

**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Numerik für nichtlineare Black-Scholes-Gleichungen

BACHELORARBEIT
VON
MARKUS SCHÄFER

Aufgabenstellung und Betreuung:

Prof. Dr. Lars Grüne
Dipl.-Math. Thomas Jahn

Bayreuth, September 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Notationsverzeichnis	VI
1 Einleitung	1
1.1 Optionen	1
1.1.1 Definition	1
1.1.2 Anwendungsbeispiele	2
1.2 Grundlegende Annahmen	4
1.2.1 Kursmodell	4
1.2.2 Risikoneutrale Bewertung	7
1.2.3 Marktannahmen	8
1.3 Die Black-Scholes-Gleichung	8
1.3.1 Herleitung der linearen Gleichung	9
1.3.2 Erweiterung auf die nichtlineare Gleichung	12
1.3.3 Zeitdiskretes Hedging	13
1.4 Motivation und Aufbau	13
2 Modelle für Transaktionskosten	14
2.1 Lelands Modell	14
2.1.1 Herleitung	14
2.1.2 Approximation von $ \Delta\alpha $	15
2.1.3 Resultat	16
2.1.4 Anmerkungen	17
2.2 Barles' & Soners Modell	18
2.2.1 Herleitung	18
2.2.2 Resultat	20
2.2.3 Lösung der Differentialgleichung	21

3	Weitere Modelle	25
3.1	Feedback-Effekte und Marktliquidität	25
3.1.1	Resultat	25
3.2	Volatilitätsbereich	27
3.2.1	Motivation	27
3.2.2	Herleitung	27
3.2.3	Wahl von σ_+ und σ_-	27
3.2.4	Resultat	28
4	Numerische Lösung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung	29
4.1	Die Finite-Differenzen-Methode	29
4.2	Transformation	30
4.3	Diskretisierung	32
4.4	Nichtlineares Gleichungssystem	33
4.5	Konvergenzanalyse	34
4.6	Implementierung	35
4.6.1	Naiver Ansatz	35
4.6.2	Das Newton-Verfahren	35
4.6.3	Berechnung der inneren Werte	37
4.6.4	Der Thomas-Algorithmus	37
4.6.5	C++ Implementierung	39
5	Simulationen	40
5.1	Volatilitätsbereich	41
5.2	Lelands Modell	42
5.3	Barles' & Soners Modell	44
5.4	Feedback-Effekte und Marktliquidität	46
6	Ausblick auf mögliche Erweiterungen	48
6.1	Amerikanische Optionen	48
6.2	Dividendenzahlungen	49
7	Fazit	51
7.1	Bestimmbarkeit der Modellparameter	51
7.2	Simulation der Eigenschaften eines realen Finanzmarkts	52
7.3	In der Praxis	52
A	Inhalt der DVD	55
	Literaturverzeichnis	57

Abbildungsverzeichnis

1.1	Auszahlungsprofil ohne/mit Absicherung	2
1.2	Gewinn-/Verlustprofil bei der Aktienspekulation	3
1.3	Verschiedene Pfade eines Wiener-Prozesses W_t	5
1.4	Zugehörige geometrische Brownsche Bewegungen $S(t)$ mit $S_0 = 10$	6
1.5	$S(t)$ für niedrige/hohe Volatilität $\sigma = 10\%/25\%$	6
1.6	Lösung der linearen BSG für einen europäischen Call mit $\mu = 0.06$ und $\sigma = 1$	12
2.1	Beispiel für die gekauften/verkauften Anteile L_t/M_t	18
2.2	Numerische vs. implizite Lösung $\Psi(x)$ der Differentialgleichung	21
2.3	Verschiebung von $x(\Psi)$ zur Bestimmung von Ψ^*	22
2.4	Konvergenz für $\Psi_0 > \Psi^*$ bei \tilde{x}_+	22
2.5	Konvergenz für $\Psi_0 < \Psi^*$ bei \tilde{x}_+	22
2.6	Keine Konvergenz für $\Psi_0 > \Psi^*$ bei \tilde{x}_-	23
2.7	Konvergenz für $\Psi_0 < \Psi^*$ bei \tilde{x}_-	23
2.8	Graphische Veranschaulichung der Folge von Startwerten $\Psi_0^{(i)}$	23
4.1	Transformation des Rechengebiets	30
4.2	Approximative Lösungen auf einem Rechengitter	33
4.3	Schematische Darstellung des Lösungsverfahrens	34
5.1	Auszahlungsprofil einer Butterfly-Option	40
5.2	Volatilitätsbereich: Obere/Untere Schranken für den Optionswert	41
5.3	Darstellung zur Zeit $t = 0$	41
5.4	Lelands Modell: Abweichung vom Black-Scholes-Modell	42
5.5	Abweichung zur Zeit $t = 0$	42
5.6	Barles' & Soners Modell: Abweichung vom Black-Scholes-Modell	44
5.7	Unterschied zur Zeit $t = 0$	44
5.8	Vergleich mit Lelands Modell	45
5.9	Feedback-Effekte und Marktliquidität: Abweichung vom Black-Scholes-Modell	46
5.10	Unterschied zur Zeit $t = 0$	46
6.1	Einfluss einer Dividendenrendite $\delta = 2\%$	50

Notationsverzeichnis

Allgemein

$S(t)$	–	Basiswert
K	–	Ausübungspreis
T	–	Laufzeitende
$V(t, S(t))$	–	Optionswert
W_t	–	Wiener-Prozess
r	–	Zeitlich konstanter risikofreier Zinssatz
μ	–	Erwartete Rendite
σ	–	Konstante Volatilität
$\hat{\sigma}(S, t, V_{SS})$	–	Variable Volatilitätsfunktion
$\Pi(t)$	–	Portfolio
V_{SS}	–	Kurzschreibweise für die zweite partielle Ableitung des Optionswerts nach dem Basiswert $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
x	–	Transformierte Variable (Ort)
τ	–	Transformierte Variable (Zeit)
$u(x, \tau)$	–	Transformierter Optionswert
w_i^v	–	Approximative Lösung zur Zeit τ_v im Ort x_i
$\delta_{\tau/x/xx}$	–	Kurzschreibweise für die partiellen Ableitungen nach τ , x und xx
$\bar{s}_{i,v}$	–	Approximation für $u_x + u_{xx}$
$\mathcal{L}_{i,v}$	–	Weitere Approximation

Lelands Modell

c	–	Proportionale Transaktionskosten
Le	–	Parameter, der Transaktionskosten und Hedgingabstand modelliert

Barles' & Soners Modell

γ	–	Risikoaversionsfaktor
a_{BS}	–	Parameter, der Transaktionskosten und Risikoaversion modelliert

Feedback-Effekte und Marktliquidität

λ	–	Marktliquiditätsfaktor
$\mathcal{D}(S, W_t, t)$	–	Nachfrage der kleinen Anleger
$f(S, t)$	–	Nachfrage der großen Anleger
$\mathcal{S}(S, W_t, t)$	–	Auf dem Markt verfügbares Angebot
$\mathcal{X}(S, W_t, t)$	–	Nachfrageüberschuss

Volatilitätsbereich

σ_{min}	–	Untere Grenze des Volatilitätsintervalls
σ_{max}	–	Obere Grenze des Volatilitätsintervalls
$\sigma_-(t)$	–	Stochastische Variable für die untere Schranke des Optionswerts
$\sigma_+(t)$	–	Stochastische Variable für die obere Schranke des Optionswerts

Kapitel 1

Einleitung

Bereits 1973 entwickelten Fischer Black¹, Myron Scholes² und Robert C. Merton³ ein finanzmathematisches Modell - das sogenannte „Black-Scholes-Modell“ - zur Bewertung von europäischen Optionen, für das sie 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurden.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit weiterführenden Modellen zur Optionsbewertung, basierend auf dem Black-Scholes-Modell bzw. der zugehörigen Black-Scholes-Gleichung. Der Fokus liegt dabei im ersten Teil der Arbeit auf der Theorie hinter den jeweiligen Modellen, während der zweite Teil die numerische Implementierung thematisiert und einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen gibt.

Bevor wir jedoch tiefer in die Materie einsteigen, wollen wir in der Einleitung zunächst einige grundlegende Begriffe der Optionsbewertung klären, die Black-Scholes-Gleichung herleiten und anschließend die Verwendung der komplexeren Modelle motivieren.

1.1 Optionen

1.1.1 Definition

Definition 1.1 (Optionstypen)

Eine *Option* ist das Recht, aber nicht die Pflicht, einen Basiswert S zu einem vorher vereinbarten Ausübungspreis K zu kaufen (**Call-Option**) oder zu verkaufen (**Put-Option**).

Bei einer **europäischen Option** kann die Ausübung dieses Rechts nur zu einem ebenfalls vorher festgelegten Laufzeitende T erfolgen, während die Ausübung einer **amerikanischen Option** zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ erfolgen kann.

Nach dieser Definition kann es sich bei dem Basiswert einer Option also sowohl um materielle Güter (z.B. Rohstoffe oder Nahrungsmittel) als auch um immaterielle Güter (z.B. ein Aktienpaket oder einen festgelegten Betrag in einer Fremdwährung) handeln.

Auf der einen Seite kann man sich mit Optionen gegen verschiedene Risiken (z.B. Wechselkurs- oder Preisschwankungsrisiken) absichern. Auf der anderen Seite kann man Optionen wegen des geringen Kapitaleinsatzes und des dadurch hervorgerufenen Hebeleffekts aber auch für spekulative Finanzgeschäfte einsetzen, wie die beiden folgenden Beispiele jeweils verdeutlichen sollen.

¹US-amerikanischer Wirtschaftswissenschaftler, 1938 - 1995

²kanadischer Wirtschaftswissenschaftler, *1941

³US-amerikanischer Finanzökonom, *1944

1.1.2 Anwendungsbeispiele

Beispiel 1.2 (Absicherung gegen Wechselkursschwankungen)

Ein europäisches Unternehmen möchte seine Produkte Ende des Jahres an ein amerikanisches Unternehmen verkaufen und deshalb schließen die beiden Unternehmen bereits heute einen Liefervertrag für das zukünftige Geschäft ab. In dem Liefervertrag verpflichtet sich das europäische Unternehmen dazu, am Jahresende 100 Artikel für 10\$ pro Stück an das amerikanische Unternehmen zu liefern, wobei der aktuelle Wechselkurs 1€ pro Dollar beträgt.

Das europäische Unternehmen erhält nach heutigem Wechselkurs 1000€ für die gelieferten Artikel. Ist der Wechselkurs Ende des Jahres 20% höher/niedriger, d.h. ein Dollar ist dann 1.20€/0.80€ wert, so bekommt das Unternehmen plötzlich 1200€/800€ für seine Artikel. Diese 200€ Gewinn/Verlust resultieren jedoch ausschließlich aus den Wechselkursschwankungen und haben mit dem eigentlichen Geschäft des Unternehmens nichts zu tun.

Aus unternehmerischer Sicht möchte der europäische Hersteller seine Gewinne aber nicht durch (zufällige) Wechselkursschwankungen, sondern durch den Verkauf seiner Produkte erzielen. Deswegen ist er auch primär an einer garantierten Zahlung am Jahresende interessiert - und genau hier kommt die Option ins Spiel. Das europäische Unternehmen hat nämlich die Möglichkeit, sich mit einer entsprechenden Option gegen die Wechselkursschwankungen abzusichern.

Dazu erwirbt es für 10€ die Option, am Ende des Jahres 1000\$ zu einem Kurs von 0.99€ pro Dollar zu verkaufen. Ist der tatsächliche Wechselkurs dann höher, so lässt das Unternehmen die Option einfach verfallen und verkauft zum höheren Kurs. Ist der Wechselkurs aber niedriger, so übt das Unternehmen die Option aus und erhält 990€. Das Unternehmen bekommt am Jahresende also garantiert 980€ für seine Waren und kann trotzdem von einem Anstieg des Wechselkurses profitieren.

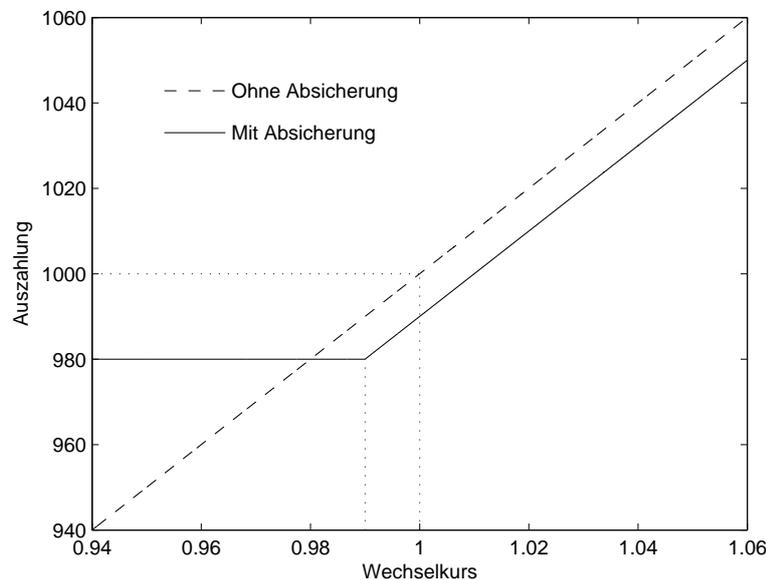


Abbildung 1.1: Auszahlungsprofil ohne/mit Absicherung

Natürlich sind auch noch komplexere Hedgingstrategien denkbar, bei denen das europäische Unternehmen beispielsweise seine Partizipationsmöglichkeiten an einem steigenden Wechselkurs zu Gunsten einer höheren garantierten Auszahlung aufgibt.

Durch die Absicherung von Risiken mit Hilfe von verschiedenen Optionen kann also im Allgemeinen eine sehr flexible Risikomodellierung erreicht werden.

Beispiel 1.3 (Ausnutzung des Hebeleffekts)

Ein Anleger möchte an der Börse darauf spekulieren, dass der Kurs einer Aktie bis zum Jahresende steigt, wobei der Aktienkurs aktuell 100€ beträgt. Dazu hat er jetzt zwei Möglichkeiten:

a) *Direktes Investment*

Der Anleger kauft heute die Aktie für 100€ und verkauft sie Ende des Jahres einfach wieder. Sein Gewinn bzw. Verlust entspricht in diesem Fall genau der Differenz zwischen dem Kaufpreis und dem Schlusskurs.

b) *Call-Option*

Der Anleger kauft heute für 10€ eine europäische Call-Option auf die Aktie mit Ausübungspreis 100€. Ist der Kurs bis zum Ende des Jahres gestiegen (also höher als der Ausübungspreis), dann übt der Anleger seine Option aus. Er kauft die Aktie für 100€ und verkauft sie sofort wieder zum höheren Kurs auf dem Markt. Sein Gewinn ergibt sich also gerade aus der Differenz zwischen dem Ausübungspreis und dem Schlusskurs, abzüglich der Optionsgebühr. Ist der Kurs hingegen nicht gestiegen, so lässt der Anleger die Option einfach verfallen und sein Verlust besteht lediglich aus der Optionsgebühr.

Die so entstehenden Gewinn- bzw. Verlustprofile sehen qualitativ wie im vorherigen Beispiel aus.

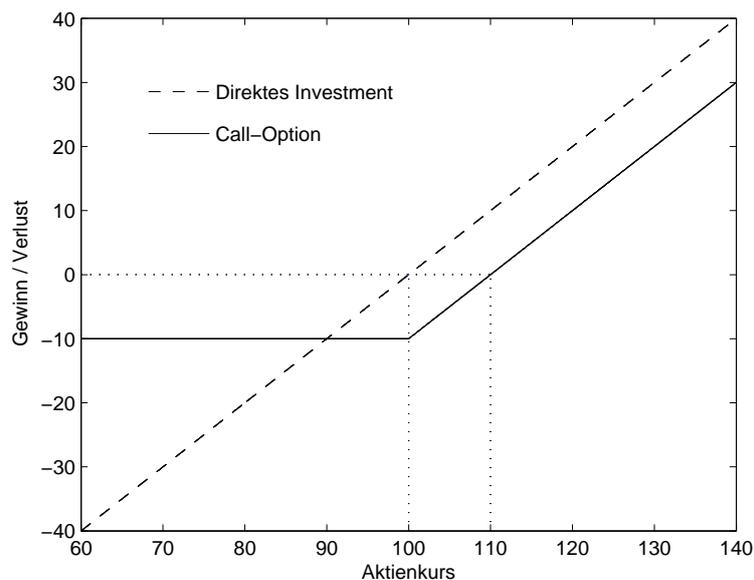


Abbildung 1.2: Gewinn-/Verlustprofil bei der Aktienspekulation

Auch hier erkennt man, dass der theoretisch mögliche Verlust bei der Spekulation mit einer Call-Option gedeckelt ist, während bei einem direkten Investment der Totalverlust des eingesetzten Kapitals durchaus möglich ist.

Zudem unterscheiden sich die beiden Investmentstrategien hinsichtlich des benötigten Kapitaleinsatzes. Während der Anleger beim direkten Investment einen Kapitaleinsatz von 100€ benötigt, kommt er bei der Verwendung der Call-Option bereits mit einem Kapitaleinsatz von nur 10€ aus. Für einen Schlusskurs von beispielsweise 125€ bedeutet das eine Kapitalrendite von 25% beim direkten Investment, während der Anleger mit der Call-Option sogar eine Kapitalrendite von 150% erzielt.

1.2 Grundlegende Annahmen

Das von Black, Scholes und Merton entwickelte Black-Scholes-Modell trifft einige idealisierte Annahmen über den Kursverlauf des Basiswerts, die Art der Optionsbewertung und die Eigenschaften des zu analysierenden Finanzmarkts. Diese Annahmen werden in den folgenden Abschnitten noch einmal kurz erläutert (siehe [8, Kap. 4]).

1.2.1 Kursmodell

Für die Definition der *geometrischen Brownschen Bewegung*, die später den Kursverlauf unseres Basiswerts modellieren wird, und den Begriff der stochastischen Differentialgleichung benötigen wir zunächst einen speziellen stochastischen Prozess, den sogenannten *Wiener-Prozess*, der gleichzeitig auch in geeigneter Weise den Zufall in unserem Kursmodell beschreibt.

Definition 1.4 (Stochastischer Prozess)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ die Menge aller reellen Zahlen, versehen mit der Borelschen σ -Algebra. Ein **stochastischer Prozess** $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann eine Familie von Zufallsvariablen

$$X_t := X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

wobei für jedes feste $\omega \in \Omega$ die Abbildung

$$X(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

eine „normale“ reelle Funktion ist und **Pfad** oder **Realisierung** des stochastischen Prozesses heißt.

Mit dieser Definition können wir jetzt den nach Norbert Wiener⁴ benannten Wiener-Prozess betrachten, der eine mathematische Beschreibung der Brownschen (Molekular-)Bewegung darstellt.

Definition 1.5 (Wiener-Prozess)

Ein stochastischer Prozess $W_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , heißt ein **Wiener-Prozess**, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

- i) Für $t \geq 0$ ist W_t eine $\mathcal{N}(0, t)$ -verteilte Zufallsvariable
- ii) Für $t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W_{t_1} - W_{t_0}$ alle $\mathcal{N}(0, t_1 - t_0)$ -verteilte Zufallsvariablen
- iii) Für $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkremente $W_{t_3} - W_{t_2}$ und $W_{t_1} - W_{t_0}$ jeweils stochastisch unabhängige Zufallsvariablen

Bei einem Wiener-Prozess handelt es sich also um einen zeitstetigen stochastischen Prozess, der zu jeder beliebigen Zeit normalverteilte und stochastisch unabhängige Zuwächse hat.

Bemerkung 1.6 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)

Für alle Pfade $W(\cdot, \omega)$ eines Wiener-Prozesses kann man beweisen, dass sie P -fast sicher stetig in t sind. Allerdings lässt sich auch beweisen, dass die Pfade P -fast sicher nirgends differenzierbar sind.

⁴US-amerikanischer Mathematiker, 1894 - 1964

Die folgende Abbildung versucht anhand von drei zufälligen Pfaden $W(\cdot, \omega)$ eines Wiener-Prozesses die Bedingungen i) - iii) aus Definition 1.5 und die in Bemerkung 1.6 erwähnten Eigenschaften eines Wiener-Prozesses graphisch zu veranschaulichen.

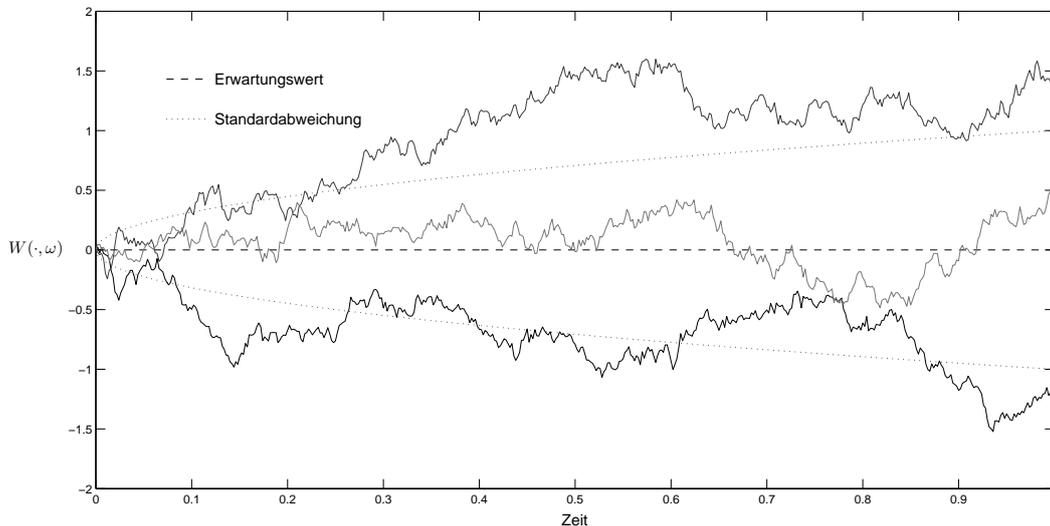


Abbildung 1.3: Verschiedene Pfade eines Wiener-Prozesses W_t

Betrachtet man die Pfade des Wiener-Prozesses in der obigen Abbildung, so lässt sich immerhin schon eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Kursverlauf einer echten Aktie feststellen. Allerdings gibt es noch zwei wesentliche Probleme, die den Wiener-Prozess selbst für eine sehr grobe Modellierung des Kursverlaufs einer Aktie ungeeignet erscheinen lassen.

Zum einen kann ein Pfad $W(\cdot, \omega)$ des Wiener-Prozesses auch negative Werte annehmen, was für einen realen Aktienkurs sicherlich keine besonders brauchbare Modellierung darstellt. Zum anderen gibt es bei einem Wiener-Prozess überhaupt keine Parameter, mit deren Hilfe man den modellierten Verlauf an einen echten Kursverlauf anpassen könnte.

Einen möglichen Ausweg bietet hier allerdings die Verwendung der geometrischen Brownschen Bewegung, bei der wir immerhin mit zwei Parametern die *erwartete Rendite* μ sowie die *Volatilität* σ unserer Aktie modellieren können.

Definition 1.7 (Geometrische Brownsche Bewegung)

Sei W_t ein Wiener-Prozess. Dann ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad S(0) = S_0$$

für $t \geq 0$ gegeben durch

$$S(t; S_0) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$$

und heißt *geometrische Brownsche Bewegung*.

Nach Bemerkung 1.6 ist ein Wiener-Prozess aber P -fast sicher nirgends differenzierbar, was zwangsläufig die Frage aufwirft, wie der Ausdruck dW_t in der stochastischen Differentialgleichung aus dieser Definition überhaupt zu verstehen ist.

Eine Antwort auf diese Frage gibt das sogenannte *Itô-Integral*, auf dessen Definition und Einführung wir hier aus Platzgründen aber verzichten wollen. Für nähere Details und Eigenschaften des Itô-Integrals sowie von *stochastischen Differentialgleichungen* sei deshalb auf [12, Kap. 3] verwiesen.

Bemerkung 1.8 (Erwartungswert und Varianz)

Für die geometrische Brownsche Bewegung gilt

$$E[S(t; S_0)] = S_0 e^{\mu t} \quad \text{und} \quad \text{Var}[S(t; S_0)] = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Die folgende Abbildung zeigt verschiedene geometrische Brownsche Bewegungen mit den Parametern $S_0 = 10$, $\mu = 0.12$ und $\sigma = 0.18$, wobei die eingehenden Wiener-Prozesse denen in Abbildung 1.3 entsprechen. Es handelt sich also um die jeweils zugehörigen geometrischen Brownschen Bewegungen.

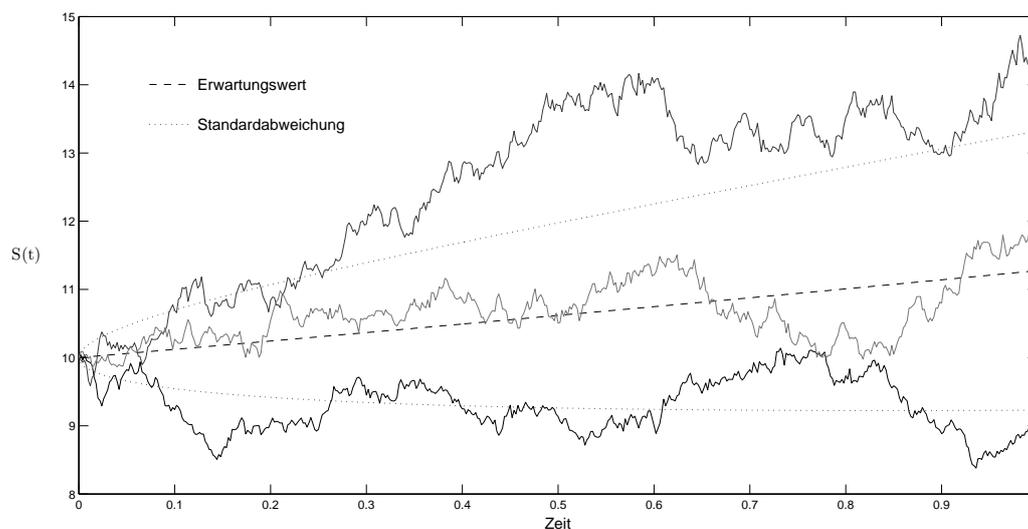


Abbildung 1.4: Zugehörige geometrische Brownsche Bewegungen $S(t)$ mit $S_0 = 10$

Im Gegensatz zu den Pfaden des Wiener-Prozesses in Abbildung 1.3 ist jetzt in den modellierten Kursverläufen schon deutlich mehr Struktur vorhanden. So lässt sich beispielsweise bereits die erwartete jährliche Rendite in Höhe von 12% erkennen. Außerdem können wir jetzt mit zwei Parametern die erwartete Rendite μ sowie die Volatilität σ an die aktuelle Situation auf dem Kapitalmarkt anpassen, wie die beiden folgenden Abbildungen für niedrige bzw. hohe Volatilität zeigen.

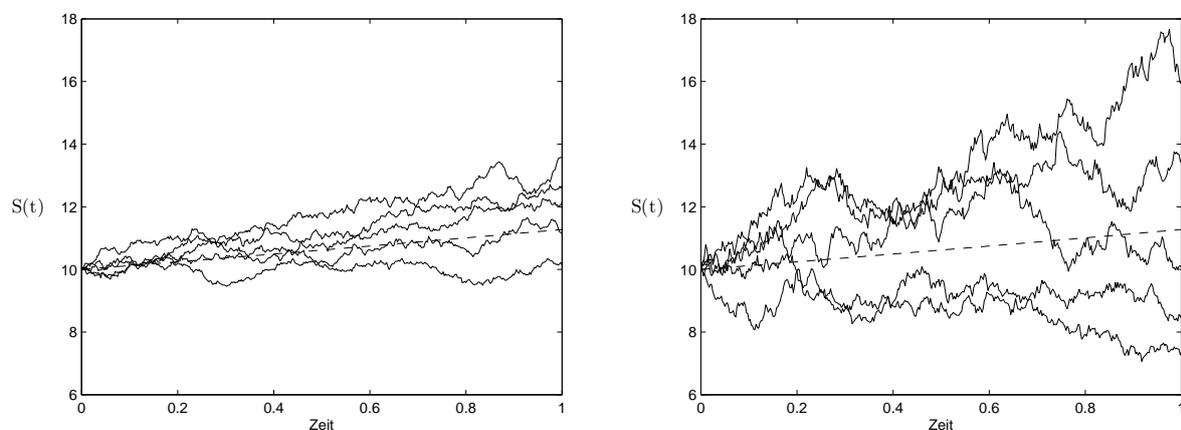


Abbildung 1.5: $S(t)$ für niedrige/hohe Volatilität $\sigma = 10\%/25\%$

1.2.2 Risikoneutrale Bewertung

In den beiden einführenden Beispielen des vorherigen Abschnitts haben wir bereits einen ersten praktischen Eindruck der Funktionsweise von Optionen bekommen. Zudem haben wir festgestellt, dass der Käufer (Inhaber) einer Option stets eine Risikoprämie an den Verkäufer (Emittent) der Option zahlt. Diese Prämie soll den Emittenten für das eingegangene Risiko entschädigen - doch es stellt sich die Frage, wie hoch diese Optionsprämie sein muss, damit sie das eingegangene Risiko „richtig“ widerspiegelt.

Bevor wir uns jedoch mit dieser Frage beschäftigen, wollen wir zunächst den Wert einer Call- bzw. Put-Option zum Laufzeitende T untersuchen. Dazu sei noch kurz bemerkt, dass es zum Laufzeitende natürlich keinen Unterschied mehr zwischen einer europäischen und einer amerikanischen Option gibt.

Satz 1.9 (Optionswert zum Laufzeitende)

Sei K der vorher festgelegte Ausübungspreis einer Option und $S(T)$ der Kurs des Basiswerts zum Laufzeitende T . Dann gilt für den Wert einer Call- bzw. Put-Option

$$\begin{aligned} V_C(T, S(T)) &= \max\{S(T) - K, 0\} =: (S(T) - K)^+ \\ V_P(T, S(T)) &= \max\{K - S(T), 0\} =: (K - S(T))^+ \end{aligned}$$

Beweis

Gilt $S(T) \leq K$, so bringt die Ausübung einer Call-Option keinen Vorteil und der Wert der Option ist in diesem Fall 0. Gilt aber $S(T) > K$, so ist es vorteilhaft, die Call-Option auszuüben. Wir können also den Basiswert für K kaufen und ihn sofort wieder für $S(T)$ am Markt verkaufen. Dadurch realisieren wir einen Gewinn in Höhe von $S(T) - K$ und der Wert der Option entspricht in diesem Fall genau dem realisierten Gewinn, also der Differenz $S(T) - K$. Insgesamt ergibt sich damit der Wert einer Call-Option zum Laufzeitende T zu $\max\{S(T) - K, 0\}$. Eine analoge Argumentation liefert die Behauptung für eine Put-Option. \square

Kommen wir jetzt also wieder zurück zu der Frage, wie sich der (faire) Wert einer Option überhaupt berechnen lässt. Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir zunächst das Prinzip der **risikoneutralen Bewertung**. Dieses Prinzip wurde als eines der wesentlichen Konzepte der Optionsbewertung von Black, Scholes und Merton im Rahmen ihrer Arbeiten zum Black-Scholes-Modell eingeführt und besagt, dass sich der Optionswert $V(t, S(t))$ zur Zeit $t \in [0, T]$ durch

$$V(t, S(t)) = e^{r(t-T)} E[V(T, S(T))]$$

berechnen lässt, wobei r den zeitlich konstanten Marktzinssatz bezeichnet. Beachte, dass der Optionswert $V(T, S(T))$ zum Laufzeitende überhaupt *nicht bekannt* ist, sondern nur sein Erwartungswert.

Bemerkung 1.10 (Konsequenz für den Basiswert)

Als eine Konsequenz der risikoneutralen Bewertung einer Option folgt, dass das Prinzip der risikoneutralen Bewertung auch auf den Basiswert $S(t)$ der Option angewendet werden muss (siehe [8, Kap. 2]). Ist der Kursverlauf des Basiswerts also durch die geometrische Brownsche Bewegung gegeben, so gilt nach Bemerkung 1.8 für den Erwartungswert $E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}$ und folglich muss zur Zeit $t = 0$ gelten

$$S_0 = S(0) = e^{-rT} E[S(T)] = e^{-rT} S_0 e^{\mu T} = S_0 e^{(\mu-r)T}$$

Dies impliziert aber $\mu = r$, was nichts anderes heißt, als dass sich der Basiswert wie eine festverzinsliche Anleihe verhalten muss. Wir können in unserem Modell also nur noch die Volatilität σ variieren. In der Praxis wird die Volatilität oft einfach aus vergangenen Kursverläufen historisch geschätzt oder aus aktuellen Kursverläufen implizit berechnet.

1.2.3 Marktannahmen

Nachdem wir uns in den beiden vorangegangenen Abschnitten mit der Modellierung des Kursverlaufs und dem Prinzip der risikoneutralen Optionsbewertung beschäftigt haben, benötigen wir abschließend einige (mehr oder weniger realistische) Annahmen über den zu analysierenden Finanzmarkt, die im Folgenden noch kurz erläutert werden:

- Es existiert ein *zeitlich konstanter Zinssatz* r , zu dem jederzeit und für einen beliebig langen Zeitraum Geld auf dem Markt angelegt oder ausgeliehen werden kann. Der Wert der festverzinslichen Anleihe bzw. des festverzinslichen Kredits zur Zeit $t \in [0, T]$ wird mit $B(t)$ bezeichnet.
- Der betrachtete Markt ist *arbitragefrei*, d.h. es ist nicht möglich, einen risikolosen Gewinn zu erwirtschaften. Folglich gibt es keine risikofreie Anleihe A , die eine höhere jährliche Rendite als eine festverzinsliche Anleihe erzielt. Für jede risikofreie Anleihe, also insbesondere auch für jedes risikofreie Portfolio, gilt deshalb $A(t) = e^{rt}A(0)$ und damit auch die Differentialgleichung

$$dA(t) = rA(t)dt \quad (1.1)$$

- Der Kursverlauf des Basiswerts lässt sich als *geometrische Brownsche Bewegung* mit *erwarteter Rendite* μ und *Volatilität* σ modellieren und ist somit durch die eindeutige Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung gegeben

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad S(0) = S_0 \quad (1.2)$$

- Es wird eine *risikoneutrale Optionsbewertung* durchgeführt, d.h. der Wert der Option wird so bestimmt, dass sich das Portfolio

$$\Pi(t) = -V(t, S(t)) + \alpha(t)S(t) + \beta(t)B(t) \quad (1.3)$$

bei geeigneter Wahl der Anteile $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ - gemäß der Arbitragefreiheit - wie eine festverzinsliche Anleihe verhält. Die Anteile werden dabei genau so gewählt, dass sich das obige Portfolio risikofrei entwickelt.

Außerdem werden noch einige weitere (etwas weniger mathematische) Annahmen getroffen:

- Es fallen *keine Transaktionskosten* oder *sonstige Gebühren* an
- Es treten *keine Feedback-Effekte* auf
- Es werden *keine Dividenden* gezahlt
- Und *Leerverkäufe* sind *erlaubt*

1.3 Die Black-Scholes-Gleichung

Wir verfügen mit der geometrischen Brownschen Bewegung über ein mathematisches Modell, um den Kursverlauf unseres Basiswerts zu beschreiben, kennen das Prinzip der risikoneutralen Optionsbewertung und haben außerdem alle nötigen Annahmen über den zu betrachtenden Finanzmarkt getroffen. Damit haben wir alle Voraussetzungen, um uns jetzt in diesem Abschnitt, analog zu [8, Kap. 8], mit der Herleitung der linearen Black-Scholes-Gleichung zu beschäftigen.

Dabei beschränken wir uns im Wesentlichen auf die Aspekte der Herleitung, die auch für spätere Kapitel dieser Arbeit noch relevant sind.

1.3.1 Herleitung der linearen Gleichung

Bevor wir uns mit der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung beschäftigen können, benötigen wir noch eine zentrale Aussage aus der stochastischen Analysis, das nach Itô Kiyoshi⁵ benannte *Itô-Lemma*.

Lemma 1.11 (Das Itô-Lemma)

Sei $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $X(t)$ die Lösung einer reellwertigen (Itô-)stochastischen Differentialgleichung vom Typ $dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW_t$. Dann erfüllt $Y(t) = g(t, X(t))$ die stochastische Differentialgleichung

$$dY(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} a(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b(t, X(t))^2 \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x} b(t, X(t)) dW_t$$

wobei alle partiellen Ableitungen in $(t, X(t))$ ausgewertet werden und W_t ein Wiener-Prozess ist.

Beweisskizze

Wir betrachten zunächst die Differenz $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$. Nach Definition des Itô-Integrals gilt

$$\Delta X(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(s, X(s)) ds + \int_t^{t+\Delta t} b(s, X(s)) dW_s \approx a(t, X(t)) \Delta t + b(t, X(t)) \Delta W_t$$

wobei $\Delta W_t = W(t + \Delta t) - W(t)$ ein Wiener-Prozess ist und folglich $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ gilt.

Als Nächstes betrachten wir die Differenz $\Delta Y(t) = g(t + \Delta t, X(t) + \Delta X(t)) - g(t, X(t))$.

Aus der mehrdimensionalen Taylor-Entwicklung von $g(t + \Delta t, X(t) + \Delta X(t))$ im Punkt $(t, X(t))$ folgt

$$\begin{aligned} \Delta Y &\approx \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X)^2 + o\left(\|(\Delta t \quad \Delta W_t)^T\|^2\right) \\ &\approx \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial g}{\partial x} \left[a(t, X) \Delta t + b(t, X) \Delta W_t \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \left[a(t, X) (\Delta t)^2 + b(t, X) \Delta t \Delta W_t \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left[a(t, X)^2 (\Delta t)^2 + 2a(t, X) b(t, X) \Delta t \Delta W_t + b(t, X)^2 (\Delta W_t)^2 \right] + o\left(|\Delta t|^2 + |\Delta W_t|^2\right) \end{aligned}$$

wobei alle partiellen Ableitungen in $(t, X(t))$ und X bzw. ΔX in t ausgewertet werden.

Um aus dieser Approximation die „Ableitung“

$$dY(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Y$$

zu berechnen, müssen alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t)$ berücksichtigt werden. Im deterministischen Fall sind das nur die Terme mit ersten partiellen Ableitungen von g . Im stochastischen Fall ist aber wegen

$$E[(\Delta W_t)^2] = E\left[\underbrace{E[\Delta W_t]}_{=0} - \Delta W_t\right]^2 = \text{Var}[\Delta W_t] = \Delta t$$

auch $(\Delta W_t)^2$ ein Term der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t)$ und muss deshalb ebenfalls berücksichtigt werden.

Anschließend führen wir den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ in einem geeigneten stochastischen Sinne durch und erhalten auf diese Weise schließlich die behauptete Formel.

Für weitere Details zur Beweisskizze siehe [18, Kap. 4]. Ein vollständiger und formal korrekter Beweis des Itô-Lemmas ist beispielsweise in [13, Kap. 4] zu finden. \square

⁵japanischer Mathematiker, 1915 - 2008

Wir nehmen jetzt an, dass der Optionswert $V(t, S(t))$ für $t \in [0, T]$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in den Variablen t und S ist. Da der Basiswert $S(t)$ als geometrische Brownsche Bewegung nach Definition 1.7 selbst die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ist, können wir folglich das Itô-Lemma 1.11 auf den Optionswert anwenden und erhalten so

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \quad (1.4)$$

Außerdem soll das Portfolio (1.3) *selbstfinanzierend* sein. Das bedeutet, dass für jeden beliebigen Zeitpunkt $t_i \in [0, T]$ der Wert des Portfolios direkt vor einer Umschichtung

$$\Pi_{\text{vor}}(t_i) = -V(t_i, S(t_i)) + \alpha(t_{i-1})S(t_i) + \beta(t_{i-1})B(t_i)$$

genau dem Wert des Portfolios unmittelbar nach dieser Umschichtung

$$\Pi_{\text{nach}}(t_i) = -V(t_i, S(t_i)) + \alpha(t_i)S(t_i) + \beta(t_i)B(t_i)$$

entsprechen muss, was wir auch etwas kompakter formulieren können, indem wir einfach

$$\alpha(t_{i-1})S(t_i) + \beta(t_{i-1})B(t_i) \stackrel{!}{=} \alpha(t_i)S(t_i) + \beta(t_i)B(t_i) \quad (1.5)$$

für alle diskreten Hedgingzeitpunkte $t_0, \dots, t_p \in [0, T]$ fordern.

Mit Hilfe dieser Bedingungen können wir induktiv folgende Gleichung für $\Pi(t_p)$ herleiten

$$\begin{aligned} \Pi(t_p) &= \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t_p, S(t_p)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha(t_k) (S(t_{k+1}) - S(t_k)) + \sum_{k=0}^{p-1} \beta(t_k) (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \end{aligned}$$

und erhalten im Grenzübergang $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$ eine Bedingung für die kontinuierliche Umschichtung

$$\Pi(t) = \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t, S(t)) + \int_{t_0}^t \alpha(\tau) dS(\tau) + \int_{t_0}^t \beta(\tau) dB(\tau)$$

bzw. in der Schreibweise für stochastische Differentialgleichungen

$$d\Pi(t) = \underbrace{-dV(t, S(t))}_{(1.4)} + \alpha(t) \underbrace{dS(t)}_{(1.2)} + \beta(t) \underbrace{dB(t)}_{(1.1)}$$

Substituieren wir die markierten Terme durch die jeweils angegebenen Gleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} d\Pi &= - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t + \alpha(t) (\mu S dt + \sigma S dW_t) + \beta(t) r B dt \\ &= - \left[\mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha(t) \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta(t) r B \right] dt - \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha(t) \right) dW_t \end{aligned}$$

Um nun eine risikofreie Entwicklung des Portfolios zu garantieren, müssen wir den stochastischen Term im hinteren Teil der Gleichung eliminieren. Dies erreichen wir durch das sogenannte *Delta-Hedging*

$$\alpha(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t)) \quad (1.6)$$

Auf diese Weise erhalten wir die deterministische Differentialgleichung

$$d\Pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta(t)rB \right) dt \quad (1.7)$$

Da sich das Portfolio Π nun risikofrei entwickelt, muss es nach der Arbitragefreiheit (1.1) auch die zugehörige Differentialgleichung $d\Pi = r\Pi dt$ erfüllen. Setzen wir in diese Gleichung für Π das Portfolio (1.3) ein und wählen den Anteil des Basiswerts $\alpha(t)$ wieder gemäß (1.6), so erhalten wir

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left(-V + \alpha(t)S + \beta(t)B \right) dt = \left(-rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\beta(t)B \right) dt \quad (1.8)$$

Wir haben also mit (1.7) und (1.8) zwei verschiedene Gleichungen für $d\Pi$ hergeleitet.

Durch Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen erhalten wir schließlich mit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \quad (1.9)$$

die **lineare Black-Scholes-Gleichung** (kurz: **BSG**) für konstante Volatilität.

Die lineare Black-Scholes-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung und hat zunächst noch unendlich viele Lösungen. Wenn wir aber *geeignete Randwerte* $V(T, S)$ für alle Kurswerte $S \in [0, \infty)$ zum Laufzeitende $T > 0$ festlegen, so erhalten wir eine eindeutige Lösung.

Die Bestimmung dieser Randwerte ist aber relativ einfach, da sie sich in natürlicher Weise direkt aus den Optionswerten zum Laufzeitende $t = T$ ergeben, also durch Satz 1.9 wie folgt bestimmt sind

$$V_C(T, S) = (S - K)^+ \quad \text{bzw.} \quad V_P(T, S) = (K - S)^+$$

Tatsächlich ist die lineare Black-Scholes-Gleichung sogar explizit lösbar und nach Wahl der entsprechenden Randwerte ist diese Lösung auch eindeutig.

Bemerkung 1.12 (Lösung der linearen Black-Scholes-Gleichung)

Für den Wert einer europäischen Call-Option gilt

$$V_{C_e}(t, S) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

während sich der Wert einer europäischen Put-Option zu

$$V_{P_e}(t, S) = S(\Phi(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(d_2) - 1)$$

ergibt, wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

und d_1 bzw. d_2 wie folgt definiert sind

$$d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Die folgende Abbildung zeigt den Wert einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $K = 1$ in Abhängigkeit der Zeit $t \in [0, 1]$ und des Basiswerts $S \in [0, 2]$. Der Optionswert wurde dabei mit Hilfe der linearen Black-Scholes-Gleichung berechnet.

Die gestrichelte Linie entspricht $V_{C_e}(0, S)$, also gerade dem Wert der Option zu Beginn der Laufzeit.

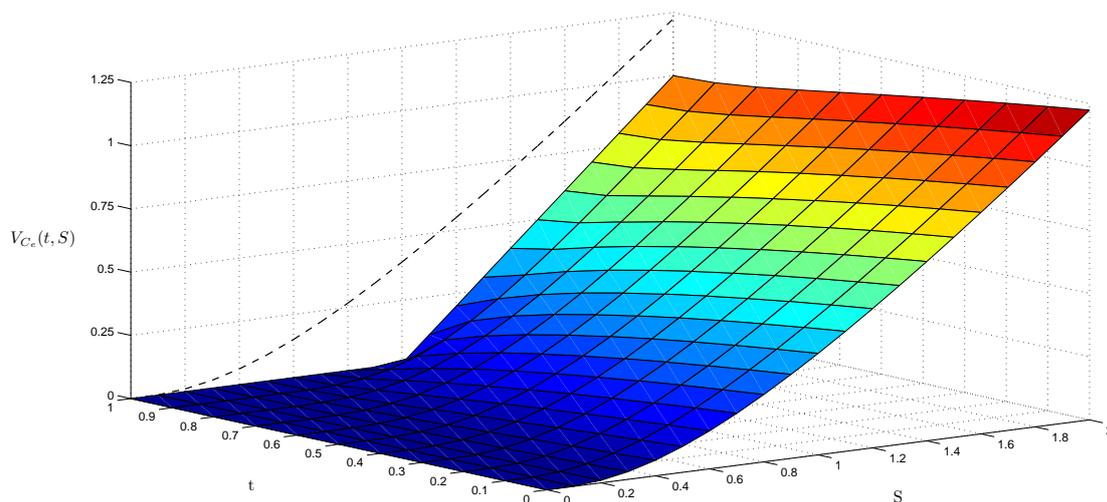


Abbildung 1.6: Lösung der linearen BSG für einen europäischen Call mit $\mu = 0.06$ und $\sigma = 1$

1.3.2 Erweiterung auf die nichtlineare Gleichung

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit werden wir feststellen, dass die ursprünglich getroffene Annahme einer konstanten Volatilität σ für komplexere Modelle nicht mehr erfüllt ist. Stattdessen gehen wir von einer *variablen Volatilitätsfunktion*

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} \left(S, t, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = \hat{\sigma} (S, t, V_{SS}) \quad \text{mit} \quad V_{SS} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

aus, mit der wir aber praktischerweise auch gleich die verschiedenen Arten der variablen Volatilität in den jeweiligen Modellen darstellen können.

Durch den Übergang zur variablen Volatilitätsfunktion ergibt sich mit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 (S, t, V_{SS}) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \quad (1.10)$$

eine leicht *modifizierte Version* der bereits bekannten linearen Black-Scholes-Gleichung (1.9), die sogenannte **nichtlineare Black-Scholes-Gleichung** für variable Volatilität. Beachte, dass wir für den Spezialfall der konstanten Volatilität $\hat{\sigma} \equiv \sigma$ gerade wieder die lineare Black-Scholes-Gleichung erhalten.

Durch die entstandene Nichtlinearität geht allerdings die explizite Lösbarkeit der Gleichung verloren. Wir müssen deshalb zwangsläufig auf numerische Lösungsverfahren zurückgreifen, wobei wir in dieser Arbeit speziell die *Finite-Differenzen-Methode* verwenden werden.

1.3.3 Zeitdiskretes Hedging

Ein zentrales Argument in der Herleitung der linearen Black-Scholes-Gleichung war die Annahme, dass wir unser Portfolio kontinuierlich umschichten können. In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit müssen wir diese Annahme jedoch aus mehreren Gründen aufgeben und uns stattdessen auf *diskrete Hedgingzeitpunkte* $t_0, \dots, t_p \in [0, T]$ für die Umschichtung des Portfolios beschränken.

Auf der einen Seite ist es auf realen Finanzmärkten aus technischer Sicht überhaupt nicht möglich, in beliebig kurzen Abständen zu handeln. Zwar beträgt der Abstand zwischen zwei Trades an einer Börse heutzutage oft nur noch wenige Nanosekunden, aber auch damit ist man schon beliebig weit von einem kontinuierlichen Hedging entfernt. Auf der anderen Seite wollen wir im nächsten Kapitel untersuchen, was auf einem Finanzmarkt passiert, auf dem Transaktionskosten anfallen. Denn würden wir auf einem solchen Markt unser Portfolio kontinuierlich hedgen, so müssten wir mit beliebig hohen Transaktionskosten rechnen.

Wir fordern für die folgenden Kapitel also zusätzlich noch, dass die jeweils betrachteten Hedgingzeitpunkte $t_i \in [0, T]$ *äquidistant* mit zeitlichem Abstand $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ sind. Insbesondere sind damit auch alle angegebenen Änderungen $\Delta \cdot$ nur für einen Zeitschritt der Länge Δt zu verstehen.

1.4 Motivation und Aufbau

Einige der zu Beginn getroffenen Annahmen bezüglich des zu analysierenden Finanzmarkts können wir zwar vielleicht näherungsweise oder zumindest im kleinen Maßstab als erfüllt betrachten. Die meisten dieser Annahmen spiegeln die tatsächliche Situation auf den globalen Finanzmärkten aber leider nur sehr unzureichend wider. Um der Realität also zumindest ein Stück näher zu kommen, müssen wir zwangsläufig einige unserer ursprünglichen Annahmen wieder verwerfen.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns deshalb mit der Frage, was passiert, wenn wir uns auf einem Finanzmarkt befinden, auf dem *Transaktionskosten* entstehen. Dieser Ansatz führt uns dann zu den zwei unterschiedlichen Modellen von Hayne E. Leland⁶ bzw. Guy Barles⁷ und Halil M. Soner⁸, die beide von proportionalen Transaktionskosten ausgehen.

In Kapitel 3 kommen wir im ersten Teil zunächst kurz auf ein weiteres Modell zu sprechen, bei dem gleich zwei der anfänglich getroffenen Annahmen wieder verworfen werden. Wir nehmen in diesem Modell nämlich einerseits an, dass durch die feste Handelsstrategie eines großen Investors *Feedback-Effekte* hervorgerufen werden können, welche die Handelsstrategie selbst beeinflussen. Andererseits gehen wir aber auch davon aus, dass große Handelsvolumina die Verfügbarkeit von Anteilen des Basiswerts auf dem betrachteten Finanzmarkt so stark beeinträchtigen können, dass wir nicht mehr in der Lage sind, beliebig viele Anteile zu handeln, der Markt also *illiquide* ist. Im zweiten Teil des Kapitels untersuchen wir dann noch ein relativ allgemeines Modell, welches davon ausgeht, dass die wahre Volatilität des Basiswerts in einem vorher festgelegten und damit bekannten *Volatilitätsbereich* liegt.

In Kapitel 4 behandeln wir die *numerische Lösung* der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode, wobei wir zunächst auf die grundlegende Idee und die Methode selbst eingehen. Anschließend klären wir, wie man die Finite-Differenzen-Methode überhaupt auf das Problem der Optionsbewertung anwenden kann. Dazu besprechen wir zuerst eine geeignete Transformation der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung und betrachten anschließend die notwendige Diskretisierung der Zeit bzw. des Basiswerts. Zuletzt thematisieren wir die praktische Implementierung der Finite-Differenzen-Methode und gehen kurz auf eine mögliche Modifikation der Methode ein.

In Kapitel 5 geben wir abschließend einen kurzen *Ausblick* auf mögliche Erweiterungen unserer Theorie bzw. Modelle im Hinblick auf amerikanische Optionen und kontinuierliche Dividendenzahlungen, bevor wir dann in Kapitel 6 schließlich zu einem *Fazit* kommen.

⁶englischer Wirtschaftswissenschaftler, *1941

⁷französischer Mathematiker

⁸türkischer Finanzmathematiker

Kapitel 2

Modelle für Transaktionskosten

2.1 Lelands Modell

Das erste betrachtete Modell für Transaktionskosten ist das bereits im Jahr 1985 entwickelte Modell von Leland [14], das dann im Jahr 1994 von Hoggard, Wilmott und Whalley [10] weiterentwickelt wurde. Bei diesem Modell gehen wir davon aus, dass uns *Transaktionskosten proportional zum Handelsvolumen* entstehen. Der Handel von ν Teilen des Basiswerts S verursacht folglich Kosten in Höhe von $c|\nu|S$, wobei $c \in [0, 1)$ die prozentuale Höhe der Transaktionskosten beschreibt.

Für diese Annahme werden wir nun, basierend auf [17, Kap. 7.1.1], eine nichtlineare Black-Scholes-Gleichung zur Bestimmung des Optionspreises herleiten. Die Vorgehensweise ist dabei der Herleitung der linearen Black-Scholes-Gleichung in weiten Teilen sehr ähnlich.

2.1.1 Herleitung

Die Änderungen im Basiswert $S(t)$ und in der festverzinslichen Anlage $B(t)$ ergeben sich im diskreten Fall unter den Annahmen (1.1) und (1.2) als

$$\Delta B = rB\Delta t \quad (2.1)$$

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta W_t \quad (2.2)$$

Betrachten wir nun das *selbstfinanzierende* und *replizierende* Portfolio $\Pi = \alpha S + \beta B$ und vernachlässigen zunächst noch die anfallenden Transaktionskosten, so muss wegen der geforderten Selbstfinanzierungseigenschaft (1.5) des Portfolios gelten

$$(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))S(t_i) + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))B(t_i) = \Delta\alpha S + \Delta\beta B \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.3)$$

Die ausschließlich durch das Umschichten bedingte Wertänderung des Portfolios ist gegeben durch

$$\tilde{\Delta}\Pi = \Delta\alpha S + \alpha\Delta S + \Delta\beta B + \beta\Delta B = (\Delta\alpha S + \Delta\beta B) + (\alpha\Delta S + \beta\Delta B)$$

und mit der diskreten Selbstfinanzierungseigenschaft (2.3) erhalten wir

$$\tilde{\Delta}\Pi = \alpha\Delta S + \beta\Delta B \quad (2.4)$$

Da wir nach Definition in jedem Zeitschritt genau $\nu = |\Delta\alpha|$ Teile des Basiswerts handeln, ergibt sich die absolute Wertänderung des Portfolios durch Einsetzen von (2.1) und (2.2) in (2.4) sowie durch Subtraktion der anfallenden Transaktionskosten $cS|\Delta\alpha|$ schließlich zu

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \alpha\Delta S + \beta\Delta B - cS|\Delta\alpha| \\ &= \alpha(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta W_t) + \beta(rB\Delta t) - cS|\Delta\alpha| \\ &= (\alpha\mu S + \beta rB)\Delta t + \alpha\sigma S\Delta W_t - cS|\Delta\alpha|\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.1.2 Approximation von $|\Delta\alpha|$

Bevor wir mit der Herleitung einer nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung fortfahren, wollen wir zunächst die Frage klären, ob wir nicht auch eine andere Darstellung für die Transaktionskosten $cS|\Delta\alpha|$ in (2.5) finden können. Dazu werden wir $|\Delta\alpha|$ geeignet approximieren und dabei, um die Approximation etwas übersichtlicher zu gestalten, die folgende Hilfsrechnung verwenden.

Lemma 2.1 (Berechnung von $E[|\Delta W_t|]$)

Sei W_t ein Wiener-Prozess. Dann gilt

$$E[|\Delta W_t|] = \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tag{2.6}$$

Beweis

Nach Definition 1.5 gilt für einen Wiener-Prozess $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ und deshalb ist

$$X = \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

womit wir den Erwartungswert von $|\Delta W_t|$ wie folgt berechnen können

$$\begin{aligned}E[|\Delta W_t|] &= \sqrt{\Delta t} E[|X|] = \sqrt{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx \\ &= \sqrt{\Delta t} \left(\int_{-\infty}^0 -x \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx + \int_0^{+\infty} x \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{+\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-a}^0 - \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+a} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi}} \left[e^0 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-\frac{(-a)^2}{2}}}_{\rightarrow 0} - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-\frac{a^2}{2}}}_{\rightarrow 0} + e^0 \right] = \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

□

In der Herleitung der linearen Black-Scholes-Gleichung mussten wir nach (1.6) für die risikofreie Entwicklung des Portfolios $\alpha(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)$ wählen. Jetzt nehmen wir einfach an, dass diese Wahl zumindest *approximativ* auch für den Fall der variablen Volatilität gilt und so folgt

$$\alpha(t) \approx \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) = \frac{\partial}{\partial S} V(t, S)\tag{2.7}$$

Betrachten wir nun die Taylorentwicklung von $V(t + \Delta t, S + \Delta S)$ an der Stelle (t, S)

$$V(t + \Delta t, S + \Delta S) = V(t, S) + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)\Delta S + \frac{\partial V}{\partial t}(t, S)\Delta t + t.h.o. \quad (2.8)$$

und setzen diese an passender Stelle in die diskrete Version von (2.7) ein, so bekommen wir für die Änderung der Anteile des Basiswerts $\Delta\alpha$ zunächst die Approximation

$$\Delta\alpha \approx \frac{\partial}{\partial S}\Delta V = \frac{\partial}{\partial S}\left(V(t + \Delta t, S + \Delta S) - V(t, S)\right) \stackrel{(2.8)}{\approx} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}\Delta t \quad (2.9)$$

Durch Einsetzen von (2.2) für ΔS in (2.9) erhalten wir schließlich die Approximation

$$\Delta\alpha \approx \mu S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta t + \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta W_t + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}\Delta t \quad (2.10)$$

Dabei ist der Term niedrigster Ordnung bzgl. Δt in (2.10) durch $\sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta W_t$ gegeben und so folgt

$$|\Delta\alpha| \approx \left| \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| |\Delta W_t| \quad (2.11)$$

wobei dieser Ausdruck aber pfadabhängig ist.

Leland nimmt jetzt einfach an, dass $|\Delta W_t| \approx E[|\Delta W_t|]$ gilt. Wir können also Lemma 2.1 verwenden, um diesen Erwartungswert zu berechnen und anschließend $|\Delta\alpha|$ durch Einsetzen von (2.6) in die Näherung (2.11) deterministisch approximieren als

$$|\Delta\alpha| \approx \left| \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| E[|\Delta W_t|] = \left| \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.12)$$

2.1.3 Resultat

Die Wertänderung des Portfolios ergibt sich dann durch Einsetzen von (2.12) in (2.5) approximativ zu

$$\Delta\Pi = (\alpha\mu S + \beta r B)\Delta t + \alpha\sigma S\Delta W_t - cS \left| \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.13)$$

während wir die Wertänderung der Option aus der Anwendung des Itô-Lemmas 1.11 auf den Optionswert $V(t, S(t))$ für den diskreten Fall, ähnlich zu (1.4), erhalten

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W_t \quad (2.14)$$

Da unser Portfolio per Definition ein (den Optionswert V) replizierendes Portfolio ist, muss es wegen der Arbitragefreiheit auch die Wertänderungen der Option replizieren, also $\Delta V = \Delta\Pi$ erfüllen.

Durch das Gleichsetzen von (2.13) mit (2.14) und einem anschließenden Koeffizientenvergleich des stochastischen Anteils erhalten wir

$$\alpha\sigma S\Delta W_t = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W_t \quad \iff \quad \alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$$

also gerade wieder das Delta-Hedging nach (1.6), das wir bereits aus der Herleitung der linearen Black-Scholes-Gleichung kennen. Beachte, dass dieses Ergebnis konsistent zu unserer Annahme (2.7) über die Wahl von $\alpha(t)$ aus dem letzten Abschnitt ist.

Der Koeffizientenvergleich des deterministischen Teils liefert

$$\begin{aligned} (\alpha\mu S + \beta rB)\Delta t - cS \left| \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t \\ \iff \alpha\mu S + \beta rB - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| 2c \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \end{aligned}$$

Wegen der replizierenden Eigenschaft des Portfolios muss zudem gelten

$$\Pi = \alpha S + \beta B = V \quad \iff \quad \beta B = V - \frac{\partial V}{\partial S} S \quad (2.15)$$

Wählen wir den Anteil des Basiswerts α gemäß (1.6) bzw. (2.7) und ersetzen βB durch (2.15), so fallen einige Terme weg und wir erhalten für den deterministischen Fall die Gleichung

$$rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right)}_{Le} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

was durch einfache Umformungen äquivalent ist zu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left[1 + Le \operatorname{sign}(V_{SS}) \right] S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{mit} \quad Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \quad (2.16)$$

Wir erhalten somit die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 + Le \operatorname{sign}(V_{SS}) \right] \quad (2.17)$$

für das **Modell von Leland**.

2.1.4 Anmerkungen

Die Gleichung für Lelands Modell der Transaktionskosten unterscheidet sich bei näherer Betrachtung tatsächlich nur durch den Faktor $\sigma^2 Le \operatorname{sign}(V_{SS})$ von der linearen Black-Scholes-Gleichung, was es uns relativ einfach macht, einige Aussagen über verschiedene Szenarien zu treffen:

- Falls keine Transaktionskosten anfallen, gilt $c = 0$. Daraus folgt aber sofort $Le = 0$ und wir erhalten die lineare Black-Scholes-Gleichung mit identischer Volatilität $\hat{\sigma} = \sigma$.
- Für europäische Optionen ist die Auszahlungsfunktion immer konvex bzgl. des Basiswerts S (siehe Abbildung 1.2) und graphisch lässt sich erkennen, dass diese Eigenschaft auch für V erhalten bleibt. Damit gilt $V_{SS} > 0$ und insbesondere *ändert* V_{SS} sein Vorzeichen *nicht*. Wir erhalten also ebenfalls die lineare Black-Scholes-Gleichung, jedoch mit erhöhter Volatilität $\hat{\sigma} > \sigma$.
- Für exotische Optionen (z.B. Butterfly-Optionen oder Barriere-Optionen) *kann* V_{SS} sein Vorzeichen allerdings *ändern* und wir erhalten eine nichtlineare Black-Scholes-Gleichung.

Im Hinblick auf die Konvergenz der Finite-Differenzen-Methode muss Δt auf jeden Fall noch so groß sein, dass $Le < 1$ für gegebene Transaktionskosten $c \in [0, 1)$ gilt. Anderenfalls kann nicht mehr sichergestellt werden, dass unser numerisches Verfahren überhaupt gegen die gesuchte Lösung konvergiert. Aber auch praktisch hat diese Forderung durchaus ihre Berechtigung, denn für $V_{SS} < 0$ erhalten wir für den Fall $Le > 1$ formal eine negative Volatilität. Wir halten also fest, dass zu kleine Hedgingintervalle $\Delta t \rightarrow 0$ neben wirtschaftlichen hier auch aus numerischen Gründen keinen Sinn machen.

2.2 Barles' & Soners Modell

Das zweite Modell für Transaktionskosten, das wir in dieser Arbeit betrachten, ist das Modell von Barles und Soner [3], welches im Jahr 1998 entwickelt wurde. Auch dieses Modell geht wieder von *proportionalen Transaktionskosten* $c \in [0, 1)$ aus, die jetzt allerdings auch beim Handel mit der festverzinslichen Anleihe anfallen und auch sofort mit dieser verrechnet werden.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zu Lelands Modell ist die Annahme, dass die Präferenzen des Anlegers durch eine *Nutzenfunktion* U und einen *Risikoaversionsfaktor* γ beschrieben werden können. Die Herleitung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung für das Modell von Barles und Soner basiert nun im Wesentlichen auf einer Nutzenmaximierung für die zwei Strategien eines Anlegers, keine bzw. N europäische Call-Optionen zu verkaufen. Dieser Ansatz führt schließlich zu zwei stochastischen Optimierungsproblemen für die Handelsstrategie des Anlegers, wobei sich der Wert der Option nach Hodges und Neuberger [9] einfach in gewisser Weise aus der Differenz der maximalen Nutzen für die beiden unterschiedlichen Strategien ergibt.

2.2.1 Herleitung

Um die nachfolgenden Überlegungen zu verstehen, benötigen wir zunächst noch einige Notationen, die sich jeweils alle auf einen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ beziehen:

- $S(t) = S_t$ - Kurs des Basiswerts mit Startkurs S_0
- $X(t) = X_t$ - Anteile der festverzinslichen Anleihe mit Startwert x_0
- $Y(t) = Y_t$ - Anteile des Basiswerts mit Startwert y_0
- $L(t) = L_t$ - Insgesamt *gekaufte* Anteile des Basiswerts, monoton steigend mit $L_0 = 0$
- $M(t) = M_t$ - Insgesamt *verkaufte* Anteile des Basiswerts, monoton steigend mit $M_0 = 0$

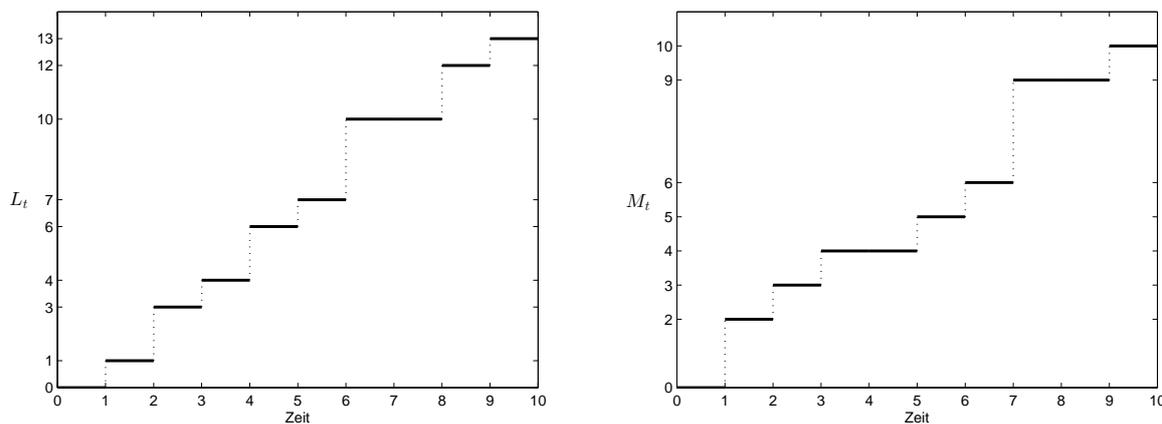


Abbildung 2.1: Beispiel für die gekauften/verkaufte Anteile L_t/M_t

Seien mit $t_i \in [0, t]$ die bisherigen Hedgingzeitpunkte bezeichnet, es gilt also $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

In einem Zeitschritt $t_{i-1} \rightarrow t_i$ werden also $L_{t_i} - L_{t_{i-1}}$ Anteile gekauft und $M_{t_i} - M_{t_{i-1}}$ Anteile verkauft. Die Anzahl der Anteile des Basiswerts zur Zeit t ergibt sich folglich zu

$$Y_t = y_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^n L_{t_i} - L_{t_{i-1}}}_{\text{Kauf}} - \underbrace{\sum_{j=1}^n M_{t_j} - M_{t_{j-1}}}_{\text{Verkauf}} = y_0 + L_t - M_t \quad (2.18)$$

Gehen wir nun wieder von Transaktionskosten $c \in [0, 1)$ proportional zum Handelsvolumen aus, dann müssen wir zur Zeit t für den Kauf eines Anteils des Basiswerts $S_t(1+c)$ bezahlen, während wir für den Verkauf eines Anteils aber nur $S_t(1-c)$ erhalten.

Da wir sowohl den Kauf als auch den Verkauf der Anteile (und die damit anfallenden Transaktionskosten) mit der festverzinslichen Anleihe verrechnen, ergibt sich deren Wert zur Zeit t zu

$$X_t = x_0 - \underbrace{\sum_{i=1}^n S_{t_i}(1+c)(L_{t_i} - L_{t_{i-1}})}_{\text{Kauf}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n S_{t_j}(1-c)(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})}_{\text{Verkauf}}$$

womit im Grenzübergang $t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$ folgt

$$X_t = x_0 - \int_0^t S_\tau(1+c)dL_\tau + \int_0^t S_\tau(1-c)dM_\tau \quad (2.19)$$

Bei den auftretenden Integralen handelt es sich um *Riemann-Stieltjes-Integrale*.

Wir haben mit (2.18) und (2.19) also zwei stochastische Prozesse für die Anzahl der Anteile des Basiswerts bzw. der festverzinslichen Anleihe zur Zeit $t \in [0, T]$ erhalten.

Die Handelsstrategie (L_t, M_t) eines Anlegers besteht jetzt einfach aus den beiden monoton steigenden Prozessen L_t bzw. M_t und beschreibt letztendlich nur, wie sich die Anzahl der Anteile des Basiswerts bzw. der festverzinslichen Anleihe mit der Zeit verändert.

Zuletzt benötigen wir noch eine konkave, monoton steigende Nutzenfunktion, welche die Präferenzen des Anlegers widerspiegeln soll. Barles und Soner gehen hier von einer exponentiellen Nutzenfunktion mit Risikoaversionsfaktor $\gamma > 0$ aus

$$U(\xi) = 1 - e^{-\gamma\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

Wir betrachten nun die beiden folgenden stochastischen Optimierungsprobleme:

- Der Anleger hat zum Laufzeitende *keine* europäische Call-Option verkauft (Strategie 1)

$$V_1(x_0, y_0, S_0) = \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E \left[U(X(T) + Y(T)S(T)) \right] \quad (2.21)$$

- Der Anleger hat zum Laufzeitende N europäische Call-Optionen verkauft (Strategie 2)

$$V_2(x_0, y_0, S_0) = \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E \left[U(X(T) + Y(T)S(T) - N(S(T) - K)^+) \right] \quad (2.22)$$

Oder anders ausgedrückt maximieren wir den erwarteten Nutzen für die beiden Strategien 1 und 2 bezüglich aller möglichen Handelsstrategien (L_t, M_t) des Anlegers.

Nach Hodges und Neuberger [9] ist der Wert einer jeden einzelnen Option jetzt gerade durch die maximale Lösung $\Lambda = \Lambda(x_0, y_0, S_0, \gamma, N)$ der folgenden Gleichung gegeben

$$\begin{aligned} V_2(x_0 + N\Lambda, y_0, S_0) &= \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E \left[U(X(T) + N\Lambda + Y(T)S(T) - N(S(T) - K)^+) \right] \\ &= \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E \left[U(X(T) + Y(T)S(T)) \right] \\ &= V_1(x_0, y_0, S_0) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten entspricht der Optionswert also genau dem Betrag, der zur Zeit $t = 0$ (zusätzlich zu x_0) pro Option aufgewendet werden muss, um am Laufzeitende T mit Strategie 2 den gleichen Nutzen wie mit Strategie 1 zu erzielen.

2.2.2 Resultat

Im weiteren Verlauf der Herleitung folgern Barles und Soner aus der Linearität von (2.18) und (2.19), dass der Verkauf von N Optionen mit Risikoaversion γ genau dem Verkauf einer einzigen Option mit Risikoaversion γN entspricht.

Das führt zur asymptotischen Analyse $\gamma N \rightarrow \infty$ und einer Umskalierung der Nutzenfunktion (2.20) zu

$$U_\epsilon(\xi) = 1 - e^{-\frac{\xi}{\epsilon}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{1}{\gamma N} \quad (2.23)$$

womit sich die beiden Optimierungsprobleme (2.21) und (2.22) jetzt äquivalent formulieren lassen als

$$V_1(x_0, y_0, S_0) = 1 - \inf_{L(\cdot), M(\cdot)} \left[e^{-\frac{1}{\epsilon}(X(T)+Y(T)S(T))} \right] \quad (2.24)$$

und

$$V_2(x_0, y_0, S_0) = 1 - \inf_{L(\cdot), M(\cdot)} \left[e^{-\frac{1}{\epsilon}(X(T)+Y(T)S(T)-(S(T)-K)^+)} \right] \quad (2.25)$$

Zur Vereinfachung werden zwei Funktionen $z_{1,2} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt, die jeweils durch

$$\begin{aligned} V_1(x_0, y_0, S_0) &= 1 - e^{-\frac{1}{\epsilon}(x_0 + y_0 S_0 - z_1(y_0, S_0, 0))} \\ V_2(x_0, y_0, S_0) &= 1 - e^{-\frac{1}{\epsilon}(x_0 + y_0 S_0 - z_2(y_0, S_0, 0))} \end{aligned}$$

definiert sind. Für die beiden Funktionen z_1 und z_2 gilt zur Zeit $t = T$ also

$$z_1(y_0, S_0, T) = 0 \quad \text{bzw.} \quad z_2(y_0, S_0, T) = (S(T) - K)^+$$

und für den Optionspreis folgt

$$\Lambda(x_0, y_0, S_0, \frac{1}{\epsilon}, 1) = z_2(y_0, S_0, 0) - z_1(y_0, S_0, 0)$$

Mit Hilfe der stochastischen Kontrolltheorie zeigen Barles und Soner dann, dass V_1 und V_2 aus den stochastischen Optimierungsproblemen (2.24) bzw. (2.25) die beiden eindeutigen Lösungen der Gleichung

$$\min \left\{ -V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - rSV_S, -V_{y_0} + S(1+c)V_{x_0}, V_{y_0} - S(1-c)V_{x_0} \right\} = 0 \quad (2.26)$$

sind, die mit dynamischer Programmierung gelöst werden kann (siehe [6]).

Die Gleichung (2.26) führt zu einem Maximierungsproblem für die beiden Funktionen z_1 bzw. z_2 und unter der Annahme, dass sich die entstehenden Transaktionskosten in Form von $c = a_{BS} \sqrt{\epsilon}$ mit einer Konstanten $a_{BS} > 0$ darstellen lassen, gilt im Grenzübergang $\gamma N \rightarrow \infty$ wegen (2.23) $\epsilon \rightarrow 0$ bzw. $c \rightarrow 0$ und damit folgt

$$z_1 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad z_2 \rightarrow V$$

Hierbei ist V die eindeutige Lösung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 + \Psi(e^{r(T-t)} a_{BS}^2 S^2 V_{SS}) \right] \quad (2.27)$$

für das **Modell von Barles und Soner**, wobei sich die Konstante a_{BS} zu $c\sqrt{\gamma N}$ ergibt und die Funktion Ψ die eindeutige Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \quad \Psi(0) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad (2.28)$$

2.2.3 Lösung der Differentialgleichung

Bevor wir das Modell von Barles und Soner numerisch simulieren können, müssen wir zunächst die Differentialgleichung (2.28) betrachten, deren Lösung sich mit herkömmlichen numerischen Methoden schwierig gestaltet und insbesondere für den negativen Teil auch sehr ungenau ist. Wir werden daher auf eine implizite Darstellung der Lösung nach [4] zurückgreifen, die gegeben ist durch

$$x_+ : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x_+(\Psi) = \left(-\frac{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{\Psi})}{\sqrt{\Psi+1}} + \sqrt{\Psi} \right)^2, \quad \Psi > 0$$

bzw.

$$x_- : (-1, 0) \rightarrow (-\infty, 0), \quad x_-(\Psi) = -\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{-\Psi})}{\sqrt{\Psi+1}} - \sqrt{-\Psi} \right)^2, \quad -1 < \Psi < 0$$

Die folgende Abbildung zeigt, dass wir den positiven Teil $\Psi_+ : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ der Lösung der Differentialgleichung (2.28) numerisch durchaus noch gut approximieren können, während der Fehler für den negativen Teil der Lösung $\Psi_- : (-\infty, 0) \rightarrow (-1, 0)$ aber doch schnell sehr groß wird.

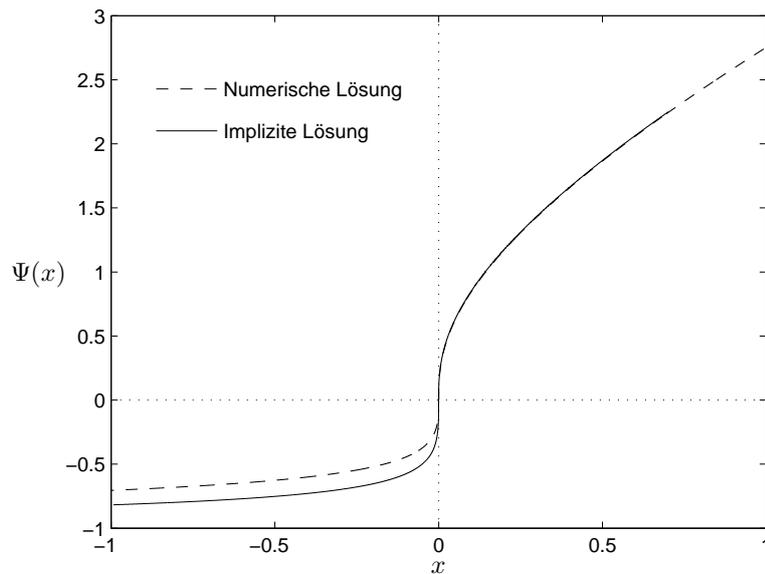


Abbildung 2.2: Numerische vs. implizite Lösung $\Psi(x)$ der Differentialgleichung

Außerdem können wir in der obigen Abbildung bereits erahnen, dass Ψ_+ konkav bzw. Ψ_- konvex und folglich x_+ konvex bzw. x_- konkav ist. Diese Eigenschaft wird später noch sehr nützlich sein.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie wir aus der impliziten Darstellung der Lösung $x(\Psi)$ den jeweils zugehörigen Funktionswert $\Psi(x)$, den wir für die Berechnung der Volatilität in (2.27) benötigen, mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\epsilon > 0$ bestimmen können.

Wenn wir also die Funktion $\Psi(x)$ an der Stelle x^* auswerten wollen, so müssen wir gerade denjenigen Funktionswert Ψ^* finden, der die folgende Bedingung erfüllt

$$x(\Psi^*) = x^* \tag{2.29}$$

Um die Gleichung (2.29) zu lösen, verschieben wir die ursprüngliche Funktion $x(\Psi)$ um x^* und betrachten die so entstehende Hilfsfunktion $\tilde{x}(\Psi) = x(\Psi) - x^*$.

Beachte, dass sich die Konvexität von x_+ auf \tilde{x}_+ und die Konkavität von x_- auf \tilde{x}_- überträgt.

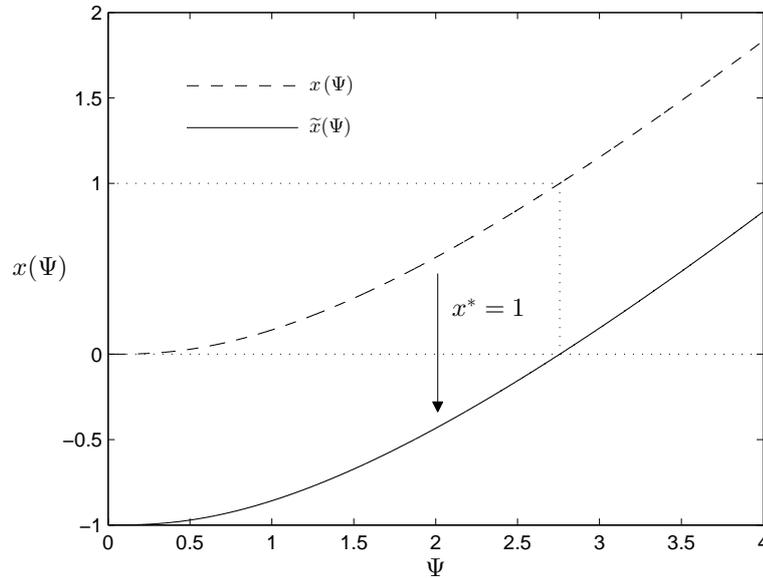


Abbildung 2.3: Verschiebung von $x(\Psi)$ zur Bestimmung von Ψ^*

Auf diese Weise erhalten wir Ψ^* aus (2.29) als Lösung des folgenden Nullstellenproblems

$$\tilde{x}(\Psi^*) = x(\Psi^*) - x^* = x^* - x^* = 0$$

Dieses Problem können wir jetzt mit dem Newton-Verfahren lösen. Um die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten, müssen wir allerdings zuerst einen geeigneten Startwert Ψ_0 für gegebenes x^* finden.

Für $x^* > 0$ können wir theoretisch jeden beliebigen Startwert $\Psi_0 > 0$ wählen, denn durch die Konvexität von $\tilde{x}_+(\Psi)$ gilt spätestens nach dem ersten Iterationsschritt $\Psi_1 > \Psi^*$ und das Verfahren konvergiert dann von rechts gegen die gesuchte Nullstelle Ψ^* , wie die folgenden Abbildungen für $x^* = 1$ zeigen.

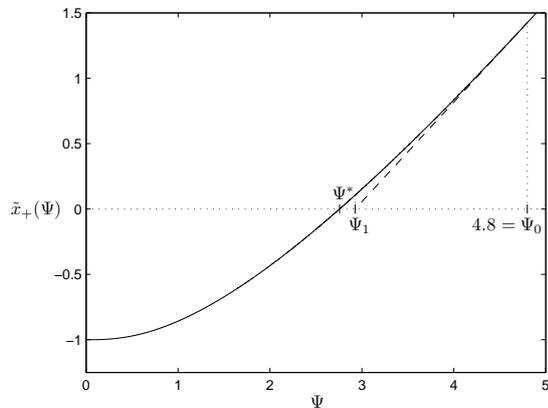


Abbildung 2.4: Konvergenz für $\Psi_0 > \Psi^*$ bei \tilde{x}_+

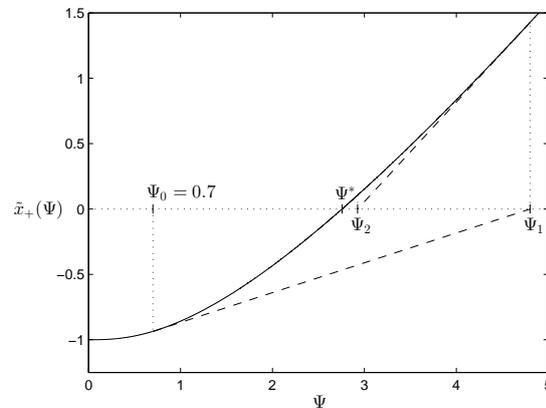


Abbildung 2.5: Konvergenz für $\Psi_0 < \Psi^*$ bei \tilde{x}_+

Die asymptotische Analyse der Differentialgleichung (2.28) von Barles und Soner in [3] liefert für $\Psi(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = -1$$

Es liegt also nahe, in der Praxis den Startwert Ψ_0 gezielt und in Abhängigkeit von $x^* > 0$ zu wählen. Einen guten Startwert liefert zum Beispiel die Wahl von $\Psi_0 = 1.1x^* + 2$.

Um einiges komplizierter gestaltet sich aber die Wahl eines passenden Startwerts für $x^* < 0$. Da die Funktion $\tilde{x}_-(\Psi)$ überhaupt nur für $\Psi \in (-1, 0)$ definiert ist, müssen wir einerseits sicherstellen, dass wir mit einem Startwert beginnen, der die Bedingung $\Psi_0 < \Psi^*$ bereits erfüllt. Anderenfalls verlassen wir unter Umständen nämlich schon mit dem ersten Iterationsschritt des Newton-Verfahrens den Definitionsbereich von $\tilde{x}_-(\Psi)$, wie die beiden folgenden Abbildungen für $x^* = -0.1$ zeigen.

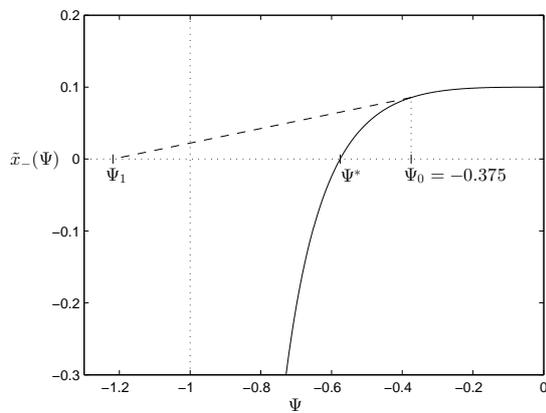


Abb. 2.6: Keine Konvergenz für $\Psi_0 > \Psi^*$ bei \tilde{x}_-

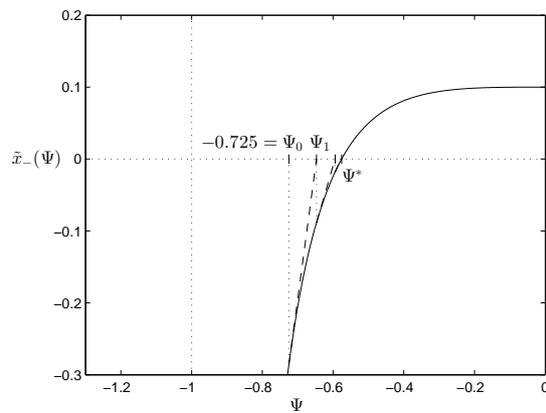


Abb. 2.7: Konvergenz für $\Psi_0 < \Psi^*$ bei \tilde{x}_-

Andererseits muss der Startwert Ψ_0 aber auch nahe genug an der gesuchten Nullstelle Ψ^* liegen, denn für $\Psi_0 \approx -1$ ist die Ableitung $\tilde{x}'_-(\Psi_0)$ sehr groß und folglich ist es in diesem Fall ungewiss, ob das Newton-Verfahren überhaupt gegen Ψ^* konvergiert.

Aus diesem Grund definieren wir mit

$$\Psi_0^{(0)} := -0.5, \quad \Psi_0^{(i+1)} := \Psi_0^{(i)} - \frac{\Psi_0^{(i)} + 1}{2}, \quad i \in \mathbb{N}$$

rekursiv eine Folge von Startwerten $(\Psi_0^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$, bis wir einen Startwert finden, für den $\tilde{x}_-(\Psi_0^{(i)}) < 0$ gilt. Dieser Startwert liegt zwangsläufig links von Ψ^* und erfüllt somit auch die Bedingung $\Psi_0 < \Psi^*$.

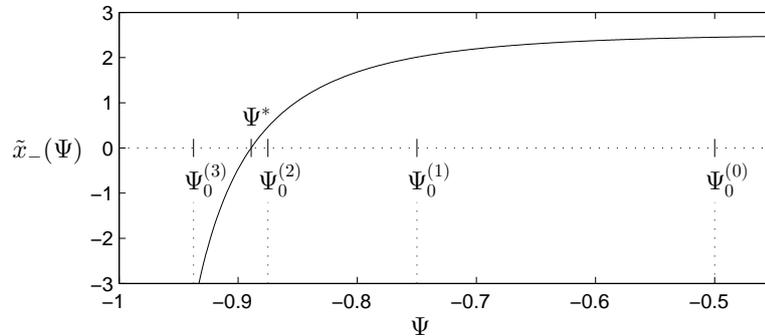


Abbildung 2.8: Graphische Veranschaulichung der Folge von Startwerten $\Psi_0^{(i)}$

Aufgrund der Konkavität von $\tilde{x}_-(\Psi)$ konvergiert das Newton-Verfahren nach der Wahl geeigneter Startwerte von links gegen die gesuchte Nullstelle Ψ^* .

Der folgende Algorithmus berechnet mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\epsilon > 0$ den gesuchten Funktionswert $\Psi^* = \Psi(x^*)$ für ein beliebiges $x^* \in \mathbb{R}$. Auf diese Weise können wir die Volatilität

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 + \Psi(e^{r(T-t)} a_{BS}^2 S^2 V_{SS}) \right]$$

in der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung (2.27) für das Modell von Barles und Soner berechnen.

Algorithmus 2.2 (Berechnung von Ψ^*)

1. Setze $\Psi_{\text{alt}} = 0$ und $\Psi_{\text{neu}} = 0$ zur Initialisierung

2. Falls $|x^*| \leq \epsilon$

2.1. Setze $\Psi^* = 0$ und gehe zu 5.

3. Falls $x^* > \epsilon$

3.1. Setze $\Psi_0 = 1.1x^* + 2$ als Startwert

3.2. Setze $\Psi_{\text{neu}} = \Psi_0$ als erste Näherung für Ψ^*

3.3. Solange $|\Psi_{\text{neu}} - \Psi_{\text{alt}}| > \epsilon$

3.3.1. Setze $\Psi_{\text{alt}} = \Psi_{\text{neu}}$

3.3.2. Berechne die Ableitung

$$\tilde{x}'_+(\Psi_{\text{alt}}) = x'_+(\Psi_{\text{alt}}) = \frac{x_+(\Psi_{\text{alt}} + 10^{-7}) - x_+(\Psi_{\text{alt}})}{10^{-7}}$$

3.3.2. Setze

$$\Psi_{\text{neu}} = \Psi_{\text{alt}} - \frac{\tilde{x}_+(\Psi_{\text{alt}})}{\tilde{x}'_+(\Psi_{\text{alt}})} = \Psi_{\text{alt}} - \frac{x_+(\Psi_{\text{alt}}) - x^*}{x'_+(\Psi_{\text{alt}})}$$

3.4. Setze $\Psi^* = \Psi_{\text{neu}}$ und gehe zu 5.

4. Falls $x^* < -\epsilon$

4.1. Setze $\Psi_0 = -0.5$ als ersten Versuch für den Startwert

4.2. Solange $\tilde{x}_-(\Psi_0) = x_-(\Psi_0) - x^* > 0$

4.2.1. Setze

$$\Psi_0 = \Psi_0 - \frac{\Psi_0 + 1}{2}$$

4.3. Setze $\Psi_{\text{neu}} = \Psi_0$ als erste Näherung für Ψ^*

4.4. Solange $|\Psi_{\text{neu}} - \Psi_{\text{alt}}| > \epsilon$

4.4.1. Setze $\Psi_{\text{alt}} = \Psi_{\text{neu}}$

4.4.2. Berechne die Ableitung

$$\tilde{x}'_-(\Psi_{\text{alt}}) = x'_-(\Psi_{\text{alt}}) = \frac{x_-(\Psi_{\text{alt}} + 10^{-7}) - x_-(\Psi_{\text{alt}})}{10^{-7}}$$

4.4.2. Setze

$$\Psi_{\text{neu}} = \Psi_{\text{alt}} - \frac{\tilde{x}_-(\Psi_{\text{alt}})}{\tilde{x}'_-(\Psi_{\text{alt}})} = \Psi_{\text{alt}} - \frac{x_-(\Psi_{\text{alt}}) - x^*}{x'_-(\Psi_{\text{alt}})}$$

4.5. Setze $\Psi^* = \Psi_{\text{neu}}$ und gehe zu 5.

5. Ausgabe von Ψ^* als der gesuchte Funktionswert $\Psi(x^*)$

Kapitel 3

Weitere Modelle

3.1 Feedback-Effekte und Marktiliquidität

Ein weiteres Modell beschäftigt sich mit der Tatsache, dass bei einer festen Handelsstrategie eines großen Investors *Feedback-Effekte* auftreten können, welche dann die Strategie selbst beeinflussen. Zudem können große Handelsvolumina die Verfügbarkeit des Basiswerts auf einem realen Finanzmarkt so stark beeinträchtigen, dass wir unter Umständen nicht mehr in der Lage sind, beliebig viele Anteile zu handeln, was auf den Begriff der *Marktiliquidität* führt. Mit dieser Problematik haben sich Frey und Stremme in [7] bzw. Schönbucher und Wilmott in [16] auseinandergesetzt und in ihren Modellen einen Marktiliquiditätsfaktor $\lambda \in [0, 1]$ eingeführt, der das aktuelle Liquiditätsniveau (λ klein $\hat{=}$ hohe Liquidität) auf dem Finanzmarkt beschreibt.

3.1.1 Resultat

Bei der Herleitung des Modells in [16] werden die Marktteilnehmer zunächst in kleine und große Anleger unterteilt, wobei sich die beiden Gruppen jeweils hinsichtlich ihrer Nachfrage nach Anteilen des Basiswerts unterscheiden. Der Kursverlauf des Basiswerts S wird dabei durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben

$$dS(t) = \mu(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dW_t \quad (3.1)$$

Die kleinen Anleger haben jetzt in Abhängigkeit des Basiswerts S , eines Wiener-Prozesses W_t und der Zeit $t \in [0, T]$ eine gemeinsame *Nachfrage* $\mathcal{D}(S, W_t, t)$. Das insgesamt auf dem Markt verfügbare *Angebot* wird mit $\mathcal{S}(S, W_t, t)$ bezeichnet.

Der *Nachfrageüberschuss* ist folglich gegeben durch

$$\mathcal{X}(S, W_t, t) = \mathcal{D}(S, W_t, t) - \mathcal{S}(S, W_t, t) \quad (3.2)$$

Als Nächstes werden noch einige weitere Modellannahmen getroffen:

- Es gibt keine weiteren Faktoren, welche die Entscheidungen der kleinen Anleger beeinflussen. Alle notwendigen stochastischen Einflüsse sind bereits durch den Wiener-Prozess W_t modelliert. Insbesondere lassen sich die kleinen Anleger auch nicht durch die Anwesenheit der großen Anleger und deren Handelsstrategien beeinflussen.
- Der Nachfrageüberschuss $\mathcal{X}(S, W_t, t)$ hängt ausschließlich von den aktuellen Werten S_t, W_t, t ab.
- $\mathcal{X}(S, W_t, t)$ ist zweimal stetig differenzierbar in S und W_t und einmal stetig differenzierbar in t .

- $\mathcal{X}(S, W_t, t)$ ist monoton fallend bezüglich des Basiswerts, für alle S, W_t und t gilt also

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathcal{X}(S, W_t, t) < 0$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die kleinen Anleger bei einem niedrigen Kurs eine hohe Nachfrage $\mathcal{D}(S, W_t, t)$ nach Anteilen des Basiswerts haben und umgekehrt natürlich auch.

- Für alle W_t und t gibt es einen Gleichgewichtspreis S , bei dem Angebot und Nachfrage auf dem Finanzmarkt ausgeglichen sind

$$\mathcal{X}(S, W_t, t) = 0$$

Die großen Anleger haben mit $f(S, t)$ ebenfalls eine Nachfrage in Abhängigkeit des Basiswerts S und der Zeit $t \in [0, T]$. Der gesamte Nachfrageüberschuss $\tilde{\mathcal{X}}(S, W_t, t)$ auf dem Markt bestimmt sich folglich aus der Summe von (3.2) und der Nachfrage der großen Anleger $f(S, t)$.

Der Gleichgewichtspreis S ergibt sich damit gerade als Lösung von

$$\tilde{\mathcal{X}}(S, W_t, t) = \mathcal{D}(S, W_t, t) - \mathcal{S}(S, W_t, t) + f(S, t) = \mathcal{X}(S, W_t, t) + f(S, t) = 0 \quad (3.3)$$

Wir nehmen jetzt an, dass auch $f(S, t)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in S und t ist und da der Basiswert S nach (3.1) die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ist, können wir eine mehrdimensionale Version des bereits bekannten Itô-Lemmas 1.11 auf $\mathcal{X}(S, W_t, t)$ und $f(S, t)$ anwenden und erhalten mit

$$dSdW_t = \mu(S(t), t) \underbrace{dt dW_t}_{=0} + \sigma(S(t), t) \underbrace{dW_t dW_t}_{=dt} = \sigma(t, S) dt$$

aus (3.3) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S, t) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S^2} + \sigma(S, t) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S \partial W_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} \right] dt + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S} dS + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t} dW_t \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S, t) \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS = 0 \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Gleichung nun (3.1) für dS ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2(S, t) \left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) + \sigma(S, t) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S \partial W_t} + \mu(S, t) \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial S} \right) \right] dt \\ & + \left[\sigma(S, t) \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial S} \right) + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t} \right] dW_t = 0 \end{aligned}$$

und für die Volatilität muss damit gelten

$$\sigma(S, t) = - \frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial S}}$$

Basierend auf diesem Ergebnis werden im weiteren Verlauf der Herleitung die beiden Annahmen eines Feedback-Effekts und der Marktliquidität mathematisch formuliert und anschließend verwendet, um die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \frac{1}{(1 - \lambda V_{SS})^2} \quad (3.4)$$

für **Feedback-Effekte und Marktliquidität** herzuleiten.

Beachte, dass auf einem vollständig liquiden Markt für den Marktliquiditätsfaktor $\lambda = 0$ gilt und wir wieder die lineare Black-Scholes-Gleichung erhalten, falls keine Feedback-Effekte auftreten.

3.2 Volatilitätsbereich

3.2.1 Motivation

Die drei bisher betrachteten Modelle zur Optionsbewertung führen zwar alle zu einer variablen Volatilitätsfunktion $\hat{\sigma}^2(S, t, V_{SS})$ - diese ist im Allgemeinen aber nicht explizit bekannt, da sie wesentlich von der Parameterwahl und damit von den getroffenen Modellannahmen abhängt. Ein weiterer Aspekt, der auch nicht gerade für die Verwendung der bisherigen Modelle spricht, sind die teilweise doch sehr unschönen analytischen Eigenschaften der zugehörigen Volatilitätsfunktionen, wie zum Beispiel beim Modell von Barles und Soner. Dadurch wird die numerische Berechnung des Optionswerts (insbesondere für exotische Optionstypen) oft komplex und damit natürlich auch entsprechend langsamer. Es liegt also durchaus nahe, auch noch ein einfacheres und allgemeineres Modell zu entwickeln.

Ein denkbare Modell ist hier beispielsweise das von Avellaneda, Levy und Parás [1] bzw. Lyons [15], bei dem die wahre Volatilitätsfunktion $\hat{\sigma}^2(S, t, V_{SS})$ zwar ebenfalls nicht bekannt ist, wir aber immerhin ein *Intervall* $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ für die Volatilität $\hat{\sigma}$ angeben können. In Anlehnung an [17, Kap. 7.1.4] werden wir jetzt also ein Modell herleiten, welches die Information über diesen Volatilitätsbereich nutzt, um eine obere bzw. untere Schranke für den Optionswert zu bestimmen.

3.2.2 Herleitung

Wir vernachlässigen auch hier wieder eventuell anfallende Transaktionskosten und konstruieren ein Portfolio Π bestehend aus einer Option V und $-\alpha$ Anteilen des Basiswerts

$$\Pi = V - \alpha S \quad (3.5)$$

Anschließend bestimmen wir in jedem Zeitschritt $t_{i-1} \rightarrow t_i$ zwei Werte σ_+ und σ_- genau so, dass die Wertänderung $\Delta\Pi$ unseres Portfolios in diesem Zeitschritt maximal bzw. minimal ist. Auf diese Weise erhalten wir zwei Volatilitätsfunktionen (stochastische Variablen) $\sigma_+(t)$ und $\sigma_-(t)$, mit deren Hilfe wir jeweils den Wert der Option im *besten* bzw. *schlechtesten Fall* berechnen können.

Zunächst bleibt aber die Frage zu klären, wie wir die beiden Werte σ_+ und σ_- überhaupt wählen müssen, damit die zugehörigen Volatilitätsfunktionen die gewünschte Eigenschaft besitzen.

3.2.3 Wahl von σ_+ und σ_-

Angenommen, die Wertänderung des Portfolios (3.5) ist durch $\Delta\Pi = \Delta V - \alpha\Delta S$ gegeben, dann erhalten wir, analog zu (2.14), durch Anwendung des Itô-Lemmas 1.11 auf ΔV die Wertänderung

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W_t - \alpha \Delta S \\ &= \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta W_t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t - \alpha \Delta S \end{aligned}$$

wobei der Term $\mu S \Delta t + \sigma S \Delta W_t$ nach (2.2) gerade ΔS entspricht. Es folgt also

$$\Delta\Pi = \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t - \alpha \Delta S$$

Um eine risikofreie Entwicklung des Portfolios zu erreichen, müssen wir wieder den stochastischen Einfluss ΔW_t (in ΔS) eliminieren, was auch hier zum Delta-Hedging $\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$ aus (1.6) führt.

Damit ergibt sich die Wertänderung des Portfolios in Abhängigkeit von $\sigma(t)$ zu

$$\Delta\Pi(\sigma) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t \quad (3.6)$$

Da sich unser Portfolio mit der Wahl von α nach (1.6) risikofrei entwickelt, erfüllt es wegen der geforderten Arbitragefreiheit (1.1) auch für jede beliebige Volatilitätsfunktion $\sigma(t)$ die Gleichung

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (3.7)$$

Wir wählen die beiden Werte σ_+ und σ_- jetzt gerade so, dass sie in jedem Zeitschritt die Wertänderung des Portfolios maximieren bzw. minimieren, das heißt

$$\sigma_+ = \max_{\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}} \Delta\Pi(\sigma) = r\Pi\Delta t \quad \text{bzw.} \quad \sigma_- = \min_{\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}} \Delta\Pi(\sigma) = r\Pi\Delta t$$

Betrachten wir (3.6) genauer, so stellen wir fest, dass die Volatilität nur im Faktor $\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \sigma^2 V_{SS}$ eingeht. Wir können also σ_+ und σ_- auch einfach in Abhängigkeit des Vorzeichens von V_{SS} als

$$\sigma_+(V_{SS}) = \begin{cases} \sigma_{max} & V_{SS} \geq 0 \\ \sigma_{min} & V_{SS} < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

bzw.

$$\sigma_-(V_{SS}) = \begin{cases} \sigma_{min} & V_{SS} \geq 0 \\ \sigma_{max} & V_{SS} < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

wählen, um so die Wertänderung des Portfolios zu maximieren bzw. minimieren.

3.2.4 Resultat

Setzen wir die beiden Volatilitätsfunktionen (3.8) und (3.9) anstelle von σ in die Wertänderung des Portfolios (3.6) ein, so erhalten wir

$$\Delta\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{+/-}^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t \quad (3.10)$$

Wir haben mit (3.7) und (3.10) also wieder zwei Gleichungen für $\Delta\Pi$ hergeleitet. Durch Gleichsetzen erhalten wir schließlich die *zwei* nichtlinearen Black-Scholes-Gleichungen

$$\frac{\partial V_+}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_+^2(V_{SS})S^2 \frac{\partial^2 V_+}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_+}{\partial S} - rV_+ = 0 \quad (3.11)$$

bzw.

$$\frac{\partial V_-}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_-^2(V_{SS})S^2 \frac{\partial^2 V_-}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_-}{\partial S} - rV_- = 0 \quad (3.12)$$

für den Fall, dass die wahre Volatilität in einem **Volatilitätsbereich** liegt. Dabei ist mit V_+ die obere Schranke und mit V_- die untere Schranke für den tatsächlichen Optionswert V gegeben.

Bemerkung 3.1 (Europäische Optionen)

Ähnlich wie bei den Anmerkungen zu Lelands Modell in Kapitel 2.1.4 gilt auch hier für europäische Optionen stets $V_{SS} > 0$ und damit ändert insbesondere V_{SS} sein Vorzeichen nicht. Für die beiden Volatilitätsfunktionen gilt in diesem Fall also $\sigma_+(V_{SS}) \equiv \sigma_{max}$ bzw. $\sigma_-(V_{SS}) \equiv \sigma_{min}$ und wir erhalten wieder zwei lineare Black-Scholes-Gleichungen mit konstanter Volatilität.

Kapitel 4

Numerische Lösung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung

4.1 Die Finite-Differenzen-Methode

Die Finite-Differenzen-Methode ist ein numerisches Verfahren zur Lösung gewöhnlicher bzw. partieller Differentialgleichungen, bei dem die (partiellen) Ableitungen der gesuchten Funktion in endlich vielen diskreten Gitterpunkten durch Differenzenquotienten approximiert werden. Sind zusätzlich noch geeignete Randbedingungen gegeben, so ergibt sich durch Einsetzen der Differenzenquotienten in die Differentialgleichung zu jeder Zeit τ_v ein System von Differenzgleichungen, das dann mit einem beliebigen numerischen Lösungsverfahren gelöst werden kann. Auf diese Weise erhalten wir eine approximative Lösung für den jeweils nächsten Zeitschritt τ_{v+1} und die Differentialgleichung ist iterativ lösbar.

In diesem Kapitel orientieren wir uns an der Notation und Vorgehensweise aus [17, Kap. 7.2.1]. Zunächst müssen wir das Gebiet, auf dem die Differentialgleichung schließlich gelöst werden soll, durch endlich viele Gitterpunkte diskretisieren. Da der gesuchte Optionswert $V(S, t)$ in unseren Modellen aber nur von der Zeit t und dem Basiswert S abhängt, können wir uns hier direkt auf den 2-dimensionalen Fall beschränken.

Definition 4.1 (2-dimensionales Rechengitter)

Seien $[x_0, x_m] \subset \mathbb{R}$ und $[\tau_0, \tau_n] \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle und $m, n \in \mathbb{N}$ sei die jeweils gewünschte Anzahl der Teilintervalle in der Diskretisierung. Dann sind die zugehörigen Diskretisierungsschrittweiten mit

$$\Delta x = \frac{x_m - x_0}{m} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \tau = \frac{\tau_n - \tau_0}{n}$$

gegeben und die Komponenten der einzelnen Gitterpunkte $(x_i, \tau_v) \in \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad \text{bzw.} \quad \tau_v = \tau_0 + v \cdot \Delta \tau$$

Die Menge aller Gitterpunkte

$$\{(x_i, \tau_v) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \{0, \dots, m\}, v \in \{0, \dots, n\}\}$$

heißt dann ein **2-dimensionales Rechengitter**.

4.2 Transformation

Um die Finite-Differenzen-Methode effektiv auf unser Problem der Optionsbewertung anwenden zu können, transformieren wir zuerst die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung (1.10) geeignet und wählen dazu die Transformationen

$$x := \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau := \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad u(x, \tau) := \frac{e^{-x}}{K}V(S, t) \quad (4.1)$$

und für die Volatilitätsfunktion

$$\tilde{\sigma}^2(x, \tau, u_x, u_{xx}) := \frac{1}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \frac{e^{-x}}{K}(u_x + u_{xx})\right) \quad (4.2)$$

Auf diese Weise erhalten wir aus (1.10) die transformierte Gleichung

$$-u_\tau + \tilde{\sigma}^2(x, \tau, u_x, u_{xx})(u_x + u_{xx}) + \frac{2r}{\sigma^2}u_x = 0 \quad (4.3)$$

wobei u_τ , u_x und u_{xx} die Kurzschreibweisen für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sind.

Durch die Transformation der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung verändert sich auch das Rechengebiet der zugehörigen partiellen Differentialgleichung, wie die beiden folgenden Abbildungen zeigen.

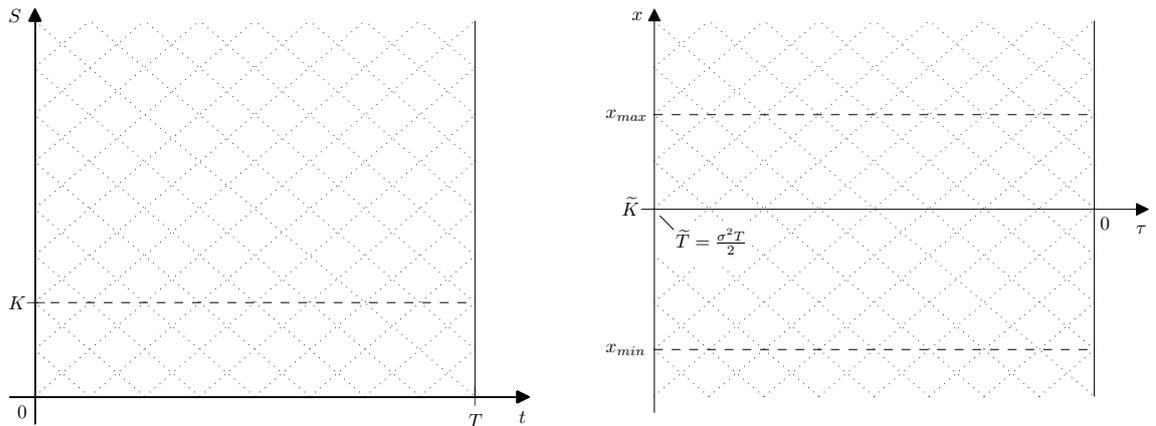


Abbildung 4.1: Transformation des Rechengebiets

Auf der einen Seite wird durch die Transformationen in (4.1) die Zeitachse invertiert, sodass jetzt die Zeit $t_0 = 0$ auf $\tau_n = \frac{1}{2}\sigma^2 T = \tilde{T}$ bzw. $t_n = T$ auf $\tau_0 = 0$ abgebildet wird und wir die Differentialgleichung nicht mehr in *Rückwärtszeit* von t_n nach t_0 , sondern in *Vorwärtszeit* von τ_0 nach τ_n lösen. Auf der anderen Seite wird das Kursintervall $S \in (0, \infty)$ nun auf $x \in (-\infty, \infty)$ abgebildet und wir erhalten ein (in Ortsrichtung) *beidseitig unbeschränktes Rechengebiet* für die partielle Differentialgleichung.

In der Praxis müssen wir deshalb, wie in Abbildung 4.2 bereits angedeutet, dieses unbeschränkte Gebiet durch eine obere Grenze x_{max} und eine untere Grenze x_{min} künstlich beschränken. Da allerdings

$$x_{max} = \ln\left(\frac{S_{max}}{K}\right) \iff S_{max} = Ke^{x_{max}} \quad \text{bzw.} \quad x_{min} = \ln\left(\frac{S_{min}}{K}\right) \iff S_{min} = Ke^{x_{min}}$$

gilt, sollten wir uns vor der Berechnung des Optionswerts noch Gedanken darüber machen, für welches Kursintervall $[S_{min}, S_{max}]$ wir den Optionswert überhaupt berechnen wollen.

Da wir jetzt auf einem kompakten Rechengebiet der Form $[x_{min}, x_{max}] \times [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \subset \mathbb{R}^2$ arbeiten, müssen wir für den oberen Rand x_{max} und den unteren Rand x_{min} geeignete Randbedingungen $u(x_{max}, \tau)$ bzw. $u(x_{min}, \tau)$ festlegen, um später überhaupt eine funktionierende Lösungsmethode zu erhalten.

Satz 4.2 (Put-Call-Parität)

Für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$S(t) - V_{C_e}(S(t), t) + V_{P_e}(S(t), t) = Ke^{-r(T-t)}$$

Beweis

Das Portfolio $\pi(t) = S(t) - V_{C_e}(S(t), t) + V_{P_e}(S(t), t)$ liefert nach Satz 1.9 zum Zeitpunkt T gerade die garantierte Auszahlung

$$\pi(T) = S(T) - (S(T) - K)^+ + (K - S(T))^+ = K$$

Der Wert dieses Portfolios zur Zeit t ergibt sich deshalb nach der risikoneutralen Bewertung durch einfache Diskontierung zu $e^{-r(T-t)}K$, woraus auch direkt die Behauptung folgt. \square

Nach Satz 1.9 gilt zum Laufzeitende T für eine europäische Call-Option

$$V_{C_e}(S(T), T) = (S(T) - K)^+ = 0 \quad \text{für} \quad S = 0 \quad (4.4)$$

und für eine europäische Put-Option analog

$$V_{P_e}(S(T), T) = (K - S(T))^+ \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad S \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Offensichtlich hat ein Diskontierungsfaktor der Form $e^{-r(T-t)}$ in beiden Fällen keinen Einfluss auf den Optionswert. Wegen des Prinzips der risikoneutralen Bewertung müssen die Aussagen also auch für jeden beliebigen früheren Zeitpunkt $t < T$ gelten und wir können mit der Put-Call-Parität folgern

$$V_{C_e}(S(t), t) \rightarrow S - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{für} \quad S \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

$$V_{P_e}(S(t), t) = Ke^{-r(T-t)} - S = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{für} \quad S = 0 \quad (4.7)$$

Unter der Annahme, dass $S_{min} \approx 0$ und $S_{max} \gg K$ gilt, ergeben sich die beiden Randbedingungen für eine europäische Call-Option aus (4.4) und (4.6) zu

$$u(x_{min}, \tau) = e^{-x_{min}} \frac{V_{C_e}(S_{min}, t)}{K} \stackrel{(4.4)}{=} e^{-x_{min}} \frac{0}{K} = 0$$

$$u(x_{max}, \tau) = e^{-x_{min}} \frac{V_{C_e}(S_{max}, t)}{K} \stackrel{(4.6)}{=} e^{-x_{max}} \frac{S_{max} - Ke^{-r(T-t)}}{K} = 1 - \exp(-x_{max} - \tau \frac{2r}{\sigma^2})$$

und für eine europäische Put-Option analog aus (4.7) und (4.5) zu

$$u(x_{min}, \tau) = e^{-x_{min}} \frac{V_{P_e}(S_{min}, t)}{K} \stackrel{(4.7)}{=} e^{-x_{min}} \frac{Ke^{-r(T-t)}}{K} = \exp(-x_{min} - \tau \frac{2r}{\sigma^2})$$

$$u(x_{max}, \tau) = e^{-x_{min}} \frac{V_{P_e}(S_{max}, t)}{K} \stackrel{(4.5)}{=} e^{-x_{max}} \frac{0}{K} = 0$$

Durch Satz 1.9 sind mit

$$V_{C_e}(S(T), T) = (S(T) - K)^+ \quad \text{bzw.} \quad V_{P_e}(S(T), T) = (K - S(T))^+$$

auch direkt die natürlichen Randbedingungen zum Laufzeitende T gegeben, die somit zu einer Anfangsbedingung in $\tau = 0$ werden. Für eine europäische Call-Option gilt nämlich

$$u(x, 0) = e^{-x} \frac{V_{C_e}(S(T), T)}{K} = e^{-x} (e^x - 1)^+ = (1 - e^{-x})^+$$

und für eine europäische Put-Option analog

$$u(x, 0) = e^{-x} \frac{V_{P_e}(S(T), T)}{K} = e^{-x} (1 - e^x)^+ = (e^{-x} - 1)^+$$

4.3 Diskretisierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung. Dazu diskretisieren wir das Rechengebiet $[x_{min}, x_{max}] \times [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \subset \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung durch $m + 1$ bzw. $n + 1$ jeweils äquidistante Gitterpunkte $(x_i, \tau_v) \in \mathbb{R}^2$. Nach Definition 4.1 erhalten wir dann für unser Rechengitter die Diskretisierungsschrittweiten

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \tau = \frac{\sigma^2 T}{2n}$$

und mit

$$x_i = x_{min} + i \cdot \Delta x, \quad i \in \{0, \dots, m\} \quad \text{bzw.} \quad \tau_v = 0 + v \cdot \Delta \tau, \quad v \in \{0, \dots, n\}$$

die einzelnen Komponenten der Gitterpunkte.

Zur besseren Übersicht führen wir mit

$$w_i^v := w(x_i, \tau_v) \approx u(x_i, \tau_v)$$

eine Kurzschreibweise für die *approximative Lösung* zur Zeit τ_v und im Ort x_i ein.

Wir können jetzt alle auftretenden partiellen Ableitungen mit Differenzenquotienten approximieren

$$\begin{aligned} \delta_\tau w_i^v &:= \frac{-w_i^{v+1} + w_i^v}{\Delta \tau} && \approx u_\tau(x_i, \tau_v) \\ \delta_x w_i^v &:= \frac{w_{i+1}^v - w_{i-1}^v}{2\Delta x} && \approx u_x(x_i, \tau_v) \\ \delta_{xx} w_i^v &:= \frac{w_{i+1}^v - 2w_i^v + w_{i-1}^v}{(\Delta x)^2} && \approx u_{xx}(x_i, \tau_v) \end{aligned} \quad (4.8)$$

und erhalten so für $s = u_x + u_{xx}$ zur Zeit τ_v und im Ort x_i die Approximation

$$\begin{aligned} \bar{s}_{i,v} &= \delta_x w_i^v + \delta_{xx} w_i^v = \frac{w_{i+1}^v - w_{i-1}^v}{2\Delta x} + \frac{w_{i+1}^v - 2w_i^v + w_{i-1}^v}{(\Delta x)^2} \\ &= \alpha w_{i-1}^v - \frac{2}{(\Delta x)^2} w_i^v + \beta w_{i+1}^v, \quad i = 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit

$$\alpha := -\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

Nun definieren wir für $i = 1, \dots, m-1$ noch

$$\mathcal{L}_{i,v} := \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_v, \bar{s}_{i,v})\bar{s}_{i,v} + \frac{r}{\sigma^2 \Delta x} (w_{i+1}^v - w_{i-1}^v) \quad (4.10)$$

und durch Einsetzen von (4.8) bzw. (4.10) in (4.3) erhalten wir schließlich mit

$$-w_i^{v+1} + w_i^v + \theta \Delta \tau \mathcal{L}_{i,v+1} + (1-\theta) \Delta \tau \mathcal{L}_{i,v} = 0 \quad (4.11)$$

eine diskretisierte Version der transformierten Black-Scholes-Gleichung (4.3). Die Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotienten werden aus numerischen Gründen noch mit $\theta \in [0, 1]$ gewichtet.

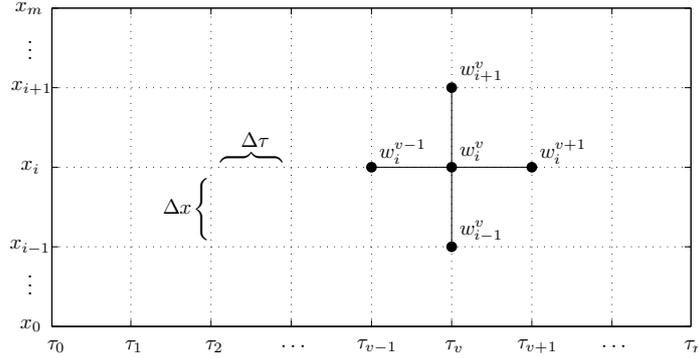


Abbildung 4.2: Approximative Lösungen auf einem Rechengitter

4.4 Nichtlineares Gleichungssystem

Sei die bereits *bekannte Approximation* zur Zeit τ_v mit $w^{(v)} = (w_0^v, \dots, w_m^v) \in \mathbb{R}^{m+1}$ und die noch *unbekannte Approximation* zur Zeit τ_{v+1} mit $w^{(v+1)} = (w_0^{v+1}, \dots, w_m^{v+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ bezeichnet.

Betrachten wir die Gleichung (4.11) für $i = 1, \dots, m-1$, so erhalten wir für $w^{(v+1)}$ ein nichtlineares Gleichungssystem der Form $F(w^{(v+1)}, w^{(v)}) = 0$, wobei die i -te Zeile gerade gegeben ist durch

$$\begin{aligned} F_i(w^{(v+1)}, w^{(v)}) &= -w_i^{v+1} + w_i^v \\ &+ \theta \Delta \tau \left[\tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1})\bar{s}_{i,v+1} + \frac{r}{\sigma^2 \Delta x} (w_{i+1}^{v+1} - w_{i-1}^{v+1}) \right] \\ &+ (1-\theta) \Delta \tau \left[\tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_v, \bar{s}_{i,v})\bar{s}_{i,v} + \frac{r}{\sigma^2 \Delta x} (w_{i+1}^v - w_{i-1}^v) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beachte, dass die F_i aus (4.12) genau wie die $\bar{s}_{i,v}$, $\bar{s}_{i,v+1}$ aus (4.9) und die $\mathcal{L}_{i,v}$ aus (4.10) jeweils nur für $i = 1, \dots, m-1$ definiert sind.

Für $i = 0$ und $i = m$ können wir daher entweder

$$\begin{aligned} F_0(w^{(v+1)}, w^{(v)}) &= \theta [u(x_{min}, \tau_{v+1}) - w_0^{v+1}] + (1-\theta) [u(x_{min}, \tau_v) - w_0^v] \\ F_m(w^{(v+1)}, w^{(v)}) &= \theta [u(x_{max}, \tau_{v+1}) - w_m^{v+1}] + (1-\theta) [u(x_{max}, \tau_v) - w_m^v] \end{aligned}$$

wählen, sodass die beiden Randwerte w_0^{v+1} und w_m^{v+1} annähernd den zugehörigen Randbedingungen entsprechend bestimmt werden. Alternativ können wir aber auch einfach

$$w_0^{v+1} = u(x_{min}, \tau_{v+1}) \quad \text{bzw.} \quad w_m^{v+1} = u(x_{max}, \tau_{v+1})$$

wählen und w_0^{v+1} bzw. w_m^{v+1} in den Gleichungen F_1 und F_{m-1} ersetzen. Wir berechnen in diesem Fall nur noch die inneren Werte $w_1^{v+1}, \dots, w_{m-1}^{v+1}$ für den nächsten Zeitschritt und die beiden Gleichungen F_0 und F_m können einfach ignoriert werden, da sie trivialerweise erfüllt sind.

Unter Verwendung der natürlichen Randbedingung, die sich aus dem Optionswert zum Laufzeitende T ergibt, erhalten wir direkt $w_i^0 = u(x_i, 0)$ für $i = 0, \dots, m$ und kennen damit bereits die erste approximative Lösung $w^{(0)}$ zur Zeit $\tau_0 = 0$. Mit Hilfe dieser Lösung können wir durch sukzessives Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems $F(w^{(v+1)}, w^{(v)}) = 0$ schließlich alle weiteren approximativen Lösungen zu späteren Zeitpunkten bestimmen.

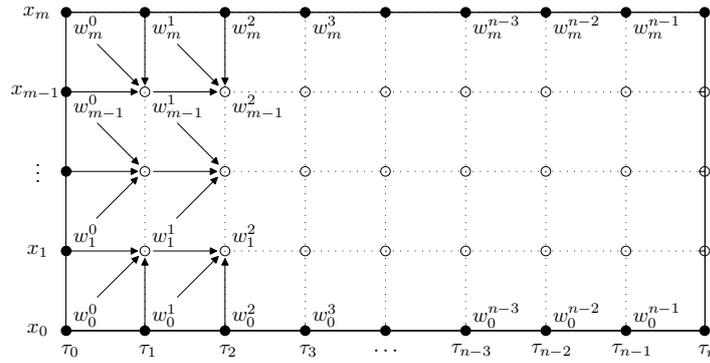


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des Lösungsverfahrens

4.5 Konvergenzanalyse

Ein großer Teil der Literatur zur Konvergenz von partiellen Differentialgleichungen beschäftigt sich mit speziellen Typen von partiellen Differentialgleichungen. Häufig werden dort elliptische, parabolische oder hyperbolische partielle Differentialgleichungen untersucht. Da es sich bei der linearen Black-Scholes-Gleichung um eine parabolische partielle Differentialgleichung handelt, kommt uns das tendenziell entgegen. Allerdings können wir die Ergebnisse nicht ohne weiteres auf die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung übertragen, da die Nichtlinearität in der Gleichung wieder Probleme bereitet.

Um zu garantieren, dass die approximative Lösung, die wir aus der Finite-Differenzen-Methode erhalten, tatsächlich gegen die wahre Lösung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung konvergiert, müssen wir nach [2] zunächst die *Stabilität*, *Konsistenz* und *Monotonie* der Diskretisierung $F(w^{(v+1)}, w^{(v)})$ fordern. Allerdings benötigen wir hier eine ganz spezielle Form der Monotonie, wie die folgende Definition zeigt.

Definition 4.3 (Monotonie)

Eine Diskretisierung $F(w^{(v+1)}, w^{(v)})$ heißt *monoton*, falls für alle Zeilen $i = 0, \dots, m$ gilt

$$i) \quad F_i(w^{(v+1)} + \epsilon^{(v+1)}, w^{(v)} + \epsilon^{(v)}) \geq F_i(w^{(v+1)}, w^{(v)})$$

$$\text{für alle } \epsilon^{(v+1)} = (0, \dots, 0, \epsilon_{i-1}^{v+1}, 0, \epsilon_{i+1}^{v+1}, 0, \dots, 0) \geq 0$$

$$\epsilon^{(v)} = (0, \dots, 0, \epsilon_{i-1}^v, \epsilon_i^v, \epsilon_{i+1}^v, 0, \dots, 0) \geq 0$$

$$ii) \quad F_i(w^{(v+1)} + \epsilon^{(v+1)}, w^{(v)}) \leq F_i(w^{(v+1)}, w^{(v)})$$

$$\text{für alle } \epsilon^{(v+1)} = (0, \dots, 0, \epsilon_i^{v+1}, 0, \dots, 0) \geq 0$$

Zudem muss die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzen, diese Voraussetzung ist aber in unserem Fall nach [5] immer erfüllt.

4.6 Implementierung

Die erste Version des Programms zur numerischen Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode war zunächst komplett in der mathematischen Softwareumgebung MATLAB implementiert. Aus Gründen der Performanz erfolgte später aber doch eine Umsetzung, die fast vollständig in der Programmiersprache C++ geschrieben ist. Um das Programm leichter bedienen und die errechneten Ergebnisse besser visualisieren zu können, ist der Ein- und Ausgabeteil des Programms allerdings weiterhin in MATLAB ausgelagert. Die komplette numerische Berechnung erfolgt nun jedoch in C++, auf das mit sogenannten MEX-Files direkt aus MATLAB zugegriffen werden kann.

4.6.1 Naiver Ansatz

In der ersten Version des Programms `blackbox_m` wurde der entscheidende Schritt, die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $F(w^{(v+1)}, w^{(v)}) = 0$, einfach von der MATLAB-internen Standardroutine `fsolve(fun, x0, opts)` übernommen. Diese Variante erreichte jedoch schon schnell hohe Rechenzeiten und für eine sehr feine Ortsdiskretisierung konnte es (je nach verwendetem Volatilitätsmodell) sogar passieren, dass die Methode überhaupt keine brauchbaren Ergebnisse mehr lieferte.

Insbesondere beim Modell von Barles und Soner der Fall, wo in jedem Schritt sehr aufwändig die Lösung einer Differentialgleichung aus der impliziten Darstellung berechnet werden muss, war dies der Fall.

4.6.2 Das Newton-Verfahren

In der nächsten Version `newton_m` des Programms wurde die Lösungsroutine `fsolve(fun, x0, opts)` durch ein selbstprogrammiertes, mehrdimensionales Newton-Verfahren ersetzt, welches das nichtlineare Gleichungssystem $F(w^{(v+1)}, w^{(v)}) = 0$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\epsilon > 0$ löst. Dazu wird in jedem Iterationsschritt zuerst das lineare Gleichungssystem

$$J_F(w^{(v)})\Delta w = -F(w^{(v)}) \quad (4.13)$$

gelöst und anschließend die approximative Lösung aktualisiert

$$w^{(v+1)} = \Delta w + w^{(v)} \quad (4.14)$$

Die Matrix

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_0}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_0}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_0}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_0}{\partial w_m^{v+1}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial w_m^{v+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_m^{v+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_m^{v+1}} \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_m^{v+1}} \\ \frac{\partial F_m}{\partial w_0^{v+1}} & \frac{\partial F_m}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_m}{\partial w_2^{v+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_m}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & \frac{\partial F_m}{\partial w_m^{v+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$$

stellt in (4.13) die Jacobi-Matrix von F dar, wobei sich die F_i jeweils nach (4.12) ergeben.

Durch partielles Ableiten der F_i nach w_i^{v+1} für $i = 0, \dots, m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \text{(oben links/unten rechts)} \quad \frac{\partial F_0}{\partial w_0^{v+1}} = \frac{\partial F_m}{\partial w_m^{v+1}} = -1 \\
& \text{(obere/untere Zeile)} \quad \frac{\partial F_0}{\partial w_i^{v+1}} = \frac{\partial F_m}{\partial w_i^{v+1}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \\
& \text{(linke/rechte Spalte)} \quad \frac{\partial F_j}{\partial w_0^{v+1}} = \frac{\partial F_k}{\partial w_m^{v+1}} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \forall k = 0, \dots, m-1 \\
& \text{(obere/untere Diagonalen)} \quad \frac{\partial F_p}{\partial w_q^{v+1}} = \frac{\partial F_q}{\partial w_p^{v+1}} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, \dots, m-1\} \quad \text{mit } p < q-1
\end{aligned}$$

wodurch sich die Jacobi-Matrix vereinfacht zu

$$J_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_1}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial w_2^{v+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial w_1^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_2^{v+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial w_3^{v+1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_{m-3}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-2}}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-2}^{v+1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-1}^{v+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$$

Auch hier können wir wieder auf die Berechnung der Randwerte Δw_0 und Δw_m verzichten und stattdessen nur die inneren Werte $\Delta w_1, \dots, \Delta w_{m-1}$ mit der zugehörigen $(m-1) \times (m-1)$ -Matrix berechnen. In diesem Fall müssen wir allerdings auch die Aktualisierungsvorschrift (4.14) noch auf den inneren Bereich der Approximation anpassen.

Die partiellen Ableitungen in der Jacobi-Matrix sind jeweils gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i}{\partial w_{i-1}^{v+1}} &= \alpha - \theta \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] - \theta \Delta \tau \frac{r}{\sigma^2 \Delta x} \\
\frac{\partial F_i}{\partial w_i^{v+1}} &= -1 - \frac{2}{\Delta x^2} \theta \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] - \theta \Delta \tau \\
\frac{\partial F_i}{\partial w_{i+1}^{v+1}} &= \beta + \theta \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] + \theta \Delta \tau \frac{r}{\sigma^2 \Delta x}
\end{aligned}$$

mit $\bar{s}_{i,v+1}$ aus (4.9), wobei wir in den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1^{v+1}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial w_2^{v+1}}, \quad \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-2}^{v+1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_{m-1}}{\partial w_{m-1}^{v+1}}$$

noch $w_0^{v+1} = u(x_{min}, \tau_{v+1})$ und $w_m^{v+1} = u(x_{max}, \tau_{v+1})$ setzen müssen, falls wir nur die inneren Werte der Approximation berechnen wollen.

4.6.3 Berechnung der inneren Werte

Die Berechnung der vollständigen approximativen Lösung $w^{(v+1)} = (w_0^{v+1}, \dots, w_m^{v+1})$ auf Basis des $(m+1)$ -dimensionalen nichtlinearen Gleichungssystems mit F_0 und F_m ist natürlich nicht äquivalent zur Berechnung der inneren Werte $w_1^{v+1}, \dots, w_{m-1}^{v+1}$ auf Basis des $(m-1)$ -dimensionalen Systems und der zusätzlichen Verwendung der Randbedingungen für die äußeren Werte w_0^{v+1} und w_m^{v+1} .

Da die beiden Randbedingungen $u(x_{min}, \tau)$ und $u(x_{max}, \tau)$ aber selbst beide nur Näherungen sind, ist a priori nicht klar, welche Variante die genaueren Ergebnisse liefert - denn wir wissen ja nicht, wie stark die ebenfalls nur geschätzten Randwerte am besten gewichtet werden sollten.

Der Vergleich mit dem Black-Scholes-Wert einer europäischen Call-Option im Fall der konstanten Volatilität zeigt zwar, dass die erste Variante (in diesem Beispiel) minimal genauer ist. Die resultierende Differenz ist allerdings so gering, dass der erhöhte Zeitaufwand nicht gerechtfertigt ist, wie die folgende Analyse zeigt:

Optionsparameter	$T = 1$	$K = 100$	$r = 6\%$	$\sigma = 20\%$	
Verfahrensparameter	$S_{min} = 20$	$S_{max} = 200$	$n = 360$	$m = 100$	$\epsilon = 10^{-5}$

	Zeit (in s)	absoluter Fehler	relativer Fehler
$(m+1)$ -dimensional	20.34190	0.07054663	10.36634504
$(m-1)$ -dimensional	14.22056	0.07054921	10.36668161
Δ Differenz	6.12138	$2.587 \cdot 10^{-6}$	$3.365 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4.1: Vergleich der beiden Varianten

$$\text{absoluter Fehler: } \max_{\substack{i=0, \dots, m \\ v=0, \dots, n}} \{|LSG_{i,v} - BSG_{i,v}|\} \quad \text{relativer Fehler: } \max_{\substack{i=0, \dots, m \\ v=0, \dots, n}} \left\{ \frac{|LSG_{i,v} - BSG_{i,v}|}{\max\{BSG_{i,v}, 10^{-3}\}} \right\}$$

Bei einer genaueren Analyse der Berechnungen stellt sich heraus, dass in der zweiten Variante in jedem Zeitschritt nur 2 statt 3 Newton-Iterationen benötigt werden. Das erklärt auch, warum die zweite Variante insgesamt nur ca. $70\% \approx \frac{2}{3}$ der Zeit benötigt und damit unabhängig vom konkreten Lösungsverfahren für (4.13) immer deutlich schneller ist.

4.6.4 Der Thomas-Algorithmus

Unabhängig davon, ob wir jetzt den kompletten Vektor $w^{(v+1)} = (w_0^{v+1}, \dots, w_m^{v+1})$ oder nur die inneren Werte $w_1^{v+1}, \dots, w_{m-1}^{v+1}$ der approximativen Lösung berechnen, erhalten wir eine tridiagonale Struktur in der Jacobi-Matrix. Wie bereits festgestellt, macht es in der Praxis aber keinen Sinn, in jedem Iterationsschritt den kompletten Vektor zu berechnen. Wir einigen uns also darauf, in dieser Version `thomas_m` des Programms nur die inneren Werte der approximativen Lösung zu berechnen und erhalten folglich eine Jacobi-Matrix der Gestalt

$$J_F = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{m-2} \\ 0 & 0 & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)} \quad (4.15)$$

mit

$$a_i := \frac{\partial F_i}{\partial w_{i-1}^{v+1}}, \quad b_i := \frac{\partial F_i}{\partial w_i^{v+1}}, \quad c_i := \frac{\partial F_i}{\partial w_{i+1}^{v+1}}$$

Betrachten wir die Jacobi-Matrix (4.15) etwas genauer, so liegt es nahe, die tridiagonale Struktur der Matrix bei der Lösung des linearen Gleichungssystems $J_F \Delta w = d$ mit $d := -F(w^{(v)}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ im Newton-Verfahren auszunutzen. Dazu setzen wir

$$c'_i := \begin{cases} \frac{c_1}{d_1} & \text{für } i = 1 \\ \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i} & \text{für } i = 2, \dots, m-2 \end{cases} \quad \text{und} \quad d'_i := \begin{cases} \frac{d_1}{b_1} & \text{für } i = 1 \\ \frac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i} & \text{für } i = 2, \dots, m-1 \end{cases}$$

und erhalten schließlich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\Delta w_i = \begin{cases} d'_{m-1} & \text{für } i = m-1 \\ \frac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i} & \text{für } i = m-2, \dots, 2 \end{cases}$$

Mit dem Thomas-Algorithmus besitzen wir also ein äußerst effizientes Verfahren, mit dem wir das lineare Gleichungssystem (4.13) in nur $\mathcal{O}(n)$ Operationen lösen können. Wie schnell der Algorithmus tatsächlich ist, soll ein Vergleich mit der MATLAB-internen Standardroutine `mldivide` zeigen, die auf dem Gaußschen Eliminationsverfahren basiert und somit $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen benötigt. Die folgende Tabelle enthält die durchschnittlichen Laufzeiten für das Lösen eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ jeweils zufällig mit $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten Zufallszahlen erzeugt werden:

Dimension	Durchläufe	<code>mldivide</code> (in s)	<code>thomas</code> (in s)
10	10000	$7.059111 \cdot 10^{-6}$	$2.069840 \cdot 10^{-5}$
25	10000	$1.546638 \cdot 10^{-5}$	$2.167149 \cdot 10^{-5}$
50	10000	$3.505983 \cdot 10^{-5}$	$2.343519 \cdot 10^{-5}$
100	10000	$1.047362 \cdot 10^{-4}$	$3.044849 \cdot 10^{-5}$
250	10000	$9.320494 \cdot 10^{-4}$	$5.802340 \cdot 10^{-5}$
500	1000	$6.177058 \cdot 10^{-3}$	$1.371239 \cdot 10^{-4}$
1000	1000	$2.643086 \cdot 10^{-2}$	$2.106976 \cdot 10^{-4}$
2500	1000	$1.782015 \cdot 10^{-1}$	$4.455063 \cdot 10^{-4}$
5000	100	$8.565165 \cdot 10^{-1}$	$1.130988 \cdot 10^{-3}$
10000	100	$3.046733 \cdot 10^{-0}$	$1.965128 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.2: Durchschnittliche Laufzeiten

Wie zu erwarten, ist der Thomas-Algorithmus `thomas` insbesondere für hohe Dimensionen deutlich schneller als die MATLAB-interne Standardroutine, die allerdings bei niedrigen Dimensionen ihren Implementierungsvorteil ausnutzen kann und dort von deutlich kürzeren Zugriffszeiten profitiert.

Betrachten wir die Laufzeiten für einzelne Durchläufe mit der Dimension $m = 50$

Durchlauf	<code>mldivide</code> (in s)	<code>thomas</code> (in s)
1.	$5.393639 \cdot 10^{-4}$	$3.811049 \cdot 10^{-3}$
2.	$6.715316 \cdot 10^{-5}$	$8.601593 \cdot 10^{-4}$
3.	$4.961635 \cdot 10^{-5}$	$5.697326 \cdot 10^{-4}$
4.	$5.346589 \cdot 10^{-5}$	$3.806772 \cdot 10^{-5}$
5.	$4.020635 \cdot 10^{-5}$	$2.908545 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 4.3: Einzelne Laufzeiten

so können wir feststellen, dass es einige Zeit dauert, bis der Thomas-Algorithmus seinen Geschwindigkeitsvorteil wirklich ausspielen kann. Es ist der gleiche Effekt, der für niedrige Dimensionen bereits in der vorherigen Simulation aufgetreten ist und mit der MATLAB-internen Implementierung der Methoden zusammenhängt. In jedem Fall aber schränkt dieser Effekt den praktischen Nutzen des Thomas-Algorithmus vorerst stark ein, da wir weder besonders hohe Dimensionen, noch besonders viele aufeinanderfolgende Aufrufe bewältigen müssen.

4.6.5 C++ Implementierung

Um das MATLAB-spezifische Problem der langsamen Zugriffszeiten für selbstgeschriebene Methoden zu umgehen, erfolgte schließlich die vollständige Implementierung in C++. Im ersten Schritt `c++_old` wurde das bisherige Programm einfach nur 1:1 nachprogrammiert. Obwohl diese Variante bereits deutlich schneller war, gab es noch einiges Potenzial zur Verbesserung. Im zweiten Schritt `c++_new` wurden deshalb weitere kleine Änderungen wie zum Beispiel das Ersetzen der `pow(x, 2.0)` Anweisung durch `x * x`, die Verwendung von `double[]`-Arrays statt `vector < double >`-Vektoren oder das Speichern von mehrfach verwendeten Zwischenergebnissen vorgenommen, wodurch die Performance erneut verbessert werden konnte.

Simulation 4.4 (Verschiedene Modelle + Butterfly-Option)

	Konstant	Leland	Barles & Soner	Marktilliquidity und Feedback-Effekte	Volatilitätsbereich
Verfahren	$\sigma = 0.1$	$Le = 0.397$	$a_{BS} = 234$	$\lambda = 0.5$	$\sigma_{min} = 0.15$ $\sigma_{max} = 0.25$
<code>blackbox_m</code>	11.97852 s	7.54646 s	155.20945 s	9.11920 s	7.57414 s
<code>newton_m</code>	1.65671 s	0.93395 s	23.04711 s	1.14907 s	0.96063 s
<code>thomas_m</code>	1.59270 s	0.88818 s	22.97067 s	1.09805 s	0.90265 s
<code>c++_old</code>	0.01374 s	0.01417 s	0.15837 s	0.01792 s	0.01610 s
<code>c++_new</code>	0.00220 s	0.00233 s	0.02455 s	0.00287 s	0.00251 s

Tabelle 4.4: Laufzeiten für verschiedene Modelle

Simulation 4.5 (Verschiedene Optionstypen + Barles' & Soners Modell)

Verfahren	Europäischer Call	Europäischer Put	Butterfly-Option
<code>blackbox_m</code>	174.99554 s	294.69516 s	155.20945 s
<code>newton_m</code>	23.67882 s	60.55473 s	23.04711 s
<code>thomas_m</code>	23.63512 s	60.28545 s	22.97067 s
<code>c++_old</code>	0.12290 s	0.26980 s	0.15837 s
<code>c++_new</code>	0.02551 s	0.04258 s	0.02455 s

Tabelle 4.5: Laufzeiten für verschiedene Optionstypen

Hinweis:

Die endgültige Version des Programms ist dieser Arbeit als DVD im Anhang beigelegt. Für eine ausführliche Beschreibung und Erläuterungen zu den einzelnen Dateien sei an dieser Stelle ebenfalls auf den entsprechenden Anhang verwiesen.

Kapitel 5

Simulationen

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie sich die jeweils hergeleiteten Modelle in Relation zum Black-Scholes-Modell verhalten. Dazu betrachten wir eine Option mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Ausübungspreis von 100€. Die erwartete Rendite des Basiswerts beträgt 6% und die historische Volatilität liegt bei 20%. Außerdem nehmen wir an, dass sich der Basiswert in einem Kursintervall von 20€ bis 200€ bewegt und wir unser Portfolio jede Woche (also 52x im Jahr) hedgen. Zusammenfassend erhalten wir also für alle nachfolgenden Simulationen die grundlegenden Parameter:

Optionsparameter	$T = 1$	$K = 100$	$r = 6\%$	$\sigma = 20\%$	
Verfahrensparameter	$S_{min} = 20$	$S_{max} = 200$	$n = 52$	$m = 100$	$\epsilon = 10^{-5}$

Um die Funktionsweise der verschiedenen Modelle und die jeweils auftretenden Effekte möglichst gut visualisieren zu können, untersuchen wir in den Simulationen unterschiedliche Optionstypen. Im ersten Modell (Volatilitätsbereich) verwenden wir eine sogenannte *Butterfly-Option* (siehe [11, Kap. 8]), während wir in den letzten drei Modellen (Lelands Modell, Barles' und Soners Modell, Modell für Feedback-Effekte und Marktilliquidität) eine *europäische Call-Option* betrachten.

Beispiel 5.1 (Butterfly-Option)

Eine *Butterfly-Option* besteht aus zwei europäischen Long-Calls mit Ausübungspreisen K_1 bzw. K_2 und zwei europäischen Short-Calls mit Ausübungspreis K_3 . Durch die Kombination der einzelnen Optionen entsteht ein spezielles Auszahlungsprofil, das einem Schmetterling mit ausgestreckten Flügeln in der Profildarstellung ähnelt (daher auch der Name).

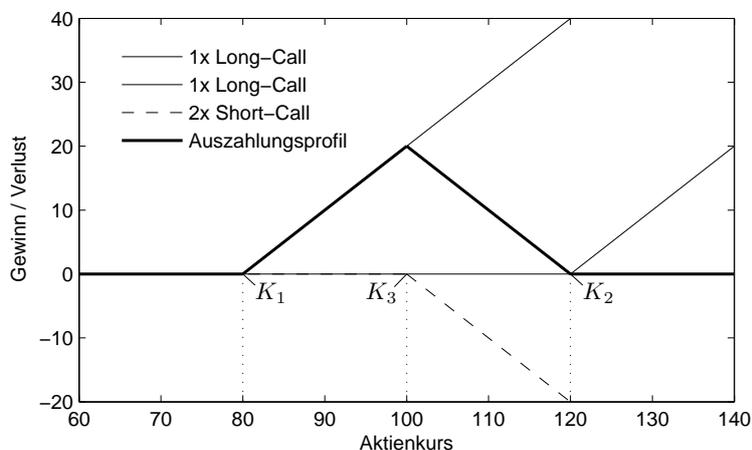


Abbildung 5.1: Auszahlungsprofil einer Butterfly-Option

5.1 Volatilitätsbereich

$$\text{Modell} \quad \frac{\partial V_{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{\pm}^2 (V_{SS})S^2 \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_{\pm}}{\partial S} - rV_{\pm} = 0$$

$$\text{Modellparameter} \quad \sigma_{min} = 15\% \quad \sigma_{max} = 25\% \quad (\text{Butterfly-Option})$$

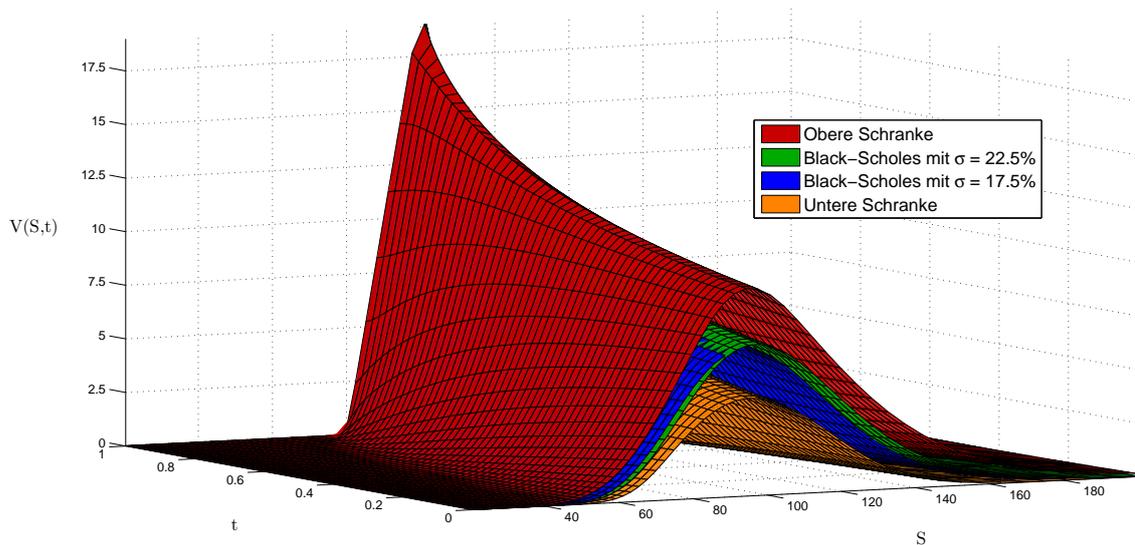


Abbildung 5.2: Volatilitätsbereich: Obere/Untere Schranken für den Optionswert

In diesem sehr allgemeinen Modell spezifizieren wir zunächst ein Volatilitätsintervall $[15\%, 25\%]$ für die wahre Volatilität des Basiswerts und erhalten auf diese Weise eine obere Schranke (rot) und eine untere Schranke (orange) für den tatsächlichen Optionswert. Berechnen wir anschließend den Black-Scholes-Wert einer Option, deren Volatilität innerhalb des vorher angenommenen Intervalls liegt (grün und blau), so können wir erkennen, dass der Black-Scholes-Wert während der gesamten Laufzeit und für alle Kurswerte auch wirklich innerhalb der beiden vorher berechneten Schranken liegt. Wir können also eine obere bzw. untere Schranke für den Wert einer Option angeben, obwohl wir die zugehörige Volatilitätsfunktion überhaupt nicht kennen. Auf den ersten Blick scheint dieses Modell damit relativ mächtig zu sein. Ist die Option allerdings sehr sensitiv gegenüber Volatilitätsänderungen, d.h. sie hat ein großes Vega $\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$, dann ist die Differenz zwischen den beiden Schranken so groß, dass keine praktisch relevanten Aussagen mehr möglich sind. Insbesondere für exotische Optionen, speziell für Barriere-Optionen, kann dies der Fall sein.

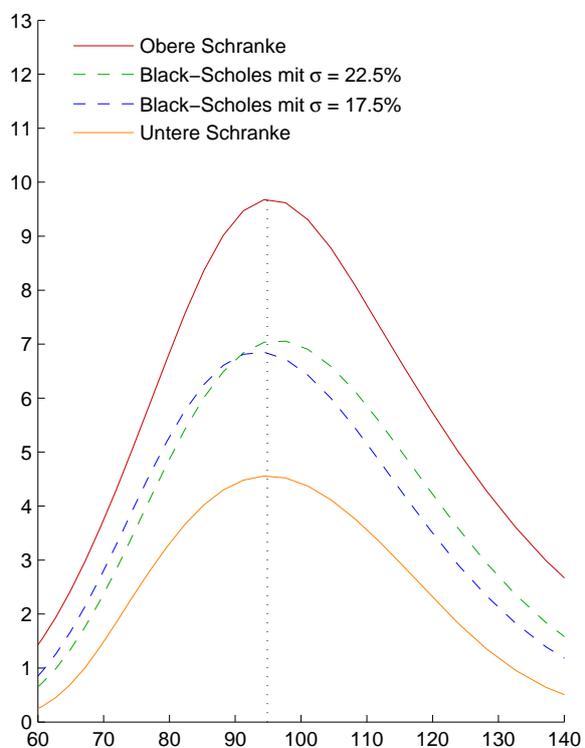


Abb. 5.3: Darstellung zur Zeit $t = 0$

5.2 Lelands Modell

Modell	$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left[1 + \gamma \operatorname{sign}(V_{SS}) \right] S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$
Modellparameter	$c = 1\% \quad \Delta t = \frac{1}{52} \implies Le = 0.5754 \quad (\text{Europäische Call-Option})$

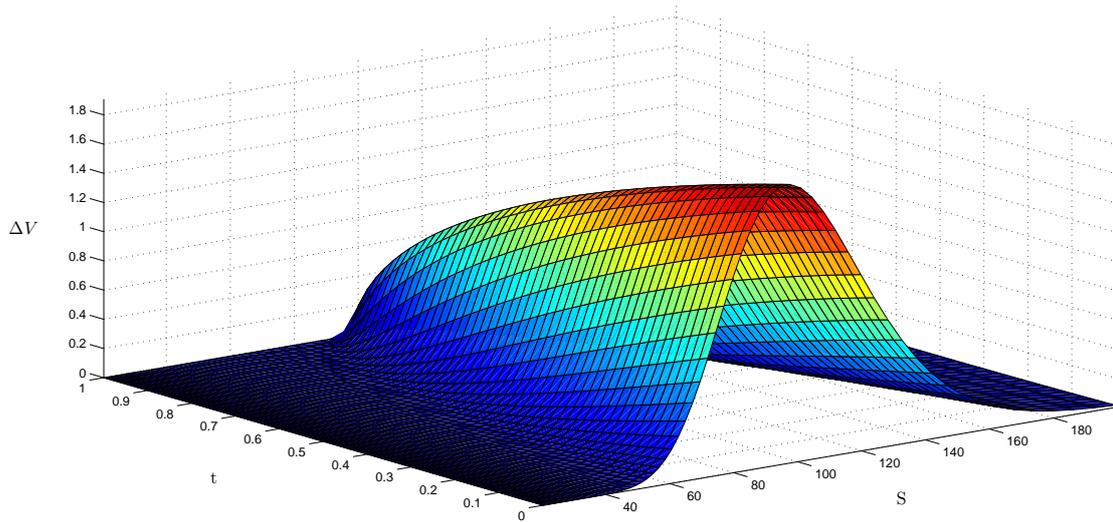


Abbildung 5.4: Lelands Modell: Abweichung vom Black-Scholes-Modell

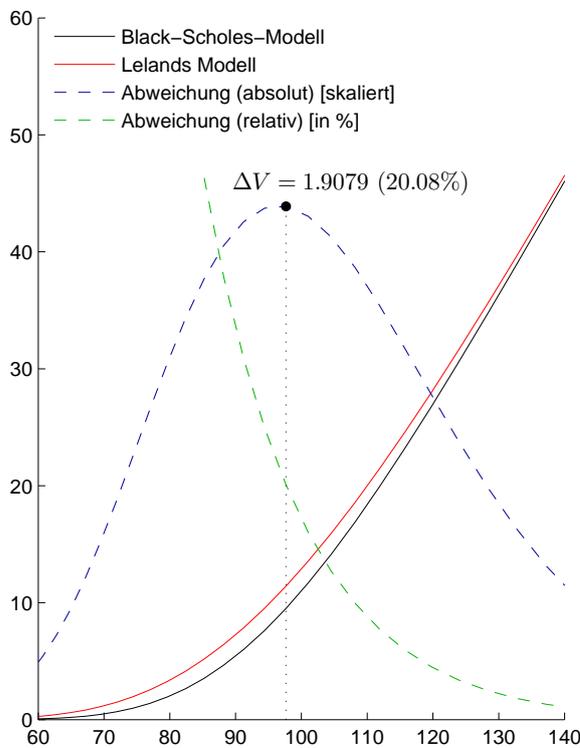


Abb. 5.5: Abweichung zur Zeit $t = 0$

Als nächsten betrachten wir, wie sich der Optionswert in Lelands Modell im Verhältnis zum Black-Scholes-Wert der Option ändert, falls uns Transaktionskosten in Höhe von 1% entstehen. Beim direkten Vergleich der beiden Werte fällt auf, dass die größte Abweichung im Bereich des Ausübungspreises auftritt. Dort unterscheiden sich die Optionswerte absolut um ca. 1.90€ bzw. relativ um ca. 20%. Außerdem können wir erkennen, dass der Wert der Option in Lelands Modell zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit und für jeden beliebigen Kurswert größer ist, als der zugehörige Black-Scholes-Wert ist. Diese Beobachtung war aber zu erwarten und ist auch nachvollziehbar, denn in Lelands Modell gehen wir von Transaktionskosten aus, die für den Handel mit dem Basiswert bzw. der festverzinslichen Anleihe anfallen. Als Konsequenz entstehen uns Kosten für das Hedgen des Portfolios, die sich im Optionswert auswirken und diesen schließlich erhöhen. Das erklärt auch, warum die absolute Abweichung für höhere Kurswerte größer ist, denn dort fallen die proportionalen Transaktionskosten stärker ins Gewicht und verursachen mehr Hedgekosten.

In den beiden nachfolgenden Simulationen untersuchen wir, wie sich die Variation eines einzelnen Parameters im Modell von Leland auf die Abweichung zum Black-Scholes-Wert auswirkt. Dazu betrachten wir jeweils die Differenz für die diskreten Kurswerte 60€ (*out-the-money Option*), 80€, 100€ (*at-the-money Option*), 120€ und 140€ (*in-the-money Option*). Die erste Zahl in der Tabelle gibt dabei an, um wie viel Euro sich die beiden Werte absolut unterscheiden, während die zweite Zahl in Klammern angibt, um wie viel Prozent der Optionswert aus dem Modell relativ zum Black-Scholes-Wert abweicht.

Simulation 5.2 (Unterschiedliche Transaktionskosten)

c	Le	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
0.10%	0.0575	0.021 (20.68%)	0.143 (7.39%)	0.198 (1.69%)	0.115 (0.43%)	0.036 (0.07%)
0.25%	0.1438	0.048 (48.25%)	0.348 (17.95%)	0.499 (4.28%)	0.295 (1.10%)	0.092 (0.19%)
0.50%	0.2877	0.102 (101.83%)	0.682 (35.22%)	0.980 (8.39%)	0.598 (2.23%)	0.197 (0.41%)
1.00%	0.5754	0.234 (234.28%)	1.325 (68.46%)	1.871 (16.03%)	1.208 (4.51%)	0.449 (0.94%)

Tabelle 5.1: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlichen Transaktionskosten

In dieser Tabelle können wir erkennen, dass sich die absolute Abweichung für alle simulierten Kurswerte proportional zu den Transaktionskosten verhält. Erhöhen wir die Transaktionskosten beispielsweise von 0.25% auf 0.50%, dann verdoppelt sich (unabhängig von der Moneyness der Option) auch in etwa die absolute Abweichung zum Black-Scholes-Wert. Außerdem können wir feststellen, dass sich Lelands Modell mit ca. 234% relativer Abweichung vor allem für out-the-money Optionen sehr stark vom Black-Scholes-Modell unterscheidet. Für at-the-money Optionen ist die relative Abweichung mit ca. 16% durchaus auch noch erkennbar, während sie für in-the-money Optionen aber bereits unter 1% liegt. Die Abweichung ist also tendenziell um so größer, je weiter die Option aus dem Geld liegt und um so kleiner, je weiter die Option im Geld liegt. Ist die Option allerdings zu weit im Geld, so kann es passieren, dass die aus dem Modell resultierende Abweichung von anderen Fehlern überlagert wird.

In einer weiteren Simulation untersuchen wir noch, welche Auswirkungen verschiedene Hedgingintervalle auf den Optionswert im Modell von Leland haben. Dazu betrachten wir monatliche ($1/12$), 2-wöchentliche ($1/26$), wöchentliche ($1/52$) bzw. 5-tägige ($1/73$) Hedgingzeitpunkte und vergleichen die resultierenden Optionswerte wieder mit dem Black-Scholes-Wert.

Simulation 5.3 (Unterschiedliche Hedgingintervalle)

Δt	Le	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
$1/12$	0.2764	0.097 (97.22%)	0.655 (33.81%)	0.945 (8.09%)	0.574 (2.15%)	0.188 (0.39%)
$1/26$	0.4068	0.153 (152.83%)	0.951 (49.18%)	1.360 (11.65%)	0.851 (3.18%)	0.295 (0.62%)
$1/52$	0.5754	0.234 (234.28%)	1.325 (68.46%)	1.871 (16.03%)	1.208 (4.51%)	0.449 (0.94%)
$1/73$	0.6817	0.291 (290.61%)	1.555 (80.32%)	2.181 (18.69%)	1.433 (5.35%)	0.554 (1.15%)

Tabelle 5.2: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlichen Hedgingintervallen

Die Resultate dieser Simulation stimmen ebenfalls mit unseren bisherigen Beobachtungen überein, denn je kleiner die Hedgingintervalle sind, desto öfter hedgen wir unser Portfolio. Dadurch entsteht letztendlich der gleiche Effekt, wie durch höhere Transaktionskosten - die Hedgekosten steigen und erhöhen so den Optionspreis. Bemerkenswert ist aber, dass die at-the-money Option bereits bei einer wöchentlichen Umschichtung des Portfolios ca. 16% teurer ist, obwohl diese Wahl der Hedgingzeitpunkte in der Praxis noch als relativ konservativ gilt.

5.3 Barles' & Soners Modell

Modell $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left[1 + \Psi(e^{r(T-t)} a_{BS}^2 S^2 V_{SS}) \right] S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$

Modellparameter $a_{BS} = 0.02$ (Europäische Call-Option)

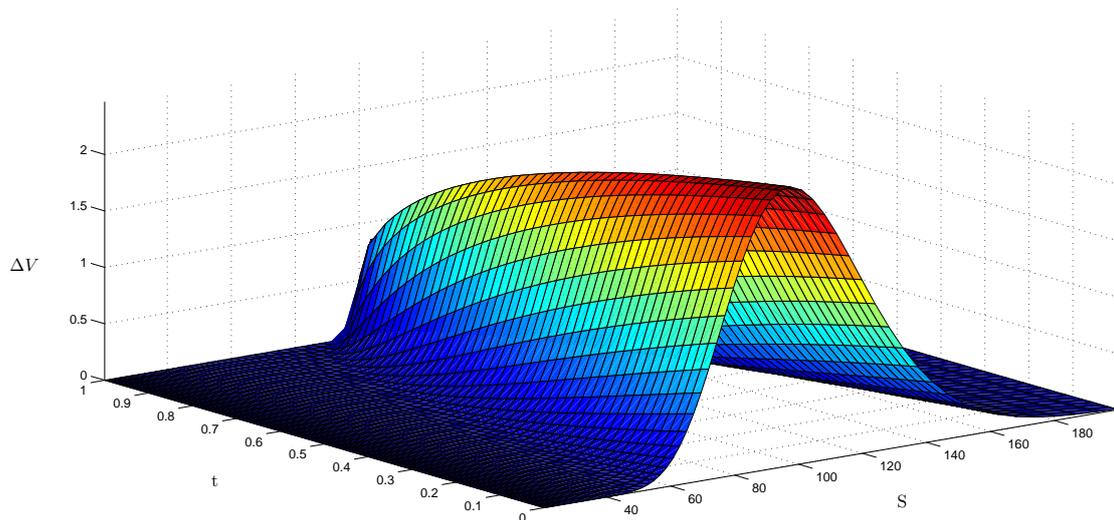


Abbildung 5.6: Barles' & Soners Modell: Abweichung vom Black-Scholes-Modell

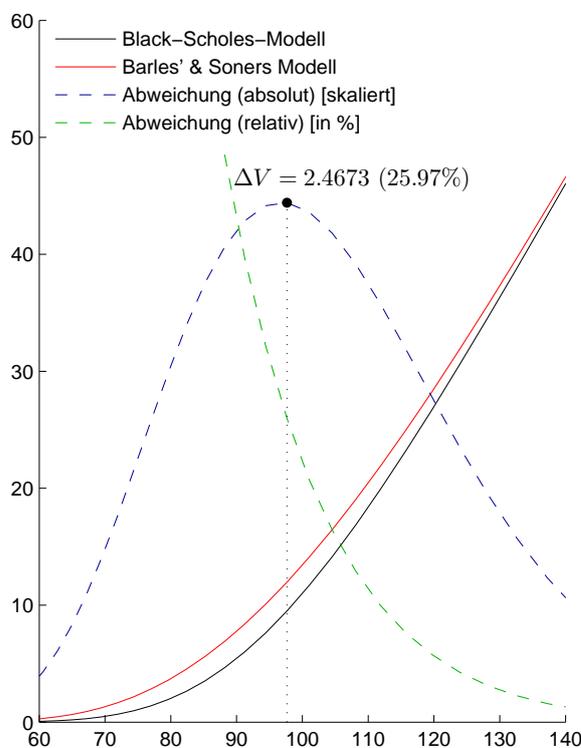


Abb. 5.7: Unterschied zur Zeit $t = 0$

Betrachten wir nun das Abweichungsprofil, das sich mit dem Modell von Barles und Soner ergibt, so können wir zunächst feststellen, dass es qualitativ dem Profil aus Lelands Modell sehr ähnlich ist. Auf den ersten Blick gibt es nur zwei wesentliche Unterschiede. Auf der einen Seite unterscheiden sich die beiden Profile hinsichtlich der Höhe der absoluten Abweichung vom Black-Scholes-Wert, was in diesem Beispiel aber durch die spezielle Wahl $a_{BS} = 0.02$ des Parameters zu erklären ist, wie auch die nebenstehenden Simulationen zeigen. Auf der anderen Seite ist erkennbar, dass die resultierende Abweichung besonders zum Laufzeitende der Option und im Bereich des Ausübungspreises signifikant größer als im Modell von Leland ist, was auch in Abbildung 5.8 deutlich wird. Dieser Effekt lässt sich jedoch nicht durch die spezielle Wahl des Parameters a_{BS} erklären und stellt damit einen der strukturellen Unterschiede der beiden Modelle dar.

Simulation 5.4 (Unterschiedliche Wahl von a_{BS})

a_{BS}	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
0.10%	0.023 (23.45%)	0.201 (10.39%)	0.300 (2.57%)	0.163 (0.61%)	0.043 (0.09%)
0.25%	0.040 (39.85%)	0.373 (19.27%)	0.567 (4.85%)	0.313 (1.17%)	0.082 (0.17%)
0.50%	0.067 (66.82%)	0.604 (31.22%)	0.916 (7.84%)	0.521 (1.95%)	0.143 (0.30%)
1.00%	0.121 (121.12%)	0.993 (51.31%)	1.484 (12.72%)	0.884 (3.30%)	0.263 (0.55%)
2.00%	0.242 (241.79%)	1.661 (85.81%)	2.423 (20.76%)	1.540 (5.76%)	0.525 (1.10%)

Tabelle 5.3: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlicher Wahl von a_{BS}

Auch in dieser Simulation sind die Resultate denen aus Lelands Modell qualitativ ähnlich, lediglich der proportionale Zusammenhang zwischen dem Modellparameter a_{BS} und der absoluten Abweichung zum Black-Scholes-Wert ist nicht so stark ausgeprägt. Ein quantitativer Vergleich der beiden Modelle gestaltet sich allerdings relativ schwierig, da die beiden Parameter Le und a_{BS} in den jeweiligen Modellen kaum vergleichbar gewählt werden können. Bestimmt man die Parameter aber zumindest so, dass die absolute Abweichung für at-the-money Optionen in beiden Modellen in etwa gleich ist, dann zeigt die nebenstehende Grafik, wie stark sich die Werte in den beiden Modellen unterscheiden. Ein negativer Wert bedeutet, dass der Optionswert im Modell von Barles und Soner größer als in Lelands Modell ist.

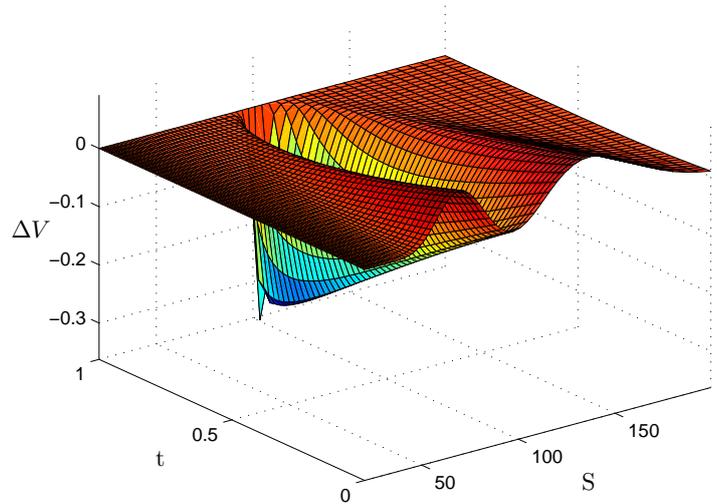


Abb. 5.8: Vergleich mit Lelands Modell

Die nächste Simulation zeigt, dass die Länge der Hedgingintervalle im Modell von Barles und Soner keinen Einfluss auf den Optionswert hat. Diese Erkenntnis ist jedoch etwas überraschend, da wir auch in diesem Modell von proportionalen Transaktionskosten ausgehen. Zwar ist Δt hier kein direkter Modellparameter wie in Lelands Modell, doch mit kürzeren Hedgingintervallen steigen theoretisch auch in Barles' und Soners Modell die Hedgekosten und folglich sollte sich auch der Optionswert erhöhen.

Simulation 5.5 (Unterschiedliche Hedgingintervalle)

Δt	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
$1/52$	0.242 (241.79%)	1.661 (85.81%)	2.423 (20.76%)	1.540 (5.76%)	0.525 (1.10%)
$1/104$	0.240 (240.44%)	1.655 (85.51%)	2.415 (20.96%)	1.534 (5.73%)	0.522 (1.09%)
$1/156$	0.240 (240.21%)	1.654 (85.46%)	2.413 (20.67%)	1.533 (5.73%)	0.522 (1.09%)
$1/365$	0.240 (240.06%)	1.654 (85.42%)	2.412 (20.67%)	1.532 (5.73%)	0.521 (1.09%)
$1/730$	0.240 (240.03%)	1.654 (85.42%)	2.412 (20.67%)	1.532 (5.73%)	0.521 (1.09%)
$1/1095$	0.240 (240.03%)	1.654 (85.42%)	2.412 (20.67%)	1.532 (5.73%)	0.521 (1.09%)

Tabelle 5.4: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlichen Hedgingintervallen

5.4 Feedback-Effekte und Marktiliquidität

$$\text{Modell} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{1}{(1 - \lambda V_{SS})^2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$\text{Modellparameter} \quad \lambda = 0.5 \quad (\text{Europäische Call-Option})$$

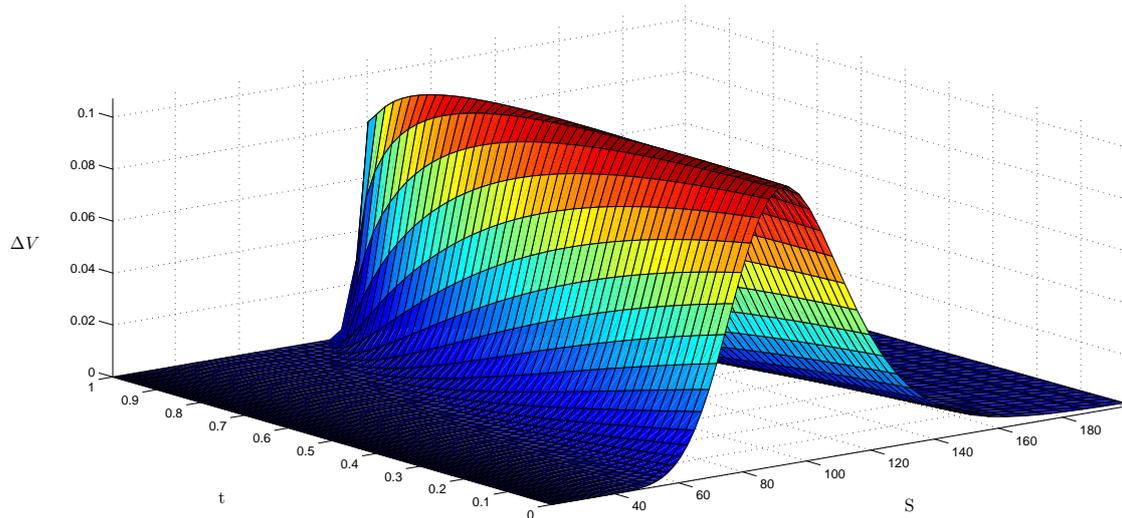


Abbildung 5.9: Feedback-Effekte und Marktiliquidität: Abweichung vom Black-Scholes-Modell

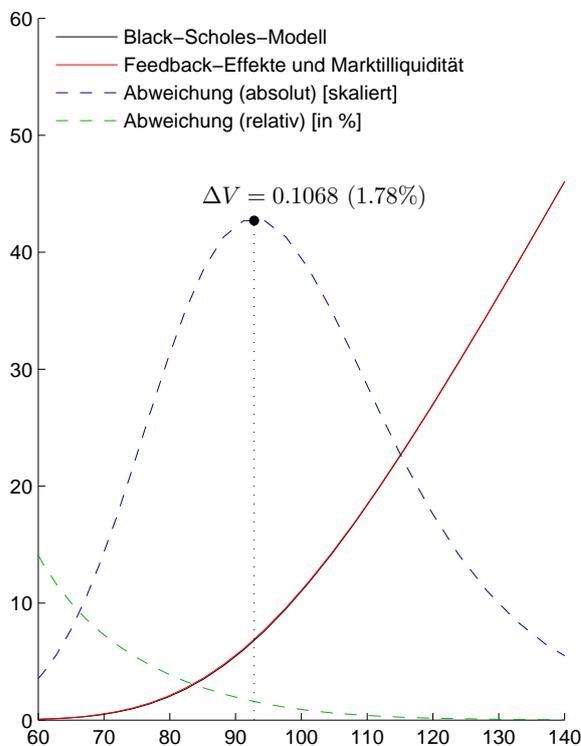


Abb. 5.10: Unterschied zur Zeit $t = 0$

Auch das Auszahlungsprofil des Modells für Feedback-Effekte und Marktiliquidität ähnelt qualitativ den Profilen der bisherigen Modelle, wobei die absolute Abweichung aber in etwa um Faktor 20 kleiner als im Modell von Leland bzw. um Faktor 25 kleiner als im Modell von Barles und Soner ist. Die maximale relative Abweichung ist mit ca. 15% ebenfalls um einige Größenordnungen kleiner, als in den beiden anderen Modellen. Dass die Variation des Marktiliquiditätsparameters λ in diesem Modell keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse hat, zeigen zusätzlich die nebenstehenden Simulationen. Ungewöhnlich ist auch, dass die Abweichung zum Black-Scholes-Wert bis zum Laufzeitende der Option fast konstant bleibt. Eigentlich sollte man erwarten können, dass der aus den verschiedenen Modellen resultierende Unterschied (wie bei den anderen Modellen auch) mit der Zeit kontinuierlich abnimmt. Schließlich ist der Optionswert zum Laufzeitende deterministisch bestimmt und hängt nicht mehr von einem speziellen Modell ab.

Simulation 5.6 (Unterschiedliche Marktliquidität)

λ	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
0%	0.004 (4.31%)	0.005 (0.27%)	0.010 (0.08%)	0.004 (0.01%)	0.002 (0.00%)
10%	0.005 (5.39%)	0.020 (1.01%)	0.012 (0.10%)	0.006 (0.02%)	0.004 (0.01%)
25%	0.007 (7.05%)	0.041 (2.11%)	0.043 (0.37%)	0.020 (0.08%)	0.007 (0.01%)
50%	0.010 (9.88%)	0.077 (3.97%)	0.097 (0.83%)	0.045 (0.17%)	0.012 (0.03%)
75%	0.013 (12.83%)	0.113 (5.84%)	0.150 (1.28%)	0.069 (0.26%)	0.017 (0.04%)
90%	0.015 (14.66%)	0.135 (6.97%)	0.182 (1.56%)	0.084 (0.31%)	0.020 (0.04%)
100%	0.016 (15.91%)	0.150 (7.73%)	0.203 (1.74%)	0.094 (0.35%)	0.023 (0.05%)

Tabelle 5.5: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlicher Marktliquidität

In dieser Simulation können wir erkennen, dass die größte absolute Abweichung erneut im Bereich des Ausübungspreises auftritt. Da wir für den Spezialfall $\lambda = 0$ gerade das lineare Black-Scholes-Modell erhalten, können wir in der zugehörigen Zeile den Fehler ablesen, der sich durch die approximativen Randwerte und die numerische Lösung der partiellen Differentialgleichung ergibt. Zudem können wir feststellen, dass der Einfluss des Marktliquiditätsparameters λ im Vergleich zu den Parametern in den anderen Modellen relativ gering ist.

Eine weitere interessante Beobachtung können wir für den anderen Extremfall, den Fall der völligen Marktliquidität $\lambda = 1$ machen. In diesem Szenario lässt sich der Basiswert auf dem Finanzmarkt weder kaufen noch verkaufen. Das impliziert aber gleichzeitig auch, dass es auf einem solchen Finanzmarkt nicht mehr möglich ist, eine Option mittels Delta-Hedging abzusichern. In Anbetracht der Tatsache, dass das Delta-Hedging aber eines der zentralen Argumente in der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung ist, verwundert es doch etwas, dass die Option in diesem Szenario nur unwesentlich teurer wird und die Abweichung zum Black-Scholes-Wert so gering ausfällt.

Die nächste Simulation zeigt wieder den Einfluss der Hedgingintervalle auf den Optionswert. Wir können im Modell für Feedback-Effekte und Marktliquidität genau den gleichen Effekt beobachten, der auch schon beim Modell von Barles und Soners aufgetreten ist. In beiden Modellen hat die Länge der Hedgingintervalle keinen Einfluss auf den Optionswert, wobei wir dieses Resultat im Modell für Feedback-Effekte und Marktliquidität erwarten konnten. Schließlich sind wir in diesem Modell wieder davon ausgegangen, dass uns beim Handel mit dem Basiswert keine Transaktionskosten entstehen.

Simulation 5.7 (Unterschiedliche Hedgingintervalle)

Δt	$S = 60$	$S = 80$	$S = 100$	$S = 120$	$S = 140$
$1/52$	0.010 (9.88%)	0.077 (3.97%)	0.097 (0.83%)	0.045 (0.17%)	0.012 (0.03%)
$1/104$	0.010 (9.83%)	0.076 (3.95%)	0.096 (0.82%)	0.044 (0.16%)	0.012 (0.03%)
$1/156$	0.010 (9.82%)	0.076 (3.95%)	0.096 (0.82%)	0.044 (0.16%)	0.012 (0.03%)
$1/365$	0.010 (9.81%)	0.076 (3.94%)	0.096 (0.82%)	0.044 (0.16%)	0.012 (0.02%)
$1/730$	0.010 (9.81%)	0.076 (3.94%)	0.096 (0.82%)	0.044 (0.16%)	0.012 (0.02%)
$1/1095$	0.010 (9.81%)	0.076 (3.94%)	0.096 (0.82%)	0.044 (0.16%)	0.012 (0.02%)

Tabelle 5.6: Abweichung zur Zeit $t = 0$ bei unterschiedlichen Hedgingintervallen

Kapitel 6

Ausblick auf mögliche Erweiterungen

6.1 Amerikanische Optionen

Bei einer amerikanischen Option können wir - im Gegensatz zu einer europäischen Option - das Ausübungsrecht während der gesamten Laufzeit wahrnehmen. Damit ist auch klar, dass eine amerikanische Option zu jedem Zeitpunkt der Laufzeit mindestens so viel wert sein muss, wie ihr europäisches Pendant. Zwar lässt sich für eine amerikanische Call-Option beweisen, dass eine vorzeitige Ausübung der Option niemals wirtschaftlich sinnvoll ist, falls während der Laufzeit keine Dividendenzahlungen erfolgen. Für eine amerikanische Put-Option hingegen lässt sich keine derartige Aussage treffen. Folglich müssen wir annehmen, dass wir eine solche Option im Allgemeinen nicht mit unseren bisherigen Methoden bewerten können.

Die meisten in der Praxis eingesetzten Verfahren zur Bewertung von amerikanischen Optionen beruhen auf einer pfadbasierten Monte-Carlo-Simulation. In der Literatur gibt es aber durchaus auch alternative Ansätze, wie beispielsweise die Formulierung als freies Randwertproblem mit Hilfe der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung. Ein weiterer eleganter und intuitiver Ansatz, den wir im Folgenden etwas genauer betrachten wollen, findet sich in [17, Kap. 7.2]. In unserem Fall ist der Ansatz sogar besonders vorteilhaft, da er lediglich eine Erweiterung der Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln darstellt. Wir ergänzen dazu die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung durch einen Strafterm $\hat{p} \max\{\psi - V, 0\}$ und erhalten auf diese Weise

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(S, t, V_{SS}) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \hat{p} \max\{\psi - V, 0\} = 0 \quad (6.1)$$

wobei mit $\psi = (S(t) - K)^+$ bzw. $\psi = (K - S(t))^+$ die Auszahlung der Option bezeichnet wird. Der Parameter $\hat{p} \in \mathbb{R}^+$ wird üblicherweise sehr groß gewählt, um den Strafterm in der Gleichung entsprechend stark zu gewichten.

Ist der Optionswert V größer als die zu realisierende Auszahlung ψ , so ist eine vorzeitige Ausübung der Option nicht vorteilhaft und wegen $V \geq \psi$ fällt der Strafterm einfach weg. In diesem Fall erhalten wir wieder die nichtlineare Black-Scholes-Gleichung. Kann durch eine vorzeitige Ausübung der Option aber eine höhere Auszahlung ψ als der aktuelle Optionswert V erzielt werden, so wird der Strafterm wegen $\psi \geq V$ aktiv. Wir können also hoffen, dass die Approximation bei der numerischen Lösung der Gleichung (6.1) durch den Strafterm in Richtung des wahren Optionswerts „gedrückt“ wird.

Dass diese Hoffnung allerdings nicht völlig unbegründet ist, zeigt die asymptotische Analyse für $\hat{p} \rightarrow \infty$. Teilen wir die Gleichung (6.1) durch den Parameter \hat{p} , so erhalten wir

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(S, t, V_{SS})S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{rV}{\hat{p}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\hat{p}}}_{\rightarrow 0} + \max\{\psi - V, 0\} = 0$$

und können feststellen, dass der Optionswert V für große Werte von \hat{p} zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ während der Laufzeit in der Nähe von ψ liegen muss.

Da die Gleichung (6.1) durch die variable Volatilitätsfunktion $\hat{\sigma}^2(S, t, V_{SS})$ bereits eine Nichtlinearität enthält, wird die Lösbarkeit durch den zusätzlichen nichtlinearen Strafterm $\hat{p} \max\{\psi - V, 0\}$ nicht beeinflusst. Wir können zur Lösung der Gleichung also wieder die Finite-Differenzen-Methode verwenden und so schließlich auch amerikanische Optionen bewerten.

6.2 Dividendenzahlungen

Für eine andere potenzielle Erweiterung der bisherigen Theorie betrachten wir jetzt einen Basiswert, für den Dividendenzahlungen während der Optionslaufzeit erfolgen. Wird die Dividende zu diskreten Zeitpunkten gezahlt, so berechnen wir zunächst die jährliche Rendite, die sich aus den einzelnen Zahlungen ergibt und erhalten auf diese Weise die kontinuierliche Dividendenrendite δ des Basiswerts.

Da wir uns beim Black-Scholes-Modell in einer risikoneutralen Welt befinden, muss jedes Investment eine Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes r erzielen. Bisher sind wir immer davon ausgegangen, dass ein dividendenloser Basiswert eine erwartete Kursrendite von $\mu = r$ hat. Betrachten wir nun einen Basiswert mit Dividendenrendite δ , so muss dieser Basiswert in einer risikoneutralen Welt eine erwartete Kursrendite von $\mu - \delta$ besitzen. Wir erhalten also mit

$$dS(t) = (\mu - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad S(0) = S_0 \quad (1.2 \text{ b})$$

eine veränderte stochastische Differentialgleichung, die den Kursverlauf unseres Basiswerts in einer risikoneutralen Welt beschreibt. Folglich liefert der Basiswert eine Dividendenzahlung $\delta S dt$ für einen sehr kleinen Zeitraum der Länge dt .

Ein weiterer wichtiger Punkt, der sich nun in der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung ändert, ist die Wertänderung des Portfolios. Betrachten wir einen kurzen Zeitraum, so erhalten wir für den Besitz von α Anteilen des Basiswerts eine Dividendenzahlung in Höhe von $\alpha \delta S dt$. Da wir diese Zahlung unter Berücksichtigung des Delta-Hedgings (1.6) auch in Form von $\delta S \frac{\partial V}{\partial S} dt$ darstellen können, ergibt sich mit der identischen Herleitung eine angepasste Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \quad (1.9 \text{ b})$$

Wenden wir die bereits bekannten Transformationen (4.1) und (4.2) auf diese veränderte Gleichung an, so erhalten wir mit

$$-u_\tau + \tilde{\sigma}^2(x, \tau, u_x, u_{xx})(u_x + u_{xx}) + \frac{2(r - \delta)}{\sigma^2} u_x - \frac{2\delta}{\sigma^2} u = 0 \quad (4.3 \text{ b})$$

eine neue Version der transformierten Black-Scholes-Gleichung, die wir ebenfalls mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode lösen können. Dazu müssen wir aber zunächst alle weitere Formelzeilen aktualisieren, die sich durch die Berücksichtigung einer Dividendenrendite ebenfalls minimal verändern.

So ändert sich beispielsweise der Operator

$$\mathcal{L}_{i,v} := \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_v, \bar{s}_{i,v})\bar{s}_{i,v} + \frac{r-\delta}{\sigma^2\Delta x}(w_{i+1}^v - w_{i-1}^v) - \frac{2\delta}{\sigma^2}w_i^v \quad (4.10 \text{ b})$$

und wir erhalten ein neues nichtlineares Gleichungssystem, wobei die i -te Zeile jetzt gegeben ist durch

$$\begin{aligned} F_i(w^{(v+1)}, w^{(v)}) &= -w_i^{v+1} + w_i^v \\ &+ \theta\Delta\tau \left[\tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1})\bar{s}_{i,v+1} + \frac{r-\delta}{\sigma^2\Delta x}(w_{i+1}^{v+1} - w_{i-1}^{v+1}) - \frac{2\delta}{\Delta x^2}w_i^{v+1} \right] \\ &+ (1-\theta)\Delta\tau \left[\tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_v, \bar{s}_{i,v})\bar{s}_{i,v} + \frac{r-\delta}{\sigma^2\Delta x}(w_{i+1}^v - w_{i-1}^v) - \frac{2\delta}{\Delta x^2}w_i^v \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.12 \text{ b})$$

Da sich das nichtlineare Gleichungssystem geändert hat, müssen wir auch die partiellen Ableitungen anpassen und erhalten folglich auch eine neue Jacobi-Matrix J_F für das Newton-Verfahren, wobei die einzelnen Einträge der Matrix bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial w_{i-1}^{v+1}} &= \alpha \quad \theta\Delta\tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1})\bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] - \theta\Delta\tau \frac{r-\delta}{\sigma^2\Delta x} \\ \frac{\partial F_i}{\partial w_i^{v+1}} &= -1 - \frac{2}{\Delta x^2}\theta\Delta\tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1})\bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] - \theta\Delta\tau \frac{2\delta}{\sigma^2} \\ \frac{\partial F_i}{\partial w_{i+1}^{v+1}} &= \beta \quad \theta\Delta\tau \left[\frac{\partial}{\partial w_i^{(v+1)}} \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1})\bar{s}_{i,v+1} + \tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_{v+1}, \bar{s}_{i,v+1}) \right] + \theta\Delta\tau \frac{r-\delta}{\sigma^2\Delta x} \end{aligned}$$

Die folgende Grafik veranschaulicht den Einfluss einer Dividendenrendite von 2% auf den Wert einer europäischen Call-Option mit den gleichen Kennzahlen wie im vorherigen Kapitel. Dargestellt ist die Differenz zwischen einer Option auf einen Basiswert ohne Dividendenrendite und einer Option auf einen Basiswert mit Dividendenrendite. Wir können erkennen, dass die Option auf den Basiswert mit Dividendenrendite für hohe Kurse des Basiswerts deutlich günstiger ist, als die Option auf den Basiswert ohne Dividendenrendite. Dieser Effekt lässt sich dadurch erklären, dass der Emittent einer europäischen Call-Option durch das Delta-Hedging immer $\alpha = \frac{\partial V}{\partial S} > 0$ Anteile des Basiswerts besitzt und für diese Anteile während der Optionslaufzeit natürlich auch Dividendenzahlungen erhält. Dadurch sinken aber die Hedgekosten des Emittenten und folglich verringert sich der Optionswert.

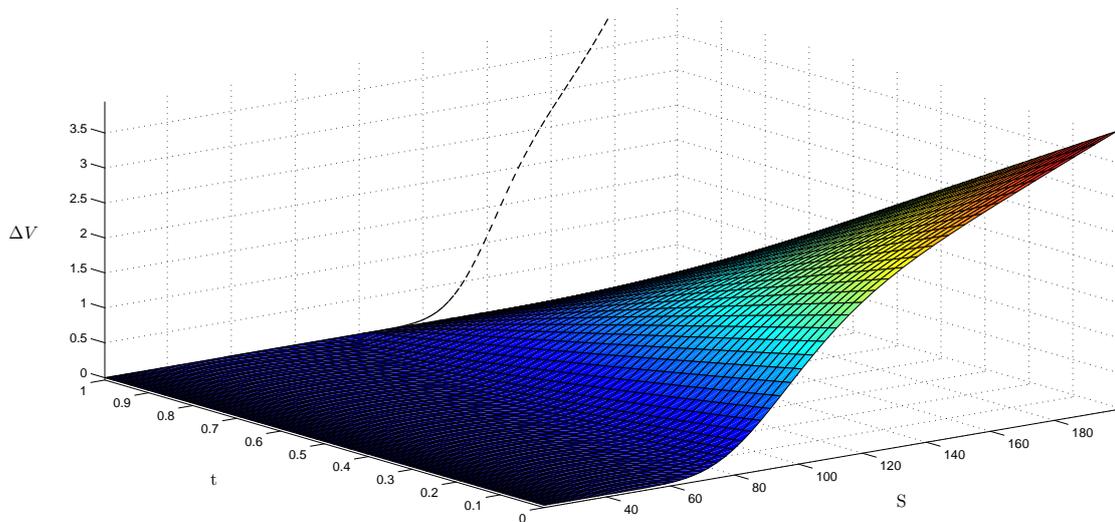


Abbildung 6.1: Einfluss einer Dividendenrendite $\delta = 2\%$

Kapitel 7

Fazit

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wollen wir die Eigenschaften der betrachteten Modelle noch einmal kurz zusammenfassen und bewerten. Eine solche Bewertung ist natürlich immer auch eine subjektive Angelegenheit, wir wollen in diesem Kapitel aber trotzdem versuchen, so objektiv wie möglich zu bleiben.

7.1 Bestimmbarkeit der Modellparameter

Ein wichtiges Kriterium für den praktischen Nutzen eines jeden Modells ist zunächst die Bestimmbarkeit der zugehörigen Modellparameter. So sind beispielsweise die Transaktionskosten c , unabhängig vom betrachteten Modell, sehr gut quantifizierbar, da sie durch externe Faktoren festgelegt und deshalb nicht von uns beeinflussbar sind. Auch die Länge der Hedgingintervalle Δt lässt sich in allen Modellen genau angeben, da wir die Zeitpunkte für das Hedging unseres Portfolios selbst bestimmen können.

Da sich das Modell von Leland bereits durch die Angabe der Transaktionskosten und der Hedgingintervalle vollständig beschreiben lässt, können wir den Modellparameter Le ohne Probleme dem aktuellen Marktumfeld bzw. unseren eigenen Hedgingpräferenzen entsprechend bestimmen.

Im Gegensatz dazu wird im Modell von Barles und Soner die Wahl des Modellparameters a_{BS} nicht nur von den Transaktionskosten, sondern auch von einem Risikoaversionsparameter γ beeinflusst. Es ist allerdings überhaupt nicht klar, wie ein risikoaverser Anleger diesen Risikoaversionsparameter am besten wählen sollte - ist $\gamma = 1$ eine gute Wahl oder sollte der Anleger doch besser $\gamma = 1000$ wählen? Und genau hier liegt die größte Schwäche des Modells von Barles und Soner, denn eine passende Wahl des Modellparameters a_{BS} ist ohne weiteres nicht möglich und damit liefert das Modell zunächst auch keine wirklich brauchbaren Ergebnisse.

Ähnlich verhält es sich mit dem Modell für Feedback-Effekte und Marktliquidität. Befinden wir uns auf einem Finanzmarkt, auf dem wir beliebig viele Anteile des Basiswerts handeln können, haben wir keine Liquiditätsbeschränkung und wählen folglich $\lambda = 0$ als Marktliquiditätsparameter. Im anderen Extremfall befinden wir uns auf einem vollständig illiquiden Finanzmarkt und können überhaupt keine Anteile des Basiswerts handeln, weswegen wir hier $\lambda = 1$ als Marktliquiditätsparameter wählen. In allen anderen Szenarien, die zwischen diesen beiden Extremen liegen, ist jedoch nicht klar, wie sich die auf dem Finanzmarkt vorhandene Liquidität vernünftig quantifizieren lässt. Damit benötigen wir auch im Modell für Feedback-Effekte und Marktliquidität weitere Hilfsmittel für die korrekte Bestimmung des Marktliquiditätsparameters λ , ohne die wir in diesem Modell keine praktisch relevanten Aussagen treffen können.

Das Modell von Leland ist also das einzige Modell, bei dem wir mit Sicherheit die Modellparameter richtig wählen können. Bei den beiden anderen Modellen können wir uns zwar an Lelands Modell orientieren oder die Modellparameter implizit bestimmen, indem wir sie passend zu den Optionspreisen wählen, die wir auf einem realen Finanzmarkt beobachten können. Ob diese Wahl dann allerdings auch die gewünschten Modellannahmen in geeigneter Weise widerspiegelt, ist natürlich eine ganz andere Frage.

Eine Sonderrolle nimmt das Modell für den Volatilitätsbereich ein. In diesem Modell versuchen wir nicht, den expliziten Wert der Option zu bestimmen, sondern berechnen einfach nur eine untere bzw. eine obere Schranke für den Optionswert. Dazu müssen wir zwar ebenfalls die Volatilität des Basiswerts spezifizieren, allerdings liegt die Stärke des Modells hier eher in der Szenarioanalyse. Die Wahl des Volatilitätsbereichs stellt deswegen auch kein Problem dar, weil es eigentlich keine „richtige“ oder „falsche“ Wahl gibt. Wollen wir beispielsweise den Optionswert im aktuellen Marktumfeld abschätzen, so können wir den Volatilitätsbereich einfach aus den historischen Daten bestimmen. Wollen wir hingegen untersuchen, wie sich der Optionspreis in verschiedenen Marktszenarien verhält, dann wählen wir den Volatilitätsbereich gerade so, dass er dem erwarteten Schwankungsbereich der Volatilität des Basiswerts entspricht.

7.2 Simulation der Eigenschaften eines realen Finanzmarkts

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Bewertung eines Modells zur Berechnung des Optionswerts ist die Frage, wie gut das Modell überhaupt die Eigenschaften eines realen Finanzmarkts simulieren kann. Ein Modell für Transaktionskosten sollte aus wirtschaftlicher Sicht zum Beispiel auf eine Veränderung der Hedgingzeitpunkte reagieren. Schließlich hängen die Hedgekosten indirekt auch immer von der Länge der Hedgingintervalle ab. Das Modell von Leland berücksichtigt diesen Sachverhalt und unterscheidet sich damit vom Modell von Barles und Soner, in dem der Optionswert unabhängig von der Länge der Hedgingintervalle berechnet wird - und das, obwohl es sich ausdrücklich um ein Modell für Transaktionskosten handelt.

Auch das Modell für Feedback-Effekte und Marktilliquidität hinterlässt im Plausibilitätscheck keinen besonders guten Eindruck. Auf einem vollständig illiquiden Finanzmarkt ist das Delta-Hedging zur Absicherung der Option nicht mehr möglich und der Emittent der Option muss folglich das komplette Risiko tragen. Da der Optionswert aber immer auch eine Art von Risikoprämie für den Emittenten der Option darstellt, sollte der Optionswert auf einem solchen Finanzmarkt aus wirtschaftlicher Sicht signifikant ansteigen. Im Modell für Feedback-Effekte und Marktilliquidität ist dies offensichtlich jedoch nicht der Fall.

7.3 In der Praxis

Alle in dieser Arbeit untersuchten Modelle haben ihre Vor- und Nachteile und so hängt es letztendlich vom konkreten Anwendungsfall ab, ob ein Modell in der Praxis eingesetzt werden sollte oder nicht. Denn natürlich geht mit der Verwendung eines komplexeren Modells geht natürlich auch immer ein erhöhter Aufwand einher. Schließlich muss das Modell erst implementiert und die Modellparameter müssen bestimmt werden. Falls die Parameter aber nicht exakt bestimmt werden können, ist es sowieso fraglich, ob die strukturellen Unterschiede des Modells überhaupt ausreichend zur Geltung kommen. Immerhin haben wir durch die numerische Lösung der nichtlinearen Black-Scholes-Gleichung und die approximative Bestimmung der Randwerte bereits zwei potenzielle Fehlerquellen in unserem Verfahren.

Anhang A

Inhalt der DVD

Die beigelegte DVD enthält neben der Bachelorarbeit als PDF-Datei auch einen Ordner „Programm“, in dem sich der Quellcode aller verwendeten MATLAB und C++-Dateien befindet.

Datei	Beschreibung	Kapitel
black_scholes_europ.m	Funktion zur Berechnung des Black-Scholes-Werts für europäische Optionen, basierend auf der linearen Black-Scholes-Gleichung	1.3.1
boundary_conditions.cpp	Speichert die Randbedingungen $u(x_{min}, \tau)$, $u(x_{max}, \tau)$ und $u(x, 0)$ für verschiedene Optionstypen	4.2
equation_system.cpp	Berechnet die Zeilen $F_i(w^{(v+1)}, w^{(v)})$ des nichtlinearen Gleichungssystems	4.4
extern_variables.h	Enthält alle globalen Variablen, die während des Programmablaufs benötigt werden	
finite_differences.cpp	Implementierung der Finite-Differenzen-Methode	4
jacobi_matrix.cpp	Generiert die Jacobi-Matrix für das Newton-Verfahren	4.6.2
main.m	Hauptprogramm zur Eingabe der Options- bzw. Verfahrensparameter, Modellauswahl und Visualisierung der Ergebnisse (inkl. Beispiele)	
main_programm.cpp	Regelt die Übergabe der Variablen von bzw. zu MATLAB und ruft die Finite-Differenzen-Methode auf	
main_programm.mexw64	Kompilierte Version des Hauptprogramms für Windows 7 (64 bit)	
my_math.cpp	Verschiedene mathematische Hilfsfunktionen	
newtons_method.cpp	Implementierung des Newton-Verfahrens	4.6.2
set_region.m	Hilfsfunktion für die graphische Darstellung der Lösung (setzt Werte außerhalb des Plot-Bereichs auf NaN)	
thomas_algorithm.cpp	Implementierung des Thomas-Algorithmus	4.6.4
unique_sol_ODE.cpp	Berechnet aus der impliziten Darstellung die Lösung der Differentialgleichung (2.28)	2.2.3
volatility_functions.cpp	Speichert die Volatilitätsfunktionen der verschiedenen Modelle	2 / 3

Literaturverzeichnis

- [1] M. AVELLANEDA, A. LEVY, AND A. PARÁS, *Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities*, Applied Mathematical Finance, 2 (1995), pp. 73 – 88.
- [2] G. BARLES, C. DAHER, AND M. ROMANO, *Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 5 (1995), pp. 125 – 143.
- [3] G. BARLES AND H. M. SONER, *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation*, Finance and Stochastics, 2 (1998), pp. 369 – 397.
- [4] R. COMPANY, E. NAVARRE, J. R. PINTOS, AND E. PONSODA, *Numerical solution of linear and nonlinear Black-Scholes option pricing equations*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), pp. 813 – 821.
- [5] M. G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.-L. LIONS, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, American Mathematical Society, 27 (1992), pp. 1 – 67.
- [6] W. H. FLEMING AND H. M. SONER, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, 1993.
- [7] R. FREY AND A. STREMMER, *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging*, Mathematical Finance, 7 (1997), pp. 351 – 374.
- [8] L. GRÜNE, *Numerische Methoden der Finanzmathematik*, Vorlesungsskript, 3rd ed., 2013.
- [9] S. D. HODGES AND A. NEUBERGER, *Optimal replication of contingent claims under transactions costs*, The Review of Futures Markets, 8 (1994).
- [10] T. HOGGARD, P. WILMOTT, AND A. E. WHALLEY, *Hedging option portfolios in the presence of transaction costs*, Advances in Futures and Options Research, 7 (1994), pp. 21 – 35.
- [11] HULL, *Optionen, Futures und andere Derivate*, Oldenbourg, 4th ed., 2001.
- [12] P. E. KLOEDEN AND E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, no. 23 in Applications of Mathematics, Springer-Verlag, 3rd ed., 1999.
- [13] B. ØKSENDAL, *Stochastic Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, 6th ed., 2007.
- [14] H. E. LELAND, *Option pricing and replication with transactions costs*, The Journal of Finance, 40 (1985), pp. 1283 – 1301.
- [15] T. J. LYONS, *Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives*, Applied Mathematical Finance, 2 (1995), pp. 117 – 133.
- [16] P. J. SCHÖNBUCHER AND P. WILMOTT, *The feedback effect of hedging in illiquid markets*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 61 (2000), pp. 232 – 272.
- [17] R. U. SEYDEL, *Tools for Computational Finance*, Universitext, Springer-Verlag, 5th ed., 2012.
- [18] U. F. WIERSEMA, *Brownian Motion Calculus*, John Wiley & Sons Ltd, 1st ed., 2008.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Frankfurt, den 25. September 2013

Markus Schäfer