Ergänzungen, kleinere Korrekturen, Tippfehler usw.

Stand 20.3.2013

- Seite9ff: Zum Verständnis der Rechnungen in diesem Kapitel (aber auch später für nichtlineare Systeme) ist es sinnvoll sich zu überlegen, was mit einer Differentialgleichung passiert, wenn man eine Koordinatentransformation durchführt. Im allgemeinen Fall haben wie die Gleichung $\dot{x} = f(t,x)$. Für eine lineare Koordinatentransformationen der Form $y = Tx$, $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar, gilt $x = T^{-1}y$. Ist nun $x(t)$ Lösung der Differentialgleichung und $y(t) = Tx(t)$, so folgt
$$\dot{y} = T\dot{x} = Tf(t,x) = Tf(t,T^{-1}y).$$
Also erfüllt $y(t)$ die Differentialgleichung
$$\dot{y} = \tilde{f}(t,y) \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(t,y) = Tf(t,T^{-1}y).$$
Im Falle einer linearen Differentialgleichung mit $f(t,x) = A(t)x$ erhalten wir also
$$\dot{y} = \widetilde{A}(t)y \quad \text{mit} \quad \widetilde{A}(t) = TA(t)T^{-1}.$$
Für nichtlineare Koordinatentransformationen der Form $y = T(x)$, in denen T ein Diffeomorphismus ist (also eine differenzierbare und invertierbare Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit differenzierbarer Umkehrfunktion), gilt $x = T^{-1}(x)$ und damit
$$\dot{y} = \frac{d}{dt}T(x) = DT(x)\dot{x} = DT(x)f(t,x) = DT(T^{-1}(y))f(t,T^{-1}(y)) =: \tilde{f}(t,y).$$
Später im Buch wird öfter (versteckt in “o.B.d.A.-Annahmen”) der Spezialfall betrachtet, dass T die Verschiebung eines Punkts x^* in den Nullpunkt ist, also $T(x) = x - x^*$. Für diese gilt $T^{-1}(y) = y + x^*$ und $DT(x) \equiv \mathrm{Id}$ und damit
$$\dot{y} = f(t, y + x^*).$$
- Seite 13: Für die Abschätzung der Einträge der Reihe $1 + \|A\| + \frac{1}{2}\|A^2\| + \dots$ ist die (hier nicht explizit erwähnte) Tatsache wichtig, dass für die 2-Norm von A und die Einträge a_{ij} von A die Ungleichung $|a_{ij}| \le \|A\|$ gilt.

- Seite 16: Der letzte Summand in der Formel für $\exp(N)$ muss $\frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}$ heißen.

- Seite 21: Zum Beweis von Aussage (2) von Proposition 2.9 muss man sich überzeugen, dass sowohl die Matrix $\Phi(\cdot;t)\Phi(t,t_0)$ als auch die Matrix $\Phi(\cdot;t_0)$ das angegebene Anfangswertproblem löst. Das geht einfacher, wenn man die angegebene Anfangsbedingung ersetzt durch $\Psi(t) = \Phi(t;t_0)$. Formal muss man den Eindeutigkeitssatz Satz 3.6 zudem auf die Spalten der angegebenen Matrizen anwenden, da der Satz nicht für Matrizen formuliert ist (wenngleich er da ebenfalls gilt).

- Seite 26: Die zweite Gleichung auf dieser Seite muss lauten

$$G(t,y,y^{(1)}) = -g\sin(y).$$

- Seite 29: Die Cauchy-Folgen-Eigenschaft ist leichter zu sehen, wenn man nach der Abschätzung für $\|T(x_m) - T(x_n)\|_V$ die Folgerung

$$\|x_m - x_n\|_V \leq \|T(x_{m-1}) - T(x_{n-1}\|_V \leq \frac{k^{m-1}}{1-k}\|x_0 - T(x_0)\|_V$$

  für alle $m,n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, ergänzt und sich klar macht, dass $k^{m-1} \to 0$ gilt für $m \to \infty$.

- Seite 31: In der zweiten Zeile des Beweises von Satz 3.6 muss es t_0 statt T_0 heißen.

- Seite 36f: Ein Beispiel, das zeigt, dass die Divergenz am Rand des Existenzintervalle nicht bestimmt (also gegen $+\infty$ oder $-\infty$) sein muss, ist die Gleichung $\dot{x}(t) = \frac{1}{t^2}\sin(1/t)x(t)$ mit $D = (-\infty,0) \times \mathbb{R}$. Die Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch $x(t) = ce^{\cos(1/t)}$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ und sind damit beschränkt, oszillieren für $t \to 0$ und $t < 0$ aber immer schneller zwischen e^{-1} und e^1 und konvergieren deswegen nicht.
  Dieses Verhalten kann im Fall $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ übrigens nicht auftreten, falls f die Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt (was aber gar nicht so einfach zu beweisen ist).

- Seite 47: In Formel (4.6) muss es richtig heißen
$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha\neq 0}} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 0.$$
- Seite 95: In der Matrix in Beispiel 7.5 sind die Vorzeichen vertauscht. Es muss heißen
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$
- Seite 97: Für den Zusammenhang zwischen ω- und α-Limesmenge ist es sinnvoll, sich über die Zeitumkehr bei einer Differentialgleichung Gedanken zu machen: Wenn $x(t)$ die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ löst, so folgt aus der Kettenregel, dass $y(t) := x(-t)$ die Gleichung $\dot{y} = -f(y)$ löst, denn es gilt
$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}x(-t) = \dot{x}(-t)(-1) = -\dot{x}(-t) = -f(x(-t)) = -f(y(t)).$$
Die α-Limesmenge zum Vektorfeld f ist also die ω-Limesmenge zum Vektorfeld $-f$.
- Seite 102: Im Beweis von Proposition 7.14 muss (und kann) o.B.d.A. $t_1 > t$ angenommen werden.
- Seite 111: unten auf der Seite muss es $\varphi^t(x_0)$ statt $x(t;x_0)$ heißen (wobei die “alte” Schreibweise $x(t;x_0)$ zwar nicht falsch ist, hier aber nicht mehr verwendet werden sollte).
- Seite 117: In der Matrix $A + BF$ muss es $f_1 + g$ statt $f_1 - g$ heißen.
- Seite 143: Die Mannigfaltigkeit $W^c(x_0, y_0)$ muss formal richtig geschrieben werden als
$$W^c(x_0,y_0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \begin{cases} y_0 e^{-1/x_0} e^{1/x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \right\}$$
- Seite 146: Das Umrechnen einer Gleichung von Polarkoordinaten (r, θ) in kartesische Koordinaten (x, y) funktioniert analog zur obigen Anmerkung zu Seite 9ff, mit dem Unterschied dass die Koordinatentransformation $(x, y) =$

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ nur als Abbildung von $(0,\infty) \times [0,2\pi)$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ invertierbar ist (mit $T^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})))$. Anwendung der Kettenregel auf die Transformation und Einsetzen von (10.9) und (10.10) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin(\theta)\dot{\theta} \\ &= -r(\mu - r^2)\cos\theta - r\sin\theta = -x(\mu - x^2 - y^2) - y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos(\theta)\dot{\theta} \\ &= -r(\mu - r^2)\sin\theta + r\cos\theta = -x(\mu - x^2 - y^2) + y \end{aligned}$$

und damit gerade (10.8).

- Seite 155: Hier fehlt zwei mal eine schließende Klammer: statt $H^*(\varphi^t(B, A)$ muss es $H^*(\varphi^t(B), A)$ heißen.

- Seite 179ff: Bei den Beispielen habe ich in meiner Vorlesung an der Tafel einige Rechnungen und Formeln angegeben, die nicht im Buch enthalten sind. Diese finden sich in meinem Skript `http://num.math.uni-bayreuth.de/en/team/Gruene_Lars/lecture_notes/mod_dgl/mod_dgl_3.pdf`.