Erratum zum Beweis von Satz 9.2

Da das Gronwall-Lemma 4.1 nicht für negative β gilt (vgl. das Erratum zu Lemma 4.1) kann es in diesem Beweis nicht verwendet werden, um Ungleichung (9.2) zu folgern. Der folgende alternative Beweis verwendet ein direktes Argument.

Satz 9.2: Für eine autonome Differentialgleichung (1.3) mit Vektorfeld f, Gleichgewicht $x^* \in \mathbb{R}^d$ und Lösungen $\varphi^t(x_0)$ des zugehörigen Anfangswertproblems (3.4) gilt: Falls eine lokale quadratische Lyapunov-Funktion mit Konstanten $\gamma, c_1, c_2, c_3 > 0$ existiert, so erfüllen die Lösungen für alle Anfangswerte $x_0 \in N_\gamma$ die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x_0)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\|$$

für $\sigma = c_3/2c_2$ und $c = \sqrt{c_2/c_1}$, d.h. das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist lokal exponentiell stabil. Falls V eine globale quadratische Lyapunov-Funktion ist, so ist $x^* = 0$ global exponentiell stabil.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x^* = 0$ annehmen, da wir ansonsten das Vektorfeld $f(x-x^*)$ und die Lyapunov-Funktion $V(x - x^*)$ betrachten können.

Nach Kettenregel gilt für alle x_0 und alle t mit $V(\varphi^t(x_0)) < \gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\varphi^t(x_0)) &= DV(\varphi^t(x_0))\frac{d}{dt}\varphi^t(x_0) \\ &= DV(\varphi^t(x_0))f(\varphi^t(x_0)) \;\leq\; -c_3\|\varphi^t(x_0)\|^2, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt ausgenutzt haben, dass $\varphi^t(x_0)$ die Differentialgleichung löst.

Wegen $-\|x\|^2 \leq -V(x)/c_2$ folgt daraus für $\lambda = c_3/c_2$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}V(\varphi^t(x_0)) \leq -\lambda V(\varphi^t(x_0)). \tag{9.1}$$

Folglich ist die Abbildung $t \mapsto V(\varphi^t(x_0))$ wegen $V(x) \geq 0$ monoton fallend. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $V(x_0) < \gamma$ folgt daher $V(\varphi^t(x_0)) < \gamma$ für alle $t \geq 0$, weswegen (9.1) für alle $t \geq 0$ gilt.

Es sei nun ein $x_0 \neq 0$ mit $V(x_0) < \gamma$ gegeben. Da $x^* = 0$ ein Gleichgewicht ist, ist $\varphi^t(x_0) \neq 0$ für alle $t \geq 0$, da ansonsten wegen der Eindeutigkeit der Lösung $\varphi^t(x_0) = 0$ für alle $t \geq 0$ gälte.

Daher können wir für alle $t \geq 0$ durch $V(\varphi^t(x_0))$ teilen und aus (9.1) folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\ln(V(\varphi^t(x_0)) = \frac{\frac{d}{dt}V(\varphi^t(x_0))}{V(\varphi^t(x_0))} \leq -\lambda.$$

Integration dieser Ungleichung von 0 bis t liefert

$$\ln(V(\varphi^t(x_0)) - \ln(V(x_0)) \leq -\lambda t$$

und folglich durch Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten

$$\frac{V(\varphi^t(x_0))}{V(x_0)} = \exp\big(\ln(V(\varphi^t(x_0)) - \ln(V(x_0))\big) \leq e^{-\lambda t}$$

was äquivalent ist zu

$$V(\varphi^t(x_0)) \leq e^{-\lambda t}V(x_0). \tag{9.2}$$

Für $x_0 = 0$ gilt $V(\varphi^t(x_0)) = 0$ für alle $t \geq 0$, weswegen (9.2) für alle $x_0 \in N_\gamma$ gilt. Mit den Abschätzungen für $V(x)$ erhalten wir damit

$$\|\varphi^t(x_0)\|^2 \leq \frac{1}{c_1}e^{-\lambda t}V(x_0) \leq \frac{c_2}{c_1}e^{-\lambda t}\|x_0\|^2$$

und durch Ziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten

$$\|\varphi^t(x_0)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\|$$

für $c = \sqrt{c_2/c_1}$ und $\sigma = \lambda/2$. $\square$