UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Beobachtbarkeit und Beobachter für lineare Kontrollsysteme

Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Judith Schmidt
geboren am 30.09.1996 in Bamberg

im Dezember 2018

Betreuer: Prof. Dr. Lars Grüne

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**
- 1.1 Motivation . . . 4
- 1.2 Vorgehen und Aufbau . . . 4
- 1.3 Grundlagen . . . 5

2 Stabilität und Kontrollierbarkeit **8**
- 2.1 Stabilität einer linearen Differentialgleichung . . . 8
- 2.2 Kontrollierbarkeit . . . 9

3 Zustandsrückführung und Polvorgabe **12**
- 3.1 Idee der Zustandsrückführung . . . 12
- 3.2 Regelungsnormalform . . . 13
- 3.3 Reglerentwurf durch Polvorgabe . . . 20

4 Grundlagen der Beobachtbarkeit **27**
- 4.1 Definition und Bedeutung . . . 27
- 4.2 Nachweis der Beobachtbarkeit . . . 28
- 4.3 Asymptotische Beobachtbarkeit . . . 28
- 4.4 Dualität . . . 29

5 Zustandsrekonstruktion mit Beobachter **30**
- 5.1 Rekonstruktion durch Parallelschaltung . . . 30
- 5.2 Der Luenberger-Beobachter . . . 31
  - 5.2.1 Idee und Aufbau des Beobachters . . . 31
  - 5.2.2 Konstruktion des Beobachters . . . 33
  - 5.2.3 Beispiel . . . 37
- 5.3 Existenz des Luenberger-Beobachters . . . 46

6 Zustandsrückführung mit Luenberger-Beobachter **47**
- 6.1 Idee der Zustandsrückführung mit Beobachter . . . 47
- 6.2 Mathematische Darstellung des Regelkreises . . . 48

7 Fazit **51**

Anhang **53**

Abbildungsverzeichnis **59**

Literaturverzeichnis **62**

1 Einleitung

1.1 Motivation

> „In addition to their practical utility, observers offer a unique theoretical fascination.“ [1]

Von der Korrektheit dieses Zitats soll die vorliegende Arbeit überzeugen. Es stammt aus einem Artikel des US-Amerikaners David G. Luenberger.
Luenberger entwickelte die Idee des nach ihm benannten „Luenberger-Beobachters“, der zum Hauptuntersuchungsgegenstand dieser Arbeit werden soll. Wie er dabei im Hinblick auf das obige Zitat selbst bemerkte, ist die Theorie und Anwendung eines Beobachters an sich und des Luenberger-Beobachters im Besonderen deshalb so interessant, weil diese Theorie grundlegende Konzepte wie Stabilität, Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit verknüpft und so zusammenwirken lässt, dass ein enormer praktischer Nutzen damit einhergeht.
Gerade dieses Zusammenwirken macht es auch für mich interessant, im Rahmen dieser Bachelorarbeit, speziell die Theorie des Luenberger-Beobachter in der Zusammenschau aufzugreifen, gegebenenfalls zu strukturieren, Zusammenhänge herauszuarbeiten und die Theorie anzuwenden.

1.2 Vorgehen und Aufbau

Ziel dieser Arbeit soll es nicht sein, neue Theorien zu entwickeln, sondern die bereits in der Literatur bekannte Theorie des Luenberger-Beobachters aufzugreifen und aufzuzeigen, inwiefern diese in weiteren existierenden Konzepten zur Zustandsrekonstruktion oder Zustandsrückführung eine Rolle spielt. Die vorgestellten Resultate sind demnach in der Literatur bereits bekannt, sollen jedoch zusammengetragen, teilweise neu strukturiert und Zusammenhänge durch die Art der Darstellungsweise genauer herausgearbeitet werden. Außerdem werden einige Beweise wesentlich ausführlicher geführt.
Der Aufbau der Arbeit richtet sich danach, zuerst auf die grundlegenden Konzepte Stabilität und Kontrollierbarkeit einzugehen, die, wie bereits erwähnt, später in der Theorie des Luenberger-Beobachters Eingang finden werden. Anschließend wird das Konzept der Zustandsrückführung eines Systems eingeführt. Dieses dient dazu, wesentliche Ziele, die sich aus Stabilität und Kontrollierbarkeit ergeben, erreichen zu können.

[1] D.G. Luenberger in [13, S. 596]

Davon ausgehend wird auf ein Problem aufmerksam gemacht, das sich bei der Zustandsrückführung in praktischen Betrachtungen vielfach ergibt. Daraus resultiert die Notwendigkeit der Einführung der Eigenschaft der Beobachtbarkeit. Ausgehend von der Beobachtbarkeit eines Zustands wird sich dann die Frage stellen, wie sich mittels eines sogenannten Beobachters ein beobachtbarer Zustand ermitteln lässt. In diesem Zusammenhang wird der Luenberger-Beobachter vorgestellt.
Zum Schluss sollen die eingeführten Konzepte Stabilität, Kontrollierbarkeit, Zustandsrückführung, Beobachtbarkeit und Luenberger-Beobachter verknüpft werden, wodurch der wesentliche Nutzen des betrachteten Beobachters deutlich werden soll.
Die Konzepte Regelstrecke, Zustandsrückführung, Beobachter und Zustandsrückführung mit Beobachter werden im Laufe der Arbeit in Abbildungen graphisch dargestellt. Diese Darstellungen dienen lediglich der Veranschaulichung und beschränken sich daher jeweils auf die grundlegenden Konzeptbestandteile. Es lässt sich aus der Darstellung nicht auf die jeweiligen mathematischen Gleichungen schließen.

Die Arbeit ist ausgehend von der schriftlichen Ausarbeitung des Seminarvortrags zum Thema „Kontrolltheorie: Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Systeme“ im Rahmen des Seminars „Numerik, Kontrolltheorie und Optimierung“ an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2018 in Zusammenarbeit mit Leonie Kreuzer entstanden. Auf diese Ausarbeitung wird an einigen Stellen Bezug genommen.

1.3 Grundlagen

Die Grundlagen sind weitestgehend an [5] und [10] orientiert und werden bereits in der Seminarvortragsausführung [9] so verwendet.
Untersuchungsgegenstand für alle nachfolgend vorgestellten Konzepte sind sogenannte *Kontrollsysteme* bzw. *Regelstrecken*. Dabei handelt es sich um dynamische Differentialgleichungssysteme. Das sind zeitlich veränderliche Systeme, die von einem Parameter u abhängen, der als *Eingang* oder *Kontrolle* bezeichnet wird. Über diesen Parameter werden Einwirkungen auf das System von außen erfasst, die vollständig bekannt sind. Wenn der *Zustand* eines Systems mit x bezeichnet wird, ist ein Kontrollsystem durch

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$$

gegeben, wobei die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, die die Ableitung $\dot{x}(t)$ einer Funktion $t \mapsto x(t)$ nach der Zeit t beschreibt, als *Vektorfeld* bezeichnet wird.
In dieser Arbeit erfolgen die Betrachtungen lediglich für den Spezialfall linearer autonomer Kontrollsysteme, die um einen sogenannten *Ausgang* y erweitert werden:

$$\sum\nolimits_S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

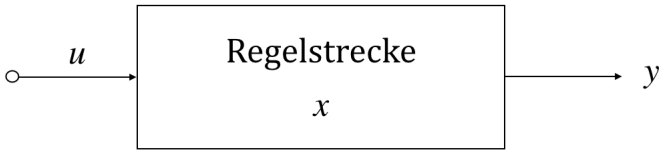

Abbildung 1.1: Regelstrecke [2]

Dabei wird $x(t_0) = x_0$ als *Anfangsbedingung* des Kontrollsystems bezeichnet. Im Folgenden wird zur Vereinfachung stets $t_0 = 0$ gesetzt. Der Ausgang y wird alternativ auch als *Regelgröße* bezeichnet und stellt messbare Größen des Zustands dar. Der Ausgang wird jedoch erst ab Kapitel 4 relevant.
Des Weiteren ist dabei $u \in U$, wobei U den Raum der stückweise stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^m$ bezeichnet, und $y \in Y$, wobei Y der Raum der stetigen Funktionen von dem Intervall $[0, T]$ mit $T > 0$ nach $\mathbb{R}^p$ darstellt.
Graphisch ist das Konzept der Regelstrecke Abbildung 1.1 dargestellt. Und eine allgemeine Lösung ist stets gegeben durch:

$$x(t, x_0, u) = exp(A\,t)\,x_0 + \int_0^t exp(A\,(t-s))\,Bu(s)\,ds \tag{1.2}$$

Eine Sonderform, auf die im Folgenden immer wieder zurückgegriffen wird, ist eine Regelstrecke, bei der sich ein Zustand durch eine autonome homogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \tag{1.3}$$

beschreiben lässt.

Beispiel 1.1. Als Beispiel, auf das die in der Arbeit vorgestellten Methoden und Konzepte angewendet werden, soll das Satellitenmodell, das in Abbildung 1.2 dargestellt ist, dienen, das auch im Seminarvortrag bereits Anwendung gefunden hat und dessen Herleitung dementsprechend auch in der Ausarbeitung [9] genauer nachgelesen werden kann.[3] Hier dient das Beispiel lediglich der rechnerischen Veranschaulichung der später eingeführten Konzepte, weshalb auf das Zustandekommen der Differentialgleichung des Beispiels nicht weiter eingegangen werden soll. Wichtiger ist zu beschreiben, was das Beispiel genau darstellt beziehungsweise welche Bewegung beschrieben wird.
Im Wesentlichen handelt es sich dabei also um das Modell eines Satelliten der Masse m, der sich mit radialem Abstand r und Winkelgeschwindigkeit ω um einen Planeten O bewegt.

[2] in Anlehnung an [10, S.65]
[3] Alternativ kann das Beispiel auch in [10] nachgelesen werden.

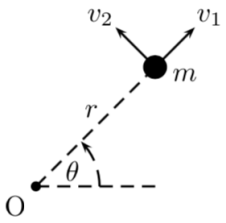

Abbildung 1.2: Satellitenmodell [4]

Auf den Satelliten wirken die beiden Schübe $v_1(t)$ in die radiale und $v_2(t)$ in die tangentiale Richtung. Daraus resultieren als Kontrollen die beiden Beschleunigungen $u_1(t) = \frac{v_1(t)}{m}$ und $u_2(t) = \frac{v_2(t)}{m}$ in die entsprechenden Richtungen, die auf das System einwirken. Ziel ist es, den Satelliten mit Abstand 1 und Winkelgeschwindigkeit ω um den Planeten kreisen zu lassen. Zur Vereinfachung sämtlicher Rechnungen wird von $\omega = 1$ ausgegangen. Dafür sind $x_1, \ldots, x_4$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t) - 1 \\ x_2(t) &= \dot{r}(t) \\ x_3(t) &= \theta(t) - t \\ x_4(t) &= \dot{\theta}(t) - 1 \end{aligned}$$

Durch Approximation in kleinen Abweichungen um die gewünschte Umlaufbahn und Linearisierung, erhält man ein Kontrollsystem mit Ausgang der Form (1.1) mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[4] in Anlehnung an [10, S. 2]

2 Stabilität und Kontrollierbarkeit

Ziel dieses Kapitels ist es, kurz auf zwei Grundeigenschaften von Differentialgleichungen einzugehen, sodass später auf die entsprechenden Definitionen und Sätze zurückgegriffen werden kann.

2.1 Stabilität einer linearen Differentialgleichung

Dieses Kapitel basiert im Wesentlichen auf [5] und [7].
Der Begriff der Stabilität einer Differentialgleichung bezieht sich im Allgemeinen (insbesondere in dieser Ausführung) auf die Stabilität eines Gleichgewichts einer Differentialgleichung. Auf den Gleichgewichtsbegriff soll hier im Hinblick auf den Umfang der Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Es sei lediglich so viel gesagt, dass ein Gleichgewicht eine Lösung einer Differentialgleichung bezeichnet, die eine Nullstelle des Vektorfeldes bildet.[5]
Außerdem beschränken wir uns bei den Stabilitätsbetrachtungen auf Differentialgleichungen der Spezialform (1.3). Dabei wird stets die Stabilität des Gleichgewichts $x = 0$ untersucht, die ausschließlich von der Matrix A abhängt. Dementsprechend werden „Stabilität der Differentialgleichung (1.3)“, „Stabilität des Gleichgewichts $x = 0$ der Differentialgleichung (1.3)“ und „Stabilität der Matrix A“ synonym verwendet.

Es macht insofern Sinn, das Stabilitätsverhalten lediglich für Differentialgleichungen der Form (1.3), das heißt für Kontrollsysteme mit der Kontrolle $u = 0$ zu betrachten, da es sich bei der Stabilität um eine „natürliche“ Eigenschaft handelt, die sich dementsprechend zunächst auf Systeme ohne Kontrolle bezieht.

Es gibt verschiedene Ausprägungen des Stabilitätsverhaltens, die untersucht werden können:

- stabil
- exponentiell stabil
- asymptotisch stabil
- instabil

Im Folgenden wird nur die Eigenschaft der asymptotischen Stabilität benötigt werden. Anschaulich ist diese Eigenschaft für (1.3) genau dann erfüllt, wenn jede Lösung, die außerhalb von 0 startet, gegen 0 konvergiert.

[5] Die Thematik kann in [7] genauer nachgelesen werden.

Definition 2.1. Die Differentialgleichung (1.3) heißt genau dann *asymptotisch stabil*, wenn für eine Lösung $x(t)$

$$\lim_{x\to\infty} x(t) = 0 \quad \forall\, x(0) = x_0$$

gilt.

Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für asymptotische Stabilität.

Satz 2.2. Das durch (1.3) gegebene Kontrollsystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i für $i = 1, \ldots, n$ der Matrix A einen negativen Realteil besitzen.[6]

2.2 Kontrollierbarkeit

Die folgende Einführung des Grundbegriffes der Kontrollierbarkeit ist hauptsächlich an [10] angelehnt.
Während das Stabilitätsverhalten eine Eigenschaft ist, die fernab von jeglicher (technischer) Einflussnahme untersucht werden kann, beispielsweise in Bezug auf von Natur aus gegebene Stabilität oder Instabilität eines Systems, zielt der Begriff der Kontrollierbarkeit unmittelbar auf eine konkrete Beeinflussung des betrachteten Systems von außen.
Kontrollierbarkeit untersucht die Frage, ob für den Anfangszustand x_0 eines Kontrollsystems und einen Zustand x_1 eine Kontrollfunktion $u(t)$ gefunden werden kann, sodass x_1 vom Anfangszustand ausgehend in endlicher Zeit erreicht wird.

Definition 2.3. Seien $x_0,\, x_1 \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt x_0 zu x_1 genau dann *kontrollierbar*, wenn ein $T > 0$ und ein $u \in U$ existieren, sodass $x_1 = x\,(T, x_0, u)$.
Das System (1.1) heißt *(vollständig) kontrollierbar*, falls für alle $x_0,\, x_1 \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass x_0 zu x_1 kontrollierbar ist.

Wie in der Seminarvortragsausführung [9] identifizieren wir das System (1.1) in Bezug auf Kontrollierbarkeit mit dem Matrixpaar $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$, und die *Kontrollierbarkeitsmatrix* sei definiert als

$$\mathcal{C}(A, B) := \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nm}\ . \tag{2.1}$$

Notwendige Kriterien für Kontrollierbarkeit liefern die Kriterien von Kalman und Hautus[7]:

Satz 2.4 (Kalman-Kriterium für Kontrollierbarkeit)**.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Das Kontrollsystem (1.1) ist kontrollierbar.

(ii) $rk\, \mathcal{C}(A, B) = n$

[6] Der Beweis ist nachzulesen in [7, S. 103].
[7] Eine genauere Ausführung der Kriterien und die entsprechenden Beweise können in [9] nachgelesen werden.

Satz 2.5 (Hautus-Kriterium für Kontrollierbarkeit)**.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Das Kontrollsystem (1.1) ist kontrollierbar.

(ii) $rk(\lambda\, Id - A, B) = N \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

Neben diesen Kriterien wird später noch eine wichtige Eigenschaft des Bildes der Kontrollierbarkeitsmatrix benötigt werden, die das folgende Lemma liefert.

Lemma 2.6. Das Bild der Kontrollierbarkeitsmatrix $im\,\mathcal{C}(A,B)$ des Kontrollsystems (1.1) ist der kleinste A-invariante Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $im\,B$ enthält.[8] Per Definition[9] ist $im\,B$ genau dann invariant bezüglich A, wenn $(A \cdot m) \in im\,B$ für alle $m \in im\,B$ gilt.

Beweis. Zunächst sei $im\,\mathcal{C}(A,B)$ in Mengenschreibweise folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned} im\,\mathcal{C}(A,B) &= im\,\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \\ &= \{B\,x_0 + AB\,x_1 + \ldots + A^{n-1}B\,x_{n-1} \mid x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^m\} =: M \end{aligned}$$

Ziel ist es nun für diese Menge zu zeigen, dass sie den kleinsten A-invarianten Unterraum darstellt, der $im\,B$ enthält. Bezeichne V den kleinsten A-invarianten Unterraum, der $im\,B$ enthält. Dieser existiert in $\mathbb{R}^n$ und ist eindeutig.[10] Damit ist also $V = M$ zu zeigen.
Wegen $im\,B \in V$ ist offensichtlich $\{B\,x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^m\}$ in V enthalten. Ebenso gilt wegen A-Invarianz $\{A^kB\,x \mid k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^m\} \in V$, woraus aufgrund der Abgeschlossenheit eines Unterraums bezüglich der Vektoraddition direkt $M \subseteq V$ folgt.
Andererseits gilt offensichtlich $im\,B = \{B\,x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^m\} \subseteq M$. Wenn M außerdem A-invariant ist, folgt $V \subseteq M$ sofort aus der Voraussetzung, dass V den kleinsten Unterraum mit diesen Eigenschaften darstellt. Damit wäre die Gleichheit und somit die Behauptung des Lemmas gezeigt. Es bleibt also lediglich die A-Invarianz der Menge M nachzuweisen.
Sei dazu

$$\chi_A(z) = det(z\,Id - A) = z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \ldots + a_1\,z + a_0$$

das charakteristische Polynom der Matrix A. Nach dem Theorem von Cayley-Hamilton[11] gilt damit:

$$\begin{aligned} & \chi_A(A) = A^n + a_{n-1}\,A^{n-1} + \ldots + a_1\,A + a_0\,Id = 0 \\ \iff \quad & A^n = -a_{n-1}\,A^{n-1} - \ldots - a_1\,A - a_0\,Id \end{aligned} \tag{2.2}$$

[8] Das Lemma formuliert hier nur einen Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage. Der allgemeine Fall kann in [5, S. 14] nachgeschlagen werden.

[9] [5, S. 14]

[10] Die Existenz ist offensichtlich, da $\mathbb{R}^n$ selbst einen solchen Unterraum endlicher Dimension darstellt und die Eindeutigkeit ist klar, da die angenommene Existenz mehrerer Unterräume mit diesen Eigenschaften von kleinster Dimension schon liefern würde, dass diese übereinstimmen müssten. Ansonsten würde der durch den Schnitt erzeugte Unterraum einen Unterraum kleinerer Dimension mit den gewünschten Eigenschaften darstellen.

[11] Dieses ist in [11, S. 353] ausführlich dargestellt.

Nun sei $m \in M$ beliebig gewählt. Das heißt: m hat die Form

$$m = B\,x_0 + AB\,x_1 + \ldots + A^{n-1}B\,x_{n-1}\ . \tag{2.3}$$

Dann rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned} A \cdot m &= AB\,x_0 + A^2Bx_1 + \ldots + A^nB\,x_{n-1} \\ &\overset{(2.2)}{=} AB\,x_0 + A^2B\,x_1 + \ldots + A^{n-1}B\,x_{n-2} + (-a_{n-1}\,A^{n-1} - \ldots - a_1\,A - a_0\,Id)\,B\,x_{n-1} \\ &= B\,(-a_0\,x_{n-1}) + AB\,(x_0 - a_1\,x_{n-1}) + \ldots + A^{n-1}B\,(x_{n-2} - a_{n-1}\,x_{n-1}) \end{aligned}$$

Daran sieht man sofort, dass $(A \cdot m)$ in M enthalten ist, womit die Invarianz gezeigt und somit das Lemma bewiesen wäre.

3 Zustandsrückführung und Polvorgabe

3.1 Idee der Zustandsrückführung

Das Kapitel bezieht sich vor allem auf [5] und [17].
Ausgangspunkt sei ein Kontrollsystem mit Ausgang der Form (1.1).[12] An die Frage nach der Kontrollierbarkeit aus dem vorherigen Kapitel, schließt sich konsequenterweise die Frage an, wie eine Kontrolle u gewählt werden muss, um bestimmte Eigenschaften beziehungsweise eine bestimmte Dynamik des Systems zu erzielen.
Oft soll eine Kontrolle $u \in U$ so gewählt werden, dass aus einem instabilen System der Form (1.3) ein (asymptotisch) stabiles Kontrollsystem der Form (1.1) entsteht. Das Problem, eine solche Kontrolle zu finden, wird dementsprechend als *Stabilisierungsproblem* bezeichnet. Auch denkbar wäre das Ziel, die Stabilität eines bereits stabilen Systems zu verbessern.

Die Idee der Zustandsrückführung besteht dabei darin, die Kontrollfunktion nicht nur zeitabhängig zu wählen, sondern zu jedem Zeitpunkt vom aktuellen Zustand abhängig zu machen. Die Kontrolle soll also die Form

$$u(t) = -K\,x(t) \text{ mit } K \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{3.1}$$

haben, wobei $-K$ die Darstellungsmatrix einer Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist, die jedem Zustand die entsprechende Kontrolle zuordnet. Die Matrix wird *Rückführungsmatrix*, *Regler* oder *Feedback* genannt. Graphisch wird dieses Konzept in Abbildung 3.1 dargestellt.

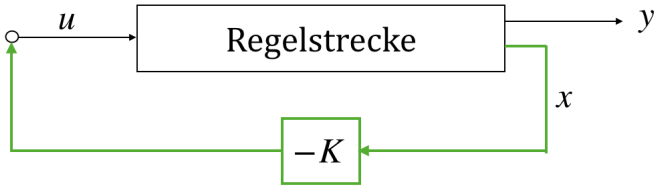

Abbildung 3.1: Zustandsrückführung [13]

[12] Dem Ausgang des Kontrollsystems kommt auch in diesem Kapitel noch keine Bedeutung zu und dient an dieser Stelle lediglich der Einheitlichkeit der Arbeit. Es würde also hier auch genügen, von einem Kontrollsystem ohne Ausgangsgleichung auszugehen.
[13] in Anlehnung an [17, Abb. 4.1, S. 146]

Ausgehend von (1.1), erhält man mit der so gewählten Kontrolle für das dynamische Verhalten des Systems die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,(-K\,x(t)) \\ &= (A - B\,K)\,x(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit $(A - B\,K) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Form von (1.3).

Daraus resultiert in Verbindung mit der oben formulierten Frage die Überlegung, wie K zu wählen ist beziehungsweise wann es ein solches K gibt, sodass System (3.2) die gewünschte Dynamik annimmt. Das ist in der folgenden Definition explizit formuliert.

Definition 3.1. Das Stabilisierungsproblem ist lösbar, beziehungsweise (A, B) heißt *stabilisierbar*, wenn eine Rückführungsmatrix K existiert, sodass $(A - B\,K)$ asymptotisch stabil ist.

In Kapitel 3.3 wird gezeigt werden, dass das Stabilisierungsproblem insbesondere dann lösbar ist, wenn (A, B) kontrollierbar ist. Damit kann die Stabilisierbarkeit als „Abschwächung“ der Kontrollierbarkeit angesehen werden.

3.2 Regelungsnormalform

Die Ausführungen dieses Kapitels beruhen hauptsächlich auf [1], [3] und [6].
Um die Rückführungsmatrix in Kapitel 3.3 konstruieren zu können, ist es von Vorteil, das zu regelnde System durch Koordinatentransformation in einer bestimmten Form angeben zu können: in der sogenannten *Regelungsnormalform*. Diese Möglichkeit beschränkt sich jedoch auf *Eingrößensysteme*. Das heißt auf Kontrollsysteme mit nur eindimensionaler Kontrolle (d.h. mit $B = b \in \mathbb{R}^n$). (Kontrollsysteme mit mehrdimensionaler Kontrolle bezeichnet man als *Mehrgrößensysteme*.)
Das folgende Lemma charakterisiert die Regelungsnormalform, und gibt an, wann ein System in diese überführt werden kann.

Lemma 3.2. Das System $(A, b) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n$ ist genau dann kontrollierbar, wenn es eine Koordinatentransformation mit Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass das damit transformierte Kontrollsystem durch

$$\dot{x} = \widetilde{A}\,x + \widetilde{b}\,u$$

mit

$$\widetilde{A} := S^{-1}\,A\,S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{b} = S^{-1}\,b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

gegeben ist, wobei a_i für $i = 1, \ldots n$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

der ursprünglichen Matrix A sind.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass für Matrizen der angegebenen Form $\widetilde{A}$ gerade gilt, dass a_i die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\widetilde{A}$ sind. Dieses ist gleich dem charakteristischen Polynom von A.[14] Eine Möglichkeit des Nachweises wäre, das charakteristische Polynom beziehungsweise $det(zI-A)$ direkt in Abhängigkeit von n durch gezieltes Entwickeln von Zeilen und Spalten auszurechnen.[15] Hier soll die Behauptung jedoch durch Induktion nach n bewiesen werden:
Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -a_0 \end{pmatrix} \implies \chi_{\widetilde{A}} = det\left(z\, I - (-a_0)\right) = z + a_0$$

Die Behauptung gelte für n und $\widetilde{A}_n$ sei von der Form des Lemmas, dann ist für

$$\widetilde{A}_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \widetilde{A}_n & \\ -a_0 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

das charakteristische Polynom gegeben durch

$$\chi_{\widetilde{A}_{n+1}} = det\left(z\, I_{n+1} - \widetilde{A}_{n+1}\right) = det \begin{pmatrix} z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & z\, I_n - \widetilde{A}_n & \\ 0 & & & \\ a_0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die Entwicklung nach der ersten Spalte liefert gemäß Laplace'schem Entwicklungssatz[16] das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} \chi_{\widetilde{A}_{n+1}} &= ((-1)^{1+1}) \cdot z \cdot det\left(z\, I_n - \widetilde{A}_n\right) + ((-1)^{(n+1)+1}) \cdot a_0 \cdot \underbrace{(-1)^n}_{17} \\ &= z \cdot det\left(z\, I_n - \widetilde{A}_n\right) + (-1)^{2n+2} \cdot\ a_0 \\ &= z \cdot det\left(z\, I_n - \widetilde{A}_n\right) + a_0 \\ &\overset{\text{IV}}{=} z \cdot (z^n + a_n\, z^{n-1} + \ldots + a_1) + a_0 \\ &= z^{n+1} + a_n\, z^n + \ldots + a_1\, z + a_0 \end{aligned}$$

[14] Das ist der Fall, weil Eigenwerte unter Koordinatentransformation erhalten bleiben und somit ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom besitzen.
[15] in [3, S. 271]
[16] beispielsweise nachzulesen in [2, S. 203]
[17] Der Faktor stellt die Determinante der Streichungsmatrix dar. (Diese ist eine untere Dreiecksmatrix mit den Diagnonaleinträgen (-1).)

Damit ist der zweite Teil des Lemmas bewiesen.

Sei nun S die Transformationsmatrix mit den angegebenen Eigenschaften und zeige, dass damit (A, b) kontrollierbar sein muss. Zunächst ist

$$\mathcal{C}\left(\widetilde{A}, \widetilde{b}\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{b} & \widetilde{A}\widetilde{b} & \widetilde{A}^2\widetilde{b} & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{b} \end{pmatrix} \overset{18}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ \vdots & 0 & \iddots & & \\ 0 & 1 & & * & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

die Kontrollierbarkeitsmatrix von $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$. Diese Matrix hat offensichtlich vollen Rang, woraus nach Satz 2.4 folgt, dass $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ kontrollierbar ist.

Zudem bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} S \cdot \mathcal{C}\left(\widetilde{A}, \widetilde{b}\right) &= S \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{b} & \widetilde{A}\widetilde{b} & \widetilde{A}^2\widetilde{b} & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S\widetilde{b} & S\widetilde{A}\widetilde{b} & S\widetilde{A}^2\widetilde{b} & \cdots & S\widetilde{A}^{n-1}\widetilde{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} SS^{-1}b & SS^{-1}ASS^{-1}b & SS^{-1}A^2SS^{-1}b & \cdots & SS^{-1}A^{n-1}SS^{-1}b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{C}\left(A, b\right) \end{aligned}$$

für die Kontrollierbarkeitsmatrix von (A, b) gilt. Aus dieser Darstellung folgt sofort, dass auch $\mathcal{C}\left(A, b\right)$ vollen Rang hat. Denn S hat als Transformationsmatrix vollen Rang und $\mathcal{C}\left(\widetilde{A}, \widetilde{b}\right)$, wie bereits gezeigt, ebenso. Damit ist (A, b) nach Satz 2.4 ebenfalls kontrollierbar.

Sei jetzt (A, b) kontrollierbar. Damit besitzt die Kontrollierbarkeitsmatrix $\mathcal{C}\left(A, b\right)$ nach dem Kriterium von Kalman vollen Rang und ist somit im Eingrößensystem als quadratische

[18] Die Gleichheit lässt sich leicht nachvollziehen. Die erste Spalte lässt sich direkt ablesen. Die zweite Spalte lässt sich durch einfache Matrizenmulitplikation leicht berechnen und entspricht der letzten Spalte von $\widetilde{A}$. Die restlichen Spalten erhält man, indem man die jeweils zuvor berechnete Spalte von rechts an $\widetilde{A}$ multipliziert.

Matrix invertierbar. Außerdem gilt folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
A \cdot \mathcal{C}(A,b) &= A \cdot \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b & A^nb \end{pmatrix} \\
&\overset{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b & (-a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_0)\, b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b & (-a_{n-1}A^{n-1}\, b - \ldots - a_0\, b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{C}(A,b) \cdot \widetilde{A}^T
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Invertierbarkeit der Kontrollierbarkeitsmatrix folgt damit:

$$\widetilde{A}^T = \mathcal{C}(A,b)^{-1} \cdot A \cdot \mathcal{C}(A,b) \tag{3.4}$$

Weil, wie bereits verwendet, ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom besitzen, also insbesondere $\widetilde{A}$ das selbe wie A, lässt sich obige Umformung analog auf $\widetilde{A} \cdot \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ anwenden. Das impliziert

$$\widetilde{A} \cdot \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) = \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \cdot \widetilde{A}^T \ . \tag{3.5}$$

Wegen $\mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) = S^{-1} \cdot \mathcal{C}(A,b)$ ist insbesondere auch die Invertierbarkeit von $\mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ klar. Damit folgt direkt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \cdot \widetilde{A}^T \cdot \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b})^{-1} \\
&\overset{(3.4)}{=} \underbrace{\mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \cdot \mathcal{C}(A,b)^{-1}}_{=: S^{-1}} \cdot A \cdot \underbrace{\mathcal{C}(A,b) \cdot \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b})^{-1}}_{=: S}
\end{aligned}$$

Aus

$$\mathcal{C}(A,b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b \text{ und } \mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \widetilde{b}$$

folgt, dass

$$\underbrace{\mathcal{C}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \cdot \mathcal{C}(A,b)^{-1}}_{= S^{-1}} \cdot b = \widetilde{b} \ . \tag{3.6}$$

Damit ist offensichtlich S die gesuchte Transformationsmatrix. □

Nachdem ihre Existenz nun gezeigt wurde, soll die anschließende Bemerkung die Transformationsmatrix beziehungsweise ihre Inverse genauer charakterisieren.

Bemerkung 3.3. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 3.2. Dann gilt:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-1} \end{pmatrix},$$

wobei t_1^T die letzte Zeile der Inversen der Kontrollierbarkeitsmatrix $\mathcal{C}(A,b)^{-1}$ darstellt.

Beweis. Wir bezeichnen zunächst die Zeilenvektoren von S^{-1} mit $t_i^T = \begin{pmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{in} \end{pmatrix}$ für $i = 1, \ldots, n$. Also:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt, dass

$$S^{-1}A = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} t_1^T A \\ t_2^T A \\ \vdots \\ t_n^T A \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

sowie

$$\widetilde{A}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \\ (-a_0\, t_{11} - a_1\, t_{21} - \ldots - a_{n-1}\, t_{n1}) & (-a_0\, t_{12} - a_1\, t_{22} - \ldots - a_{n-1}\, t_{n2}) & \cdots & (-a_0\, t_{1n} - a_1\, t_{2n} - \ldots - a_{n-1}\, t_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_2^T \\ t_3^T \\ \vdots \\ t_n^T \\ -a_0\, t_1^T - a_1\, t_2^T - \ldots - a_{n-1}\, t_n^T \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

Wegen (3.3) gilt die Beziehung

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS \iff \widetilde{A}S^{-1} = S^{-1}A\ .$$

Und zusammen mit (3.8) und (3.9) folgt daraus

$$\begin{pmatrix} t_2^T \\ t_3^T \\ \vdots \\ t_n^T \\ -a_0\, t_1^T - a_1\, t_2^T - \ldots - a_{n-1}\, t_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^T\, A \\ t_2^T\, A \\ \vdots \\ \vdots \\ t_n^T\, A \end{pmatrix} .$$

Aus den ersten $n-1$ Zeilen erhält man:

$$\begin{aligned} t_2^T &= t_1^T\, A \\ t_3^T &= t_2^T\, A = t_1^T\, A^2 \\ &\vdots \\ t_n^T &= t_{n-1}^T\, A = t_1^T\, A^{n-1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Eingesetzt in (3.7) erhält man damit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_1^T\, A \\ t_1^T\, A^2 \\ \vdots \\ t_1^T\, A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass t_1^T die letzte Zeile der inversen Beobachtbarkeitsmatrix darstellt. Dazu verwendet man die zweite Beziehung aus (3.3), aus der direkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S^{-1}\, b = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} t_1^T\, b \\ t_2^T\, b \\ \vdots \\ t_n^T\, b \end{pmatrix}$$

folgt. Daraus erhält man zeilenweise und unter Verwendung von (3.10) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} t_1^T\, b &= 0 \\ t_1^T\, A\, b &= 0 \\ &\vdots \\ t_1^T\, A^{n-2}\, b &= 0 \\ t_1^T\, A^{n-1}\, b &= 1 \end{aligned}$$

Dazu sind folgende Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned} & t_1^T \cdot \begin{pmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff\ & t_1^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\mathcal{C}\,(A, b))^{-1} \end{aligned}$$

Daraus folgt direkt die Behauptung. □

3.3 Reglerentwurf durch Polvorgabe

Folgendes orientiert sich insbesondere an [3], [5] und [17].
Wie bereits in Kapitel 3.1 deutlich geworden ist, ist das Ziel der Zustandsrückführung, den Regler K so zu entwerfen, dass das System mit Zustandsrückführung die gewünschte Dynamik erhält. Ein Entwurfsverfahren ist die Methode der sogenannten *Polvorgabe*.
Der Abschnitt zur Stabilität 2.1 hat gezeigt, dass Eigenwerte eine große Bedeutung für die Dynamik haben. Daraus resultiert der Grundgedanke der Polvorgabe: K wird so gewählt, dass die Systemmatrix $(A - BK)$ des Systems, das aus der Zustandsrückführung mit K entsteht, bestimmte Eigenwerte besitzt, sodass die gewünschte Dynamik erzeugt wird. Soll das Stabilisierungsproblem gelöst werden, müssen die Eigenwerte von $(A - BK)$ gemäß Definition 3.1 und Satz 2.2 in der linken komplexen Halbebene liegen.

Das Verfahren der Polvorgabe umfasst zwei wesentliche Schritte:

1. Festlegung der Eigenwerte, die die Systemmatrix $(A-BK)$ erhalten soll. Dazu werden die Eigenwerte des ungeregelten Systems (d.h. der Matrix A) an eine beliebige Position „verschoben“, sodass die gewünschte Dynamik resultiert.

2. Berechnung der Rückführungsmatrix K so, dass $(A-BK)$ die in Schritt 1 festgelegten Eigenwerte erhält.

Dabei ist es notwendig, sich die Frage zu stellen, ob beziehungsweise wann es überhaupt möglich ist, die Eigenwerte von $(A - BK)$ vollkommen beliebig festzulegen. Eine wichtige Erkenntnis dazu liefert der folgende Satz. Der Beweis des Satzes liefert insbesondere bereits eine Konstruktionsbeschreibung für die gesuchte Matrix K.

Satz 3.4 (Satz von der Polverschiebbarkeit)**.** Wenn (A, B) vollständig kontrollierbar ist, können die Eigenwerte λ_i mit $i = 1, \ldots, n$ des zugehörigen Kontrollsystems mit Zustandsrückführung beliebig festgelegt werden.

Eine Einschränkung, die dabei erwähnt sei, ist die, dass die festgelegten Eigenwerte in komplex konjugierten Paaren auftreten müssen.[19] Zudem gilt in Satz 3.4 sogar die Äquivalenz der beiden Aussagen. Die hier formulierte Implikation, ist jedoch die für die Konstruktion benötigte.

Beweis von Satz 3.4. Vorab ist zu bemerken: Die Eigenwerte von $(A - BK)$ beliebig festlegen zu können, ist gleichbedeutend damit, dass das charakteristische Polynom χ_{A-BK} von $(A - BK)$ durch geeignete Wahl von K jedes beliebige Polynom der Form $z^n + p_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + p_1\, z + p_0$ mit $p_0, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$ annehmen kann.

Sei zunächst $B = b \in \mathbb{R}^n$ und (A, b) kontrollierbar. Weiter sei S die Transformationsmatrix in Regelungsnormalform (3.3).

[19] Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer reellen Matrix (Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$) treten immer in komplex konjugierten Paaren auf. Andernfalls hätte K nicht ausschließlich reelle Einträge.

Sei außerdem $\chi(z) = z^n + p_{n-1}\,z^{n-1} + \ldots + p_1\,z + p_0$ das gewünschte charakteristische Polynom. Dann setzte:

$$\widetilde{K} := \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Damit gilt für das transformierte System:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} - \widetilde{b}\widetilde{K} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diese Matrix besitzt wieder Regelungsnormalform, weshalb nach Lemma 3.2 das zugehörige charakteristische Polynom gegeben ist durch

$$\chi_{\widetilde{A}-\widetilde{b}\widetilde{K}}(z) = z^n + p_{n-1}\,z^{n-1} + \ldots + p_1\,z + p_0\ .$$

Mit $K := \widetilde{K}S^{-1}$ ergibt sich:

$$S(\widetilde{A} - \widetilde{b}\widetilde{K})S^{-1} = S\widetilde{A}S^{-1} - S\,\widetilde{b}\,\widetilde{K}S^{-1} = A - bK$$

Und weil ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom besitzen, also

$$\chi_{\widetilde{A}-\widetilde{b}\widetilde{K}} = \chi_{A-bK}\ ,$$

ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt.

Sei nun $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit (A, B) kontrollierbar.
Die Idee für den Beweis des Satzes im Mehrgrößenfall besteht darin, das System auf ein Eingrößensystem zurückzuführen.
Dazu wird zunächst folgende Behauptung aufgestellt:

> Das Paar (A, B) ist kontrollierbar und es sei $v \in \mathbb{R}^m$, sodass $\overline{b} := Bv \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.[20] Dann existiert eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass $\dot{x}(t) = (A - BF)\,x(t) + \overline{b}\,\overline{u}(t)$ kontrollierbar mit eindimensionaler Kontrolle $\overline{u}$ ist.

[20] Ein solches v existiert, weil ansonsten $B = 0$ gelten würde. Damit wäre aber die Kontrollierbarkeitsmatrix von (A, B) die Nullmatrix. Das würde einen Widerspruch zur vorausgesetzten Kontrollierbarkeit des Systems darstellen.

Geht man von der Gültigkeit dieser Behauptung aus, so gestaltet sich der restliche Beweis sehr einfach. Sei also auch hier $\chi(z) = z^n + p_{n-1}\,z^{n-1} + \ldots + p_1\,z + p_0$ das gewünschte charakteristische Polynom von $(A - BK)$.
Weil $(A - BF, \bar{b})$ ein kontrollierbares Eingrößensystem beschreibt, gibt es nach dem ersten Teil des Beweises ein K_1, sodass

$$\chi(z) = \chi_{(A-BF)-\bar{b}K_1}$$

gilt und wegen

$$A - BF - \bar{b}K_1 = A - BF - BvK_1 = A - B(F + vK_1)$$

ist mit

$$K := F + vK_1$$

die Rückführungsmatrix so definiert, dass das gewünschte charakteristische Polynom angenommen wird. Damit wäre der Satz bewiesen.

Es bleibt lediglich noch die eben aufgestellte Behauptung zu verifizieren:
Dazu sollen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren durch

$$x_{i+1} = A\,x_i + Bu_i \text{ für } i = 0, \ldots, n-1$$

mit $u_i \in \mathbb{R}^m$ rekursiv definiert werden, die neben der linearen Unabhängigkeit auch die Eigenschaft

$$\forall\, l \in \{1, \ldots, n\} : \quad A\,x_i \in V_l := \langle x_1, \ldots, x_l \rangle \text{ für } i = 1, \ldots, l-1 \tag{3.11}$$

erfüllen.
Dazu sei $x_1 := \bar{b} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Die lineare Unabhängigkeit eines einzigen Vektors, der nicht der Nullvektor ist, ist unproblematisch per Definition gegeben und für Eigenschaft (3.11) ist hier nichts zu zeigen.
Weiter seien $x_1, \ldots, x_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ schon mit den obigen Eigenschaften definiert. Dann ist x_{k+1} so zu definieren, dass auch $x_1, \ldots, x_{k+1}$ die Eigenschaften erfüllen.

1. Fall [$A\,x_k \notin V_k$]: In dem Fall genügt es $u_k := 0$ und $x_{k+1} = A\,x_k$ zu setzen. Dann sind die $x_1, \ldots, x_{k+1}$ offensichtlich linear unabhängig, weil $x_1, \ldots, x_k$ bereits linear unabhänig sind und $x_{k+1} = A\,x_k \notin V_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ nicht als Linearkombination von $x_1, \ldots, x_k$ geschrieben werden kann. Außerdem ist Eigenschaft (3.11) für $l \in \{1, \ldots, k\}$ nach Induktionsvoraussetzung unproblematisch und wegen $A\,x_k \in V_{k+1} = \langle x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \rangle = \langle x_1, \ldots, x_k, A\,x_k \rangle$ offensichtlich auch für $l = k + 1$ erfüllt.

2. Fall [$A\,x_k \in V_k$]: Dann gilt, dass V_k invariant bezüglich A ist. Denn sei $x \in V_k$ beliebig, dann lässt sich folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} A\,x &= A \cdot \sum_{l=1}^{k} \lambda_l x_l \\ &= \sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,(A\,x_l) \\ &= \lambda_1\,(A\,x_1) + \ldots + \lambda_{k-1}\,(A\,x_{k-1}) + \lambda_k\,(A\,x_k) \end{aligned}$$

Weil $A\,x_1, \ldots, A\,x_{k-1}$ wegen (3.11) und $A\,x_k$ wegen der Voraussetzung des 2. Falls in V_k enthalten sind, ist $A\,x$ als Linearkombination dieser Elemente ebenfalls in V_k enthalten.
Weil aber $im\,\mathcal{C}(A,B)$ nach Lemma 2.6 der kleinste A-invariante Unterraum ist, der $im\,B$ enthält, und $dim(V_k) = k \leq n-1 < n$ ist, kann V_k das Bild von B nicht enthalten. Das impliziert die Existenz eines $u_k \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$x_{k+1} := A\,x_k + B\,u_k$$

nicht in V_k enthalten ist. Damit sind $x_1, \ldots, x_{k+1}$ wie im 1. Fall linear unabhängig, weil x_{k+1} auch hier mit gleicher Argumentation nicht als Linearkombination der $x_1, \ldots, x_k$ geschrieben werden kann. Außerdem ist (3.11) erfüllt, da $A\,x_k \in V_k \subset V_{k+1}$.
Damit sind $x_1, \ldots, x_n$ rekursiv mit den oben genannten Eigenschaften definiert. Damit wird die gesuchte Matrix definiert als

$$-F := U \cdot X^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

mit

$$U := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ und } X := \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}\ ,$$

wobei sich $u_1, \ldots, u_{n-1}$ aus der obigen Konstruktion ergeben und $u_n := 0$ gesetzt wird. Wegen linearer Unabhängigkeit der Spaltenvektoren per Konstruktion, ist die Matrix X invertierbar, womit $-F$ wohldefiniert ist. Nach dieser Definition von $-F$ gilt außerdem:

$$-F\,x_i = u_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\ .$$

Einsetzen von u_i in die Konstruktion der x_i liefert somit

$$x_{i+1} = A\,x_i + B\,u_i = A\,x_i + B(-F\,x_i) = (A - BF)\,x_i \quad i = 1, \ldots, n-1\ .$$

Wegen $\overline{b} = x_1$ ergibt sich also :

$$\begin{aligned} & x_{i+1} = (A - BF)^i\,\overline{b} \\ \Longrightarrow \quad & X = \begin{pmatrix} \overline{b} & (A - BF)\,\overline{b} & \cdots & (A - BF)^{n-1}\,\overline{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit stellt X die Kontrollierbarkeitsmatrix von $(A - BF, \overline{b})$ dar. Diese hat wegen bereits erwähnter linearer Unabhängigkeit ihrer Spaltenvektoren vollen Rang. Daraus folgt nach Satz 2.4 die Kontrollierbarkeit von $(A - BF, \overline{b})$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Auf diesen Beweis aufbauend sollen nun entsprechende Formeln hergeleitet werden, um den Regler K eines Systems (A, B) berechnen zu können. Wir gehen dabei von einem kontrollierbaren System aus.

Polvorgabe bei Eingrößensystemen (das heißt bei Systemen mit $B = b \in \mathbb{R}^n$)

Hierbei wird zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$ der gegebenen Matrix A berechnet sowie das gewünschte charakteristische Polynom $\chi_{A-bK}(z) = z^n + p_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + p_1\, z + p_0$ der Dynamikmatrix $(A - bK)$ des Systems mit Zustandsrückführung durch Ausmultiplizieren der gewünschten Eigenwertfaktoren bestimmt.

Ist das System bereits in Regelungsnormalform gegeben, ist K, wie im Beweis zum Satz der Polverschiebbarkeit 3.4 ersichtlich wird, folgendermaßen zu wählen:

$$K := \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Ist das System nicht in Regelungsnormalform gegeben, folgt die Wahl von K ebenfalls aus dem Beweis zu Satz 3.4:

$$K := \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

Die Matrix S^{-1} ist dabei in Bemerkung 3.3 gegeben. Damit berechnet sich K zu:

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_1^T\, A \\ \vdots \\ t_1^T\, A^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (p_0 - a_0)\, t_1^T + (p_1 - a_1)\, t_1^T A + \ldots + (p_{n-1} - a_{n-1})\, t_1^T A^{n-1} \\ &= p_0\, t_1^T + p_1\, t_1^T A + \ldots + p_{n-1}\, t_1^T\, A^{n-1} - (a_0\, t_1^T + a_1\, t_1^T A + \ldots + a_{n-1}\, t_1^T\, A^{n-1}) \\ &= p_0\, t_1^T + \ldots + p_{n-1}\, t_1^T\, A^{n-1} + t_1^T \underbrace{(-a_0 - a_1\, A - \ldots - a_{n-1}\, A^{n-1})}_{\overset{(2.2)}{=} A^n} \\ &= t_1^T\, (p_0 + p_1\, A + \ldots + p_{n-1}\, A^{n-1} + A^n) \\ &= t_1^T \cdot \chi_{A-bK}(A) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dabei ist t_1^T auch nach Bemerkung 3.3 die letzte Zeile der Inversen der Kontrollierbarkeitsmatrix.

Diese Reglerformel stammt von J. Ackermann.

Polvorgabe bei Mehrgrößensystemen (das heißt mit $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$)

In diesem Fall werden vorab die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A berechnet. Würde man dann in diesem Fall nach der Konstruktion im Beweis zum Satz von der Polverschiebbarkeit vorgehen, gestaltet sich die Berechnung der Rückführungsmatrix relativ schwierig. Eine deutlich einfachere Konstruktionsbeschreibung erhält man, wenn man die Eigenwerte nicht völlig beliebig festlegt, sondern einige Bedingungen an diese stellt.

Geht man davon aus, dass die gewünschten Eigenwerte $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ von $(A - BK)$ einfach sind, so lässt sich die Rückführungsmatrix K nach der folgenden Konstruktionsvorschrift relativ einfach bestimmen:

Seien zunächst $m_1, \ldots, m_n$ m-dimensionale Parametervektoren.[21] Diese werden so gewählt, dass $v_{Ri} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind und $m_i = 0$ gilt, falls λ_{Ri} ein Eigenwert von A ist. Dabei sind v_{Ri} definiert als

$$v_{Ri} := \begin{cases} (A - \lambda_{Ri}\, I_n)^{-1}\, B\, m_i & , \lambda_{Ri} \text{ ist kein Eigenwert von } A \\ v_i & , \lambda_{Ri} \text{ ist Eigenwert von } A \end{cases} , \tag{3.14}$$

wobei v_i der zum Eigenwert gehörige Eigenvektor von A ist.
Wenn λ_{Ri} kein Eigenwert von A ist, gilt $det(\lambda_{Ri}\, I_n - A) \neq 0$. Deshalb ist $(A - \lambda_{Ri}\, I_n)$ in dem Fall invertierbar. Damit sind die v_{Ri} wohldefiniert. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind und weiter die m_i entsprechend so gewählt werden können, dass (3.14) n linear unabhängige Vektoren liefert, lässt sich die Matrix mit den v_{Ri} als Spaltenvektoren invertieren.
Damit ist

$$K := \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{Ri} & \cdots & v_{Rn} \end{pmatrix}^{-1}$$

wohldefiniert.

An dieser Stelle soll noch gezeigt werden, dass die Regelstrecke mit dieser Rückführungsmatrix K tatsächlich die gewünschten Eigenwerte annimmt. Aber aus dieser Matrixdefinition folgt insbesondere sofort:

$$m_i = K\, v_{Ri} \tag{3.15}$$

Falls $v_{Ri} = (A - \lambda_{Ri}\, I_n)^{-1}\, B\, m_i$, gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & v_{Ri} = (A - \lambda_{Ri}\, I_n)^{-1}\, B\, m_i \\ \iff \quad & (A - \lambda_{Ri}\, I_n)\, v_{Ri} = B\, m_i \\ \overset{(3.15)}{\iff} \quad & (A - \lambda_{Ri}\, I_n)\, v_{Ri} = B\, K\, v_i \\ \iff \quad & (A - BK)\, v_{Ri} = \lambda_{Ri}\, v_{Ri} \ , \end{aligned}$$

aus der sofort folgt, dass λ_{Ri} einen Eigenwert von $(A - BK)$ bildet.

[21] Wie bereits erwähnt, dürfen die gewünschten Eigenwerte weiterhin nur in komplex konjugierten Paaren auftreten. Gleiches gilt für die entsprechenden Parametervektoren, da ansonsten K nach dieser Konstruktion keine reelle Matrix darstellen könnte.

Falls $v_{Ri} = v_i$ Eigenwert von A ist, so gilt:

$$\begin{aligned} & -B \underbrace{m_i}_{=0} = 0 = \underbrace{(\lambda_{Ri} I_n - A)}_{\overset{\text{EW}}{=} 0} v_i \\ \overset{(3.15)}{\Longleftrightarrow} \quad & -B K v_i = (\lambda_{Ri} I_n - A) v_i \\ \Longleftrightarrow \quad & (A - BK) v_i = \lambda_{Ri} v_i \end{aligned}$$

Also ist λ_{Ri} auch in diesem Fall ein Eigenwert von $(A - BK)$.

Die anfangs getroffene Voraussetzung der einfachen Eigenwerte lässt sich teilweise sogar noch abmildern:
Sei nämlich λ_{Ri} ein gewünschter mehrfacher Eigenwert, den $(A - BK)$ annehmen soll. Solange nun λ_{Ri} kein Eigenwert von A ist, ändert sich nichts an der obigen Konstruktion, solange die Vielfachheit des Eigenwerts m nicht übersteigt. Die lineare Unabhängigkeit der v_{Ri} für $i = 1, \ldots, n$ wird dann gewährleistet durch entsprechende Wahl der m_i.
Ist λ_{Ri} gleichzeitig Eigenwert von A, so ergeben sich aus der obigen Konstruktion ebenfalls keine Pobleme, falls die gewünschte Vielfachheit des Eigenwerts kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit des selben Eigenwerts der Matrix A ist. So hat man nämlich keine Probleme entsprechend viele linear unabhängige Parametervektoren zu finden.[22]

Damit lässt sich also zusammenfassend feststellen, dass sich die Rückführungsmatrix im Mehrgrößenfall immer nach dieser einfacheren Konstruktionsvorschrift bestimmen lässt, solange ein mehrfacher gewünschter Eigenwert, der keinen Eigenwert von A darstellt, keine größere Vielfachheit als m hat, oder ein mehrfacher gewünschter Eigenwert, der einen Eigenwert von A darstellt, keine größere Vielfachheit hat als die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes von A.

[22] Die Anzahl der linear unabhängigen Basisvektoren des Eigenraums entspricht genau der geometrischen Vielfachheit.

4 Grundlagen der Beobachtbarkeit

Die folgenden Kapitel, die stark auf der Vorarbeit der Kapitel 2 und 3 aufbauen werden, sollen den Hauptteil der Arbeit bilden.
Im folgenden Kapitel soll auch unter Verweis auf die Seminarvortragsausführung [9] kurz auf die Grundlagen des Beobachtbarkeitsbegriffs eingegangen werden, um davon ausgehend in Kapitel 5 den sogenannten *Beobachter* einführen zu können. Dabei stellen [5] und [10] die grundlegenden Quellen des Kapitels dar.

4.1 Definition und Bedeutung

Bisher wurde von einer wesentlichen Vereinfachung der Realität ausgegangen. Nämlich dass für Stabilisierung, Zustandsrückführung etc. der gesamte Zustandsvektor des Kontrollsystems zur Verfügung steht. Tatsächlich sind in der Regel nicht alle Zustandsinformationen bekannt. Beispielsweise weil sie technisch überhaupt nicht messbar sind oder nur unter großem technischen beziehungsweise finanziellen Aufwand ermittelt werden könnten. Sprachlich wird vereinfacht gesagt, dass die entsprechenden Größen *nicht messbar* sind.
Es wird also davon ausgegangen, nur bestimmte von $x(t)$ abhängige Werte zu kennen. Diese sind durch den bereits in Kapitel 1.3 definierten *Ausgang* $y(t) = C\,x(t) \in \mathbb{R}^p$ gegeben.
Mit diesem Wissen stellt sich die Frage, ob und wie die eingeführten Verfahren trotz dieser Einschränkung durchgeführt werden können. Dabei ist es naheliegend, zunächst die Überlegung anzustellen, wann sich der Gesamtzustand $x(t)$ aus dem Ausgang $y(t)$ rekonstruieren lässt. Mit dieser Überlegung ist die Frage nach der *Beobachtbarkeit* des Kontrollsystems formuliert. Das heißt die Beobachtbarkeit ist sinngemäß dann erfüllt, wenn sich aus der Kenntnis des Ausgangs $y(t)$ (also der Kenntnis der messbaren Größen im Zeitverlauf) der Gesamtzustand $x(t)$ rekonstruieren lässt. Diese Anschauung ist aus der Definition nicht direkt ersichtlich, sondern wird erst nach gezielter Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs von Zustand und Ausgang deutlich. Diese Überlegung wird in [9] ausführlich geführt.

Definition 4.1. Das System (1.1) heißt *beobachtbar* $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$y(t, x_0, 0) = C\,exp(At)\,x_0 = 0\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow\ x_0 = 0$$

In Bezug auf Beobachtbarkeit soll das System (1.1) mit dem Matrizenpaar $(C, A) \in \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ identifiziert werden und die *Beobachtbarkeitsmatrix* sei definiert als

$$\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pn\times n}\ . \tag{4.1}$$

Außerdem sei eine Menge definiert, die in Kapitel 4.3 benötigt wird:

$$\mathcal{N} := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid C\, exp(At)\, x_0 = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}^+\} \tag{4.2}$$

stellt die Menge der Anfangszustände dar, für die der Ausgang ohne Kontrolle für alle Zeiten Null ist. Zusammen mit Definition 4.1 gilt sofort folgende Äquivalenz:

$$\text{System (1.1) ist beobachtbar} \iff \mathcal{N} = \{0\}$$

4.2 Nachweis der Beobachtbarkeit

Nachweisen lässt sich die Beobachtbarkeit mit den beiden folgenden notwendigen Kriterien, die analog zu denen der Kontrollierbarkeit von Kalman und Hautus aufgestellt wurden.[23]

Satz 4.2 (Kalman-Kriterium für Beobachtbarkeit)**.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Kontrollsystem (1.1) ist beobachtbar.

(ii) $rk\ \mathcal{O}(C, A) = n$

Satz 4.3 (Hautus-Kriterium für Beobachtbarkeit)**.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Kontrollsystem (1.1) ist beobachtbar.

(ii) $rk \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

4.3 Asymptotische Beobachtbarkeit

Eine Eigenschaft, die die Beobachtbarkeit „abschwächt“, ist die der *asymptotischen Beobachtbarkeit*. Dementsprechend ist jedes beobachtbare System insbesondere auch asymptotisch beobachtbar.

Definition 4.4. Das System (1.1) heißt *asymptotisch beobachtbar*, genau dann, wenn

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0, 0) = 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathcal{N}\ .$$

Anschaulich bedeutet das, dass alle Lösungen, für die der Ausgang ohne Kontrolle Null ergibt, auch schon gegen Null konvergieren.

[23] Die Beweise der Kriterien sind in [9] nachzulesen.

4.4 Dualität

Die folgenden beiden Sätze liefern wichtige Zusammenhänge von Beobachtbarkeit und Kontrollierbarkeit beziehungsweise von asymptotischer Beobachtbarkeit und Stabilisierbarkeit.

Satz 4.5.

$$(A, B) \text{ ist kontrollierbar} \iff (B^T, A^T) \text{ ist beobachtbar}$$

Das bedeutet, dass Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit zueinander duale Konzepte darstellen. Auf einen Beweis soll an dieser Stelle verzichtet werden.[24]

Analog verhält es sich mit der asymptotischen Beobachtbarkeit und der Stabilisierbarkeit.

Satz 4.6.

$$(A, B) \text{ ist stabilisierbar} \iff (B^T, A^T) \text{ ist asymptotisch beobachtbar}$$

Auch hier soll auf einen Beweis verzichtet werden, da dieser die Einführung der „Kalman-Zerlegung“ erfordern würde. Darauf soll im Hinblick auf den Umfang der Arbeit verzichtet werden.[25]

Diese Zusammenhänge werden in den nächsten Kapiteln ihre Bedeutung entfalten, weil sich durch diese die nachfolgend vorgestellten Verfahren größtenteils auf bereits in den vorherigen Kapiteln eingeführte Verfahren zurückführen lassen.

[24] Ein Beweistipp ist in [9] nachzulesen. Die Aussage lässt sich aber sehr leicht unter Verwendung der jeweiligen Kriterien für Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit beweisen.

[25] Nachgelesen werden kann der Beweis in [5, S. 43].

5 Zustandsrekonstruktion mit Beobachter

Wie im vorherigen Kapitel deutlich geworden ist, klärt die Beobachtbarkeit eines Kontrollsystems die Frage, ob es möglich ist, den Zustand aus dem Ausgang zu rekonstruieren. Daran soll sich nun die Frage anschließen, wie der Zustand gegebenenfalls rekonstruiert werden kann.
Den Ausgangspunkt dabei bildet die Regelstrecke (1.1). Diese sei im Folgenden stets beobachtbar, wenn nichts anderes erwähnt ist. Ein System, das nun den Zustand tatsächlich rekonstruiert, heißt *Beobachter*. Dieser arbeitet mit einem Schätzwert $\hat{x}$ des tatsächlichen Zustands x.

5.1 Rekonstruktion durch Parallelschaltung

Das folgende Kapitel beruht hauptsächlich auf [12] sowie [17] und verwendet teilweise Ausführungen aus [14].
Ein naheliegender Rekonstruktionsansatz ist die Idee der „Parallelschaltung“ eines Modells der Regelstrecke zur Regelstrecke selbst, was heißt, dass das Modell den gleichen Eingangsgrößen wie die Regelstrecke selbst unterliegt, wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

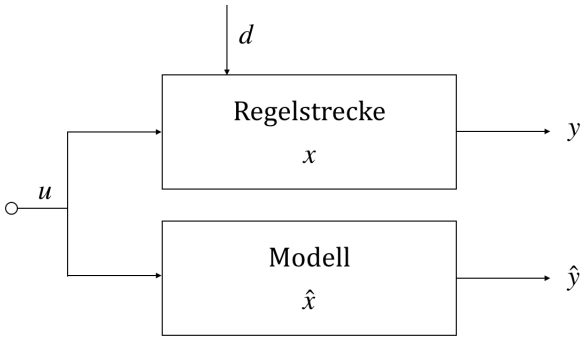

Abbildung 5.1: Parallelschaltung eines Regelstreckenmodells zur Regelstrecke [26]

Bei dieser Konstruktion sind auftretende Unterschiede zwischen tatsächlichem und Modellzustand auf zwei mögliche Ursachen zurückzuführen: auf unterschiedliche Anfangszustände oder auf Störungen d.

[26] in Anlehnung an [17, Abb. 8.2, S. 346]

Zweitere sind insgesamt ein sehr umfangreiches Problem. Darauf soll in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden, da dies weitreichendere Betrachtungen und Unterscheidungen hinsichtlich verschiedener Störungsarten erfordern würde. Es sei soviel gesagt, dass Störungen auf eine Regelstrecke nicht vorhersagbar sind und somit keine Berücksichtigung im Modell finden können. Damit kann eine Parallelschaltung von vornherein nur bei störungsfreien Systemen sinnvoll angewandt werden.
Geht man von störungsfreien Systemen aus, sind auftretende Zustandsabweichungen gemäß des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes[27] allein auf unterschiedliche Anfangszustände zurückzuführen, wie auch die folgende Differenzbetrachtung zeigt:
Betrachtet man die ungestörte Regelstrecke

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad x(0) = x_0$$

und das dazugehörige Modell

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu\,, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0\ ,$$

erhält man mit (1.2) für die Differenz der jeweiligen Lösungen

$$x(t) - \hat{x}(t) = exp(At)\,(x_0 - \hat{x}_0)\ . \tag{5.1}$$

Betrachtet man diese Differenz als Zustand einer homogenen Differentialgleichung (1.3), so folgt aus Definition 2.1 der asymptotischen Stabilität, dass die Differenz für beliebige Anfangszustände genau dann gegen Null konvergiert, wenn A asymptotisch stabil ist. Dementsprechend ist eine Parallelschaltung nur bei ungestörten, asymptotisch stabilen Systemen überhaupt möglich.

5.2 Der Luenberger-Beobachter

Um diese Einschränkungen bei der Parallelschaltung umgehen zu können, muss man sich auf die Suche nach anderen Beobachterkonzepten begeben. Ein weiterer Ansatz für den Entwurf eines Beobachters stammt von David Gilbert Luenberger. Dabei soll der Zustandsvektor nicht nur auf Grundlage der Eingangsgröße, sondern aus Eingang und Ausgang des Kontrollsystems rekonstruiert werden. Der so konstruierte Beobachter wird nach ihm als „Luenberger-Beobachter“ bezeichnet.
Die Formulierung der Idee und die Anleitung zur Konstruktion eines solchen Beobachters in diesem Kapitel soll das Zentrum der Arbeit bilden und orientiert sich unter anderem an den Ausführungen aus [3], [12] und [17].

5.2.1 Idee und Aufbau des Beobachters

Ausgangspunkt der Überlegung ist hier ebenfalls die zu betrachtende Regelstrecke (1.1). Da der Zustand $x(t)$ im Allgemeinen unbekannt ist, wird statt diesem auch hier mit dem Schätzwert $\hat{x}(t)$ gearbeitet.

[27] [5, S. 5]

Insoweit würde aber noch kein Unterschied zur Parallelschaltung bestehen. Deshalb wird dem System des Beobachters eine weitere Eingangsgröße $u_B(t)$ zugeführt. Somit erhält man für den Beobachter vorläufig folgendes System:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + u_B(t), \;\; \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

Über diese Zugangsgröße $u_B(t)$ geht zeitabhängig die Differenz zwischen dem tatsächlichen Ausgang $y(t)$ und dem Ausgang $\hat{y}(t)$ ein, der sich ergeben würde, wenn man davon ausgeht, dass der Schätzwert dem tatsächlichen Zustand entspricht. Je nach Wert dieser Differenz, soll der Schätzwert $\hat{x}(t)$ des tatsächlichen Zustands angepasst beziehungsweise (kontrolltheoretisch ausgedrückt) kontrolliert werden.
Das entspricht einer Zustandsrückführung (wie in Kapitel 3 eingeführt) auf Grundlage der gebildeten Differenz. Das heißt u_B hat gemäß (3.1) die Form

$$\begin{aligned} u_B(t) &= L\,(y(t) - \hat{y}(t)) \text{ mit } L \in \mathbb{R}^{n\times p} && (5.3)\\ &= L\,(C\,x(t) - C\,\hat{x}(t)) \\ &= L\,C\,(x(t) - \hat{x}(t))\;. && (5.4) \end{aligned}$$

Einsetzen von (5.4) in (5.2) liefert folgende Gleichung für den Modellzustand:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\,(x(t) - \hat{x}(t)) \tag{5.5}$$

Daraus ergibt sich:
Bei korrekter Schätzung (d.h. die Schätzung entspricht dem tatsächlichen Zustand) verschwindet der letzte Summand. Somit hat die zusätzliche Steuerung keinen Einfluss und das Modell verhält sich wie die Regelstrecke.
Wenn die Schätzung vom tatsächlichen Zustand abweicht, beeinflusst die zusätzliche Steuerung die Modelldynamik. Dabei ist die Wirkung abhängig von der Wahl der Rückführungsmatrix L.

Da schließlich $x(t)$ als unbekannt angenommen wird, ist die Darstellung des Beobachters mit Gleichung (5.5) wenig sinnvoll. Stattdessen soll der Beobachter nur in Abhängigkeit bekannter Größen dargestellt werden. Einsetzen von (5.3) in (5.2) liefert

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t) - L\,\hat{y}(t) \\ &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t) - LC\,\hat{x}(t) \\ &= (A - LC)\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t)\;, \end{aligned}$$

woraus sich für den Beobachter das dynamische System

$$\sum\nolimits_B : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t) \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \end{cases} \tag{5.6}$$

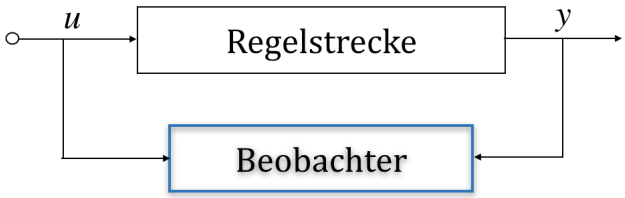

Abbildung 5.2: Konzept einer Regelstrecke mit Beobachter nach Luenberger [28]

mit den beiden Eingängen u und y und dem Ausgang $\hat{y}$ ergibt. Graphisch ist das Konzept des Luenberger-Beobachters (5.6) in Abbildung 5.2 veranschaulicht.
Die „Arbeitsweise“ des Beobachters selbst wird in Abbildung 5.3 genauer dargestellt. Dabei ist in Anlehnung an Abbildung 3.1 die „im“ Beobachter stattfindende Zustandsrückführung grün gekennzeichnet.

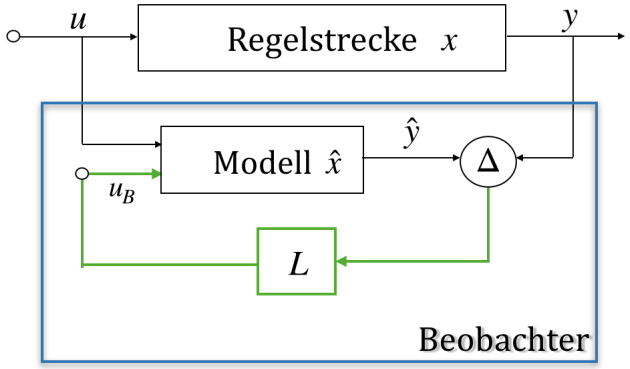

Abbildung 5.3: Struktur des Luenberger-Beobachters [29]

5.2.2 Konstruktion des Beobachters

Das Einzige bis hierhin Unbestimmte in dem Beobachtersystem (5.6) ist die Matrix L. Von der Wahl dieser hängt, wie bereits erwähnt, ab, wie das Modell beeinflusst wird, wenn Schätzwert/Modellzustand und tatsächlicher Zustand voneinander abweichen. Ziel ist es, L so zu wählen, dass der Beobachter seinen Zweck erfüllt, nämlich durch Schätzungen den tatsächlichen Zustand möglichst genau zu approximieren.

[28] in Anlehnung an [8, Abb. 4.1, S. 65]
[29] in Anlehnung an [17, Abb. 8.3, S. 348]

Man muss sich also die Frage stellen, wie L konstruiert werden muss, damit der Beobachtungsfehler im Zeitverlauf für beliebige Anfangszustände von Regelstrecke und Modell abnimmt. Dazu sei der Beobachtungsfehler definiert als

$$e(t) := x(t) - \hat{x}(t) \ .$$

Für die entsprechende Ableitung nach der Zeit erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
&\overset{(5.5)}{=} A\,x(t) + B\,u(t) - (A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\,(x(t) - \hat{x}(t))) \\
&= A\,x(t) + B\,u(t) - A\,\hat{x}(t) - B\,u(t) - LC\,(x(t) - \hat{x}(t)) \\
&= (A - LC)\,(x(t) - \hat{x}(t)) \\
&= (A - LC)\,e(t) \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

und der Anfangszustand des Fehlers ist durch $e(0) = x_0 - \hat{x}_0$ gegeben.
Aus (5.7) ist ersichtlich, dass der Beobachtungsfehler als Zustand einer homogenen Differentialgleichung (1.3) aufgefasst werden kann. Dementsprechend nimmt der Beobachtungsfehler gemäß Definition 2.1 genau dann asymptotisch ab (d.h. er konvergiert gegen Null für beliebige Anfangszustände), wenn die Systemmatrix $(A - LC)$ asymptotisch stabil ist. Das ist gemäß Satz 2.2 genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte dieser Matrix in der linken komplexen Halbebene liegen.
Daher wäre es für die Konstruktion der Matrix L von Vorteil, wenn man die Eigenwerte von $(A - LC)$ beliebig festlegen könnte. Wie man gleich sehen wird, ist das insbesondere dann möglich, wenn das System (C, A) beobachtbar ist.

Es ist zunächst zu bemerken, dass beim Transponieren einer Matrix die Eigenwerte erhalten bleiben, da für eine beliebige $n \times n$-Matrix Q folgende Umformung der Determinante gilt:[30]

$$det(\lambda\, I_n - Q^T) = det(\lambda\, I_n^T - Q^T) = det((\lambda\, I_n - Q)^T) = det(\lambda\, I_n - Q)$$

Demnach stimmen insbesondere die Eigenwerte von $(A - LC)$ und $(A - LC)^T = (A^T - C^T L^T)$ überein, wobei $(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$ die Matrix der homogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= (A - LC)^T\, z(t) \\
\dot{z}(t) &= (A^T - C^T L^T)\, z(t)
\end{aligned}$$

ist, die sich aus dem linearen Kontrollsystem

$$\dot{z}(t) = A^T\, z(t) + C^T\, u(t) \text{ mit Zustandsrückführung } u(t) = -L^T\, z(t) \qquad (5.8)$$

ergibt, in dem L^T die Rückführungsmatrix bildet. Bemerke dabei die entsprechenden Dimensionen: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $L^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

[30] unter Verwendung von [4, S. 158]

Wie in Satz 3.4 von der Polverschiebbarkeit festgestellt wurde, können die Eigenwerte von $(A - LC)^T$ und damit die von $(A - LC)$ beliebig festgelegt werden, wenn (A^T, C^T) kontrollierbar ist. Aufgrund der Dualität von Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit gemäß Satz 4.5 können diese Eigenwerte also beliebig gewählt werden, wenn (C, A) beobachtbar ist.
Im Hinblick auf die Bestimmung von L resultiert aus Kapitel 3 auch die zentrale Idee zur Bestimmung der gesuchten Matrix: Man bestimmt zunächst L^T als Rückführungsmatrix durch Polvorgabe und erhält L anschließend durch Transponieren.

Auf die explizite Berechnung des Beobachters beziehungsweise der Matrix L soll nun genauer eingegangen werden.
Dazu wird wieder zwischen Ein- und Mehrgrößensystemen in Bezug auf die Dimension des Ausgangs unterschieden. In beiden Fällen aber sei (C, A) als beobachtbar vorausgesetzt. In einem ersten Schritt werden jeweils ausgehend von den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Matrix A die gewünschten Eigenwerte $\lambda_{B1}, \ldots, \lambda_{Bn}$ des Beobachters (d.h. der Dynamikmatrix des Beobachters $(A-LC)$) festgelegt, sodass dieser die gewünschte Dynamik besitzt. Die Festlegung erfolg also so, dass $(A - LC)$ asymptotisch stabil wird, damit der Beobachtungsfehler gegen Null konvergiert. Gemäß Satz 2.2 müssen die gewünschten Eigenwerte dazu ausschließlich in der linken komplexen Halbebene liegen.

Beobachterentwurf bei Eingrößensystemen (also bei Systemen mit nur einer messbaren Größe, das heißt $p = 1$, also $C = c \in \mathbb{R}^{1\times n}$)
Nach der Berechnung des charakteristischen Polynoms der Matrix A

$$\chi_A(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0 \ ,$$

wird in dem Fall aus den vorher festgelegten gewünschten Beobachtereigenwerten das gewünschte charakteristische Polynom der Systemmatrix $(A - L\, c)$ des Beobachters

$$f(z) := z^n + f_{n-1}z^{n-1} + \ldots + f_1 z + f_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_{Bi})$$

bestimmt, wobei f_i mit $i = 1, \ldots, n-1$ die reellen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms bezeichnen. Da die gewünschten Eigenwerte nach voriger Erläuterung auch die sind, die $(A - L\, c)^T$ annehmen soll, ist mit $f(z)$ auch das gewünschte charakteristische Polynom des transponierten Systems (5.8) mit Rückführungsmatrix L^T bestimmt. Ausgehend davon soll nun L^T mit dem Verfahren der Polvorgabe aus Kapitel 3.3 berechnet werden:

Ist das Kontrollsystem in der sogenannten Beobachtungsnormalform gegeben, das heißt A und c haben die Formen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

so hat (A^T, c^T) offensichtlich Regelungsnormalform. Somit folgt mit (3.12) sofort:

$$L^T = \begin{pmatrix} f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & \cdots & f_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \; L = \begin{pmatrix} f_0 - a_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ist das System nicht in dieser Form gegeben, berechnet sich L^T als Rückführungsmatrix des transponierten Systems (A^T, c^T) mit der Formel (3.13) von Ackermann:

$$\begin{aligned} L^T &= f_0\, t_1^T + f_1\, t_1^T\, A^T + \ldots + f_{n-1}\, t_1^T\, (A^T)^{n-1} + t_1^T\, (A^T)^n \\ &\overset{f_i \in \mathbb{R}}{=} t_1^T\, f(A^T) \end{aligned}$$

Dabei ist t_1^T die letzte Zeile der inversen Kontrollierbarkeitsmatrix des transponierten Systems $\mathcal{C}\,(A^T, c^T)^{-1} = \begin{pmatrix} c^T & A^T c^T & \cdots & (A^T)^{n-1}\, c^T \end{pmatrix}^{-1}$.
Durch Transponieren der gesamten Gleichung erhält man die gesuchte Matrix:

$$\begin{aligned} L &= f_0\, t_1 + f_0\, A\, t_1 + \ldots + f_{n-1}\, A^{n-1}\, t_1 + A^n\, t_1 \\ &= f(A)\, t_1 \end{aligned}$$

Weil t_1^T die letzte Zeile von $\mathcal{C}\,(A^T, c^T)^{-1} = (\mathcal{O}\,(c, A)^T)^{-1} = (\mathcal{O}\,(c, A)^{-1})^T$ ist, ist t_1 die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}\,(c, A)^{-1}$.

Beobachterenwurf bei Mehrgrößensystemen (das heißt mit $p \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$)
Zunächst werden die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Matrix A beziehungsweise der Matrix A^T berechnet sowie die gewünschten Eigenwerte $\lambda_{B1}, \ldots, \lambda_{Bn}$ der Dynamikmatrix des Beobachters $(A - LC)$ beziehungsweise der Dynamikmatrix $(A - LC)^T = (A^T - C^T L^T)$ des transponierten Systems (5.8) festgelegt.
Analog zum Verfahren der Polvorgabe bei Mehrgrößensystemen auf Seite 24 wird auch hier von der entsprechend eingeschränkten Wahl der gewünschten Eigenwerte ausgegangen, sodass die dort vorgestellte einfachere Konstruktionsvorschrift angewendet werden kann. Dann lassen sich hier also analog p-dimensionale Paramentervektoren $p_1, \ldots, p_n$ so wählen, dass die Vektoren $v_{Bi} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind und $p_i = 0$ gilt, falls λ_{Bi} ein Eigenwert von A^T beziehungsweise A ist. Dabei sind v_{Bi} für das transponierte System als

$$v_{Bi} := \begin{cases} (A^T - \lambda_{Bi}\, I_n)^{-1}\, C^T\, p_i & , \lambda_{Bi} \text{ ist kein Eigenwert von } A \text{ bzw. } A^T \\ v_i & , \lambda_{Bi} \text{ ist Eigenwert von } A \text{ bzw. } A^T \end{cases} \in \mathbb{R}^n \;,$$

definiert, wobei v_i den entsprechenden Eigenvektor von A^T darstellt.
Bei gewünschten mehrfachen Eigenwerten sind die gleichen Einschränkungen zu beachten, die im Zuge des Verfahrens zur Polvorgabe bei Mehrgrößensystemen erläutert wurden.

Dann gilt für die Rückführungsmatrix des transponierten Systems:

$$L^T = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{B1} & \cdots & v_{Bn} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Daraus erhält man durch Transponieren die Matrix L des Beobachters:

$$\begin{aligned} L &= \left(\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{B1} & \cdots & v_{Bn} \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \\ &= \left(\begin{pmatrix} v_{B1} & \cdots & v_{Bn} \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^T \\ &= \left(\begin{pmatrix} v_{B1} & \cdots & v_{Bn} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{B1}^T \\ \vdots \\ v_{Bn}^T \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p} \end{aligned}$$

Dabei können $v_{B1}^T, \ldots, v_{Bn}^T$ direkt als

$$v_{Bi}^T := \begin{cases} p_i^T \, C \, (A - \lambda_{Bi} \, I_n)^{-1} & , \lambda_{Bi} \text{ ist kein Eigenwert von } A \text{ bzw. } A^T \\ v_i & , \lambda_{Bi} \text{ ist Eigenwert von } A \text{ bzw. } A^T \end{cases}$$

berechnet werden.

Wie genau die Beobachtereigenwerte in der linken komplexen Halbebene positioniert werden, spielt für den Beobachter insofern eine Rolle, dass dadurch ein wesentlicher Einfluss auf die Dynamik des Beobachters genommen werden kann. Je weiter links die Eigenwerte in der Halbebene positioniert werden, desto schneller klingt der Beobachtungsfehler ab.[31] Allerdings macht es in Anwendungen oft wenig Sinn, die Eigenwerte so weit links wie möglich zu wählen, da auch der Abstand der Eigenwerte von Beobachter und Regelstrecke für die Dynamik eine Rolle spielt. So werden bei größeren Abständen beispielsweise bestimmte Störungen langsamer abgebaut. Auch an dieser Stelle würde es sich lohnen, hinsichtlich der Wahl der Eigenwerte weiter in die Tiefe zu gehen. Dies kann hier allerdings nicht geleistet werden, da das unter anderem eine ausführlichere Betrachtung des Eigenwertkriteriums und eine Beschäftigung mit Störungen auf Regelstrecken erfordern würde.

5.2.3 Beispiel

Mit Hilfe dieser Formeln soll nun ein Luenberger-Beobachter für das Satelliten-Beispiel 1.1 entworfen werden.

[31] Das ist aus dem Beweis des Eigenwertkritieriums für Stabilität ersichtlich, der jedoch in dieser Arbeit nicht geführt wird.

Entwurf des Beobachters für den Satelliten als Eingrößensystem

Wir betrachten das Beispiel zunächst für den Fall, dass der Satellit lediglich einen Ausgang bestitzt. Das heißt in diesem Fall, dass lediglich x_3 (Winkelposition) als messbar angenommen wird. Bei der entsprechenden Regelstrecke

$$\sum_{S_1} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

handelt es sich somit um ein Eingrößensystem, für das nun der Beobachter entworfen werden soll.
Die Dynamik dieser Regelstrecke mit Anfangszustand $x(0) = 1 \in \mathbb{R}^4$ ist in Abbildung 5.4 für die einzelnen Vektorkoordinaten von $x(t)$ dargestellt.

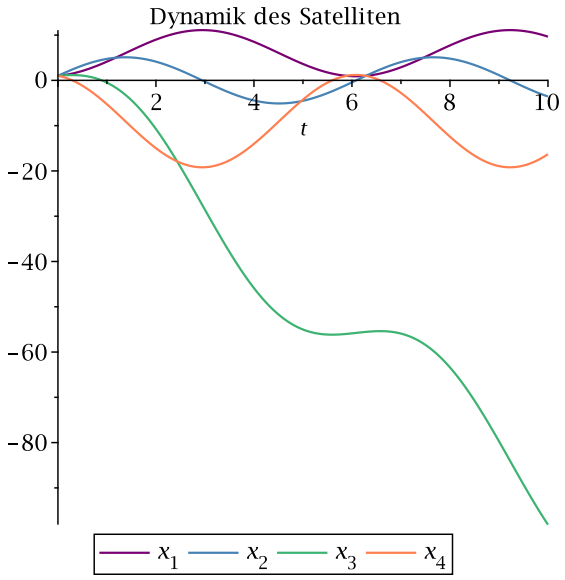

Abbildung 5.4: Zeitabhängige Darstellung der Satellitenbewegung entlang der Regelstrecke

In [9] wurde mit den Kriterien der Sätze 4.2 und 4.3 die Beobachtbarkeit von $\sum_{S_1}$ nachgewiesen. Insofern lässt sich ein Luenberger-Beobachter nach obiger Anleitung problemlos berechnen.
Durch einfache Rechnung lassen sich die Eigenwerte von A bestimmen: $\pm i$ bilden jeweils einen einfachen und 0 einen doppelten Eigenwert.

Legt man die Eigenwerte des Beobachters als jeweils doppelte Eigenwerte $\lambda_{B_{1/2}} = -2$ und $\lambda_{B_{3/4}} = -1$ fest, so erhält man das folgende charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+2)^2 \cdot (z+1)^2 \\ &= (z^2+4z+4) \cdot (z^2+2z+1) \\ &= z^4+6z^3+13z^2+12z+4 \end{aligned}$$

Die Inverse der Beobachtbarkeitsmatrix berechnet sich durch

$$\mathcal{O}(C,A)^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und liefert, dass

$$t_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Somit lässt sich die Rückführungsmatrix l folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} L =& (A^4+6A^3+13A^2+12A+4Id_4) \\ =& \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 40 & * & \cdots & * \\ 18 & \vdots & & \vdots \\ -36 & & & \\ -72 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} \\ -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhält man durch einfache Berechnung von $(A - L\,C)$ sofort die Beobachtergleichung:

$$\sum_{B_1} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - L\,C)\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t) \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{20}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & -12 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} \\ -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Die Dynamik des so definierten Beobachters ist in Abbildung 5.5 für den Anfangszustand $x(0) = 4 \in \mathbb{R}^4$ dargestellt.

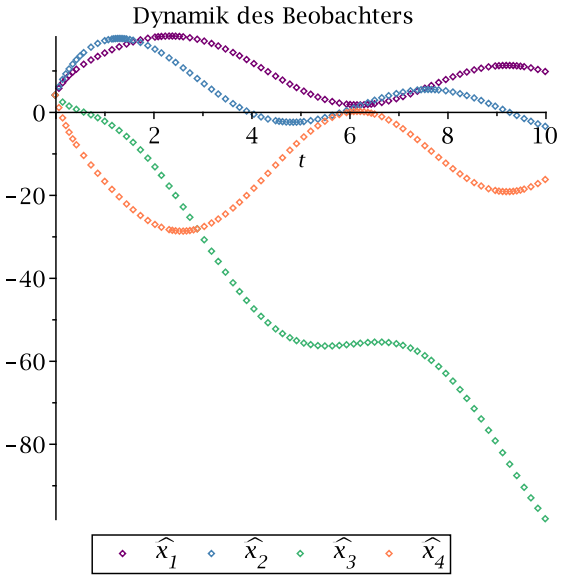

Abbildung 5.5: Zeitabhängige Darstellung der Beobachterbewegung im Eingrößensystem

Dass der Beobachter seinen Zweck erfüllt, zeigt Abbildung 5.6 auf Seite 41. In dieser lässt sich eine Annäherung des Beobachters an den Satelliten für alle vier Koordinaten erkennen. Somit wird die Bewegung des Satelliten durch den Beobachter mit der Zeit angenähert. Der Beobachter rekonstruiert also die Satellitendynamik.

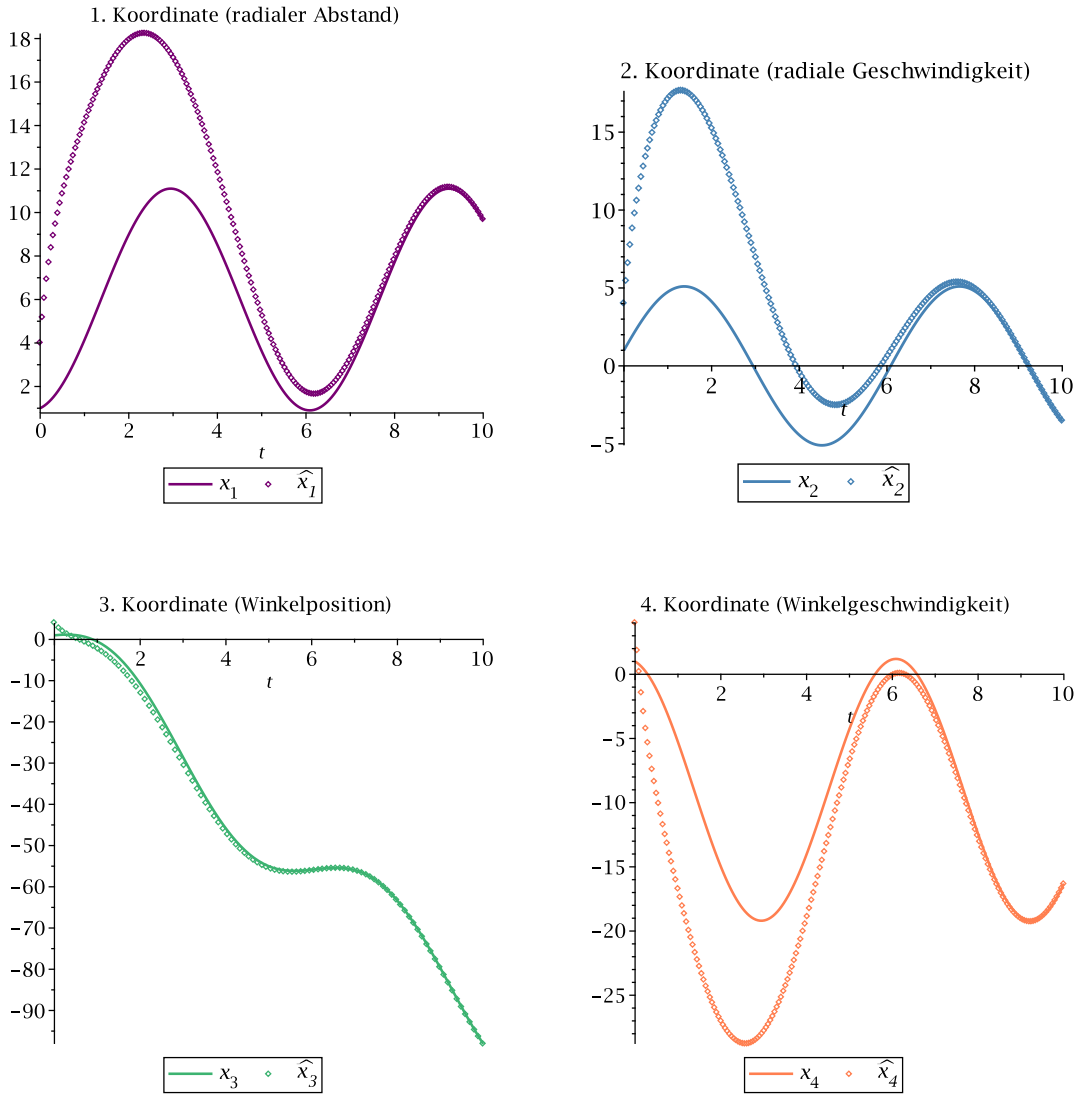

Abbildung 5.6: Dynamik des Satelliten und seines Beobachters für die einzelnen Koordinaten (Eingrößensystem)

Entwurf des Beobachters für den Satelliten als Mehrgrößensystem

Betrachtet man das Beispiel mit dem zu Beginn in Beispiel 1.1 definierten Ausgang, bei dem x_1 (radialer Abstand) und x_3 (Winkelposition) messbar sind, so ist der zugehörige Beobachter für das Mehrgrößensystem

$$\sum_{S_2} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu entwerfen. Die Dynamik ist dieselbe wie im Eingrößenfall, da ein abweichender Ausgang diese selbstverständlich nicht beeinflusst. Sie kann dementsprechend für den Anfangszustand $x(0) = 1$ wieder in Abbildung 5.4 betrachtet werden.

Die Beobachtbarkeit lässt sich ebenfalls mit den Kriterien von Kalman und Hautus leicht nachweisen, was in [9] getan wird.
Die Menge der Eigenwerte der Matrix A sind unverändert wie im Fall des Eingrößensystems durch $\{-i, 0, i\}$ gegeben. Auch die gewünschten Eigenwerte des Beobachters seien wieder als $\lambda_{B_{1/2}} = -2$ und $\lambda_{B_{3/4}} = -1$ gewählt. Damit entspricht offensichtlich keiner der gewünschten Eigenwerte einem Eigenwert der Matrix A und die Vielfachheiten übersteigen nicht die Dimension des Ausgangs. Somit lassen sich die 2-dimensionalen Parametervekoren $p_1, \ldots, p_4$ relativ beliebig festlegen. Diese seien als

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

Damit berechnen sich

$$
\begin{aligned}
v_{B1}^T &= p_1^T \cdot C \cdot (A - \lambda_{B1}\, Id_4)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{B2}^T &= p_2^T \cdot C \cdot (A - \lambda_{B2}\, Id_4)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 17 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{B3}^T &= p_3^T \cdot C \cdot (A - \lambda_{B3}\, Id_4)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 & 4 \\ -12 & 8 & 0 & -8 \\ 6 & -4 & 10 & -1 \\ -12 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{B4}^T &= p_4^T \cdot C \cdot (A - \lambda_{B4}\, Id_4)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 & 4 \\ -12 & 8 & 0 & -8 \\ 6 & -4 & 10 & -1 \\ -12 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es lässt sich nachrechnen, dass $v_{B1}^T, \ldots, v_{B4}^T$ beziehungsweise $v_{B1}, \ldots, v_{B4}$ linear unabhängig sind. Andernfalls müsste man die Parametervektoren p_i teilweise abändern und die Berechnung erneut durchführen, bis man vier linear unabhängige v_{Bi} erhält.

Mit den so berechneten Vektoren erhält man die Rückführungsmatrix als:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 2 \\ \frac{17}{2} & -\frac{5}{2} & 2 & 3 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{20} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man im letzten Schritt durch Berechnung von $(A - LC)$ die entprechende Beobachtergleichung:

$$\sum_{B_2} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t) \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ -2 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Die Dynamik dieses Beobachters wieder für den Anfangszustand $x(0) = 4 \in \mathbb{R}^4$ ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

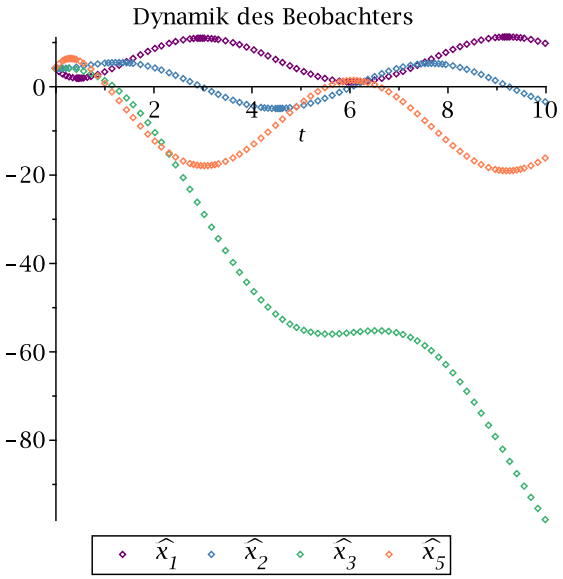

Abbildung 5.7: Zeitabhängige Darstellung der Beobachterbewegung im Mehrgrößensystem

Dass der Beobachter auch hier seinen Zweck erfüllt, zeigt entsprechend Abbildung 5.8 auf Seite 45.

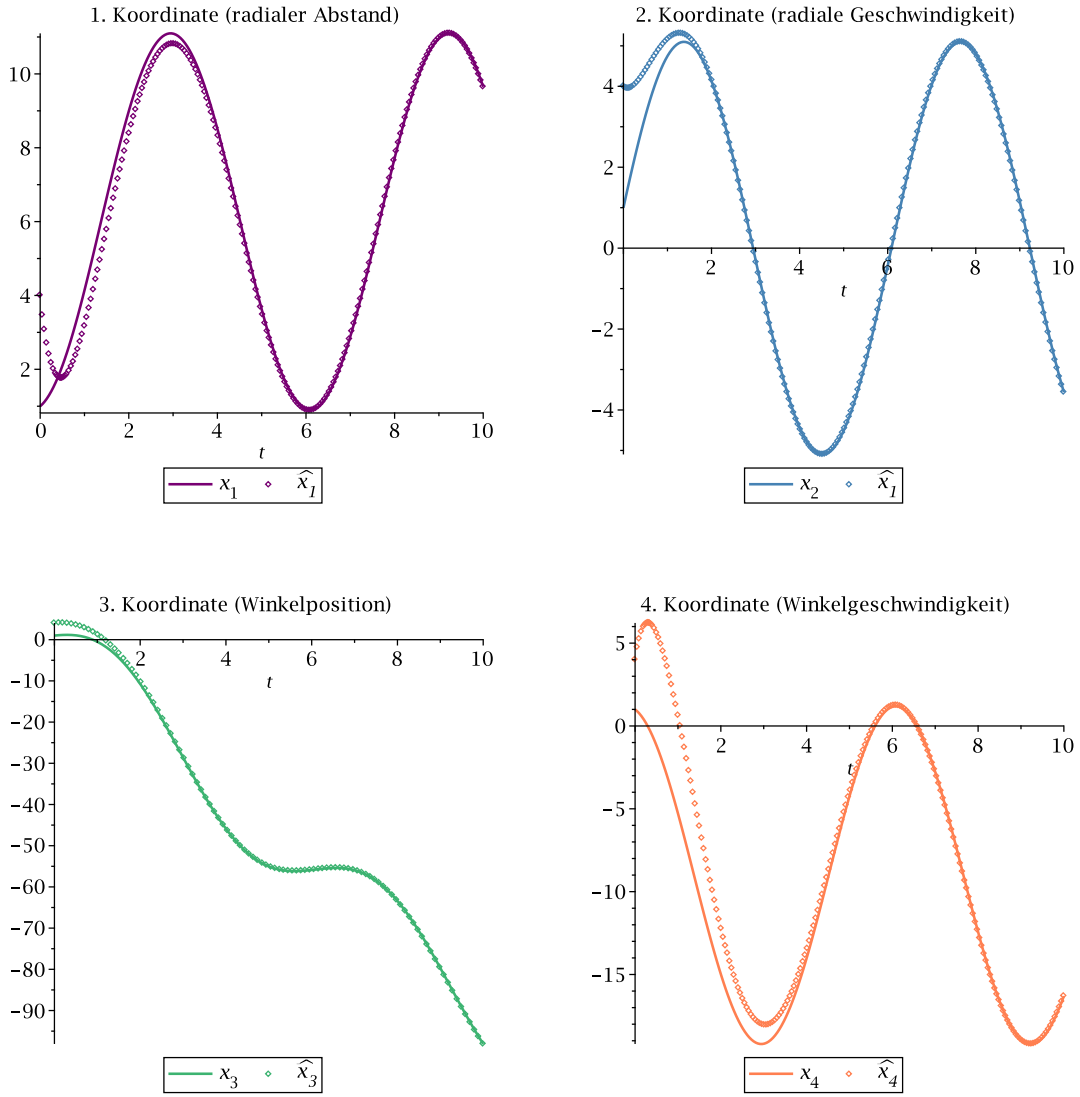

Abbildung 5.8: Dynamik des Satelliten und seines Beobachters für die einzelnen Koordinaten (Mehrgrößensystem)

Betrachtet man die Abbildungen 5.6 und 5.8 im Vergleich, so fällt Folgendes auf:
Der Beobachter in Abbildung 5.8, der ausgehend von der Regelstrecke mit mehrdimensionalem Ausgang berechnet wurde, nähert sich der Satellitenbewegung wesentlich schneller an, als der Beobachter aus Abbildung 5.6, dem nur ein eindimensionaler Ausgang der Satellitenregelstrecke zugrunde liegt. Das legt die Vermutung nahe, dass sich aus mehr messbaren Größen der Gesamtzustand schneller rekonstruieren lässt, als aus weniger oder nur einer bekannten Größe, solange man jeweils von den gleichen Beobachtereigenwerten und -anfangszuständen ausgeht. Die Allgemeingültigkeit dieser Vermutung ist anschaulich nachvollziehbar, wird in dieser Arbeit aber nicht weiter überprüft, könnte jedoch eine interessante weiterführende Betrachtung der Thematik ermöglichen.

5.3 Existenz des Luenberger-Beobachters

Verwendet wurden hier insbesondere [5], [8] und [18].
Bei der Bestimmung des Beobachters in Kapitel 5.2.2 wurde von einem beobachtbaren Kontrollsystem ausgegangen. In diesem Fall war die Existenz des Beobachters gesichert. Außerdem war dabei die Dynamik des Beobachters beliebig festlegbar (durch die Möglichkeit der beliebigen Wahl der Eigenwerte).
Es drängt sich also die Frage auf, ob die Existenz auch schon durch eine geringere Voraussetzung als die Beobachtbarkeit gefolgert werden kann. Das eindeutige „ja“, mit dem diese Frage zu beantworten ist, liefert der folgende Satz.

Satz 5.1. Gegeben sei eine Regelstrecke der Form (1.1). Dann existiert ein zugehöriger Luenberger-Beobachter genau dann, wenn die Regelstrecke asymptotisch beobachtbar ist.

Beweis. Ein Luenberger-Beobachter existert nach Konstruktion genau dann, wenn eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ existiert, sodass $(A - LC)$ asymptotisch stabil ist. Aus der Berechnungsanleitung in Kapitel 5.2.2 wird klar, dass dies äquivalent dazu ist, dass $L^T \in \mathbb{R}^{p\times n}$ existiert, sodass $(A^T - C^T L^T)$ asymptotisch stabil ist. Gemäß Definition 3.1 ist das äquivalent dazu, dass (A^T, C^T) stabilisierbar ist, was wiederum nach Satz 4.6 äquivalent zur asymptotischen Beobachtbarkeit von (C, A) ist. □

6 Zustandsrückführung mit Luenberger-Beobachter

Neben [3] orientiert sich das folgende Kapitel hauptsächlich an [17].

6.1 Idee der Zustandsrückführung mit Beobachter

In Kapitel 5 wurden durch den Beobachter die nicht messbaren Größen eines Zustands rekonstruiert. Das ist vor allem dann nötig, wenn Größen benötigt werden, die sonst gar nicht oder nur mit enormem messtechnischen Aufwand ermittelt werden könnten.
Viel häufiger aber ist das Ziel, wie in Kapitel 3.1 zur Zustandsrückführung deutlich geworden sein sollte, ein System in geeigneter Weise so zu kontrollieren, dass eine bestimmte Systemdynamik erzeugt wird. Beispielsweise wird die Zielsetzung in der Regel sein, ein System zu stabilisieren beziehungsweise die Stabiltät zu verbessern.
Dabei tritt aber, wenn man sich an die Zustandsrückführung zurückerinnert, das in Kapitel 4 zur Beobachtbarkeit aufgebrachte Problem ebenfalls auf: Es wurde nämlich bei der Einführung der Zustandsrückführung ebenfalls vernachlässigt, dass der Zustand $x(t)$ im Allgemeinen unbekannt ist. Somit lässt sich die Rückführung also im Allgemeinen nicht mit dem Zustand realisieren.
Eine Lösung dieses Problems wird dabei durch das Konstrukt des Beobachters geliefert, durch den ein Schätzwert des Zustandes ermittelt wird, mit dem sich die Rückführung realisieren lässt. Das wird in Abbildung 6.1 graphisch dargestellt.

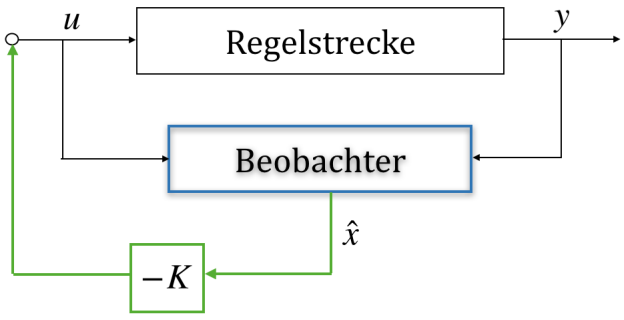

Abbildung 6.1: Zustandsrückführung mit Beobachter [32]

[32] in Anlehnung an [17, Abb. 8.1, S. 344]

Hier wird stets von der Verwendung des Luenberger-Beobachters ausgegangen. Darauf beruht die genauere Darstellung in Abbildung 6.2. Aus dieser wird ersichtlich, wie die Schätzwertermittlung des Beobachters erfolgt. Außerdem lässt sich erkennen, dass dabei zwei Zustandsrückführungen (jeweils in grün dargestellt) realisiert werden. Eine innerhalb des Beobachters und eine, die mit dem Schätzwert aus dem Beobachter erfolgt.

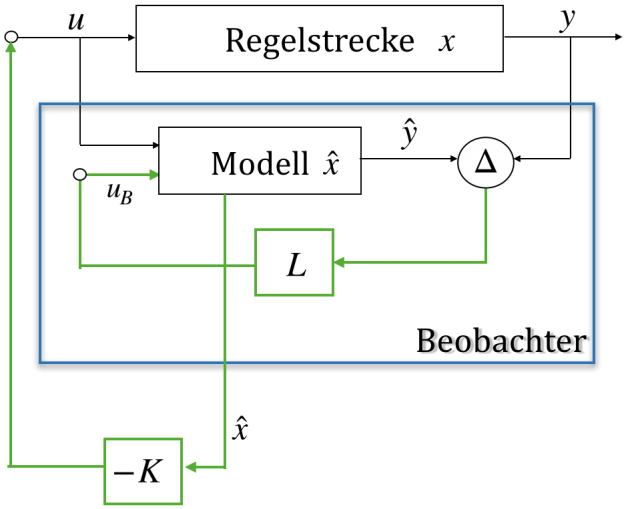

Abbildung 6.2: Zustandsrückführung mit Luenberger-Beobachter [33]

6.2 Mathematische Darstellung des Regelkreises

Die Zustandsrückführung mit Luenberger-Beobachter soll auch mathematisch in Form von Differentialgleichungen ausgedrückt werden.
Ausgangspunkt sei die Regelstrecke (1.1). Die in Kapitel 3 verwendete Zustandsrückführung (3.2) war von der Form

$$u(t) = -K\,x(t)\ .$$

Da nun der Fall betrachtet wird, dass $x(t)$ für die Rückführung nicht zur Verfügung steht, ist die Idee, von einer Zustandsrückführung der Form

$$u(t) = -K\,\hat{x}(t) \text{ mit } K \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{6.1}$$

auf Grundlage des Schätzwerts des Zustandes auszugehen. Dabei ist $\hat{x}(t)$ als Zustand des Luenberger-Beobachters (5.6) anzusehen. Das heißt, dass sich $\hat{x}(t)$ als Zustand der Differentialgleichung

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,y(t)$$

ergibt.

[33] in Anlehnung an [17, Abb. 8.5, S. 354]

Die angepasste Kontrollfunktion (6.1) muss natürlich auch in der Differentialgleichung der Regelstrecke (1.1) angewendet werden:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) - BK\,\hat{x}(t)$$

Und da wiederum die Kontrolle der Regelstrecke einen Eingang des Beobachters darstellt, ist auch die entsprechende Beobachtergleichung anzupassen:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\,\hat{x}(t) - BK\,\hat{x}(t) + L\,y(t)\\ &= (A - BK - LC)\,\hat{x}(t) + L\,y(t)\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass man durch die neue Kontrolle für den Beobachter ein Kontrollsystem mit Zustand $\hat{x}(t)$ und Eingang $y(t)$ erhält. Zudem lässt sich $u(t)$ gleichzeitig als Ausgang des Beobachters, als Zustandsrückführung der Regelstrecke mit Schätzwert, als Zustandsrückführung des Beobachterzustands und als Eingang der Regelstrecke auffassen. Insgesamt wird das dynamische System

$$\sum\nolimits_R : \begin{cases}\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK - LC)\,\hat{x}(t) + L\,y(t)\\ u(t) = -K\,\hat{x}(t)\end{cases} \tag{6.2}$$

als *Regler* der Regelstrecke mit Eingang y und Ausgang u bezeichnet.

Für die Gesamtheit des *Regelkreises* aus Regelstrecke und Beobachter gelten somit die Gleichungen

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) - BK\,\hat{x}(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - BK - LC)\,\hat{x}(t) + L\,y(t)\\ &= (A - BK - LC)\,\hat{x}(t) + LC\,x(t)\ .\end{aligned}$$

Oder zusammengefasst als autonome Differentialgleichung der Dimension $2n$:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & -BK\\ LC & A - LC - BK\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Diese Differentialgleichung nicht in Abhängigkeit des Schätzwerts, sondern des Schätzfehlers erhält man durch die Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & 0\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & 0\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix}$$

mit selbstinverser Transformationsmatrix.

Mit dieser Transformation erhält man aus (6.3):

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

Somit ist der gesamte Regelkreis bestimmt durch

$$\overline{\sum}: \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ e(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 - \hat{x}_0 \end{pmatrix} \\ y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6.4}$$

Diese Darstellung des Regelkreises liefert eine wichtige Erkenntnis für die Konstruktion von Zustandsrückführungen mit Beobachter, wenn man bemerkt, dass $(A-BK)$ die Systemmatrix der Rückführung ohne Berücksichtigung des Beobachters und $(A-LC)$ die Systemmatrix des Beobachters bildet.
Denn die Blockmatrixstruktur der Systemmatrix des Regelkreises lieftert:[34]

$$det \begin{pmatrix} z\,I_n - (A-BK) & BK \\ 0 & z\,I_n - (A-LC) \end{pmatrix} = det(z\,I_n - (A-BK)) \cdot det(z\,I_n - (A-LC))$$

Die Folgerung, die man aus diesen beiden wichtigen Feststellungen gewinnt, wird im sogenannten Separationstheorem formuliert.

Satz 6.1 (Separationstheorem)**.** Die Eigenwerte der Systemmatrix des Regelkreises $\overline{\sum}$ entsprechen der Gesamtheit der Eigenwerte des Beobachters und der Zustandsrückführung ohne Beobachter.

Die Bedeutung des Theorems liegt insbesondere darin, dass es die getrennte Konstruktion von Rückführung und Beobachter legitimiert. Die Bedeutung dieses Theorems ließe sich noch deutlich ausführlicher ausarbeiten oder in einem Beispiel darstellen, was der Umfang der Arbeit jedoch nicht zulässt.

[34] unter Verwendung eines Satzes zur Determinantenberechnung von Blockmatrizen der linearen Algebra [4, S. 163]

7 Fazit

Gerade in Kapitel 6 zeigt sich die in der Einleitung erwähnte „theoretische Faszination“ der Thematik. Der Luenberger-Beobachter findet seine Anwendung, indem er in ein Regelkreiskonstrukt aus Regelstrecke mit Zustandsrückführung eingepasst wird, während sein Zustand selbst wiederum auf einer eigenen Rückführung beruht. Ziel seiner Anwendung ist dabei das Erreichen bestimmter Stabilitätseigenschaften des gesamten Regelkreises. In Bezug darauf haben insbesondere die letzten Kapitel gezeigt, wie die grundlegenden Konzepte der Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit im Hinblick auf dieses Ziel im Regelkreis ineinandergreifen und zusammenwirken. Zu bemerken ist allerdings, dass hier nur ein Ausschnitt der Theorie des Beobachterentwurfs und der Anwendung von Beobachtern dargestellt werden konnte. Die Theorie kann noch stark erweitert werden. Im Zuge dessen wurde auch im Laufe dieser Ausführung an der ein oder anderen Stelle auf lohnenswerte, tiefgreifendere Untersuchungsmöglichkeiten der Thematik hingewiesen. Zum Beispiel in Bezug auf Störungen einer Regelstrecke, Unterschiede hinsichtlich einer Modifikation der Beobachtereigenwerte oder weitreichendere Anwendungen. Die Beobachtertheorie bietet damit noch viele weitere interessante Ansatzpunkte für theoretische Untersuchungen und praktische Anwendugen.

> „This theoretical richness has made the observer an attractive area of research.“
> [35]

[35] D.G. Luenberger in [13, S. 596]

Anhang

Maple-Quelltext von Beispiel 5.2.3 (Eingrößensystem)[36]

```
> restart;

> ab1:=x1(0)=1, x2(0)=1, x3(0)=1, x4(0)=1;

> u1(t):= 0;
> u2(t):= 0;

> sat1:= diff(x1(t),t)=x2(t), diff(x2(t),t)=3*x1(t)+2*x4(t)+u1(t),
    diff(x3(t),t)=x4(t), diff(x4(t),t)=-2*x2(t)+u2(t);

> lsg:= dsolve({sat1,ab1});

> x1t:=rhs(lsg[1]); x2t:=rhs(lsg[2]); x3t:=rhs(lsg[3]); x4t:=rhs(
   lsg[4]);

> plot([x1t, x2t, x3t, x4t], t=0..10, color=[purple, "SteelBlue",
   "MediumSeaGreen", "Coral"], legend=[x[1], x[2], x[3], x[4]],
   title="Dynamik des Satelliten");

> y(t):=x3t;

> beo1:= diff(z1(t),t)=z2(t)+(20/3)*z3(t)+0-(20/3)*y(t), diff(z2(t
   ),t)=3*z1(t)+3*z3(t)+2*z4(t)+u1(t)-3*y(t), diff(z3(t),t)=-6*z3(
   t)+z4(t)+0+6*y(t), diff(z4(t),t)=-2*z2(t)-12*z3(t)+u2(t)+12*y(t
   );

> ab2:=z1(0)=4, z2(0)=4, z3(0)=4, z4(0)=4;

> lsgb:=dsolve({beo1,ab2});

> z1t:=rhs(lsgb[1]); z2t:=rhs(lsgb[2]); z3t:=rhs(lsgb[3]); z4t:=
   rhs(lsgb[4]);
```

[36] Es ist in Bezug auf den Quelltext darauf hinzuweisen, dass aus Gründen der Vereinfachung der Eingabe in Maple statt $\hat{x}$ für den Beobachter stets die Variable z benutzt wurde.

```
> plot([z1t, z2t, z3t, z4t], t=0..10, color=[purple, "SteelBlue",
  "MediumSeaGreen", "Coral"], style=point, thickness=1, numpoints
  =70, legend=[`#mover(mi("x__1"),mo("&circ;"))`,`#mover(mi("x__2
  "),mo("&circ;"))`,`#mover(mi("x__3"),mo("&circ;"))`,`#mover(mi
  ("x__4"),mo("&circ;"))`], title="Dynamik des Beobachters");

> plot([x1t, z1t], t=0..10, color=[purple, purple], style=[line,
  point], thickness=[2, 1], numpoints=200, legend=[x[1] , `#mover
  (mi("x__1"),mo("&circ;"))` ], title="1. Koordinate (radialer
  Abstand)");

> plot([x2t, z2t], t=0..10, color=["SteelBlue", "SteelBlue"],
  style=[line, point], thickness=[2,1], numpoints=200, legend=[x
  [2], `#mover(mi("x__2"),mo("&circ;"))`], title="2. Koordinate (
  radiale Geschwindigkeit)");

> plot([x3t,z3t], t=0..10, color=["MediumSeaGreen", "
  MediumSeaGreen"], style=[line, point], thickness=[2,1],
  numpoints=100, legend=[x[3], `#mover(mi("x__3"),mo("&circ;"))
  `], title="3. Koordinate (Winkelposition)");

> plot([x4t, z4t], t=-0..10, color=["Coral", "Coral"], style=[line
  , point], thickness=[2,1], numpoints=200, legend=[x[4], `#mover
  (mi("x__4"),mo("&circ;"))`], title="4. Koordinate (
  Winkelgeschwindigkeit)");
```

Maple-Quelltext von Beispiel 5.2.3 (Mehrgrößensystem)[37]

```
> restart;

> ab1:=x1(0)=1, x2(0)=1, x3(0)=1, x4(0)=1;

> u1(t):=0; u2(t):=0;

> sat2:= diff(x1(t),t)=x2(t), diff(x2(t),t)=3*x1(t)+2*x4(t)+u1(t),
    diff(x3(t),t)=x4(t), diff(x4(t),t)=-2*x2(t)+u2(t);

> lsg:=dsolve({sat2,ab1});
```

[37] Auch in diesem Fall wurde für die Eingabe z statt $\hat{x}$ verwendet.

```
> x1t:=rhs(lsg[1]); x2t:=rhs(lsg[2]); x3t:=rhs(lsg[3]); x4t:=rhs(
  lsg[4]);

> plot([x1t, x2t, x3t, x4t], t=0..10, color=[purple, "SteelBlue",
  "MediumSeaGreen", "Coral"], legend=[x[1], x[2], x[3], x[4]],
  title="Dynamik des Satelliten");

> y1(t):=x1t; y2(t):=x3t;

> ab2:= z1(0)=4, z2(0)=4, z3(0)=4, z4(0)=4;

> beo2:= diff(z1(t),t)=-3*z1(t)+z2(t)-2*z3(t)+0+3*y1(t)+2*y2(t),
  diff(z2(t),t)=2*z1(t)-6*z3(t)+2*z4(t)+u1(t)+y1(t)+6*y2(t), diff
  (z3(t),t)=2*z1(t)-3*z3(t)+z4(t)+0-2*y1(t)+3*y2(t), diff(z4(t),t
  )=6*z1(t)-2*z2(t)+2*z3(t)+u2(t)-6*y1(t)-2*y2(t);

> lsgb:=dsolve({beo2,ab2});

> z1t:=rhs(lsgb[1]); z2t:=rhs(lsgb[2]); z3t:=rhs(lsgb[3]); z4t:=
  rhs(lsgb[4]);

> plot([z1t, z2t, z3t, z4t], t=0..10, color=[purple, "SteelBlue",
  "MediumSeaGreen", "Coral"], style=point, thickness=1,
  numpoints=70, legend=[`#mover(mi("x__1"),mo("&circ;"))`,`#mover
  (mi("x__2"),mo("&circ;"))`,`#mover(mi("x__3"),mo("&circ;"))`,`#
  mover(mi("x__5"),mo("&circ;"))`], title="Dynamik des
  Beobachters");

> plot([x1t, z1t], t=0..10, color=[purple, purple], style=[line,
  point], thickness=[2, 1], numpoints=200, legend=[x[1], `#mover(
  mi("x__1"),mo("&circ;"))`], title="1. Koordinate (radialer
  Abstand)");

> plot([x2t, z2t], t=0..10, color=["SteelBlue", "SteelBlue"],
  style=[line, point], thickness=[2,1], numpoints=200, legend=[x
  [2], `#mover(mi("x__1"),mo("&circ;"))`], title="2. Koordinate (
  radiale Geschwindigkeit)");

> plot([x3t,z3t], t=0..10, color=["MediumSeaGreen", "
  MediumSeaGreen"], style=[line, point], thickness=[2,1],
  numpoints=100, legend=[x[3], `#mover(mi("x__3"),mo("&circ;"))
  `], title="3. Koordinate (Winkelposition)");
```

```
> plot([x4t, z4t], t=0..10, color=["Coral", "Coral"], style=[line,
    point], thickness=[2,1], numpoints=200, legend=[x[4], `#mover(
   mi("x__4"),mo("&circ;"))`], title="4. Koordinate (
   Winkelgeschwindigkeit)");
```

Abbildungsverzeichnis

1.1 Regelstrecke 6
1.2 Satellitenmodell 7

3.1 Zustandsrückführung 12

5.1 Parallelschaltung eines Regelstreckenmodells zur Regelstrecke 30
5.2 Konzept einer Regelstrecke mit Beobachter nach Luenberger 33
5.3 Struktur des Luenberger-Beobachters 33
5.4 Dynamik des Satelliten 38
5.5 Dynamik des Beobachters (Eingrößensystem) 40
5.6 Dynamik des Satelliten und seines Beobachters für die einzelnen Koordinaten (Eingrößensystem) 41
5.7 Dynamik des Beobachters (Mehrgrößensystem) 44
5.8 Dynamik des Satelliten und seines Beobachters für die einzelnen Koordinaten (Mehrgrößensystem) 45

6.1 Zustandsrückführung mit Beobachter 47
6.2 Zustandsrückführung mit Luenberger-Beobachter 48

Literatur

[1] F. Colonius. *Kontrolltheorie*. Vorlesungsskript. Universität Augsburg, 2015.

[2] G. Fischer. *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. 18. Aufl. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer-Verlag, 2014.

[3] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12. Aufl. Berlin: VDE Verlag, 2016.

[4] H. Grauert und H.C. Grunau. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. München, Wien: Oldenbourg-Verlag, 1999.

[5] L. Grüne. *Mathematische Kontrolltheorie*. Vorlesungsskript. Universität Bayreuth, 2016.

[6] L. Grüne. *Stabiltät und Stabilisierung linearer Systeme*. Vorlesungsskript. Universität Bayreuth, 2003.

[7] L. Grüne und O. Junge. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. 2. Aufl. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer-Verlag, 2016.

[8] H.W. Knobloch und H. Kwakernaak. *Lineare Kontrolltheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 1985.

[9] L. Kreuzer und J. Schmidt. „Schriftliche Ausarbeitung zum Hauptseminarvortrag: Kontrolltheorie - Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Kontrollsysteme“. 2018.

[10] H. Logemann und E.P. Ryan. *Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control*. Springer Undergraduate Mathematics Series. London: Springer-Verlag, 2014.

[11] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 1: Grundlagen, Synthese linearer Regelungssysteme*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[12] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 2: Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelungssysteme*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[13] D. G. Luenberger. „An Introduction to Observers“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (Dez. 1971), S. 596–602.

[14] D. G. Luenberger. „Observers for Multivariable Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 11 (Apr. 1966), S. 190–197.

[15] D. G. Luenberger. „Observing the State of a Linear System“. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* 8 (Apr. 1964), S. 74–80.

[16] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. Aufl. Lehrbuch. Berlin: Springer Vieweg, 2016.

[17] J. Lunze. *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. Aufl. Lehrbuch. Berlin: Springer Vieweg, 2016.

[18] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems (2Nd Ed.)* New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Datum: _____ Unterschrift: _____