich das zurücktransformieren in :

$$\begin{aligned} &= \phi_n(t) \frac{d}{dt} \int_0^t \phi_n'(s) u_n(s) ds - \phi_n'(t) \frac{d}{dt} \int_0^t \phi_n(s) u_n(s) ds \\ &= \phi_n(t) \phi_n'(t) u_n(t) ds - \phi_n'(t) \phi_n(t) u_n(t) ds = 0 \end{aligned}$$

Nun haben wir eine Darstellung von  $b_n$  und  $b_n'$ , die nur von  $f$  und  $g$  abhängt. Daher werde ich im Folgenden die erhaltenen Formeln einsetzen und weiter vereinfachen.

5) Vereinfachung von  $y_x$  und  $y_t$  :

Setzt man nun  $b_n(t)$  (d.h. (4.11)) und  $b_n'(t)$  (d.h. (4.12)) in  $y_t$  bzw.  $y_x$  ein, so erhält man :

$$\begin{aligned} y_x(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n'(x) + u(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\beta_n} \phi_n(t) c_1(t) + \frac{1}{\beta_n} \phi_n'(t) c_2(t) - u_n(t) \right] \phi_n'(x) + u(T) \end{aligned}$$

sowie :

$$\begin{aligned} y_t(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \phi_n(x) + xu'(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\beta_n} \phi'_n(t) c_1(t) + \frac{1}{\beta_n} \phi''_n(t) c_2(t) - u'_n(t) \right] \phi_n(x) + xu'(t) \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.18 und 2.17 entsprechen die Fourierreihen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(T) \phi'_n(x) \quad \text{mit} \quad u_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L xu(t) \phi_n(x) dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(T) \phi_n(x) \quad \text{mit} \quad u'_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L xu'(t) \phi_n(x) dx \end{aligned}$$

den Funktionen  $u(t)$  bzw.  $xu'(t)$  und kürzen sich damit. Die Bedingung an  $xu(t)$  in Lemma 2.18 ist hierbei erfüllt, da  $f(0) = 0$ .

Damit haben wir nun für  $y_x$  und  $y_t$  die gewünschte Form. Die beiden Terme  $c_1$  und  $c_2$  können allerdings ebenfalls vereinfacht werden.

6) Vereinfachung von  $c_1$  und  $c_2$  :

Zur Erinnerung :

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= b'_n(0) + u'_n(0) + \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \\ c_2(t) &:= b_n(0) + u_n(0) - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi'_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

wobei  $b_n(0)$  sowie  $b'_n(0)$  gegeben waren durch :

$$\begin{aligned} b'_n(0) &:= \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx \\ b_n(0) &:= \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx \end{aligned}$$

Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned} b'_n(0) + u'_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - xu'(0)] \phi_n(x) dx + \frac{2}{L} \int_0^L xu'(t) \phi_n(x) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \phi_n(x) dx =: g_n \end{aligned}$$

sowie analog :

$$\begin{aligned} b_n(0) + u_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - xu(0)] \phi_n(x) dx + \frac{2}{L} \int_0^L xu(t) \phi_n(x) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx =: f_n \end{aligned}$$

Damit erhält man nun die in der Proposition angegebene Formel.  $\square$

## 4.2 Energieabnahme

Mit den Vereinfachungen von  $y_x$  und  $y_t$  kann man nun folgende Abschätzung zeigen :

**Theorem 4.3** (Energieabschätzung).

Seien die Voraussetzungen aus Theorem 3.1 sowie Proposition 4.1 erfüllt. Sei  $l^*$  definiert durch :

$$l^*(y(t, x), u(t)) = \int_0^L y_x(t, x)^2 + y_t(t, x)^2$$

Dann gilt :

$$l^*(y(1)) \leq l^*(y(0))$$

Die Energieabnahme ist hierbei gegeben durch :

$$\frac{1}{2} \int_{L-T}^L (f'(x) - g(x))^2 dx$$

*Beweis.* Der Beweis untergliedert sich in vier Schritte. Auch hier werde ich im ersten Schritt durch vorherige Proposition die Funktionen durch ihre Fourierreihen ersetzen. Danach rechne ich das Quadrat von  $y_x$  und  $y_t$  aus und vereinfache weiter. Im dritten Schritt wandel ich die auftretenden Fourierreihen zurück in ihre Funktionen. Damit lässt sich im letzten Schritt die Abschätzung zeigen. Abbildung 4.2 stellt den Aufbau des Beweises als Flussdiagramm dar.

1) *Darstellung über Fourierreihen :*

Wie am Anfang des Abschnittes betrachten wir wieder  $l^*(y(1))$ . Dieses ist gegeben durch :

$$l^*(y(1)) = \int_0^L y_x(T, x)^2 + y_t(T, x)^2 dx$$

Nach Proposition 4.1 lässt sich dies über Fourierreihen schreiben als :

$$\begin{aligned} l^*(y(1)) &= \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi_n(t)c_1(t) + \phi_n'(t)c_2(t)) \phi_n'(x) \right)^2 \\ &\quad + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi_n'(t)c_1(t) + \phi_n''(t)c_2(t)) \phi_n(x) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

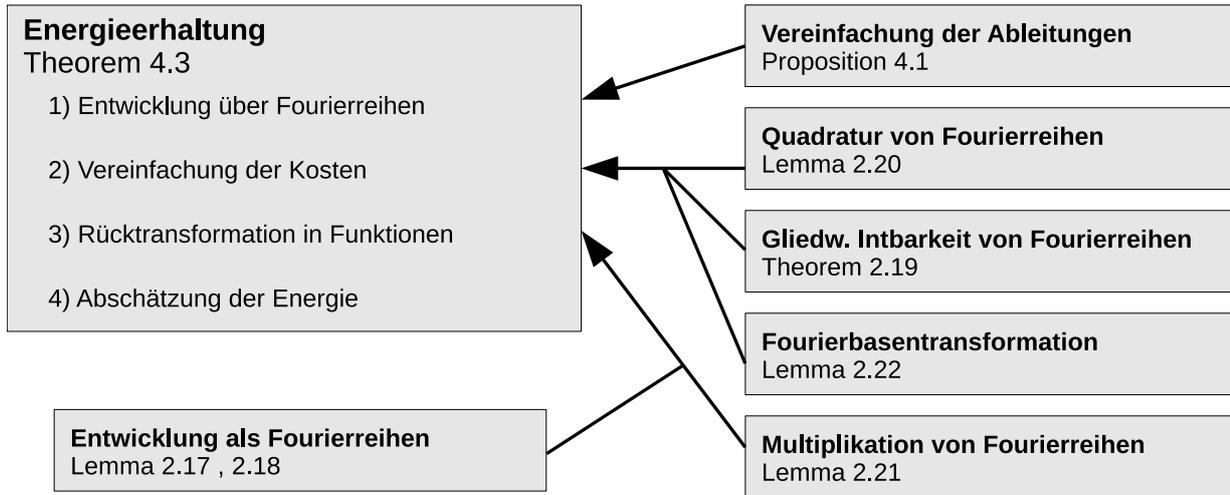


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 4.3

Hierbei sind allerdings die Terme  $\phi_n(T)$  und  $\phi'_n(T)$  störend, da sie abhängig von  $n$  für festes  $T$  unterschiedliche Werte annehmen. Daher werde ich im Folgenden die Quadrate der Fourierreihen ausrechnen - man wird sehen, dass  $\phi_n(T) = \sin(\beta_n T)$  und  $\phi'_n(T) = \beta_n \cos(\beta_n T)$  dann aufgrund der Eigenschaft  $\sin(\beta_n T)^2 + \cos(\beta_n T)^2 = 1$  wegfallen werden.

### 2) Vereinfachung der Kosten :

Dabei gilt nach Lemma 2.20 für bel. Fourierbasen, dass die Quadratur der Fourierreihe gleich der Quadratur der Fourierkoeffizienten und der Fourierbasis entspricht - dies liegt daran, dass Fourierbasen eine Orthonormalbasis sind. Es gilt also :

$$\int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \phi_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)^2 \phi_n(x)^2 \right) dx$$

Es kann also das Quadrat in die Reihe hineingezogen werden. Damit ergibt sich aus (4.13)

$$l^*(y(1)) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)^2}{\beta_n^2} [c_1(T)^2 \phi_n(t)^2 + c_2(T)^2 \phi_n'(t)^2 + 2c_1(T)c_2(T) \phi_n(t) \phi_n'(t)] dx \quad (4.14)$$

$$\frac{\phi_n(x)^2}{\beta_n^2} [c_1(T)^2 \phi_n'(t)^2 + c_2(T)^2 \phi_n''(t)^2 + 2c_1(T)c_2(T) \phi_n'(t) \phi_n''(t)] dx$$

Hierbei können  $\phi_n(x)$  oder  $\phi_n(T)$  bzw. ihre Ableitungen noch nicht ausgeklammert werden. Allerdings können wir nach Theorem 2.19 gliedweise integrieren und nach Lemma 2.22 gilt :

$$\int_0^L \frac{\phi_n'(x)^2}{\beta_n^2} dx = \int_0^L \phi_n(x)^2 dx$$

Betrachtet man nun die jeweils von  $c_1^2$ ,  $c_2^2$  und  $c_1 c_2$  abhängigen Terme, so lässt sich in (4.14)

folgendes zusammenfassen :

$$\begin{aligned}
c_1(T)^2 \phi_n(x)^2 \underbrace{\left[ \phi_n(T)^2 + \frac{1}{\beta_n^2} \phi_n'(T)^2 \right]}_{= \sin(\beta_n T)^2 + \cos(\beta_n T)^2 = 1} &= c_1(T)^2 \phi_n(x)^2 \\
c_2(T)^2 \phi_n(x)^2 \underbrace{\left[ \phi_n'(T)^2 + \frac{1}{\beta_n^2} \underbrace{\phi_n''(T)^2}_{= -\beta_n^2 \phi_n(T)} \right]}_{= \beta_n^2 (\sin(\beta_n T)^2 + \cos(\beta_n T)^2) = \beta_n^2} &= \beta_n^2 c_2(T)^2 \phi_n(x)^2 \\
2c_1(T)c_2(T)\phi_n(x)^2 \underbrace{\left[ \phi_n(T)\phi_n'(T) + \frac{1}{\beta_n^2} \phi_n'(T) \underbrace{\phi_n''(T)}_{= -\beta_n^2 \phi_n(T)} \right]}_{= 0} &= 0
\end{aligned}$$

Damit sind die störenden Terme weggefallen und es bleibt aus (4.14) ein deutlich kürzerer Term :

$$l^*(y(1)) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} [c_1(T)^2 + \beta_n^2 c_2(T)^2] \phi_n(x)^2 dx$$

In dem zweiten Teil wird nun mit Lemma 2.22 die Fourierbasis wieder zurückverwandelt :

$$l^*(y(1)) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} c_1(T)^2 \phi_n(x)^2 + c_2(T)^2 \phi_n'(x)^2 dx$$

Dieser Term lässt sich nicht weiter vereinfachen, daher quadriere ich  $c_1$  und  $c_2$  und erhalte :

$$\begin{aligned}
l^*(y(1)) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \phi_n(x)^2 + 2g_n d_1(T) \phi_n(x)^2 + d_1(T)^2 \phi_n(x)^2 \\
+ f_n^2 \phi_n'(x)^2 - 2\frac{1}{\beta_n^2} f_n d_2(T) \phi_n'(x)^2 + \frac{1}{\beta_n^4} d_2(T)^2 \phi_n'(x)^2 dx
\end{aligned} \quad (4.15)$$

Wobei  $d_1$  und  $d_2$  definiert sind durch :

$$\begin{aligned}
d_1(T) &:= \frac{2}{L} \int_{L-T}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \\
d_2(T) &:= \frac{2}{L} \int_{L-T}^L \phi_n'(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx
\end{aligned}$$

Hierbei treten in (4.15) nur noch bekannte Fourierkoeffizienten auf. Daher werde ich die einzelnen Fourierreihen betrachten und zurück in ihre Funktionen umformen.

3) *Rücktransformation in Funktionen :*

In (4.18) treten dabei folgende Funktionen auf :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n(x) & \quad \text{mit} \quad g_n := \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \phi_n(x) dx \\
\sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi'_n(x) & \quad \text{mit} \quad f_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx \\
\sum_{n=1}^{\infty} d_1(T) \phi_n(x) & \quad \text{mit} \quad d_1(T) := \frac{2}{L} \int_{L-T}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_2(T)}{\beta_n} \frac{\phi'_n(x)}{\beta_n} & \quad \text{mit} \quad d_2(T) := \frac{2}{L} \int_{L-T}^L \phi'_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx
\end{aligned}$$

Nach 2.17 entspricht die erste Reihe hierbei der Funktion  $g$  sowie die letzten beiden der Funktion  $f' - g$  auf dem Intervall  $[L - T, L]$ , da sowohl  $\phi_n$  als auch  $\frac{\phi'_n}{\beta_n}$  Fourierbasen sind. Die zweite entspricht nach Lemma 2.18 der Funktion  $f'$ , da  $f(0) = 0$  erfüllt ist.

Dabei gilt nach Lemma 2.21 für beliebige Fourierbasen  $(\Phi_n)$  :

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \Phi_n(x)^2 dx = \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi_n(x) \right) dx$$

Daher kann anstatt der Multiplikation von zwei Fourierkoeffizienten auch die beiden Fourierreihen multipliziert werden - und diese können wiederum in ihre Funktionen zurückverwandelt werden. Damit vereinfachen sich aus (4.15) folgende Terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} 2g_n d_1(T) \phi_n(x)^2 - 2 \frac{1}{\beta_n^2} f_n d_2(T) \phi'_n(x)^2 & = 2 \frac{1}{2} (g(x) - f'(x)) (f'(x) - g(x)) \\
& = -(f'(x) - g(x))^2 \\
\sum_{n=1}^{\infty} d_1(T)^2 \phi_n(x)^2 + \frac{1}{\beta_n^4} d_2(T)^2 \phi'_n(x)^2 & = \frac{1}{4} (f'(x) - g(x))^2 + \frac{1}{4} (f'(x) - g(x))^2 \\
& = \frac{1}{2} (f'(x) - g(x))^2
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass obige Funktionen nur auf dem Intervall  $[L - T, L]$  definiert sind - auf dem Intervall  $[0, L - T]$  sind die Funktionen durch die Nullfunktion fortgesetzt.

Insgesamt ergibt sich aus (4.15) also :

$$l^*(y(1)) = \int_0^L f'(x)^2 + g(x)^2 - \frac{1}{2} 1_{[L-T, L]} (f'(x) - g(x))^2 dx$$

Hierbei entspricht  $1_{[L-T, L]}$  der n Funktion des Intervalls  $[L - T, L]$ . Dies lässt sich nicht weiter vereinfachen - die Kosten sind nur noch von  $f$  und  $g$  abhängig. Damit können wir im

Folgenden  $l^*(y(1))$  mit  $l^*(y(0))$  vergleichen.

4) *Abschätzung der Energie :*

Zur Erinnerung,  $l^*(y(0))$  war gegeben durch :

$$l^*(y(0)) = \int_0^L f'(x)^2 + g(x)^2 dx$$

Damit lässt sich  $l^*(y(1))$  vereinfachen zu :

$$l^*(y(1)) = l^*(y(0)) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[L-T, L]} \int_0^L \underbrace{(f'(x) - g(x))^2}_{\geq 0} dx \leq l^*(y(0))$$

Die im Theorem angegebene Abschätzung wurde also gezeigt und die Energieabnahme folgt ebenfalls aus obiger Gleichung.

Man beachte hierbei, dass in obiger Abschätzung für  $f' = g$  auf  $[L-T, L]$  Gleichheit auftritt.  $\square$

Wie im Beweis bereits erwähnt tritt für  $f' = g$  auf  $[L-T, L]$  Gleichheit der Kosten auf, d.h.  $l^*(y(0)) = l^*(y(1))$ . Damit ist für diesen Sonderfall  $\sigma = 1$  und damit die Wellengleichung für  $T < L$  nicht kontrollierbar. Unser Ziel ist es nun, dieses Problem zu beseitigen.

Da die Steuerung nur am Rand die Wellengleichung beeinflusst und die Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich ist, kann innerhalb des Gebietes die Steuerung erst nach einer gewissen Zeit (abhängig von der Entfernung zum rechten Rand) eine Veränderung verursachen. Daher gibt es Punkte an dem die Steuerung die Energie nicht beeinflusst und somit bleibt die Energie dort konstant. Um dieses Problem so beheben wird die Energie mit ihrer Entfernung zum rechten Rand gewichtet, d.h. das Gewicht ist abhängig von der Entfernung zum rechten Rand an dem die Steuerung eingreifen kann. Im nächsten Kapitel werde ich zeigen, dass der Beweis damit funktioniert.



# Kapitel 5

## Kontrollierbarkeitsabschätzung mit gewichteter Energienorm

In diesem Kapitel werde ich zeigen, dass die Wellengleichung im 1D-Fall kontrollierbar ist. Dazu werde ich den Begriff Kontrollierbarkeit definieren und danach zeigen, dass die Wellengleichung diese Bedingung erfüllt. Dazu müssen zwei Konstanten abgeschätzt werden können. Anhand dem vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass die gewöhnliche Energie für den Beweis nicht ausreichend ist und man eine gewichtete Energie benötigt. Dieses Kapitel orientiert sich sehr grob an der Beweisidee von [1].

Zur Vereinfachung wird in diesem Kapitel die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = 1$  gesetzt - dadurch werden die Rechnung deutlich einfacher. Zur Erinnerung aus Kapitel 1 :

**Definition 5.1** (Exponentielle Kontrollierbarkeit).

*Ein System ist exponentiell kontrollierbar  $:\Leftrightarrow$*

$$\exists C \geq 1, \sigma \in ]0, 1[ : \quad \forall y \in Y \exists u \in U : \quad l^*(y_u(n), u(n)) \leq C \sigma^n l^*(y) \quad (5.1)$$

Hierbei sind  $Y$  und  $U$  allgemeine Funktionenräume. Für unser in Kapitel 1 gegebenes Problem sind diese durch die Voraussetzungen in Theorem 3.1 festgelegt. Zudem betrachten wir ein bezüglich der Zeit diskretisiertes Problem, wobei  $f(n)$  dem Wert der Funktion zur Zeit  $nT$  entspricht.

Im folgenden werden wir für die Wellengleichung  $C$  und  $\sigma$  berechnen um somit exponentielle Kontrollierbarkeit nachzuweisen. Dazu benötigen wir eine Kostenfunktion :

$$l^*(y(n), u(n)) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^L \rho(y_x(nT, x), y_t(nT, x)) dx + \lambda \int_0^{NT} u(t)^2 dt \quad (5.2)$$

Im ersten Abschnitt werde ich für  $\rho$  folgende allgemeinere, gewichtete Energie betrachten :

$$\rho(y_x(\cdot, nT), y_t(\cdot, nT)) = \omega_1(\cdot)[y_x(\cdot, nT) + y_t(\cdot, nT)]^2 + \omega_2(\cdot)[y_x(\cdot, nT) - y_t(\cdot, nT)]^2 \quad (5.3)$$

wobei an  $\omega_1$  und  $\omega_2$  folgende Bedingungen gestellt werden :

$$\omega_1(x) \geq 1 \quad \omega_2(x) \geq 1 \quad \forall x \in [0, L] \quad (5.4)$$

Für  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  erhält man hierbei die gewöhnliche Energie.

## 5.1 Berechnung von $C$

Für die Abschätzung von  $C$  berechnen wir die Auswirkung der Steuerung auf die Energie. In diesem Abschnitt werde ich die verallgemeinerte Energie (5.3) benutzen - die gewichtete Energie ist hiervon ein Sonderfall.

Hierbei benötigen wir die diskrete Darstellung der Steuerung, vgl. [1] :

$$u(n, t) = \frac{1}{2} [y_x(L - t, nT) - y_t(L - t, nT)/c]$$

Die Steuerung wurde so gewählt, dass am rechten Rand keine Reflektionen auftreten. Damit ergibt sich für  $T \leq L$  :

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^T u(n, t)^2 dt &= \frac{\lambda}{4} \int_0^T [y_x(L - t, nT) - y_t(L - t, nT)/c]^2 dt \\ &= \frac{\lambda}{4c} \int_{L-T}^L [y_x(x, nT) - y_t(x, nT)/c]^2 dx \leq \int_0^L \rho(y_x(\cdot, nT), y_t(\cdot, nT)) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{c} l^*(y(nT)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l(y(n), u(n)) \leq \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) l^*(y(nT)) = Cl^*(y(nT))$$

Wobei  $C := 1 + \frac{\lambda}{c}$ . Hier wurde benutzt, dass  $\omega_1, \omega_2 \geq 1$ .

## 5.2 Berechnung von $\sigma$

Die Beweisidee orientiert sich an [1] und ab Beweisschritt 4) ist die Rechnung identisch. Die Rechnungen davor unterschieden sich allerdings durch die Verwendung der Fourierreihen deutlich.

Für die noch fehlende Berechnung von  $\sigma$  muss man zeigen, dass die Kosten streng monoton fallend sind. Wählt man wie im vorherigen Kapitel die Energie als Kosten, so sind die Kosten nur monoton fallend. Daher werde ich in diesem Abschnitt eine neue Kostenfunktion verwenden - die die gewichtete Energie verwendet und anhand dieser zeigen, dass die Kosten damit streng monoton fallend sind. Dieses Ergebnis ist als folgendes Theorem formuliert :

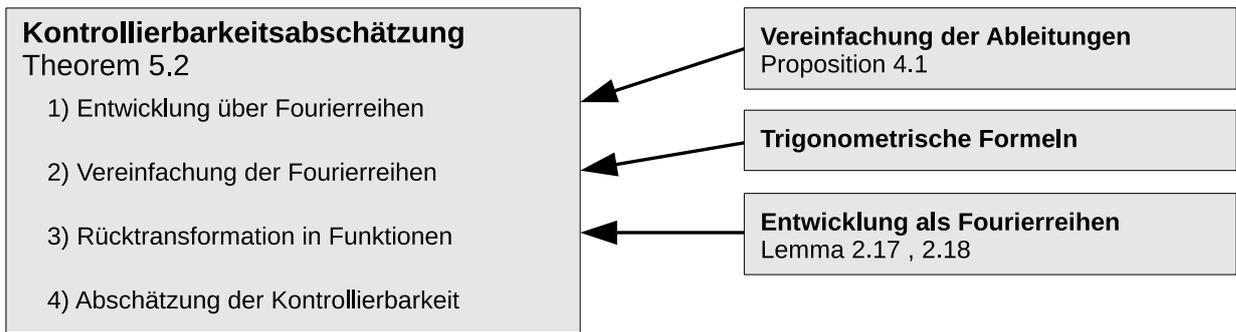


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 5.2

**Theorem 5.2** (Energieabschätzung).

Seien die Voraussetzungen aus Theorem 3.1 sowie Proposition 4.1 erfüllt. Sei  $l^*$  definiert durch :

$$l^*(y(t, x), u(t)) = \int_0^L \omega_1(x) [y_x(t, x) + y_t(t, x)]^2 + \omega_2(x) [y_x(t, x) - y_t(t, x)]^2 dx \quad (5.5)$$

$$\text{mit } \omega_1(x) := 1 + L + x \quad (5.6)$$

$$\omega_2(x) := 1 + L - x \quad (5.7)$$

Dann gilt für  $\sigma := 1 - \frac{T}{1+2L}$

$$l^*(y(1)) \leq \sigma l^*(y(0))$$

Die Energieabnahme durch die Steuerung entspricht hierbei :

$$\int_{L-T}^L \omega_2(x+T) [f'(x) - g(x)]^2 dx$$

*Beweis.* Der Beweis besteht aus vier Schritten. Im ersten Schritt benutze ich die in Kapitel 4 hergeleiteten Vereinfachungen an  $y_x$  und  $y_t$  und stelle damit die Funktionen als Fourierreihen dar. Danach werde ich die Reihen soweit möglich vereinfachen und umformen. Anschließend transformiere ich die Fourierreihen zurück in die Funktionen und vereinfache sie. Im letzten Schritt werde ich dann die im Theorem formulierte Abschätzung zeigen. Abbildung 5.1 stellt den Aufbau des Beweises als Flussdiagramm dar.

1) *Darstellung über Fourierreihen :*

Zuerst benötigen wir eine Darstellung von  $y_x$  und  $y_t$  als Fourierreihen. Dazu hilft Proposition 4.1 aus vorherigem Kapitel, die besagt :

$$y_x(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi_n(t)c_1(t) + \phi'_n(t)c_2(t)) \phi'_n(x)$$

$$y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\phi'_n(t)c_1(t) + \phi''_n(t)c_2(t)) \phi_n(x)$$

mit  $c_1$  und  $c_2$  definiert als :

$$c_1(t) := g_n + \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx$$

$$c_2(t) := f_n - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi'_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx$$

In (5.5) treten die Summe sowie die Differenz von  $y_x$  und  $y_t$  auf, daher berechne ich diese :

$$y_x(t, x) + y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} [c_1(t) (\phi_n(t)\phi'_n(x) + \phi'_n(t)\phi_n(x)) + c_2(t) (\phi'_n(t)\phi'_n(x) + \phi''_n(t)\phi_n(x))] \quad (5.8)$$

$$y_x(t, x) - y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} [c_1(t) (\phi_n(t)\phi'_n(x) - \phi'_n(t)\phi_n(x)) + c_2(t) (\phi'_n(t)\phi'_n(x) - \phi''_n(t)\phi_n(x))] \quad (5.9)$$

Das Ziel wird es nun sein, (5.8) und (5.9) so umzuformen, dass sie wieder zurück in Fourierreihen transformiert werden können. Hierbei stört  $\phi_n(t)$  bzw.  $\phi'_n(t)$ , das wir im Folgenden durch eine Verschiebung der Integralgrenzen in den Kosten wegtransformieren können.

2) Vereinfachung der Fourierreihen :

Zuerst werde ich allerdings (5.8) und (5.9) mit Hilfe von folgenden trigonometrischen Formeln vereinfachen :

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

Für die Terme aus (5.8) ergibt sich damit :

$$\phi_n(t)\phi'_n(x) + \phi'_n(t)\phi_n(x) = \beta_n \phi_n(t+x)$$

$$\phi'_n(t)\phi'_n(x) + \phi''_n(t)\phi_n(x) = \beta_n \phi'_n(t+x)$$

sowie für die Terme aus (5.9) :

$$\phi_n(t)\phi'_n(x) - \phi'_n(t)\phi_n(x) = \beta_n \phi_n(t-x)$$

$$\phi'_n(t)\phi'_n(x) - \phi''_n(t)\phi_n(x) = \beta_n\phi'_n(t-x)$$

(5.8) vereinfacht sich also zu :

$$y_x(t, x) + y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t)\phi_n(t+x) + c_2(t)\phi'_n(t+x) \quad (5.10)$$

Analog vereinfacht sich (5.9) zu :

$$y_x(t, x) - y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t)\phi_n(t-x) + c_2(t)\phi'_n(t-x) \quad (5.11)$$

$$y_x(t, x) - y_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_2(t)\phi'_n(x-t) - c_1(t)\phi_n(x-t) \quad (5.12)$$

Hierbei wurde für (5.12) benutzt, dass  $\cos(-x) = \cos(x)$  sowie  $\sin(-x) = -\sin(x)$ . Diese Umformung werden wir im nächsten Schritt benötigen.

(5.10) - (5.12) können aufgrund ihrer Verschiebung (d.h.  $\pm t$ ) noch nicht in Funktionen umgewandelt werden. Daher werde ich nun das Integral über  $x$  so transformieren, dass diese Verschiebungen wegfallen werden. Aus dem Integral über (5.10) ergibt sich :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \omega_1(x) [y_x(t, x) + y_t(t, x)]^2 dx \\ &= \int_0^L \omega_1(x) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t)\phi_n(t+x) + c_2(t)\phi'_n(t+x) \right]^2 dx \\ &= \int_t^{L+t} \omega_1(x-t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t)\phi_n(x) + c_2(t)\phi'_n(x) \right]^2 dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analog ergibt sich aus (5.11) und (5.12) :

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \omega_2(x) [y_x(t, x) - y_t(t, x)]^2 dx \\
= & \int_0^t \omega_2(x) [y_x(t, x) - y_t(t, x)]^2 dx \\
& + \int_t^L \omega_2(x) [y_x(t, x) - y_t(t, x)]^2 dx \\
= & \int_0^t \omega_2(x) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t) \phi_n(t-x) + c_1(t) \phi'_n(t-x) \right]^2 dx \\
& + \int_t^L \omega_2(x) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_2(t) \phi'_n(x-t) - c_1(t) \phi_n(x-t) \right]^2 dx \\
= & \int_0^t \omega_2(t-x) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t) \phi_n(x) + c_2(t) \phi'_n(x) \right]^2 dx \\
& + \int_0^{L-t} \omega_2(x+t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_2(t) \phi'_n(x) - c_1(t) \phi_n(x) \right]^2 dx \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im Gegensatz zu (5.13) das Integral aufgeteilt. Grund hierfür ist, dass  $t-x \geq 0$  für  $x \in [0, t]$  sowie  $x-t \geq 0$  für  $x \in [t, L]$ .

Damit können im folgenden Schritt die Fourierreihen nun in ihre Funktionen umgewandelt werden.

3) *Rücktransformation in Funktionen :*

Für die Rücktransformation betrachte ich zunächst die in (5.13) und (5.14) auftretenden Fourierreihen einzeln :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_1(t) \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g_n + \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \right] \phi_n(x) \tag{5.15}$$

Diese Fourierreihe entspricht wie schon in Kapitel 5 gezeigt  $g(x) + 1_{[L-t, L]} [f'(x) - g(x)]$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_2(t) \phi'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{2}{L} \int_{L-t}^L \phi'_n(x) \frac{1}{2} [f'(x) - g(x)] dx \right] \phi'_n(x) \tag{5.16}$$

Diese Fourierreihe entspricht der Funktion  $f'(x) + 1_{[L-t, L]} [g(x) - f'(x)]$ .

Aus (5.15) und (5.16) ergibt sich damit :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_1(t)\phi_n(x) + c_2(t)\phi'_n(x) \right]^2 &= [f'(x) + g(x)]^2 \quad \text{auf } [0, L] \\ \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_2(t)\phi'_n(x) - c_1(t)\phi_n(x) \right]^2 &= [f'(x) - g(x)]^2 \quad \text{auf } [0, L-t] \end{aligned}$$

Setzt man dies in (5.13) ein, so ergibt sich :

$$\begin{aligned} \int_0^L \omega_1(x) [y_x(t, x) + y_t(t, x)]^2 dx &= \int_t^{L+t} \omega_1(x-t) [f'(x) + g(x)]^2 dx \\ &= \int_t^L \omega_1(x-t) [f'(x) + g(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (5.17)$$

Im letzten Schritt wurde hierbei benutzt, dass die Funktionen  $f$  bzw.  $g$  außerhalb von  $[0, L]$  nicht definiert sind, d.h. sie können dort o.E. Null gesetzt werden. Analog ergibt sich aus (5.14) :

$$\begin{aligned} \int_0^L \omega_2(x) [y_x(t, x) - y_t(t, x)]^2 dx &= \int_0^t \omega_2(t-x) [f'(x) + g(x)]^2 dx \\ &+ \int_0^{L-t} \omega_2(x+t) [f'(x) - g(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (5.18)$$

Insgesamt können wir die Kosten (vgl. (5.5)) also über den Umweg der Fourierreihen auf die Summe von (5.17) und (5.18) vereinfachen. Im nächsten Schritt werde ich damit nun die im Theorem aufgestellte Abschätzung zeigen.

#### 4) Abschätzung :

Die Kosten (5.5) haben sich durch den vorherigen Schritt vereinfacht zu :

$$\begin{aligned} l^*(y(1)) &= \int_t^L \omega_1(x-t) [f'(x) + g(x)]^2 dx \\ &+ \int_0^t \omega_2(t-x) [f'(x) + g(x)]^2 dx \\ &+ \int_0^{L-t} \omega_2(x+t) [f'(x) - g(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

Es gilt  $\omega_2(t-x) = 1 + L - t + x = \omega_1(x-t)$ . Damit können in (5.19) die ersten beiden Integrale zusammengefasst werden und es ergibt sich :

$$l^*(y(1)) = \int_0^L \omega_1(x-T) [f'(x) + g(x)]^2 dx + \int_0^{L-T} \omega_2(x+T) [f'(x) - g(x)]^2 dx \quad (5.20)$$

Das Ziel ist folgende Abschätzung :  $l^*(y(1)) \leq \sigma l^*(y(0))$ . Für die Berechnung von  $l^*(y(0))$  greife ich wieder auf Kapitel 4 zurück. Dort hatten wir berechnet, dass  $y_x(0, x) = f'(x)$  sowie  $y_t(0, x) = g(x)$  ist. Damit ergibt sich für  $l^*(y(0))$  :

$$l^*(y(0)) = \int_0^L \omega_1(x) [f'(x) + g(x)]^2 dx + \int_0^L \omega_2(x) [f'(x) - g(x)]^2 dx \quad (5.21)$$

Um (5.20) nach (5.21) abschätzen zu können, müssen wir also zeigen, dass  $\omega_1(x-T) \leq \sigma \omega_1(x)$  und  $\omega_2(x+T) \leq \sigma \omega_2(x)$ . Dazu eine kleine Hilfsrechnung :

$$\omega_{1,2}(x) = 1 + L \pm x \leq 1 + 2L \quad \forall x \in [0, L]$$

Insbesondere gilt also :

$$\frac{1}{\omega_{1,2}(x)} \geq \frac{1}{1 + 2L} \quad \forall x \in [0, L]$$

Durch diese kleine Nebenrechnung ergeben sich die Abschätzungen :

$$\omega_1(x-T) = 1 + L + x - T = \omega_1(x) - T \frac{1}{\omega_1(x)} \omega_1(x) \leq \left(1 - \frac{T}{1 + 2L}\right) \omega_1(x)$$

$$\omega_2(x+T) = 1 + L - x - T = \omega_2(x) - T \frac{1}{\omega_2(x)} \omega_2(x) \leq \left(1 - \frac{T}{1 + 2L}\right) \omega_2(x)$$

Damit ergibt sich aus (5.20) für  $\sigma := 1 - \frac{T}{1+2L}$  :

$$\begin{aligned} l^*(y(1)) &= \int_0^L \underbrace{\omega_1(x-T)}_{\leq \sigma \omega_1(x)} [f'(x) + g(x)]^2 dx + \int_0^L \underbrace{\omega_2(x+T)}_{\leq \sigma \omega_2(x)} [f'(x) - g(x)]^2 dx \\ &\quad - \int_{L-T}^L \omega_2(x+T) [f'(x) - g(x)]^2 dx \\ &\leq \sigma l^*(y(0)) - \int_{L-T}^L \underbrace{\omega_2(x+T)}_{\geq 0} \underbrace{[f'(x) - g(x)]^2}_{\geq 0} dx \\ &\leq \sigma l^*(y(0)) \end{aligned}$$

Die Energieabnahme ist hierbei gegeben durch :

$$\int_{L-T}^L \omega_2(x+T) [f'(x) - g(x)]^2 dx$$

□

Erinnert man sich an den Anfang dieses Kapitels, so wollten wir die Kontrollierbarkeit der Wellengleichung zeigen. Dazu mussten wir zwei Konstanten,  $C$  und  $\sigma$  berechnen.  $C$  ließ sich dabei für einen sehr allgemeinen Fall, der auch obige gewichtete Energie beinhaltet, berechnen. Durch Theorem 5.2 haben wir nun auch einen Wert für  $\sigma$ . Damit wurde also gezeigt, dass das in dieser Arbeit behandelte Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung kontrollierbar ist.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In diesem Kapitel werde ich diese Arbeit kurz zusammenfassen. Ziel war es, über die gewichtete Energie als Stufenkosten die Kontrollierbarkeitsabschätzung der Wellengleichung zu zeigen. Dazu musste gezeigt werden, dass die Stufenkosten nach einer Zeit  $T$  mit Hilfe einer Steuerung abgenommen haben, d.h. es wurde gezeigt, dass die gewichtete Energie zur Zeit  $t = T$  kleiner ist als die gewichtete Energie zur Zeit  $t = 0$ . Zur Berechnung der gewichteten Energie zur Zeit  $t = T$  wurde dabei die Lösung der Wellengleichung zur Zeit  $t = T$  benötigt. Um die Lösung zu berechnen verwende ich den Ansatz über Fourierreihen. Durch den Ansatz über Fourierreihen muss man statt einer partiellen Differentialgleichung nur noch eine inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich der Zeit lösen.

In Kapitel 2 führe ich daher in Fourierreihen ein und zeige, dass diese unter geeigneten Voraussetzungen gegen die entwickelte Funktionen konvergieren. Zusätzlich zeige ich, dass Fourierreihen gliedweise differenziert und integriert werden können und wann zwei Fourierreihen identisch sind.

Mit Hilfe dieser Aussagen kann ich in Kapitel 3 nun eine Lösungsformel herleiten. Zuerst muss hierbei gezeigt werden, dass eine eindeutige Lösung existiert, die wir im Folgenden berechnen wollen. Diese unbekannte Lösung entwickle ich als Fourierreihe - in der Hoffnung das sich die Fourierreihe ausrechnen lässt. Damit die Fourierreihe gegen die Lösung konvergiert, muss sie die Wellengleichung sowie die Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. Aufgrund dieser bekommt man Bedingungen an die Fourierkoeffizienten und die Fourierbasis. Die Fourierkoeffizienten sind hierbei durch eine inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich der Zeit gegeben und die Fourierbasis kann man explizit angeben. Löst man nun diese Differentialgleichung - was in diesem Kapitel ebenfalls gemacht wurde, so ist die Fourierreihe explizit gegeben und konvergiert gegen die Lösung der Wellengleichung.

In Kapitel 4 zeige ich, dass für eine bestimmte Steuerung die Energie abnimmt, d.h. die Energie zur Zeit  $t = T$  ist kleiner oder gleich der Energie zur Zeit  $t = 0$ . Dazu leite ich zuerst über Fourierreihen eine möglichst einfache Darstellung der in der Energie enthaltenen Ableitungen der Lösung zur Zeit  $t = T$  her. Dabei wird die Lösung der Wellengleichung als Fourierreihe entwickelt. Wie in Kapitel 3 berechnet, sind die Fourierkoeffizienten hierbei

durch eine gewöhnliche Differentialgleichung gegeben. Setzt man die Steuerung in die Lösung der Differentialgleichung ein, leitet die Fourierreihen ab und wandelt sie zurück in ihre Funktionen, so erhält man eine explizite Formel für die Ableitungen der Lösung. Anhand dieser lässt sich nun die Energie zur Zeit  $t = T$  bezüglich der Energie zur Zeit  $t = 0$  abschätzen und damit die Energieabnahme zeigen.

In Kapitel 4 konnte nur gezeigt werden, dass die Energie monoton fallend ist. Das Ziel war es aber, eine streng monotone Stufenkostenabnahme zu zeigen. Das Problem in Kapitel 4 war, dass die Steuerung nur am Rand Einfluss auf die Lösung der Wellengleichung nehmen kann und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellengleichung endlich ist - es gibt also Punkte, die die Steuerung erst nach einer gewissen Zeit beeinflussen kann. Daher führe ich in Kapitel 5 für die Energie Gewichte ein, die den Abstand zum rechten Rand - den die Steuerung beeinflusst - messen. Damit lässt sich nun zeigen, dass die Stufenkosten abnehmen und damit die Wellengleichung bezüglich der gewichteten Energie kontrollierbar ist.

In der Literatur [7, 1] wurden die in meiner Arbeit auftretenden Beweise an anderen Beispielen bzw. über andere Wege gerechnet - meine Leistung war es also anhand der im Buch erklärten Idee die Beweise durchzuführen. Vor allem in Kapitel 4 und 5 waren hierbei für die Beweise deutlich längere Rechnungen und neue Ansätze - wie z.B. die Verwendung trigonometrischer Funktionen - nötig.

# Kapitel 7

## Ausblick

In dieser Arbeit wurden für die eindimensionale Wellengleichung Kontrollierbarkeitsabschätzungen über Fourierreihen gezeigt. Anhand dieses Beweisverfahrens soll nun für die zwei- und dreidimensionale Wellengleichung ebenfalls die Kontrollierbarkeit gezeigt werden. Hierbei werden einige Probleme auftreten, auf die ich kurz eingehen will :

### *1) Verallgemeinerung der Lösungsformel :*

Die Lösungsformel der Wellengleichung wird in dieser Arbeit aufgestellt, indem man das ursprüngliche inhomogene Problem in ein homogenes Problem transformiert und dieses löst. Nach [8, Kapitel 10] lässt sich die Fourierreihenmethode auch auf homogene, mehrdimensionale Probleme erweitern. Findet man also eine Transformation um das inhomogene, mehrdimensionale Problem auf ein homogenes Problem zu transformieren, so kann man mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode eine Lösungsformel aufstellen.

### *2) Wahl des Gebietes :*

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Kosten streng monoton fallend sind. Daraus folgt, dass die Ableitungen  $y_x(t, x)$  und  $y_t(t, x)$  gegen die Nullfunktion konvergieren. Um zu erreichen, dass die Lösung der Wellengleichung gegen die Nullfunktion konvergiert, benötigt man also eine Dirichletrandbedingung die Null am Rand fordert (Für  $y(t, 0) = 1$  konvergiert die Lösung der Wellengleichung gegen die Funktion  $\equiv 1$ ). Für die mehrdimensionale Wellengleichung stellt sich damit die Frage, wie die Randbedingungen gewählt werden müssen.

### *3) Wahl der Steuerung :*

erhalten Die Steuerung in dieser Arbeit wurde aus [1] übernommen. Diese wurde dort so gewählt, dass am rechten Rand keine Reflektionen auftreten. Es stellt sich also die Frage wie die Reflektionen im mehrdimensionalen Fall ausschauen und wie man daher die Steuerung wählen muss.

Trotz der vorhandenen Grundlagen mit dieser Arbeit sowie der Möglichkeit, die homogene, mehrdimensionale Wellengleichung über Fourierreihen zu lösen treten also noch einige Probleme auf, die ich in weiteren Arbeiten bearbeiten werde.

# Anhang A

## MAPLE-Quelltexte

### A.1 Lösungsformel der Wellengleichung

Mit diesem Skript wurden die Bilder der Lösung der Wellengleichung erstellt. Für die stückweise definierte Funktion funktioniert die Steuerung nicht - Maple hat damit anscheinend Probleme.

```

> restart;

# Konstanten der Wellengleichung
T := 2;
L := T/2;
c := 1;

# Anfangsdaten der Wellengleichung
f := x-> sin(Pi*x);
#f := x-> piecewise(x < 0.4 or x >= 0.6, 0, x >= 0.4 and x < 0.5, 4*x
- 1.6, x >= 0.5 and x < 0.6, 2.4-4*x);
g := x-> 0;

# Randdaten bzw. Steuerung
#u := t -> piecewise(t < L/c, 1/2*(D(f)(L - c*t) - g(L - c*t)), t >=
L/c, 1/2*(D(f)(c*t - L) + g(c*t - L)));
u := t -> 0;

# Konstanten der Approximation
M := 100;

# Interne Variablen
betan := (2*n - 1) * Pi / (2 * L):
phin := x -> sin(betan * x):

an := t -> 2 / L * int( x * (D[1,1](u))(t) * phin(x), x = 0 .. L):
bn0 := 2 / L * int( (f(x) - x * u(0)) * phin(x), x = 0 .. L):
bns0 := 2 / L * int( (g(x) - x * (D(u))(0)) * phin(x), x = 0 .. L):

> # Lösen der Differentialgleichung
ode := diff(bn(s), s, s) = - c^2 * betan^2 * bn(s) - an(s):
ics := bn(0) = bn0, (D(bn))(0) = bns0:
lsg := dsolve({ics, ode}):

# Erstellen der Fourierreihe
yn := (t,x) -> eval(rhs(lsg), s = t) * phin(x):
y := (t,x) -> sum(yn(t,x), n = 1 .. M) + x * u(t):

> # Plot
plot3d(y(t,x), t = 0..T, x = 0..L, axes=frame, labelfont=[HELVETICA,
BOLD, 20], labels=["t","x"," y(t,x)"], grid = [50,50], orientation=
[-135,45]);

```

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schwingende Saite zum Startzeitpunkt . . . . .	2
1.2	Lösung der Wellengleichung für $u(t) \equiv 0$ . . . . .	3
1.3	Kontinuierliche (links) und diskrete (rechts) Problemstellung des ARWP der Wellengleichung . . . . .	4
1.4	Ungesteuerte (links) und gesteuerte (rechts) Lösung der Wellengleichung für $f(x) = \sin(2\pi x)$ und $g(x) = 0$ . . . . .	6
1.5	Schematische Darstellung des Aufbaus dieser Arbeit . . . . .	7
3.1	Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 3.7 . . . . .	23
4.1	Schematische Darstellung des Beweises von Proposition 4.1 . . . . .	31
4.2	Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 4.3 . . . . .	38
5.1	Schematische Darstellung des Beweises von Theorem 5.2 . . . . .	45



# Literaturverzeichnis

- [1] ALTMÜLLER, N. ; GRÜNE, L. ; WORTHMANN, K.: Instantaneous control of the linear wave equation. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. (2010)
- [2] BARBU, V.: *Partial Differential equations and boundary value problems*. Kluwer Academic Publishers, 1998
- [3] FORSTER, O.: *Analysis 2, 5. Auflage*. Vieweg, 1999
- [4] GRÜNE, L.: Kontrolltheorie 1. In: *Skript zur Vorlesung an der Universität Bayreuth* (2006)
- [5] GRÜNE, L. ; PANNEK, J. ; SEEHAFFER, M. ; WORTHMANN, K.: Analysis of unconstrained nonlinear MPC schemes with varying control horizon. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* (2010)
- [6] GUGAT, M. ; LEUGERING, G. ; SKLYAR, G.:  $L^p$  optimal boundary control for the wave equation. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* (2005)
- [7] KEANE, M. K.: *A Very applied first course in Partial Differential equations*. Prentice-Hall, 2002
- [8] STRAUSS, W. A.: *Partielle Differentialgleichungen - Eine Einführung*. Vieweg Braunschweig, 1995



# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth, den 30. September 2011

---

(Vorname Nachname)