

UNIVERSITÄT  
BAYREUTH

# Affin-linear-quadratische Regelung und Anwendung

Bachelorarbeit

von

Sebastian Geßlein

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK  
MATHEMATISCHES INSTITUT

Datum: 30. Oktober 2014

Betreuung:  
Prof. Dr. L. Grüne

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kontrolltheorie</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Optimalen Kontrolle</b>	<b>13</b>
3.1	Notwendige Bedingung für Optimalität . . . . .	14
3.2	Hinreichende Bedingung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Der linear-quadratische Regler</b>	<b>19</b>
4.1	Endlicher Zeithorizont . . . . .	19
4.2	Unendlicher Zeithorizont . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Affin-linear-quadratische Regelung</b>	<b>25</b>
5.1	Endlicher Zeithorizont . . . . .	26
5.2	Unendlicher Zeithorizont . . . . .	27
5.3	Ein Alternativer Ansatz . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>33</b>
6.1	LQ-Regler am Pendel . . . . .	33
6.2	Affin-linear-quadratische Regelung an einfachem Beispiel . . . . .	35
6.2.1	Ein einfaches affines System . . . . .	35
6.2.2	Künstliche Gleichgewichte . . . . .	37
6.3	Verschiedene Gleichgewichte am Pendel . . . . .	38
6.4	Affin-linear-quadratische Regelung am linearen Pendel . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>43</b>
	<b>MATLAB-Quelltexte</b>	<b>44</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Teilgebiet der mathematischen Kontrolltheorie, der optimalen Steuerung linearer Systeme. Der hier vorgestellte lineare-quadratische-Regler (LQ-Regler) wird in zahlloser Literatur behandelt und findet häufig Anwendung in der Regelungstechnik. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt nun darauf, den klassischen LQ-Regler auf eine größere Klasse von Problemen zu verallgemeinern.

Dazu wollen wir zunächst eine kurze Einführung in die Kontrolltheorie geben, um so einen leichten Zugang zu den weiteren Kapiteln zu ermöglichen. Ein Kontrollsystem ist im Allgemeinen eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.1)$$

wobei  $\dot{x}(t)$  die Ableitung von  $x(t)$  nach  $t$  darstellt. Dabei interpretieren wir  $t \in \mathbb{R}$  als Zeit. Das Vektorfeld  $f$  ist eine Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und die Kontrollfunktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  interpretieren wir hier als eine Größe die wir wählen können, um somit die Dynamik in dem System zu ändern. Weiter nennen wir  $x(t)$  den Zustand des Kontrollsystems zum Zeitpunkt  $t$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{U}$  als den Raum der stückweise stetigen Funktionen, aus dem wir in dieser Arbeit unsere Kontrollfunktion wählen. Diese Eigenschaft erlaubt es einen Existenz und Eindeutigkeitsatz für die Lösungen von Kontrollsysteme zu formulieren, worauf wir hier allerdings nicht eingehen wollen.

Wie oben bereits erwähnt werden wir hier vor allem lineare System betrachten, daher die folgende Definition.

**Definition 1.1.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  heißt *lineares zeitinvariantes Kontrollsystem*. Dabei ist  $u \in \mathcal{U}$  eine Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Auch wenn dem in der weiteren Arbeit keine Beachtung mehr zukommt wollen wir zumindest einen Satz angeben, der eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1.2) macht. Der Beweis ist zu finden in [1].

**Satz 1.2** (Existenz und Eindeigkeitssatz). Betrachte ein System (1.2) mit  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann existiert für jede Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  mit  $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $u \in \mathcal{U}$  genau eine stetige Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche die Anfangsbedingung erfüllt und deren Ableitung für jedes  $t$ , in dem  $u$  stetig ist, existiert und (1.2) erfüllt.  $\square$

Die Lösungen  $x$  für eine Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  und eine Kontrollfunktion  $u$  notieren wir im Folgenden immer als  $x(t; t_0, x_0, u)$ , auch bei nichtlinearen Systemen.

Gleich zu Beginn wollen wir ein Beispiel betrachten, an dem wir die auftauchenden Begrifflichkeiten veranschaulichen können und welches in den späteren Kapiteln auch noch genauer untersucht wird bezüglich der hergeleiteten Ergebnisse. Es handelt sich dabei um das Pendel auf einem Wagen.

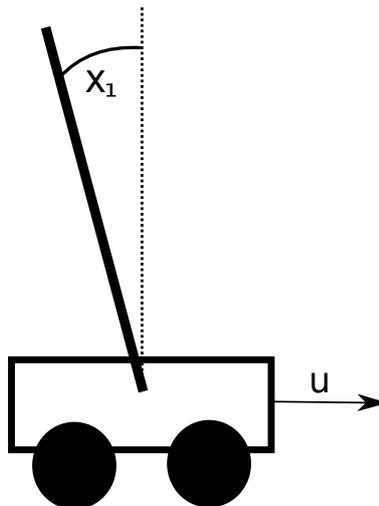


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung

Das zugehörige System sieht dabei wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + g \sin x_1(t) + u(t) \cos x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u(t)\end{aligned}$$

Dabei beschreiben  $x_1$  den Winkel,  $x_2$  die Winkelgeschwindigkeit,  $x_3$  die Position des Wagens und  $x_4$  die Geschwindigkeit des Wagens. Einfluss können wir nehmen auf  $u(t)$ , der Beschleunigung des Wagens. Außerdem ist  $k$  eine Konstante, die die Reibung des Pendels beschreibt, und  $g$  die Erdbeschleunigung. Der Nullpunkt entspricht in diesem Modell gerade dem aufgerichteten Pendel. Die Linearisierung im Nullpunkt ist dann gegeben durch

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung ist hier mit angegeben, da die Theorie die wir entwickeln werden erst einmal nur für lineare Kontrollsysteme gilt, jedoch können die Ergebnisse, die für die Linearisierung berechnet wurden, zumindest lokal auch auf das zugehörige nichtlineare Kontrollsystem angewandt werden.



# Kapitel 2

## Grundlagen der Kontrolltheorie

In diesem Kapitel wollen wir einige weitere Begrifflichkeiten aus der Kontrolltheorie einführen und einige Ergebnisse aufzeigen, die im Weiteren gebraucht werden. Auf Beweise wird hier größtenteils verzichtet, nachzulesen sind diese z.B. in [1] und [2], an denen sich auch die Notation weitestgehend orientiert.

Zunächst betrachten wir einige Eigenschaften gewöhnlicher Differentialgleichungen, die im Folgenden eine wesentliche Rolle spielen.

**Definition 2.1.** Ein Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^n$  heißt Gleichgewicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wenn für die zugehörige Lösung

$$x(t; x^*, t_0) = x^*$$

für alle  $t, t_0 \in \mathbb{R}$  gilt. □

**Bemerkung 2.2.** Bei einer zeitinvarianten gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  ist  $x^*$  genau dann ein Gleichgewicht, wenn gilt  $f(x^*) = 0$ . □

Gleichgewichte können gewisse Stabilitätseigenschaften haben, die durch die folgende Definition formal charakterisiert werden.

**Definition 2.3.** Sei  $x^*$  das Gleichgewicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

a) Das Gleichgewicht heißt *stabil*, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$\|x(t; x_0, t_0) - x^*\| \leq \varepsilon$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$  und alle  $t \geq t_0$  gilt.

b) Das Gleichgewicht heißt *lokal/global asymptotisch stabil*, falls es stabil ist und zudem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, t_0) = x^*$$

für alle  $x_0$  aus einer Umgebung  $U$  von  $x^*$  (im globalen Fall  $U = \mathbb{R}^n$ ) gilt.

c) Das Gleichgewicht heißt *lokal/global exponentiell stabil*, falls es Konstanten  $c, \sigma > 0$  gibt, so dass

$$\|x(t; x_0, t_0) - x^*\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - x^*\|$$

für alle  $x_0$  aus einer Umgebung  $U$  von  $x^*$  (im globalen Fall  $U = \mathbb{R}^n$ ) und für alle  $t \geq t_0$  gilt.

□

Diese Begriffe wollen wir uns am Pendel verdeutlichen, ohne sie genau nachzuprüfen. Das nach oben aufgerichtete Pendel ist zwar ein Gleichgewicht, jedoch weist es, wie man erwarten würde, keine Stabilitätseigenschaften auf. Wenn man auch nur ein kleines Bisschen neben dem Gleichgewicht startet, so wird das Pendel umfallen. Das nach unten hängende Pendel hingegen ist global asymptotisch stabil, zumindest wenn Reibung vorhanden ist. Man erwartet, dass das Pendel, egal wo man es loslässt, irgendwann nach unten hängt ohne sich noch zu bewegen. Abbildung (2.1) zeigt diesen Sachverhalt.

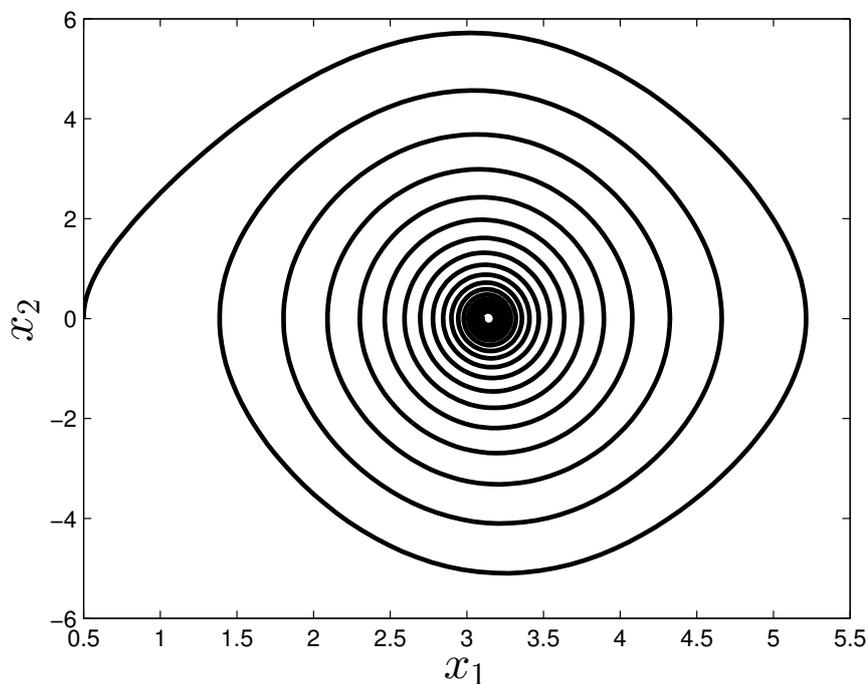


Abbildung 2.1: Lösung mit  $k = 0.2$  und Startwert  $x_0 = (0.5, 0)^T$

Wir wenden uns nun wieder den linearen Differentialgleichungen zu und geben einige Kriterien an mit denen sich die Stabilität von Gleichgewichten leicht überprüfen lässt.

**Satz 2.4** (Eigenwertkriterium). Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  genau dann global exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativen Realteil haben. In diesem Fall nennen wir die Matrix  $A$  exponentiell stabil.  $\square$

**Definition 2.5.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  stetig differenzierbar. Dann heißt  $V$  *quadratische Lyapunov<sup>1</sup>-Funktion* für  $A$ , wenn positive reelle Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$  existieren, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$$

und

$$DV(x)Ax \leq -c_3 \|x\|^2.$$

$\square$

**Satz 2.6.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Falls für  $A$  eine quadratische Lyapunov-Funktion existiert, so ist  $A$  exponentiell stabil mit  $\sigma = c_3/2c_2$  und  $c = \sqrt{c_2/c_1}$ .  $\square$

**Lemma 2.7.** Sei  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$-c \|x\|^2 \leq x^T P x \leq c \|x\|^2$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Lemma 2.8.** Sei  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann ist  $P$  positiv definit genau dann, wenn eine Konstante  $c > 0$  existiert, so dass

$$c \|x\|^2 \leq x^T P x$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>bennant nach Alexander Michailowitsch Lyapunow, russischer Mathematiker und Physiker, 1857-1918

Da, wie der Titel der Arbeit ja schon andeutet, hier affine Systeme betrachtet werden, ist der folgende Satz sehr hilfreich.

**Satz 2.9.** Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = Ax(t) + d$  mit  $d \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt: Falls  $A$  exponentiell stabil ist, so ist das Gleichgewicht  $G = -A^{-1}d$  exponentiell stabil für die Differentialgleichung. Beachte, dass  $A^{-1}$  existiert, wenn  $A$  exponentiell stabil ist.

**Beweis.** Für alle Anfangswerte  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  gilt für die Lösungen des inhomogenen Systems

$$\|x(t; x_1) - x(t; x_2)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_1 - x_2\|,$$

da  $z(t) = x(t; x_1) - x(t; x_2)$  Lösung der Gleichung  $\dot{z} = Az(t)$  mit Anfangswert  $z(0) = x_1 - x_2$  ist.  $G$  ist offenbar ein Gleichgewicht der inhomogenen Differentialgleichung, weshalb mit

$$\|x(t; x_1) - x(t; G)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_1 - G\|$$

die exponentielle Stabilität in  $G$  folgt. □

Wir sind an Funktionen  $u(t)$  interessiert, welche das Kontrollsystem so beeinflussen, dass Gleichgewichte, die evtl. ohne Kontrolle instabil wären, stabil werden. Ein möglicher Ansatz ist es die Kontrollfunktion als  $u(t) = F(x(t))$ , mit einer Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , welche man Feedback nennt, zu wählen. Die Kontrolle ist damit direkt abhängig vom aktuellen Zustand des Systems. Bei einem linearen System wählen wir auch  $F$  als lineare Funktion, also  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Das dadurch geregelte System wird somit zu

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

und die obigen Ergebnisse für Stabilität lassen sich auf dieses System anwenden. Dieses System ist genau dann exponentiell stabil im Nullpunkt, wenn  $A + BF$  nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat.

**Definition 2.10.** Das Paar  $(A, B)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  heißt *stabilisierbar*, wenn eine Matrix  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, sodass  $A + BF$  exponentiell stabil ist. □

**Satz 2.11.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Dann ist  $(A, B)$  stabilisierbar, wenn gilt

$$rk(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n.$$

Man nennt  $(A, B)$  in diesem Fall auch *vollständig kontrollierbar*, was eine stärkere Eigenschaft als die Stabilisierbarkeit ist. □

Wir wollen noch anmerken, dass die Linearisierung  $(A, B)$  des Pendels aus Kapitel 1 vollständig kontrollierbar und damit stabilisierbar ist. Matlab bietet eine einfache Möglichkeit, diese Eigenschaft nachzuprüfen. Für die Matrizen  $A$  und  $B$  liefert der Befehl  $ctrb(A, B)$  die Matrix in Satz (2.11) und mit  $rk()$  kann deren Rang berechnet werden.

Zuletzt wollen wir noch einen Satz angeben, der eine Aussage über den bereits erwähnten Zusammenhang der Stabilität in nichtlinearem System und zugehöriger Linearisierung macht.

**Satz 2.12.** Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

und die zugehörige Linearisierung

$$\dot{x}(t) = Df(0)x(t).$$

Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal exponentiell stabil für die nichtlineare Differentialgleichung genau dann, wenn es global exponentiell stabil für die Linearisierung ist.  $\square$



# Kapitel 3

## Grundlagen der Optimalen Kontrolle

Wir wollen nun der Frage nachgehen wie man sich eine Kontrollfunktion konstruieren kann, die in einem gewissen Sinne optimal ist. Bei Anwendungen möchte man beispielsweise keine allzu großen Werte irgendeines Zustandes oder der Kontrollfunktion, da diese möglicherweise in der Realität nur schwer zu handhaben sind. In diesem Kapitel werden nun einige Prinzipien der optimalen Kontrolle eingeführt, welche dann in den darauffolgenden Kapiteln auf lineare Probleme angewandt werden. Die Ergebnisse in diesem Kapitel orientieren sich an [1], [6] und [3], jedoch werden hier alle Aussagen bewiesen.

Da diese Prinzipien für allgemeine nichtlineare Kontrollsysteme nicht schwerer herzuleiten sind betrachten wir im Folgenden wieder Kontrollsysteme der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (3.1)$$

deren Lösungen zu gegebenen Anfangsdaten als  $x(t; t_0, x_0, u)$  bezeichnet werden. Um Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen garantieren zu können braucht man noch einige zusätzliche Eigenschaften auf die wir aber hier nicht eingehen wollen. Wir nehmen an, dass die Lösungen zu gegebenen Anfangsdaten existieren und eindeutig sind.

In der Einleitung war die Rede von einer Optimalität in einem gewissen Sinne. Die Art dieser Optimalität wollen wir nun formulieren.

Gegeben sei eine Kostenfunktion  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , ein Kontrollsystem der Form (3.1) und sei

$$J(x_0, t_0, t_1, u) := \int_{t_0}^{t_1} l(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt. \quad (3.2)$$

Das optimale Steuerungsproblem besteht nun darin, für einen gegebenen Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Kontrollfunktion  $u$  zu finden, die das Funktional (3.2) minimiert. Als optimale Wertefunktion wird hierbei die Funktion

$$V(x_0, t_0, t_1) := \inf_{u|_{[t_0, t_1]}} J(x_0, t_0, t_1, u)$$

bezeichnet.

Man will also eine Kontrollfunktionen finden, die bei gegebenem Anfangswert das Integral über die Kostenfunktion minimiert. Die Wertefunktion ordnet dann einem Startpunkt den Wert des Funktionals bei minimierender Kontrolle zu.

**Bemerkung 3.1.** Das Funktional (3.2) muss weder endlich sein, noch muss eine Kontrollfunktion existieren, die es minimiert.

### 3.1 Notwendige Bedingung für Optimalität

Als erstes wollen wir ein Prinzip einführen, welches allen weiteren Ergebnissen zu Grunde liegt. Es ermöglicht, die Wertefunktion zu charakterisieren.

**Satz 3.2** (Bellman'sches<sup>1</sup> Optimalitätsprinzip/Dynamische Programmierung). Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\Delta t \in (0, t_1 - t_0]$  beliebig. Dann gilt für die Wertefunktion

$$V(x_0, t_0, t_1) = \inf_{u|_{[t_0, t_0+\Delta t]}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt + V(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u), t_0 + \Delta t, t_1) \right\}.$$

**Beweis.** Wir definieren zunächst

$$W(x_0, t_0, t_1) := \inf_{u|_{[t_0, t_0+\Delta t]}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt + V(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u), t_0 + \Delta t, t_1) \right\}$$

und zeigen die Ungleichung  $V(x_0, t_0, t_1) \geq W(x_0, t_0, t_1)$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert eine Kontrollfunktion  $u_\varepsilon$  auf  $[t_0, t_1]$ , so dass die Ungleichung

$$V(x_0, t_0, t_1) + \varepsilon \geq J(x_0, t_0, t_1, u_\varepsilon)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} J(x_0, t_0, t_1, u_\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u_\varepsilon), u_\varepsilon(t)) dt + J(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u_\varepsilon), t_0 + \Delta t, t_1, u_\varepsilon) \\ &\geq \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u_\varepsilon), u_\varepsilon(t)) dt + V(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u_\varepsilon), t_0 + \Delta t, t_1) \\ &\geq W(x_0, t_0, t_1) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>bennant nach Richard Ernest Bellman, amerikanischer Mathematiker, 1920-1984

$\varepsilon > 0$  war beliebig gewählt, somit folgt die erste Ungleichung.

Nun zeigen wir  $V(x_0, t_0, t_1) \leq W(x_0, t_0, t_1)$ . Sei dazu wieder  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $u_\varepsilon$  eine Kontrollfunktion auf  $[t_0 + \Delta t, t_1]$ , so dass die Ungleichung

$$V(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u^*), t_0 + \Delta t, t_1) + \varepsilon \geq J(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u^*), t_0 + \Delta t, t_1, u_\varepsilon)$$

erfüllt ist, wobei  $u^*$  eine beliebige Kontrollfunktion auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  sei. Sei weiter

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & \text{falls } t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t \\ u_\varepsilon(t), & \text{falls } t_0 + \Delta t < t \leq t_1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, t_1) &\leq J(x_0, t_0, t_1, u) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u^*), u^*(t)) dt + \int_{t_0 + \Delta t}^{t_1} l(x(t; t_0, x_0, u_\varepsilon), u_\varepsilon(t)) dt \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} l(x(t; t_0, x_0, u^*), u^*(t)) dt + V(x(t_0 + \Delta t; t_0, x_0, u^*), t_0 + \Delta t, t_1) + \varepsilon \end{aligned}$$

Da auch hier  $\varepsilon > 0$  beliebig war folgt nun die Behauptung.  $\square$

Dieses Prinzip lässt sich nun benutzen, um eine partielle Differentialgleichung herzuleiten, die die Wertefunktion charakterisiert.

**Satz 3.3** (Hamilton-Jacobi-Bellman<sup>2</sup> Differentialgleichung). Betrachte das optimale Steuerungsproblem. Sei  $V$  stetig differenzierbar in den ersten beiden Argumenten, dann gilt

$$-\frac{dV}{dt}(x_0, t, t_1) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{l(x_0, u(t)) + DV(x_0, t, t_1)f(x_0, u(t))\} \quad (3.3)$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und alle  $t \in [t_0, t_1]$ , wobei  $DV$  die Ableitung nach  $x$  bzw. dem ersten Argument ist.

**Beweis.** Es gilt

$$V(x_0, t, t_1) = \inf_{u|_{[t, t_1]}} \int_t^{t_1} l(x(\tau; t, x_0, u), u(\tau)) d\tau.$$

Dann können wir das Optimalitätsprinzip anwenden und gelangen so zu der Gleichung

$$V(x_0, t, t_1) = \inf_{u|_{[t, t+\Delta t]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(\tau; t, x_0, u), u(\tau)) d\tau + V(x(t + \Delta t; t, x_0, u), t + \Delta t) \right\} \quad (3.4)$$

---

<sup>2</sup>bennant nach Sir William Rowan Hamilton, irischer Mathematiker und Physiker, 1805-1865, Carl Gustav Jacob Jacobi, deutscher Mathematiker, 1804-1851, sowie Richard Ernest Bellman, s.o.

Der rechte Term dieser Gleichung kann nun durch eine Taylorentwicklung approximiert werden (siehe z.B. [4] Kapitel 2.4).

$$V(x(t + \Delta t; t, x_0, u), t + \Delta t, t_1) = V(x(t; t, x_0, u), t, t_1) + \frac{dV}{dt}(x(t; t, x_0, u), t, t_1)\Delta t + DV(x(t; t, x_0, u), t, t_1)(x(t + \Delta t; t, x_0, u) - x(t; t, x_0, u)) + o(\Delta t)$$

Dies setzen wir nun in (3.4) ein, können dann  $V(x_0, t, t_1)$  wegstreichen und teilen dann durch  $\Delta t$ .

$$0 = \frac{1}{\Delta t} \inf_{u|_{[t, t+\Delta t]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(\tau; t, x_0, u), u(\tau)) d\tau + \frac{dV}{dt}(x(t; t, x_0, u), t, t_1)\Delta t + DV(x(t; t, x_0, u), t, t_1)(x(t + \Delta t; t, x_0, u) - x(t; t, x_0, u)) + o(\Delta t) \right\}$$

$\Delta t$  lassen wir nun gegen 0 gehen und betrachten dabei die einzelnen Terme.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} l(x(\tau; t, x_0, u), u(\tau)) d\tau = l(x(t; t, x_0, u), u(t))$$

Dabei wurde der Hauptsatz der Integralrechnung und die Definition des Differenzenquotienten verwendet.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} DV(x(t; t, x_0, u), t, t_1)(x(t + \Delta t; t, x_0, u) - x(t; t, x_0, u)) = DV(x_0, t, t_1)f(x(t), u(t))$$

Zusammen ergibt sich also die folgende Gleichung

$$-\frac{dV}{dt}(x_0, t, t_1) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{l(x_0, u(t)) + DV(x_0, t, t_1)f(x_0, u(t))\}.$$

□

## 3.2 Hinreichende Bedingung

Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ist demnach eine Bedingung, die von der Wertefunktion erfüllt werden muss. Im Folgenden wollen wir ein hinreichendes Kriterium angeben.

**Satz 3.4.** Sei  $W$  stetig differenzierbar in den ersten beiden Argumenten und erfülle die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$-\frac{d}{dt}W(x_0, t, t_1) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{l(x_0, u(t)) + DW(x_0, t, t_1)f(x_0, u(t))\} \quad (3.5)$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in [t_0, t_1]$  sowie die Randwertbedingung  $W(x, t_1, t_1) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sei weiter  $u^*$  eine Kontrollfunktion und  $x^*(t) := x^*(t; t_0, x_0, u^*)$  die zugehörige Lösung des Kontrollsystems. Wenn die Gleichung

$$l(x^*(t), u^*(t)) + DW(t, x^*(t))f(x^*(t), u^*(t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} l(x^*(t), u(t)) + DW(t, x^*(t))f(x^*(t), u(t)) \quad (3.6)$$

für alle  $t \in [t_0, t_1]$  erfüllt ist, so folgt die Optimalität von  $u^*$  und dass  $W$  die Wertefunktion für das Problem ist.

**Beweis.** Aus (3.6) folgt, dass  $u^*$  die rechte Seite von (3.5) minimiert, d.h. insbesondere ist das Infimum damit ein Minimum. Es gilt

$$-\frac{d}{dt}W(x^*(t), t, t_1) = l(x^*(t), u^*(t)) + DW(x^*(t), t, t_1)f(x^*(t), u^*(t)).$$

Wir bringen alles auf eine Seite und erhalten das totale zeitliche Differential, also

$$0 = l(x^*(t), u^*(t)) + \frac{d}{dt}W(x^*(t), t, t_1).$$

Nun Integrieren wir über  $[t_0, t_1]$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} l(x^*(t), u^*(t))dt + W(x^*(t_1), t_1, t_1) - W(x^*(t_0), t_0, t_1) \\ &\Leftrightarrow W(x_0, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} l(x^*(t), u^*(t))dt \end{aligned}$$

Führt man die selbe Rechnung mit einer beliebigen Kontrollfunktion  $u$  und zugehöriger Lösung  $x$  durch erhält man in obigen Gleichungen ein Ungleichheitszeichen und letzten Endes

$$W(x_0, t_0, t_1) \leq \int_{t_0}^{t_1} l(x(t), u(t))dt$$

Damit haben wir gezeigt, dass keine Kontrollfunktion einen niedrigeren Wert des Funktionals als  $u^*$  erzeugen kann, wesegen  $u^*$  optimal ist und  $W$  die Wertefunktion.  $\square$



# Kapitel 4

## Der linear-quadratische Regler

Das im vorherigen Kapitel vorgestellte Problem ist im Allgemeinen nicht lösbar, jedoch wollen wir nun eine Klasse von optimalen Steuerungsproblemen für lineare Systeme betrachten, bei der unter gewissen Voraussetzungen eine Lösung existiert. Das hier vorgestellte Problem ist sehr weit verbreitet und findet auch häufig praktische Anwendung. Dieses Kapitel orientiert sich dabei an [1], [6] und [3]. Wir schreiben kurz LQ-Regler.

Wir betrachten wieder Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Wir definieren zunächst die Kostenfunktion, die wir im Folgenden verwenden werden.

**Definition 4.1.** Eine quadratische Kostenfunktion  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  ist gegeben durch

$$g(x, u) := x^T Q x + u^T R u \quad (4.1)$$

mit  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $Q, R$  symmetrisch und positiv definit.  $\square$

Die Matrizen  $Q$  und  $R$  können wir dabei wählen, typischerweise verwendet man Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen. In der Kostenfunktion tauchen die einzelnen Zustände dann quadratisch mit dem entsprechenden Faktor aus der zugehörigen Matrix multipliziert auf. So lassen sich die Zustände unterschiedlich gewichten.

### 4.1 Endlicher Zeithorizont

Wir betrachten zunächst wie im vorherigen Kapitel das Problem auf einem endlichen Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ , d.h. wir betrachten das Funktional

$$\int_{t_0}^{t_1} g(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt. \quad (4.2)$$

Der nachfolgende Satz enthält bereits alles, was wir zum Lösen des Problems benötigen. Dabei werden wir die Mittel verwenden, die wir im Kapitel zuvor hergeleitet haben.

**Satz 4.2.** Sei  $W(x_0, t_0, t_1) := x_0^T P(t_0) x_0$ , wobei  $P$  eine Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) \quad (4.3)$$

auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  mit der Randwertbedingung  $P(t_1) = 0$  ist. Dann ist die Kontrollfunktion

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t; t_0; x_0, \tilde{u}) \quad (4.4)$$

optimal auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  und  $W$  ist die Wertefunktion des Problems.

**Beweis.** Zunächst weisen wir nach, dass die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung erfüllt ist. Diese ist in diesem Fall gerade gegeben durch

$$-x^T \dot{P}(t)x = \min_u \{x^T Qx + u^T R u + 2x^T P(t)(Ax + Bu)\}.$$

Wir führen zunächst die Minimierung der rechten Seite durch: Differenzieren nach  $u$  und Nullsetzen ergibt die Gleichung

$$0 = 2u^T R + 2x^T P(t)B$$

Umstellen nach  $u$  ergibt

$$u = -R^{-1}B^T P(t)x =: \tilde{u}.$$

Das so erhaltene Minimum ist ein globales für alle  $t \in [t_0, t_1]$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ , da  $R$  positiv definit ist. Nun können wir überprüfen, ob  $W$  die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung mit diesem  $u$  erfüllt.

$$\begin{aligned} -x^T \dot{P}(t)x &= x^T Qx + \tilde{u}^T R \tilde{u} + 2x^T P(t)(Ax + B\tilde{u}) \\ \Leftrightarrow -x^T \dot{P}(t)x &= x^T Qx + x^T P(t)BR^{-1}B^T P(t)x + 2x^T P(t)Ax - 2x^T P(t)BR^{-1}B^T P(t)x \\ \Leftrightarrow -x^T \dot{P}(t)x &= x^T (P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t))x \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in [t_0, t_1]$ . Da  $\tilde{u}$  gerade Minimum der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung ist, ist auch (3.6) erfüllt, woraus die Optimalität von  $u$  folgt und womit  $W$  die Wertefunktion für das Problem ist.  $\square$

Wir haben also gezeigt, dass wir für eine optimale Kontrollfunktion die Riccati-DGL auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  mit der Bedingung  $P(t_1) = 0$  lösen müssen. Im Folgenden zeigen wir, dass so eine Lösung für alle  $t \leq t_1$  existiert.

**Satz 4.3.** Die Lösung  $P(t)$  der Riccati-Differentialgleichung

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

mit Randwertbedingung  $P(t_1) = 0$  existiert auf dem Intervall  $(-\infty, t_1]$  und zudem ist  $P(t)$  symmetrisch und positiv definit.

**Beweis.** Wir können annehmen, dass die Lösung auf einem Intervall  $(t^*, t_1]$  existiert, wobei  $t^*$  maximal ist. Man sieht sofort, dass falls  $P(t)$  eine Lösung ist, auch  $P(t)^T$  eine Lösung sein muss. Da diese eindeutig ist folgt die Symmetrie. Sei weiterhin  $V(x, t, t_1) = x^T P(t)x$ , dann folgt mit der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung für alle  $t \in (t^*, t_1]$ , für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $u \in \mathcal{U}$  die Ungleichung

$$-\frac{d}{dt}V(x, t, t_1) \leq l(x, u) + DV(x, t, t_1)f(x, u).$$

Sei  $x(t; t_0, x_0, u)$  eine Lösung des Kontrollsystems mit beliebigem  $u \in \mathcal{U}$ , dann gilt für alle  $t, t_0 \in (t^*, t_1]$

$$l(x(t, t_0, x_0, u), u) \leq \frac{d}{dt}V(x(t, t_0, x_0, u), t, t_1) + DV(x(t, t_0, x_0, u), t, t_1)f(x(t, t_0, x_0, u), u)$$

Wir integrieren nun über  $[t_0, t_1]$  und erhalten

$$V(x_0, t_0, t_1) \leq \int_{t_0}^{t_1} l(x(t, t_0, x_0, u), u(t))dt \quad (4.5)$$

unter Ausnutzung der Randwertbedingung sowie des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung. Beachte, dass hier für die oben berechnete optimale Kontrollfunktion  $\tilde{u}$  hier gerade Gleichheit gilt. Außerdem ist die Lösung des Kontrollsystems stetig und  $l$  nichtnegativ, woraus die positive Definitheit von  $P(t_0)$  folgt. Wählt man nun  $u(t) = 0$  als Kontrollfunktion in der obigen Ungleichung folgt die gleichmäßige Beschränktheit von  $V(x_0, t_0, t_1)$  für alle  $t_0 \in (t^*, t_1]$ . Da  $P(t)$  symmetrisch ist, gilt

$$[P(t)]_{ij} = e_i^T P(t) e_j = \frac{1}{2}((e_i + e_j)P(t)(e_i + e_j) - e_i^T P(t) e_i - e_j^T P(t) e_j) \quad (4.6)$$

und damit sind auch alle Einträge auf  $(t^*, t_1]$  gleichmäßig beschränkt. Man kann nun nachweisen, dass dann für alle Randbedingungen der Form  $(t_0, P(t_0))$  für  $t_0 \in (t^*, t_1]$  die Lösung der Riccati-Differentialgleichung auf einem Intervall  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  existiert. Siehe dazu den Beweis von Satz 2.5.1 in [7]. Der Beweis dieser Tatsache ist sehr technisch und beruht auf einer geschickten Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf, siehe Satz 2.3.7 in [7]. Wählt man nun  $t_0$  hinreichend nahe an  $t^*$  führt dies zu einem Widerspruch zur Maximalität von  $t^*$ , woraus  $t^* = -\infty$  folgt.  $\square$

## 4.2 Unendlicher Zeithorizont

Der gerade betrachtete Regler hat den entscheidenden Nachteil, dass man eine Lösung der Riccati-DGL benötigt, um sich eine Kontrollfunktion zu konstruieren, die das Steuerungsproblem löst. Im Folgenden werden wir die obere Grenze des Funktionals gegen Unendlich gehen lassen, was uns zu einer Kontrollfunktion der Form  $u(t) = Fx(t)$  führen wird, wobei  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann können wir auch die eingangs vorgestellte Theorie zur Stabilität von Differentialgleichungen nutzen und Aussagen über das Verhalten der Lösungen des Kontrollsystems machen.

Wir betrachten hier das Funktional

$$\int_{t_0}^{\infty} g(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt, \quad (4.7)$$

wobei  $g$  wieder eine quadratische Kostenfunktion sein soll. Wir werden nun betrachten, wie sich die Lösung der Riccati-Differentialgleichung verhält, wenn wir  $t_1$  gegen  $\infty$  gehen lassen. Eine Aussage über die Existenz der Lösung haben wir mit Satz (4.3) bereits gemacht.

**Satz 4.4.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar. Sei weiter  $P(t)$  Lösung der Riccati-Differentialgleichung mit  $P(t_1) = 0$ . Dann konvergiert diese Lösung für  $t_1 \rightarrow \infty$  gegen eine eindeutige positiv definite symmetrische Matrix  $P$ , die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$0 = PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P \quad (4.8)$$

ist.

**Beweis.** Betrachte die Riccati Differentialgleichung

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

mit der Randwertbedingung  $P(t_1) = 0$ . Wir wissen bereits, dass die Gleichung auf  $(-\infty, t_1]$  lösbar ist und  $P(t)$  auf diesem Intervall eine symmetrische positiv definite Matrix ist. Da wir im Folgenden das Verhalten für  $t_1 \rightarrow \infty$  betrachten wollen machen wir den Randwert variabel, wir bezeichnen die Lösung der Gleichung mit dem Randwert  $t_1 = 0$  zur Zeit  $t$  nun als  $P(t, t_1)$ . Dann wissen wir, dass für  $t_2 \geq t_1$  gilt

$$x^T P(t_0, t_2)x \geq x^T P(t_0, t_1)x,$$

was aus der Eigenschaft dieser beiden Funktionen als Wertefunktionen resultiert. Wir bezeichnen nun  $V(x, t, t_1) := x^T P(t, t_1)x$ . Sei nun  $F$  ein stabilisierendes Feedback von  $(A, B)$  und sei  $u_F = Fx(t; t_0, x_0, Fx(t))$ . Nach Lemma (2.7) gibt es ein  $K \in \mathbb{R}$  mit

$$l(x, Fx) \leq K \|x\|^2.$$

Daraus und aus (4.5) folgt nun

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, t_1) &\leq \int_{t_0}^{t_1} l(x(\tau; t_0, x_0, u_F), u_F) d\tau \leq \int_{t_0}^{t_1} K(Ce^{-\sigma\tau}\|x_0\|)^2 d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} KC^2 e^{-2\sigma\tau} d\tau \|x_0\|^2 \leq D\|x_0\|^2, \end{aligned}$$

wobei  $D$  gerade das Integral auf der linken Seite ist. Damit gilt also  $x^T P(t, t_1)x \leq D\|x\|^2$  für alle  $t_1 > t_0$ . Für jedes feste  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $x^T P(t, t_1)x$  also beschränkt und monoton, woraus die Konvergenz für  $t_1 \rightarrow \infty$  folgt. Nun betrachten wir noch die Konvergenz der einzelnen Matrixeinträge. Sei dazu  $e_j$  der  $j$ -te Basisvektor. Sei weiter

$$l_{ij} := \lim_{t_1 \rightarrow \infty} (e_i + e_j)^T P(t, t_1) (e_i + e_j) \quad \text{und} \quad l_j = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} e_j^T P(t, t_1) e_j.$$

Damit folgt aus (4.6)

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} P(t, t_1)_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} - l_i - l_j)$$

und somit die Konvergenz  $P := \lim_{t_1 \rightarrow \infty} P(t, t_1)$ . Da diese Matrix konstant ist und die Ableitung nach der Zeit somit null ist löst sie die algebraische Riccati-Gleichung.  $\square$

Im folgenden Satz sehen wir wie die Kontrollfunktion, die das Steuerungsproblem löst, in diesem Fall aussieht.

**Satz 4.5.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar. Die optimale Kontrollfunktion auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$  ist gegeben durch

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^T P x(t; t_0, x_0, \tilde{u}),$$

wobei  $P$  die symmetrische positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung aus dem vorherigen Satz ist. Das durch  $\tilde{u}$  geregelte lineare zeitinvariante Kontrollsystem ist exponentiell stabil in  $x^* = 0$ . Insbesondere ist die Matrix  $(A - BR^{-1}B^T P)$  exponentiell stabil und damit invertierbar.

**Beweis.** Die Optimalität folgt aus der Konvergenz der Lösung der Riccati-Differentialgleichung. Die exponentielle Stabilität folgt aus der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung, denn die zeitliche Ableitung der Wertefunktion verschwindet und es gilt

$$DV(x)f(x, \tilde{u}) + l(x, \tilde{u}) = 0.$$

Die Kostenfunktion  $l(x, u)$  können wir auch als Bilinearform schreiben, deren Matrix positiv definit und symmetrisch ist wegen der Symmetrie und positiven Definitheit von  $R$  und  $Q$ . Dann gilt nach Lemma (2.8) die Ungleichung

$$DV(x)f(x, \tilde{u}) = -l(x, \tilde{u}) \leq -c\|(x^T, \tilde{u}^T)^T\|^2 \leq -c\|x\|^2,$$

womit  $V$  eine Lyapunov-Funktion für die geregelte lineare zeitinvariante Differentialgleichung ist und daraus nach Satz (2.6) die exponentielle Stabilität von  $x^* = 0$  folgt. Das mittlere  $\tilde{u}$  geregelte System hat die Form

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t),$$

womit aus Satz (2.4) folgt, dass  $(A - BR^{-1}B^T P)$  nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat, die dann insbesondere alle ungleich null sind. Die Matrix ist demnach invertierbar.  $\square$

Wenn der Zeithorizont also unendlich ist, vereinfachen sich einige Dinge. Um eine optimale Kontrollfunktion zu konstruieren benötigen wir nun nichtmehr die Lösung der Riccati-DGL auf einem ganzen Intervall, sondern es genügt die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung. Zudem erhalten wir eine Kontrollfunktion, welche das Kontrollsystem im Nullpunkt stabilisiert.

**Beispiel 4.6.** Zur Verdeutlichung der bisherigen Ergebnisse wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten. Sei dazu  $A = B = R = Q = 1$ , d.h. wir haben das System und die Kostenfunktion

$$f(x(t), u(t)) = x(t) + u(t), \quad l(x(t), u(t)) = x(t)^2 + u(t)^2.$$

Die algebraische Riccati-Gleichung ist in diesem Fall  $0 = 2P + 1 - P^2$  und die Lösungen sind offensichtlich  $(1 \pm \sqrt{2})$ , von denen allerdings nur  $1 + \sqrt{2}$  positiv definit ist, was wir auch erwarten, da  $(A, B)$  stabilisierbar ist und somit nur eine solche Lösung existieren kann. Die gesuchte Kontrolle ist damit  $\tilde{u}(t) = -(1 + \sqrt{2})x(t)$  und das System wird so zu

$$\dot{f}(x(t)) = -\sqrt{2}x(t)$$

und die Lösung für einen Startwert  $x_0 = 1$  ist gegeben durch

$$x(t) = e^{-\sqrt{2}t}.$$

Nun wollen wir noch die optimale Wertefunktion  $V(x_0) = x_0^2 P$  betrachten. Da wir hier eine einfache Lösung der Differentialgleichung kennen, können wir das Funktional auf  $[0, \infty)$  auswerten.

$$\int_0^{\infty} (4 + 2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}t} \Big|_0^{\infty} = 1 + \sqrt{2} = x_0^2 P$$

# Kapitel 5

## Affin-linear-quadratische Regelung

Im vorherigen Kapitel wurden nur lineare Systeme betrachtet, die immer ein Gleichgewicht im Nullpunkt haben. Hier wollen wir nun eine Klasse von Differentialgleichungen und Kostenfunktionen betrachten, die beispielsweise nach einer Koordinatentransformation auftreten können, was wir später noch näher untersuchen werden. Dabei gehen wir zunächst ähnlich vor wie beim normalen LQ-Regler, allerdings treten ein Paar zusätzliche Schwierigkeiten auf, die berücksichtigt werden müssen. Die Ergebnisse, die hier vorgestellt werden, sind im Vergleich zum Standard-LQ-Regler eher selten in Büchern behandelt. Die Vorgehensweise, die hier angewandt wird, ist in ähnlicher Form in [3] zu finden.

**Definition 5.1.** Eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d \quad (5.1)$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  nennen wir affin-lineares zeitkontinuierliches Kontrollsystem.  $\square$

**Definition 5.2.** Eine erweiterte quadratische Kostenfunktion  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$l(x, u) := x^T Q x + u^T R u + 2s^T x + 2v^T u \quad (5.2)$$

mit  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$  und  $Q, R$  symmetrisch und positiv definit.  $\square$

Es handelt sich hier also um eine direkte Verallgemeinerung des normalen LQ-Reglers. Durch Nullsetzen der zusätzliche Komponenten kommen wir immer in den Standardfall zurück.

## 5.1 Endlicher Zeithorizont

Wie auch im vorherigen Kapitel betrachten wir das Problem zunächst auf einem endlichen Intervall. Wir haben also wieder das Funktional

$$\int_{t_0}^{t_1} l(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt$$

mit einer erweiterten quadratischen Kostenfunktion. Der folgende Satz löst das Problem bereits.

**Satz 5.3.** Sei  $W(x, t_0, t_1) := x^T P(t_0)x + 2b(t_0)^T x + c(t_0)$ , wobei  $P, b$  und  $c$  Lösungen der drei Differentialgleichungen

$$-\dot{P} = PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P \quad (5.3)$$

$$-\dot{b} = Pd + A^T b + s - PBR^{-1}B^T b - PBR^{-1}v \quad (5.4)$$

$$-\dot{c} = 2b^T d - v^T R^{-1}v - b^T BR^{-1}B^T b - 2v^T R^{-1}B^T b \quad (5.5)$$

auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  sind mit den Randwertbedingungen  $P(t_1) = b(t_1) = c(t_1) = 0$ . Dann ist die Kontrollfunktion

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}(B^T P x(t; t_0, x_0, \tilde{u}) + B^T b + v). \quad (5.6)$$

optimal auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  und  $W$  ist die Wertefunktion des Problems.

**Beweis.** Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned} & -x^T \dot{P}(t)x - 2\dot{b}(t)^T x - \dot{c}(t) = \\ & = \min_u \{ (2x^T P(t) + 2b(t)^T)(Ax + Bu + d) + x^T Qx + u^T Ru + 2s^T x + 2v^T u \} \end{aligned}$$

Wie im vorherigen Kapitel minimieren wir die rechte Seite: Differenzieren nach  $u$  und Nullsetzen ergibt hier gerade

$$0 = 2u^T R + 2v^T + 2x^T P(t)B + 2b(t)^T B,$$

welche wir nach  $u$  umstellen können und so

$$u = -R^{-1}(B^T P(t)x + B^T b(t) + v) =: \tilde{u} \quad (5.7)$$

erhalten. Das so erhaltene Minimum ist wie zuvor ein globales für alle  $t \in [t_0, t_1]$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ , da  $R$  positiv definit ist. Wir überprüfen, ob  $W$  die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung mit

diesem  $\tilde{u}$  erfüllt ist. Die Rechnung wird hier etwas länglich, deswegen machen wir zunächst eine Nebenrechnung (Die Abhängigkeiten von  $t$  werden nicht notiert):

$$\begin{aligned}
\tilde{u}R\tilde{u} &= (v^T + b^T B + x^T P B)R^{-1}(B^T P x + B^T b + v) \\
&= v^T R^{-1}v + 2v^T R^{-1}B^T P x + 2v^T R^{-1}B^T b + b^T B R^{-1}B^T b + 2b^T B R^{-1}B^T P x \\
&\quad + x^T P B R^{-1}B^T P x \\
2x^T P B \tilde{u} &= -2x^T P B R^{-1}(B^T P x + B^T b + v) \\
2b^T B \tilde{u} &= -2b^T B R^{-1}(B^T P x + B^T b + v) \\
2v^T \tilde{u} &= -2v^T R^{-1}(B^T P x + B^T b + v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}R\tilde{u} + 2x^T P B \tilde{u} + 2b^T B \tilde{u} + 2v^T \tilde{u} \\
&= -v^T R^{-1}v - x^T P B R^{-1}B^T P x - 2x^T P B R^{-1}B^T b \\
&\quad - b^T B R^{-1}B^T b - 2v^T R^{-1}B^T P x - 2v^T R^{-1}B^T b
\end{aligned}$$

Setzen wir nun  $\tilde{u}$  in die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ein.

$$\begin{aligned}
-x^T \dot{P}x - 2\dot{b}^T x - \dot{c} &= (2x^T P + 2b^T)(Ax + B\tilde{u} + d) + x^T Qx + \tilde{u}^T R\tilde{u} + 2s^T x + 2v^T \tilde{u} \\
&= 2x^T P A x + 2x^T P B \tilde{u} + 2x^T P d + 2b^T A x + 2b^T B \tilde{u} + 2b^T d \\
&\quad + x^T Q x + \tilde{u}^T R \tilde{u} + 2s^T x + 2v^T \tilde{u} \\
&= x^T (P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P) x \\
&\quad + 2x^T (P d + A^T b + s - P B R^{-1} B^T b - P B R^{-1} v) \\
&\quad + 2b^T d - v^T R^{-1} v - b^T B R^{-1} B^T b - 2v^T R^{-1} B^T b
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist also gerade erfüllt, wenn  $P, b$  und  $c$  wie im Satz angegeben sind. Ebenso wie beim klassischen LQ-Regler sind auch hier die Voraussetzungen für die hinreichende Bedingung erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 5.4.** Beachte, dass hier ebenfalls, wie im normalen LQ-Regler, die Riccati-DGL gelöst werden muss.

## 5.2 Unendlicher Zeithorizont

Genau wie im Kapitel zuvor sind wir nun an einer Lösung auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$  interessiert. Wir betrachten also das Funktional

$$\int_{t_0}^{\infty} l(x(t; t_0, x_0, u), u(t)) dt, \tag{5.8}$$

mit erweiterter quadratischer Kostenfunktion.

Wir wissen bereits, dass die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung in diesem Fall (Stabilisierbarkeit von  $(A, B)$  vorausgesetzt) eine konstante Matrix ist. Wir werden sehen, dass die Lösung von (5.4) in diesem Fall auch konstant ist. Die Lösung von (5.5) dagegen ist hier im Allgemeinen unbeschränkt, was jedoch nur auf die Wertefunktion einen Einfluss hat und für die Berechnung der gesuchten Kontrollfunktion kein Problem darstellt.

**Lemma 5.5.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar und  $P(t)$  die Lösung der Riccati-Differentialgleichung mit Randwertbedingung  $P(t_1) = 0$ . Betrachte die Differentialgleichung

$$-\dot{b} = Pd + A^T b + s - PBR^{-1}B^T b - PBR^{-1}v$$

Mit der Randwertbedingung  $b(t_1) = 0$ . Für  $t_1 \rightarrow \infty$  nimmt die Lösung den konstanten Wert  $b = -(A^T - PBR^{-1}B^T)^{-1}(Pd + s - PBR^{-1}v)$  an, wobei  $P$  die positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung ist.

**Beweis.** Da  $P(t)$  auf dem Intervall  $(-\infty, t_1]$  existiert, gilt dies auch für die Lösung der obigen Gleichung, aufgrund der Tatsache, dass es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt.

Um die Behauptung zu zeigen, formulieren wir die obige Problemstellung um. Wir betrachten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{P} &= PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P \\ \dot{b} &= Pd + A^T b + s - PBR^{-1}B^T b - PBR^{-1}v\end{aligned}$$

auf dem Intervall  $[t_1, \infty)$  mit Anfangsbedingungen  $P(t_1) = b(t_1) = 0$ , was einer Zeitumkehr entspricht. Die Lösung der ersten Gleichung geht dann für  $t \rightarrow \infty$  gerade gegen die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung. Das bedeutet, dass die Matrix  $A^T - P(t)BR^{-1}B^T$  für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell stabil wird und somit auch  $b(t)$  konvergiert und zwar gegen  $-(A^T - PBR^{-1}B^T)^{-1}(Pd + s - PBR^{-1}v)$ , was aus Satz (2.9) folgt.  $\square$

**Bemerkung 5.6.** Damit haben wir mit

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}(B^T Px(t, t_0, x_0, \tilde{u}) + B^T b + v), \quad (5.9)$$

wobei  $P$  und  $b$  die konstanten Lösungen aus dem vorherigen Lemma sind, eine optimale Kontrollfunktion auf dem Intervall  $[t_0, \infty)$ .

Außerdem wollen wir noch kurz betrachten, wie die Lösung  $c(t)$  von (5.5) aussieht. Die Lösung für die Startbedingung  $c(t_1) = 0$  ist gegeben durch

$$c(t) = \int_t^{t_1} 2b(t)^T d - v^T R^{-1}v - b(t)^T BR^{-1}B^T b(t) - 2v^T R^{-1}B^T b(t) dt$$

und nicht notwendigerweise beschränkt für  $t_1 \rightarrow \infty$ .  $\square$

Wir haben also eine optimale Kontrollfunktion gefunden, doch stellt sich noch die Frage ob diese das Kontrollsystem stabilisiert und wenn ja wo. Eine Antwort darauf gibt der Folgende Satz.

**Satz 5.7.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar,  $P$  positiv definite symmetrische Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung und  $b = -(A^T - PBR^{-1}B^T)^{-1}(Pd + s - PBR^{-1}v)$ . Dann ist das durch

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}(B^T Px(t, t_0, x_0, \tilde{u}) + B^T b + v)$$

geregelte Kontrollsystem (5.1) exponentiell stabil im Gleichgewicht  $x^* = -(A - BR^{-1}B^T P)^{-1}(-BR^{-1}B^T b - BR^{-1}v + d)$ .

**Beweis.** Wenn wir  $\tilde{u}$  in das Kontrollsystem einsetzen erhalten wir

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t) - BR^{-1}B^T b - BR^{-1}v + d.$$

Die Matrix  $A - BR^{-1}B^T P$  ist exponentiell stabil nach Lemma (4.5). Die Behauptung folgt nun aus Lemma (2.9).  $\square$

### 5.3 Ein Alternativer Ansatz

Satz (5.7) zeigt die Konvergenz gegen ein Gleichgewicht bei Anwendung der hergeleiteten Kontrollfunktion. Hier wollen wir nun eine Möglichkeit vorstellen bereits vor der Berechnung der algebraischen Riccati-Gleichung und des Terms  $b$  eine Aussage darüber treffen zu können, gegen welche Werte die Lösung des Kontrollsystems und auch die Kontrollfunktion konvergieren. Wir werden zeigen, dass diese Werte gerade das Gleichgewicht des Kontrollsystems sind, welche die Kostenfunktion minimieren.

Dazu zitieren wir zunächst einen Satz aus [4], der eine Aussage über das Minimieren unter Nebenbedingungen macht.

**Satz 5.8.** Seien  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen beide stetig differenzierbar auf  $U$ . Sei weiter  $M := \{x \in U \mid \phi(x) = 0\}$  und sei  $rk(D\phi(x)) = n$  in jedem Punkt  $x \in M$ . Dann gilt:

Wenn  $x^* \in M$  ein Extrempunkt von  $f$  auf  $M$  ist, so existiert  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  (*Lagrange-Multiplikatoren*) mit

$$\lambda^T D\phi(x^*) = Df(x^*).$$

$\square$

Wir betrachten also das folgende Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \quad & x^T Q x + u^T R u + 2s^T x + 2v^T u \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Bu + d = 0 \end{aligned}$$

D.h. wir wollen die Wertefunktion über  $u$  und  $x$  minimieren, s.d. die Lösung ein Gleichgewicht unseres Systems ist. Dazu verwenden wir das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren.

Es ist dabei hilfreich, eine Lagrange-Funktion zu definieren, deren Extrema dann gerade die kritischen Punkte des Minimierungsproblems unter Nebenbedingungen sind.

$$H(x, u, \lambda) := \lambda^T (Ax + Bu + d) + x^T Q x + u^T R u + 2s^T x + 2v^T u$$

Nun betrachten wir die Gradienten bezüglich  $x$ ,  $u$  und  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, u, \lambda) &= \lambda^T A + 2x^T Q + 2s^T \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda) &= \lambda^T B + 2u^T R + 2v^T \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, u, \lambda) &= (Ax + Bu + d)^T \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sollen Null sein, damit lässt sich das Problem als lineares Gleichungssystem schreiben. Man beachte, dass  $Q$  und  $R$  symmetrisch sind.

$$\begin{pmatrix} 2Q & 0 & A^T \\ 0 & 2R & B^T \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ -2v \\ -d \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Dabei stehen die Nullen in der Matrix für Nullmatrizen oder Nullvektoren passender Dimension. Im Allgemeinen erhält man auf diese Weise jedoch noch keine Lösung für das gestellte Minimierungsproblem. Aufgrund der positiven Definitheit von  $Q$  und  $R$  ist die erweiterte Kostenfunktion konvex. Man kann zeigen, dass aufgrund der Konvexität die Lösung dieses linearen Gleichungssystems tatsächlich das Minimierungsproblem löst, siehe dazu [5] 5.5.3.

Hat man nun ein minimales Gleichgewicht  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  gefunden, so kann man eine Koordinatentransformation  $u \rightsquigarrow u - \tilde{u}$  und  $x \rightsquigarrow x - \tilde{x}$  auf die Kontrollfunktion  $u(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$  aus dem klassischen LQ-Problem anwenden und erhält eine Kontrollfunktion der Form.

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - \tilde{x}) + \tilde{u} \quad (5.11)$$

Zunächst wollen wir uns vergewissern, dass die Lösungen des mit dieser Funktion geregelte Systems auch wirklich in das Gleichgewicht  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  gehen. Eingesetzt in unser affin-lineares Kontrollsystem ergibt sich

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T Px(t) + BR^{-1}B^T P\tilde{x} + B\tilde{u} + d,$$

nach dem obigen linearen Gleichungssystem gilt  $B\tilde{u} = -A\tilde{x} - d$ , was uns zu

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t) - (A - BR^{-1}B^T P)\tilde{x}$$

führt. Nun können wir wiederum Satz (2.9) benutzen und sehen, dass die Lösung gegen  $\tilde{x}$  geht und die Kontrollfunktion damit gegen  $\tilde{u}$ .

Der folgende Satz zeigt nun den Zusammenhang zwischen den beiden Herangehensweisen an das optimale Steuerungsproblem mit affin-linearem System und erweiterter quadratischer Kostenfunktion.

**Satz 5.9.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar. Sei weiter  $P$  die positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung und  $b$  aus Lemma (5.5). Dann hat das Gleichungssystem (5.10) die Lösung

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= 2(P\tilde{x} + b) \\ \tilde{u} &= -R^{-1}(B^T P\tilde{x} + B^T b + v) \\ \tilde{x} &= (A^T P + Q)^{-1}(-s - A^T b).\end{aligned}$$

Weiterhin stimmen dann die Kontrollfunktionen (5.6) und (5.11) überein.

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, dass die drei Gleichungen aus dem Gleichungssystem in diesem Fall alle erfüllt sind. Beachte, dass unter diesen Voraussetzungen die Matrix  $(A^T P + Q)^{-1}$  existiert, da gilt  $A^T P + Q = -PA + PBR^{-1}B^T P$ . Die Matrix  $-P(A - BR^{-1}B^T P)$  ist invertierbar, da  $P$  invertierbar ist und  $A - BR^{-1}B^T P$  ebenfalls.

1. Gleichung:  $2Qx + A^T \lambda = -2s$

Wir setzen  $\tilde{\lambda}$  ein:

$$\begin{aligned}2Q\tilde{x} + 2A^T(P\tilde{x} + b) &= -2s \\ \Leftrightarrow (Q + A^T P)\tilde{x} + A^T b + s &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist gerade erfüllt für  $\tilde{x}$ .

2. Gleichung:  $2Ru + B^T \lambda = -2v$

Wir setzen  $\tilde{\lambda}$  ein:

$$2R\tilde{u} + 2B^T(P\tilde{x} + b) = -2v$$

Auch hier sieht man direkt, dass die Gleichung für  $\tilde{u}$  gilt.

Bei der dritten Gleichung ist es nicht ganz trivial. Wir setzen  $\tilde{u}$  ein:

$$d = -A\tilde{x} + BR^{-1}B^T P\tilde{x} + BR^{-1}B^T b + BR^{-1}v$$

Nun multiplizieren wir diese Gleichung von links mit  $P$ , welches invertierbar ist, da positiv definit und symmetrisch.

$$Pd = -PA\tilde{x} + PBR^{-1}B^T P\tilde{x} + PBR^{-1}B^T b + PBR^{-1}v$$

Jetzt nutzen wir die Struktur von  $P$  und  $b$  aus und können diese Gleichung umschreiben zu

$$Pd = (A^T P + Q)\tilde{x} + Pd + A^T b + s.$$

Diese Gleichung ist für  $\tilde{x}$  gerade erfüllt.

Wir wollen noch zeigen, dass gilt

$$-R^{-1}B^T P(x(t) - \tilde{x}) + \tilde{u} = -R^{-1}(B^T Px(t) + B^T b + v).$$

Zu zeigen ist folgende Gleichung:

$$R^{-1}B^T P\tilde{x} + \tilde{u} = -R^{-1}B^T b - R^{-1}v \quad (5.12)$$

Es gilt  $-v = B^T P\tilde{x} + B^T b + R\tilde{u}$  und dies eingesetzt in (5.12) zeigt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.10.** Aus dieser Erkenntnis kann man herauslesen, dass das  $c(t)$  aus der Wertefunktion im Allgemeinen nicht unbeschränkt ist für  $t_1 \rightarrow \infty$ . Wenn kein Gleichgewicht von (5.1) existiert, so dass die erweiterte Kostenfunktion gleich null in diesem Gleichgewicht ist, geht die Kostenfunktion gegen irgendeinen konstanten Wert, womit das Funktional unbeschränkt ist.  $\square$

**Bemerkung 5.11.** Wir wollen uns jetzt noch klarmachen, welche Vorteile wir dadurch eventuell in Anwendungen gegenüber der Berechnung der Kontrollfunktion (5.6) erhalten. Wenn wir beispielsweise verschiedene Gleichgewichte  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  eines Kontrollsystems kennen, so können wir, nachdem wir einmal die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung berechnet haben, Kontrollfunktionen (5.11) einfach hinschreiben mit dem Wissen, dass sie bezüglich Kostenfunktionen  $(x - \tilde{x})^T Q(x - \tilde{x}) + (u - \tilde{u})^T R(u - \tilde{u})$  optimal ins Gleichgewicht regeln.  $\square$

# Kapitel 6

## Anwendungen

In diesem Kapitel werden wir nun einige mögliche Anwendungen für die hergeleiteten Regler betrachten. Diese sind für lineare Systeme hergeleitet worden, jedoch garantieren die Regler unter der Voraussetzung der Stabilisierbarkeit von  $(A, B)$  eine Kontrollfunktion, mit der das geregelte System global exponentiell stabil in einem Gleichgewicht ist. Deshalb können wir Satz (2.12) anwenden.

### 6.1 LQ-Regler am Pendel

Als erstes wollen wir wieder das Pendelmodell aufgreifen und zunächst einmal im aufgestellten Gleichgewicht mittels des klassischen LQ-Reglers stabilisieren. Dazu wählen wir zunächst  $k = 0.2$  und  $g = 9.81$ . Die Linearisierung im Nullpunkt sieht damit folgendermaßen aus:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.81 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie zuvor bereits bemerkt ist  $(A, B)$  stabilisierbar. Für ein Optimalsteuerungsproblem müssen wir nun noch Matrizen  $Q$  und  $R$  wählen:

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R := 1$$

Hier sehen wir auch, wie man implizit Einfluss auf die Beschaffenheit der Optimalität hat. Der Zustand  $x_3$  wird hier stärker gewichtet als die anderen, was erfahrungsgemäß zu einer

schnellen Stabilisierung im Gleichgewicht führt. Um eine Kontrollfunktion zu konstruieren benötigen wir nun eine Lösung der algebraischen Riccati Gleichung. Diese lässt sich in Matlab mit dem Befehl `care(A, B, Q, R)` berechnen, was hier zu folgendem Ergebnis führt:

$$P \approx \begin{pmatrix} 596.51 & 183.73 & 140.14 & -123.68 \\ 183.73 & 56.76 & -43.28 & -38.17 \\ 140.14 & -43.28 & 60.59 & 36.21 \\ -123.68 & -38.17 & 36.21 & 29.60 \end{pmatrix}$$

Die Kontrollfunktion können wir nun wie in (4.5) mit

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$$

berechnen. Die folgende Grafik zeigt die Lösung des nichtlinearen Pendelmodells mit Startwert  $x_0 = (-0.05, 0, 0.2, 0)^T$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  und der berechneten Kontrollfunktion.

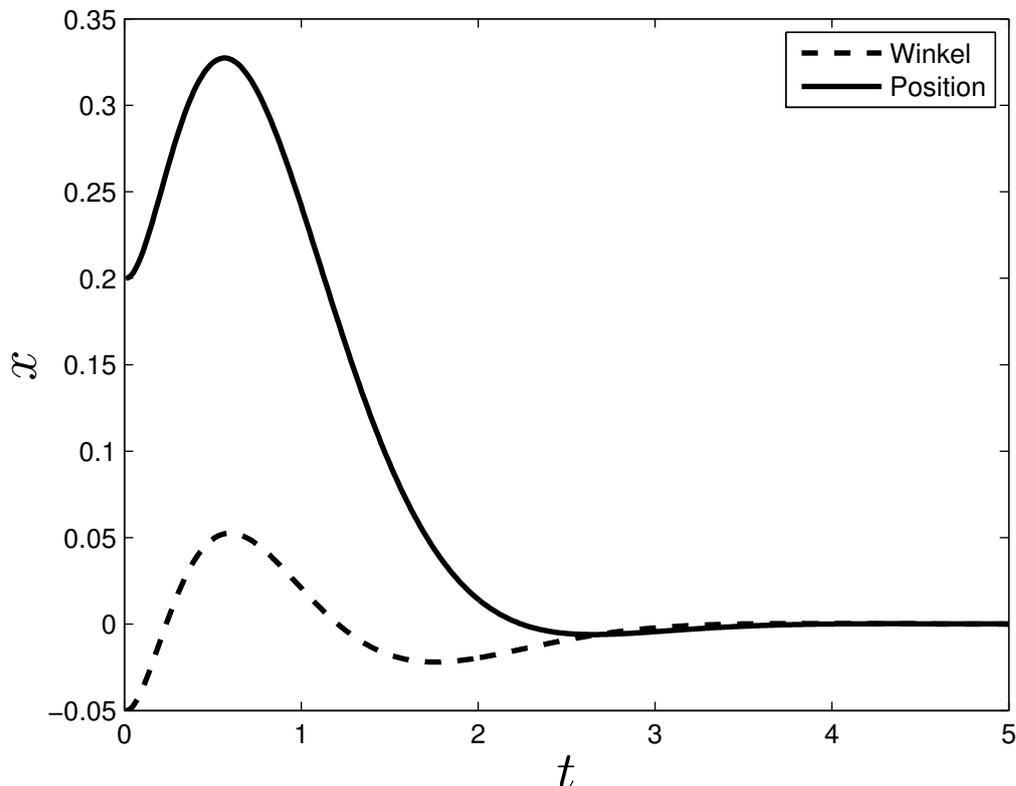


Abbildung 6.1: Lösung des nichtlinearen Pendels mit Kontrollfunktion  $u(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$

## 6.2 Affin-linear-quadratische Regelung an einfachem Beispiel

### 6.2.1 Ein einfaches affines System

Wir wollen noch einmal auf das Beispiel (4.6) zurückkommen und daran die Auswirkungen einiger Erweiterungen aufzeigen. Sei also  $A = B = R = Q = 1$ . Die Kontrollfunktion aus dem LQ-Regler ist hier gerade gegeben durch  $\tilde{u} = -(1 + \sqrt{2})x(t)$ , wobei die positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung in diesem Fall gegeben ist durch  $(1 + \sqrt{2})$ .

Wir setzen nun die Kontrolle zunächst Null und betrachten wie sich die Lösungen der Differentialgleichung verändern, wenn wir eine Zahl  $d \in \mathbb{R}$  auf der rechten Seite addieren.

$$\dot{x}(t) = x(t) + d$$

Die Lösungen mit Anfangswert  $x(0) = x_0$  sind hier gegeben durch  $x(t) = (d + x_0)e^t - d$ .

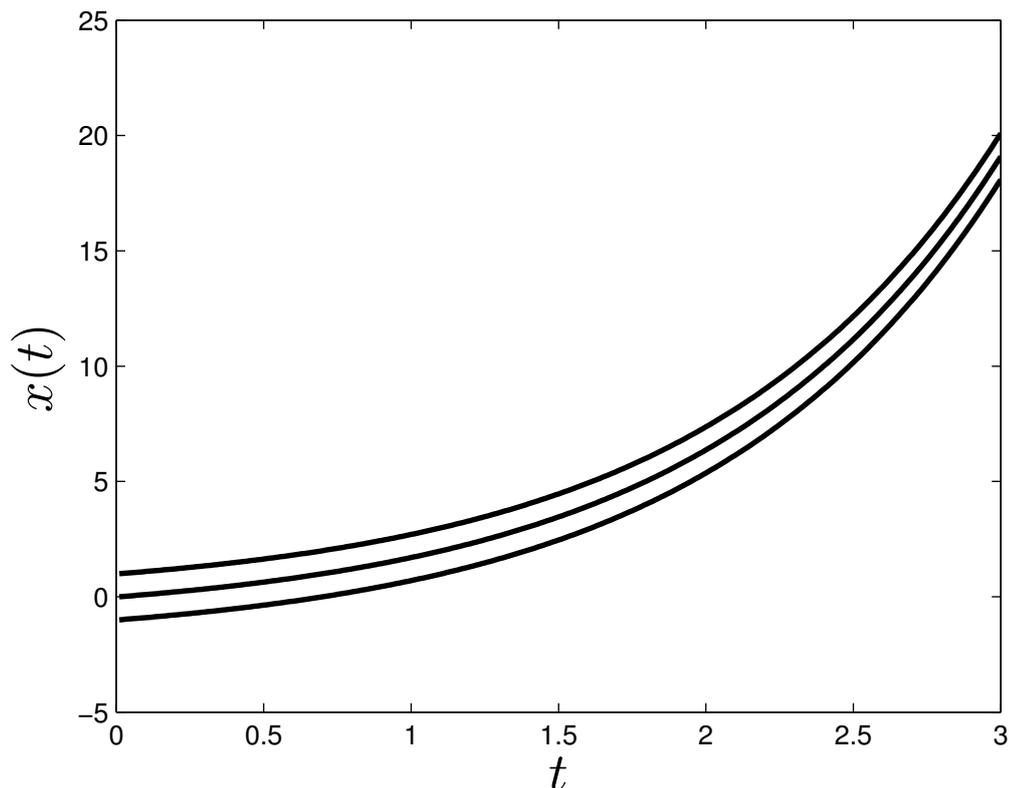


Abbildung 6.2: Lösungen für  $d = 0, 1, 2$  und Startwerte  $1, 0, -1$

Weiterhin ist 0 in diesem System im Allgemeinen kein Gleichgewicht mehr, sondern  $-d$ . Dieses Gleichgewicht ist instabil, denn wenn man in einem  $x_0 \neq 0$  startet, divergiert die Lösung offenbar. Wir wollen deshalb eine Kontrollfunktion konstruieren, welche die Lösung im Gleichgewicht  $x^* = -d$  stabilisiert.

Dazu betrachten wir eine Kostenfunktion  $(x + d)^T Q(x + d) + u^T R u$  oder ausmultipliziert  $x^T Q x + u^T R u + 2d^T Q x + d^T Q d$ . Den letzten Term lassen wir dabei weg, da er konstant ist und für die Minimierung somit keine Rolle spielt. Damit haben wir ein erweitertes lineares Kontrollsystem und eine erweiterte Kostenfunktion wie in Kapitel 5. Die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung kennen wir bereits, es fehlt noch der Term  $b$ , welcher durch

$$0 = Pd + A^T b + s - PBR^{-1}B^T b - PBR^{-1}v$$

gegeben ist. In diesem Fall ist  $b$  damit gerade

$$b = d(2 + \sqrt{2})/\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2}).$$

Damit können wir nun eine Kontrollfunktion (5.9) konstruieren:

$$\tilde{u}(t) = -(1 + \sqrt{2})x(t) - d(1 + \sqrt{2})$$

Eingesetzt in das Kontrollsystem erhalten wir damit die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2}(d + x(t))$$

wobei die Lösung zu Anfangswert  $x(0) = 1$  gegeben ist durch  $x(t) = (d + 1)e^{-\sqrt{2}t} - d$ . Diese Lösung konvergiert gegen  $-d$  und  $\tilde{u}$  konvergiert gegen null.

Wir haben in Kapitel 5 gesehen, dass man ein solches Problem auch anders angehen kann.  $x^* = -d$  und  $u^* = 0$  ist nämlich hier auch das Gleichgewicht, das die Kostenfunktion  $x^T Q x + u^T R u + 2d^T Q x$  minimiert. In diesem Fall müsste die Kontrollfunktion (5.11) mit der von uns berechneten übereinstimmen. Diese sieht folgendermaßen aus:

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - x^*) + u^*$$

was in diesem Fall gerade

$$u(t) = -(1 + \sqrt{2}) - d(1 + \sqrt{2})$$

ist, sie stimmen also überein.

### 6.2.2 Künstliche Gleichgewichte

Bisher haben wir Gleichgewichte betrachtet, bei denen die Kontrollfunktion gegen null geht, es ist aber natürlich auch möglich mit einem konstanten Wert der Kontrollfunktion die Lösung des Kontrollsystems in einem "künstlichen" Gleichgewicht zu halten. Dazu betrachten wir das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t). \quad (6.1)$$

und wählen  $Q = 1$  und  $R = 0,001$ . In diesem einfachen Fall können wir jedes  $x^* \in \mathbb{R}$  mit geeigneter Wahl von  $u^*$  zu einem Gleichgewicht machen: Wenn wir wollen, dass  $x^* \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewicht des Kontrollsystems (6.1) ist, dann wählen wir einfach  $u^* = -x^*$ . Dann haben wir mit der Kontrollfunktion

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - x^*) - x^* \quad (6.2)$$

eine Kontrolle, die das Kontrollsystem im Punkt  $x^*$  stabilisiert, wie in Bemerkung (5.11) beschrieben. Eine Anwendung dafür zeigt die folgende Simulation, in der die Kontrollfunktionen wechseln und die Lösung des Kontrollsystems somit nacheinander in verschiedenen Gleichgewichten stabilisiert wird.

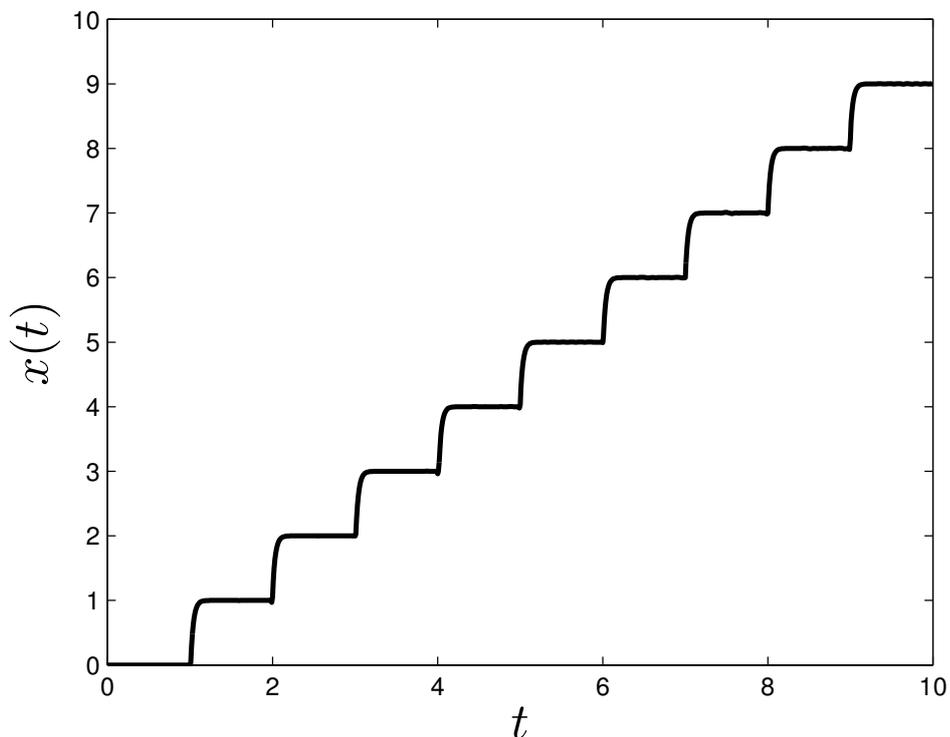


Abbildung 6.3: Lösung von (6.1) mit Kontrollfunktionen (6.2) für verschiedene  $x^*$

Beachte, dass hierfür nur einmal die algebraische Riccati-Gleichung gelöst wurde und dann lediglich verschiedene Werte  $x^*$  in der Kontrolle (6.2) eingesetzt wurden, hier in diesem Fall gerade  $x^*(t) = \text{floor}(t)$ , wobei  $\text{floor}$  die Abrundungsfunktion in Matlab ist.

In diesem Beispiel hat die Lösung genug Zeit um das vorgegebene Gleichgewicht anzunehmen. Wir wollen nun betrachten, wie es sich verhält, wenn man  $x^*$  als eine von der Zeit abhängige stetige Funktion wählt, wie z.B.  $x^*(t) = \sin(t)$ . Wir können keine Aussagen mit der hier hergeleiteten Theorie machen, ein ähnliches Problem ist beschrieben in Satz 5.5 in [2]. Wir betrachten also das System (6.1) mit einer Kontrollfunktion  $u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - \sin(t)) - \sin(t)$ .

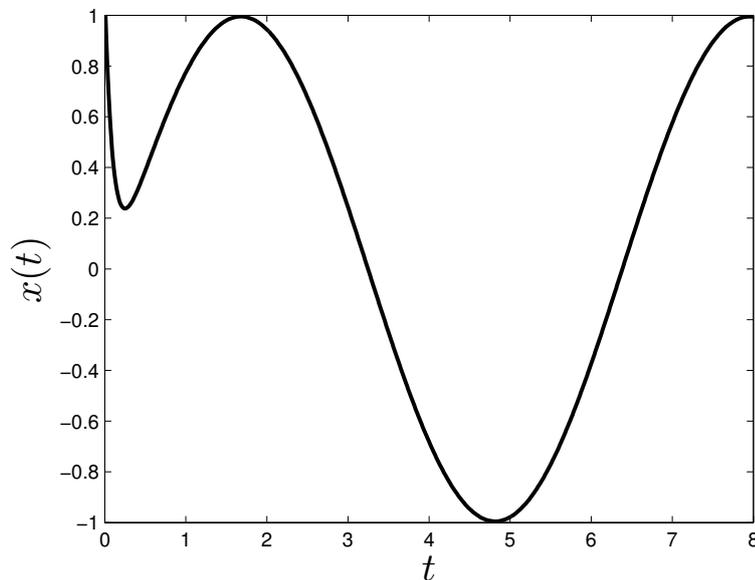


Abbildung 6.4: Lösung von (6.1) mit Kontrollfunktion  $u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - \sin(t)) - \sin(t)$

### 6.3 Verschiedene Gleichgewichte am Pendel

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir das Pendel mittels des klassischen LQ-Reglers im Nullpunkt stabilisiert. Wir wollen nun betrachten, wie es sich mit anderen Gleichgewichten beim Pendel verhält.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.81 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei  $x^* = (0, 0, \lambda, 0)^T$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $x^*$  für  $u^* = 0$  und jedes  $\lambda$  ein Gleichgewicht, was man leicht erkennt, indem man  $Ax^*$  betrachtet. Weiterhin ist die Linearisierung des Modells in jedem solchen Gleichgewicht gleich, da beim Ableiten jeder konstante Term, der das Gleichgewicht verschiebt, wegfällt würde. Wie im Kapitel zuvor wollen wir nun versuchen, das Pendel nacheinander in von uns vorgegebene Positionen zu steuern. Dazu können wir wieder wie in Bemerkung (5.11) vorgehen. Wir wählen zunächst  $R$  und  $Q$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 0.001$$

Mit diesen Daten können wir nun wieder in Matlab eine positiv definite symmetrische Lösung  $P$  der algebraischen Riccati-Gleichung berechnen. Wie im Beispiel zuvor wollen wir, dass die Position des Pendels der Rundungsfunktion folgt. Die Kontrolle, die wir hier verwenden ist  $u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - x^*(t))$ , wobei  $x^*(t) = (0, 0, \text{floor}(\frac{t}{4}), 0)^T$ .

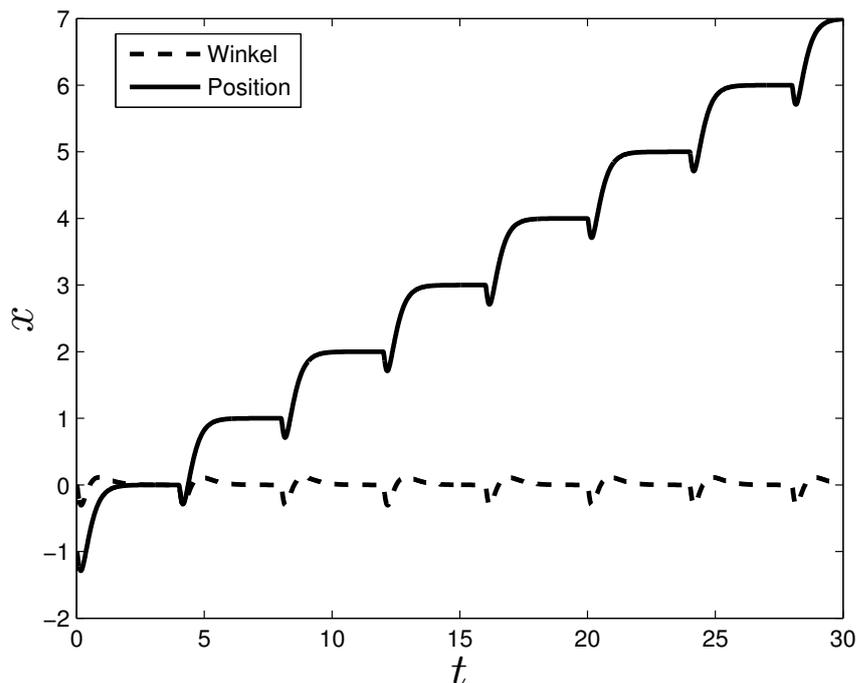


Abbildung 6.5: Lösung des nichtlinearen Pendelmodells mit obiger Kontrolle und Startwert  $x(0) = (0, 0, -1, 0)^T$

Auch hier wollen wir versuchen, ob wir das Pendel sinusförmig hin- und herfahren lassen können. Dazu wählen wir als Kontrollfunktion  $u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - x^*(t))$ , wobei  $x^*(t) =$

$$(0, 0, \sin(\frac{t}{2}), 0)^T.$$

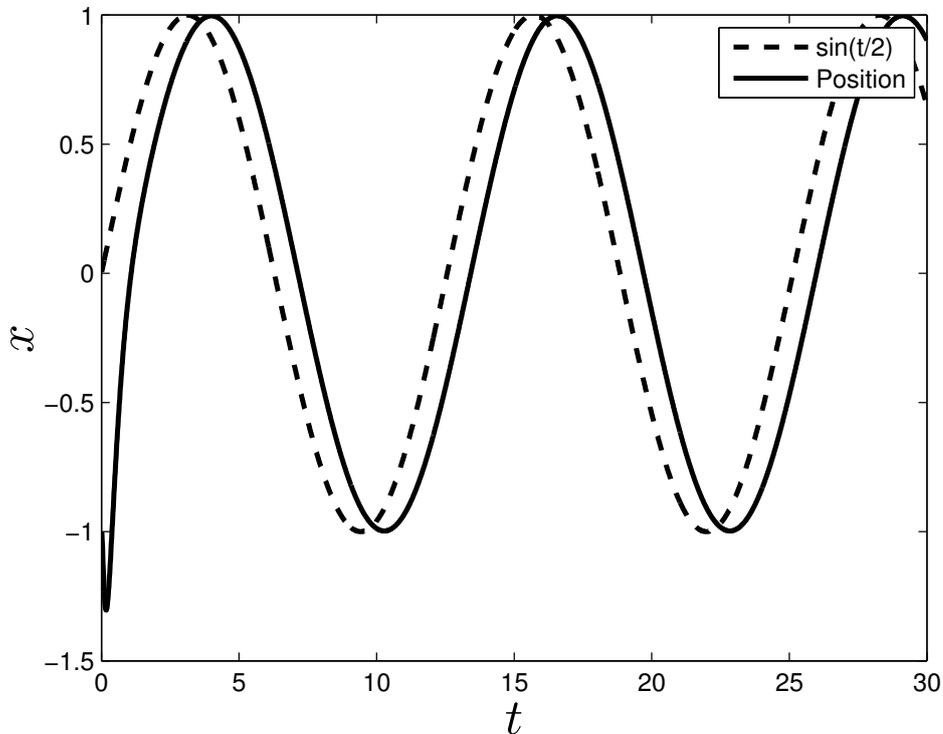


Abbildung 6.6: Lösung des nichtlinearen Pendelmodells mit obiger Kontrolle und Startwert  $x(0) = (0, 0, -1, 0)^T$

## 6.4 Affin-linear-quadratische Regelung am linearen Pendel

In den vorherigen Beispielen haben wir immer die Existenz von Gleichgewichten ausgenutzt, um ein gewünschtes Ergebnis zu erzielen. Hier wollen wir uns ein System und eine Kostenfunktion vorgeben, welche mehr oder weniger beliebig gewählte Konstanten  $d$ ,  $s$  und  $v$  enthält. Dazu betrachten wir erneut die Linearisierung des Pendels und zusätzlich die folgenden Daten:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1 \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = 3$$

Wir wollen nun eine Kontrollfunktion berechnen, die bzgl. der erweiterten Kostenfunktion das affine System optimal steuert. Da  $(A, B)$  stabilisierbar ist wissen wir zumindest, dass wir diese Funktion berechnen können und dass das damit geregelte System exponentiell stabil in einem Gleichgewicht ist. Wir können dazu zwei verschiedene Ansätze machen. Zum einen können wir das Problem lösen indem wir die algebraische Riccati-Gleichung lösen und uns ein  $b$  berechnen oder wir können das Gleichgewicht berechnen, welches die Kostenfunktion minimiert und dann die Kontrollfunktion (5.11) verwenden. Wir wollen hier beide Ansätze durchführen.

Wir lösen zunächst wieder die algebraische Riccati-Gleichung. Nach Lemma (5.5) können wir dann  $b$  berechnen, was zu folgenden Ergebnissen führt:

$$P \approx \begin{pmatrix} 181.89 & 55.73 & -10.95 & -22.65 \\ 55.73 & 17.24 & -3.37 & -6.97 \\ -10.95 & -3.37 & 2.34 & 2.37 \\ -22.65 & -6.97 & 2.37 & 4.57 \end{pmatrix} \quad b \approx \begin{pmatrix} -56.56 \\ -17.38 \\ 10.15 \\ 14.39 \end{pmatrix}$$

Damit können wir die gesuchte Kontrollfunktion (5.9) bereits konstruieren. Außerdem können wir nach mit Satz (5.7) berechnen, in welchem Gleichgewicht das System exponentiell stabil wird. Führt man die Rechnung durch, so erhält man  $x^* = (0.1835, -1, -1, -3)^T$ .

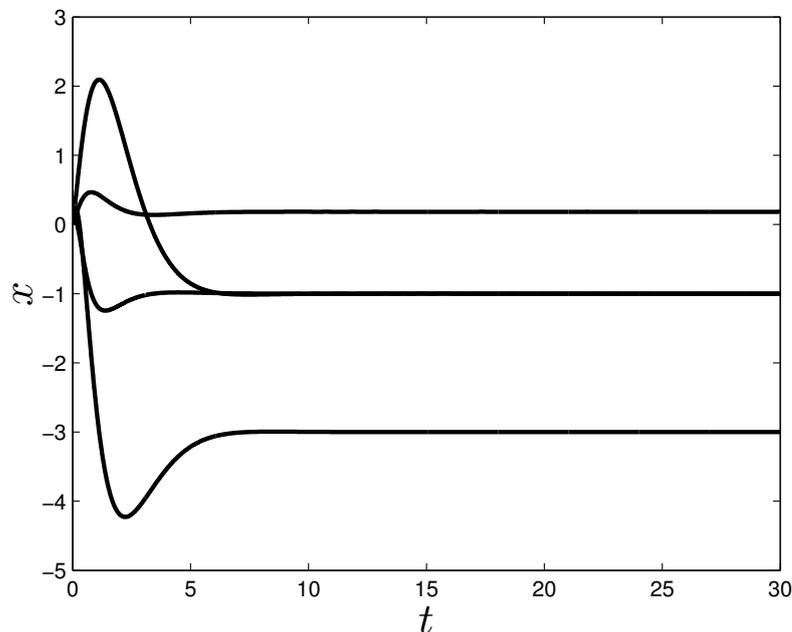


Abbildung 6.7: Lösung des linearen Pendelmodells mit Kontrolle  $u(t) = -R^{-1}(B^T P x(t) + B^T b + v)$  und Startwert  $x(0) = (0, 0, 0, 0)^T$

Das System verhält sich also wie erwartet. Nun wollen wir noch den zweiten Ansatz durchführen.

Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem (5.10):

$$\begin{pmatrix} 2Q & 0 & A^T \\ 0 & 2R & B^T \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ -2v \\ -d \end{pmatrix}$$

Als Lösung erhalten wir hier  $(\tilde{x}^T, \tilde{u}^T, \lambda^T) \approx (0.1835, -1, -1, -3, -4, -0.0483, -0.2413, 4, 2.2413)$ . Das hier berechnete minimierende Gleichgewicht ist also gerade das Gleichgewicht, das wir auch zuvor erhalten haben.

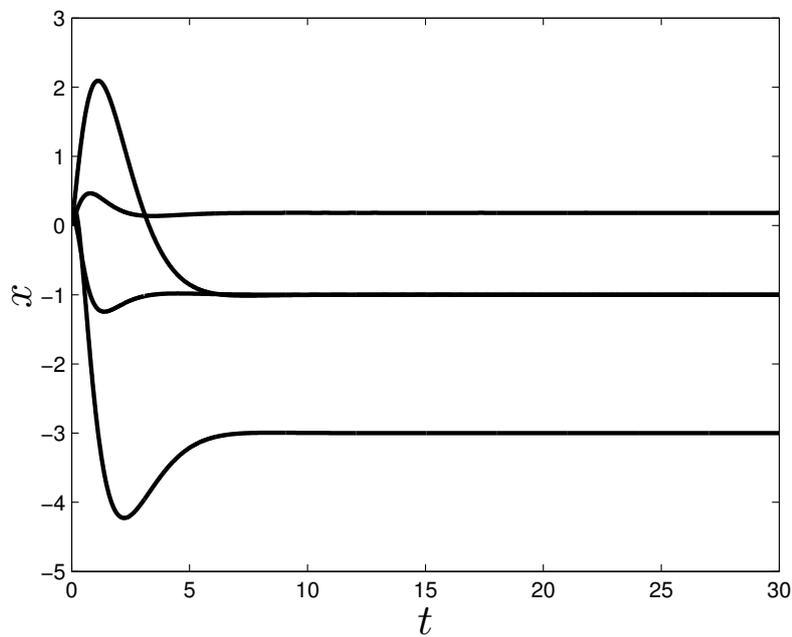


Abbildung 6.8: Lösung des linearen Pendelmodells mit Kontrolle  $u(t) = -R^{-1}B^T P(x(t) - \tilde{x}) + \tilde{u}$  und Startwert  $x(0) = (0, 0, 0, 0)^T$

Wir haben gezeigt, dass die beiden berechneten Kontrollfunktionen gleich sind, weshalb natürlich auch die beiden Bilder übereinstimmen.

# Kapitel 7

## Fazit

Der klassische LQ-Regler ist bereits ein flexibles Werkzeug, um lineare in einem Gleichgewicht zu stabilisieren. In Kapitel 5 konnten wir zeigen, dass sich das Konzept ohne zusätzliche Annahmen auf eine breitere Klasse von Problemen verallgemeinern lässt, welche in Anwendungen durchaus auftreten können. Dabei ist vor allem anzumerken, dass diese Verallgemeinerung lediglich das Lösen eines linearen Gleichungssystems zusätzlich zur Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung erfordert und man keine Differentialgleichungen lösen muss, um eine stabilisierende Kontrollfunktion zu erhalten. Diese Tatsache macht den LQ-Regler und dessen Erweiterung einfach zu implementieren, da die Berechnungen, um eine Kontrollfunktion zu erhalten, nicht in Echtzeit ausgeführt werden müssen, sondern bereits im Vorfeld durchgeführt werden können.



# MATLAB–Quelltexte

## Code zu 6.1

```
g = 9.81;
k = 0.2;

A=[0 1 0 0;
   g -k 0 0;
   0 0 0 1;
   0 0 0 0];

B=[0;1;0;1];

Q=[1 0 0 0;
   0 1 0 0;
   0 0 50 0;
   0 0 0 1];

R = 1;

P = care(A,B,Q,R);
```

**Code zu 6.4**

```

A=[0 1 0 0;
   g -k 0 0;
   0 0 0 1;
   0 0 0 0];

B=[0;1;0;1];

Q=[1 0 0 0;
   0 1 0 0;
   0 0 1 0;
   0 0 0 1];

R = 1;

s = [1;1;1;1];
v = 3;
d = [1;2;3;4];

P = care(A,B,Q,R);

b = -inv(A' - P*B*inv(R)*B')*(P*d +s - P*B*inv(R)*v);

gleichgewicht_b =
-inv(A-B*inv(R)*B'*P)*(-B*inv(R)*B'*b - B*inv(R)*v +d);

Gl = [2*Q zeros(4,1) A';
       zeros(1,4) 2*R B';
       A B zeros(4)];

lsg = [-2*s; -2*v; -d];

gleichgewicht = Gl\lsg;

```

# Literaturverzeichnis

- [1] L.Grüne, *Mathematische Kontrolltheorie*; Vorlesungsskript Wintersemester 2013/2014
- [2] L.Grüne, *Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme*; Vorlesungsskript Wintersemester 2002/2003
- [3] P.Dorato, V.Cerone, C.Abdallah, *Linear Quadratic Control*; Malabar, Fla., Krieger, 2000
- [4] K.Königsberger, *Analysis 2*; Springer Verlag, 2004
- [5] S.Boyd, L.Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2009
- [6] D.Liberzone, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, unter <http://liberzon.csl.illinois.edu/teaching/cvoc/> (abgerufen am 27.10.14)
- [7] B.Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, 2004
- [8] Wikipediaeinträge zu den erwähnten Mathematikern



Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich habe die Arbeit nicht bereits zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.