## Ergänzung nach Bemerkung 2.4: Eindeutigkeit der Lösung für lineare Differentialgleichungen

Im Buch wird die Eindeutigkeit der Lösung für allgemeine nichtlineare Gleichungen in Kapitel 3 bewiesen. In einer Vorlesung kann es aber didaktisch sinnvoll sein, die Eindeutigkeit für lineare Gleichungen bereits vorher in Kapitel 2 zu beweisen. Dies kann nach Bemerkung 2.4 mit wenig Aufwand eingefügt werden:

Nach (2.12) ist $t \mapsto \exp(A(t-t_0))x_0$ eine Lösung von $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) = x_0$. Sei nun $t \mapsto y(t)$ eine weitere solche Lösung. Dann gilt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\exp(-At)y(t)\Big) &= \left(\frac{d}{dt}\exp(-At)\right)y(t) + \exp(-At)\frac{d}{dt}y(t) \\ &= -\exp(-At)Ay(t) + \exp(-At)Ay(t) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Also ist $\exp(-At)y(t) = c$ konstant in $t$. Wegen $y(t_0) = x_0$ gilt $c = \exp(-At_0)x_0$. Zudem folgt aus Bemerkung 2.4(i) die Gleichung $\exp(At)\exp(-At) = \exp(At - At) = \exp(0) = I$ und deswegen $\exp(-At) = \exp(At)^{-1}$. Damit folgt, wiederum mit Bemerkung 2.4(i)

$$y(t) = \exp(At)c = \exp(At)\exp(-At_0)x_0 = \exp(A(t-t_0))x_0$$

und folglich die Eindeutigkeit der Lösung aus (2.12).